MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

TATIANE ALINE RODRIGUES KAYSER

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA
2023

TATIANE ALINE RODRIGUES KAYSER

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA
2023

Ficha Catalográfica

K23p Kayser, Tatiane Aline Rodrigues.
Probabilidade geométrica: contribuições para o ensino de Matemática na Educação Básica / Tatiane Aline Rodrigues Kayser. – 2023.
68 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Santo Antônio da Patrulha/RS, 2023.
Orientador: Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior.

1. Ensino de Probabilidade 2. Geometria 3. Problemas probabilísticos 4. Problema do Macarrão I. Baltazar Junior, Rene Carlos Cardoso II. Título.

CDU 37:519.1

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

TATIANE ALINE RODRIGUES KAYSER

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Aprovada em 30/08/2023.

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Prof. Dr. Luciano Silva da Silva
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Profª. Drª. Thaisa Jacintho Müller
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)

DEDICATÓRIA

Para meu filho, Érico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande, pela oportunidade de realizar o mestrado profissionalizante em uma Universidade Pública, contribuindo na minha formação acadêmica.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas – Campus Santo Antônio da Patrulha, representado pelos profissionais que compõem o quadro docente e de funcionários, por ter como objetivo a qualidade da formação de professores que atuam na Educação Básica, vocês estão fazendo a diferença na educação.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior por compartilhar seus conhecimentos, pelas conversas, pelo incentivo e pelo suporte nessa caminhada acadêmica.

Agradeço ao Prof. Dr. Luciano Silva da Silva e a Profª. Drª. Thaisa Jacintho Muller pelas generosas contribuições para a melhoria desta pesquisa.

Agradeço a minha família: Érico, Paulinho, Mãe, Pai e Thaís, pelo amor incondicional e incentivo em tudo que me proponho a fazer. Vocês são minha rede de apoio.

Agradeço a minha irmã, Thaís Fátima Rodrigues, porque mais que incentivar, colaborou e revisou este trabalho.

Agradeço as escolas estaduais que permitiram a aplicação da pesquisa, pela confiança e auxílio. Aos estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e do terceiro ano do Ensino Médio que participaram das atividades propostas com dedicação.

As amigas da equipe da Escola Estadual de Ensino Fundamental Rodolfo Von Ihering pelo companheirismo e amizade consolidada nestes anos de trabalho.

Enfim, agradeço a todos que sempre me apoiaram e contribuíram de alguma forma para a concretização desta pesquisa.

Muito obrigada!

RESUMO

A Probabilidade é um campo da matemática que se ocupa do estudo das incertezas e tomadas de decisão, desenvolvendo modelos para estudar fenômenos aleatórios. O Problema do Macarrão se insere nessa área e instigou a realização desta pesquisa, com o tema Probabilidade Geométrica, que propõe a resolução de questões probabilísticas com espaços amostrais contínuos, através de meios geométricos. Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver uma proposta pedagógica de Probabilidade Geométrica que contribua para o Ensino de Matemática na Educação Básica. O resultando obtido foi o Produto Educacional: Probabilidade Geométrica na Sala de Aula, sendo composto por atividades que são replicáveis em distintos contextos. Os problemas discutidos, como do Macarrão e o Celular Perdido, se desdobraram em ilustrações no GeoGebra e atividades experimentais, explorando noções de aleatoriedade, experimento aleatório, espaço amostrais e eventos, incentivando a aplicação de conceitos geométricos e novas discussões sobre o Ensino de Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade. Geometria. Problemas probabilísticos. Problema do Macarrão.

ABSTRACT

Probability is a field of mathematics that deals with the study of uncertainties and decision-making, developing models to study random phenomena. The Noodle Problem is part of this area and instigated the realization of this research, with the theme Geometric Probability, which proposes the resolution of probabilistic questions with continuous sample spaces, through geometric means. Thus, the objective of this work was to develop a pedagogical proposal of Geometric Probability that contributes to the Teaching of Mathematics in Basic Education. The result obtained was the Educational Product: Geometric Probability in the Classroom, consisting of activities that are replicable in different contexts. The problems discussed, such as the Noodle and the Lost Cell Phone, unfolded in illustrations in GeoGebra and experimental activities, exploring notions of randomness, random experiment, sample space and events, encouraging the application of geometric concepts and new discussions about Teaching of Mathematics.

Keywords: Teaching of Probability. Geometry. Probabilistic problems. Noodle Problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação gráfica de segmento XY 27
Figura 2 - Representação gráfica de segmento AB 28
Figura 3 - Representação gráfica das figuras planas g e G 29
Figura 4 - Representação gráfica das figuras planas círculo e quadrado 29
Figura 5 - Representação gráfica das figuras volumétricas 30
Figura 6 - Representação gráfica de paralelepípedo e pirâmide retangular 31
Figura 7 - Representação gráfica do volume do paralelepípedo 31
Figura 8 - Representação gráfica do volume da pirâmide 32
Figura 9 - Representação gráfica do segmento para resolução do problema do macarrão 35
Figura 10 - Plano cartesiano para resolução do problema do macarrão 35
Figura 11 - Plano cartesiano para resolução do problema do macarrão 36
Figura 12 - Representação do alvo 37
Figura 13 - Representação gráfica para resolução do problema do encontro 39
Figura 14 - Representação gráfica do Problema do Paradoxo de Bertrand 41
Figura 15 - Triângulo qualquer de medidas a, b e c 44
Figura 16 - Segmentos de reta com medidas a, b e c 44
Figura 17 - Segmentos de reta com medidas a, b e c 44
Figura 18 - Semirreta intersectando o Triângulo ABC 45
Figura 19 - Triângulo ABC 45
Figura 20 - Demonstração no Triângulo ABC 46

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Ilustrações das Soluções do Paradoxo de Bertrand... 41
Quadro 2 - Dissertações pesquisadas com o tema Probabilidade Geométrica....................... 48
Quadro 3 - Etapas de uma investigação matemática.. 55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC - Base Nacional Curricular Comum

PROFMAT - Mestrado em Matemática em Rede Nacional

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 13
2. REFERENCIAL TEÓRICO 15
2.1 HISTÓRICO SOBRE A PROBABILIDADE 15
2.1.1 Probabilidade Geométrica 16
2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE 18
2.2.1 Acaso 18
2.2.2 Experimento Aleatório 20
2.2.3 Espaço Amostral 21
2.2.4 Eventos 22
2.2.5 Definição axiomática de Probabilidade 23
2.3 INTERPRETAÇÕES DE PROBABILIDADE 23
2.3.1 Probabilidade Clássica 24
2.3.2 Probabilidade Frequentista 24
2.3.3 Probabilidade Subjetiva 25
2.3.4 Probabilidade Geométrica 26
2.4 PROBABILIDADE GEOMÉTRICA - CONCEITUAÇÃO TEÓRICA 27
2.4.1 Probabilidade Geométrica utilizando medidas de comprimento 27
2.4.2 Probabilidade Geométrica utilizando medidas de área 28
2.4.3 Probabilidade Geométrica utilizando medidas de volume 30
2.5 ENSINO DE PROBABILIDADE 32
2.6 PROBLEMAS DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA 34
2.6.1 Problema do Macarrão 34
2.6.2 Problema do Atirador 37
2.6.3 Problema do Encontro 38
2.6.4 Paradoxo de Bertrand 40
2.6.5 Problema do Celular Perdido 42
2.7 DESIGUALDADE TRIANGULAR 43
3. UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA 47
4. METODOLOGIA 52
4.1. METODOLOGIA DA PESQUISA 52
4.2. PRODUTO EDUCACIONAL 54

4.2.1 Metodologia do Produto Educacional - Investigação Matemática 54
5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 57
5.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES SOBRE O PROBLEMA DO CELULAR PERDIDO E DO MACARRÃO 57
5.2 ANÁLISE DA PROPOSTA 61
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 63
REFERÊNCIAS 65

1. INTRODUÇÃO

A Probabilidade é um assunto pertinente que envolve problemas sobre incertezas e tomadas de decisões, como analisar a previsão do tempo e estudar a predisposição genética de uma doença. Dessa forma, a teoria das Probabilidades cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos e fenômenos aleatórios.

Tais acontecimentos de natureza aleatória são intrínsecos à vida e os alunos têm contato com situações antes das propostas de sistematização ocorridas nos currículos escolares. Batanero *et al.* (2004) destaca os motivos pelos quais a Probabilidade, assim como a Estatística, está incluída nos currículos escolares, entre eles a sua utilidade na vida diária, seu papel instrumental em outras disciplinas e no desenvolvimento do pensamento crítico.

Assim, segundo Gondim (2013), conduzir o processo de observação e análise da imprevisibilidade no ambiente escolar é um desafio na busca de integrar os conceitos, formas de resolução, soluções e aplicações que façam sentido para o estudante. Corroborando com Batanero *et al.* (2004), frente à importância do Ensino de Probabilidade, os professores têm dificuldades de desenvolver esse assunto, diante de conceitos iniciais contraintuitivos.

Neste contexto, inovar na abordagem da Probabilidade, propondo o trabalho com a Probabilidade Geométrica se mostra eficaz, pois corrobora com uma visão diferenciada em que a matemática se apresenta de forma intuitiva e interessante, proporcionando o desenvolvimento de conceitos probabilísticos como experimento aleatório, espaço amostral e, promovendo também, a discussão sobre a compreensão desses conceitos e suas aplicabilidades.

Dispor de situações que tratem de Probabilidade para além dos relacionados tradicionalmente, como jogos de azar através da visão clássica do ramo, por meio da Probabilidade Geométrica, proporciona envolver os diferentes conteúdos matemáticos que por vezes são trabalhados de forma fragmentada e potencializa a aprendizagem. A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) orienta que:

> novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2017, p. 530).

De acordo com Tunala (1992), a Probabilidade Geométrica utiliza elementos geométricos, como comprimentos de segmentos, áreas de figuras planas e volumes de sólidos na resolução de problemas probabilísticos, integrando a Probabilidade e a Geometria.

Associar o Ensino de Probabilidade Geométrica a uma metodologia ativa é pertinente para desenvolver a interpretação, indagação, argumentação e comunicação do aluno ativo, na definição de Moreira (2011). Assim, corroborando com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), ao conceituar que a investigação matemática propõe o envolvimento ativo do aluno e mobiliza recursos cognitivos e afetivos para alcançar o objetivo, percebe-se uma metodologia válida para promover o ensino e efetivar a aprendizagem com uma postura ativa do aluno e atuação de mediador do professor.

A partir desse pensamento, o objetivo geral deste trabalho é investigar sobre a aplicação da Probabilidade Geométrica no Ensino de Matemática na Educação Básica. Os objetivos específicos incluem analisar a contribuição da Probabilidade Geométrica no Ensino de Matemática; determinar abordagens de Probabilidade Geométrica; propor a resolução de problemas probabilísticos por meios geométricos; e elaborar um produto educacional como uma proposta de atividades sobre Probabilidade Geométrica. Assim, o problema de pesquisa elaborado pretende responder: Como a Probabilidade Geométrica pode contribuir para o Ensino de Matemática na Educação Básica?

O presente trabalho foi estruturado de forma a organizar e esclarecer as etapas da pesquisa. A seção 2 aborda o referencial teórico que fundamenta este trabalho, discorrendo sobre Probabilidade Geométrica para elucidar conceitos e abordagens, fazendo a contextualização histórica e teórica, e descrevendo os problemas abordados, como o Problema do Macarrão e o Problema do Encontro. Em seguida, a seção 3, apresenta uma revisão da literatura acerca do desenvolvimento de trabalhos relacionados à Probabilidade Geométrica. Na seção 4 são considerados os aspectos metodológicos e também a investigação matemática que é descrita como a metodologia escolhida para embasar a construção das atividades propostas no Produto Educacional. Na sequência, a análise dos resultados obtidos, na seção 5, e as considerações finais, na seção 6.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta os conteúdos relacionados à pesquisa, elucidando sobre a Probabilidade Geométrica como uma área da Teoria das Probabilidades. O aporte teórico também faz um pequeno estudo sobre conceitos de aleatoriedade e de desigualdade triangular, necessários para o desenvolvimento do Produto Educacional.

2.1 HISTÓRICO SOBRE A PROBABILIDADE

A Teoria das Probabilidades se desenvolveu pelo interesse na resolução de problemas relacionados aos jogos de azar na Idade Média e que geralmente envolviam apostas, o objetivo era antecipar os resultados dos jogos, ou melhor, obter sucesso nas apostas realizadas. Hoje, dão suporte a uma extensa área do conhecimento, que representa a ocorrência de fenômenos aleatórios através da formulação e aplicação de modelos teóricos.

Nos primórdios, matemáticos como Girolano Cardano (1501-1576) e Nicolo Tartaglia (1499-1557) eram questionados por jogadores sobre informações que favoreciam o desempenho nos jogos. É atribuído à Cardano a primeira obra sobre Probabilidade publicada com o título “O livro dos Jogos de Azar” (EVES, 2004). Nesta obra, Cardano apresenta a lei do espaço amostral, que mostrava uma nova ideia e metodologia sobre o acaso.

De acordo com Silva (2017), é possível supor que o processo aleatório tenha muitos resultados, alguns são igualmente favoráveis e outros não, constituindo assim o conjunto de todos os casos possíveis, chamado de espaço amostral. A probabilidade de obter um resultado favorável é igual à razão entre os resultados favoráveis e o total de casos. Por fim, Cardano não determinou os diferentes desenlaces em uma série de eventos.

A evolução da Probabilidade ocorre através das contribuições de outros matemáticos, tornando-a uma ferramenta utilizada cotidianamente. Fermat (1601-1665) e Pascal (1623-1662) trabalharam juntos e se dedicaram a resolver problemas envolvendo jogos. Fermat pensou em regras matemáticas que descrevessem as leis do acaso, enquanto Pascal desenvolveu a Teoria das Probabilidades, inspirando os estudos de Huygens (1629-1695).

Bernoulli (1654-1705), criou a lei dos grandes números, um dos primeiros teoremas da Teoria das Probabilidades, a partir do trabalho sobre séries. Viali (2020) explica que esse resultado é uma prova de que a frequência relativa de um evento tende a probabilidade deste evento, quando o número de repetições do experimento tende a infinito.

Bayes (1702-1761) introduziu o teorema das probabilidades condicionais, conhecido como Teorema de Bayes, segundo De Vasconcelos *et al.* (2022), que apresenta as noções de Probabilidade Subjetiva e Objetiva.

Queiroz e Coutinho (2007) indicam que a primeira apresentação axiomática de probabilidade é atribuída a Laplace (1749-1827), publicada em *Essai Philosophique sur les Probabilités,* em 1814. Neste trabalho, Laplace faz uma retomada dos estudos de seus antecessores e trata a Probabilidade como objeto matemático, definindo a Probabilidade de forma clássica, limitada pela hipótese de equiprobabilidade, destacando que:

> A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que sejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e a determinar o número de casos favoráveis ao evento do qual procuramos a probabilidade (Laplace, 1814, p. 35 *apud* Queiroz e Coutinho, 2007).

A busca por uma definição precisa de Probabilidade que fosse utilizada na matemática e aplicada no cálculo de fenômenos para além dos jogos de azar se intensificou ao longo dos séculos. A necessidade de axiomatizar a teoria da Probabilidade emergia para que demonstrasse confiança na sua utilização. Foi a partir da publicação de Kolmogorov, em 1933, que se iniciou uma nova etapa no estudo da Teoria da Probabilidade.

A Teoria da Probabilidade com viés moderno é determinada por Andrei Nicolaevich Kolmogorov (1903-1987), um influente matemático russo. Em seu trabalho, as definições de Probabilidade foram descritas com rigor e formalização matemática, associando as noções empíricas de acontecimento, probabilidade e variável aleatória com as noções de conjunto, função e integral de medida de Lebesgue (BEZERRA, 2013). Sua primeira publicação sobre estudos do cálculo de probabilidades, em 1929, chamado *General Theory of Measure and Probability Theory* foi muito importante ao Cálculo das Probabilidades, expõe a formulação de um conjunto de princípios conhecidos como a axiomática de Kolmogorov (1933).

A partir deste breve histórico, destacam-se alguns pontos importantes sobre a evolução do estudo sobre Probabilidade, observando uma sequência cronológica. Apresentando acontecimentos que influenciaram a constituição dessa ciência e, dentre essas considerações, o próximo tópico destaca a história da Probabilidade Geométrica.

2.1.1 Probabilidade Geométrica

Viana (2013) explica que o estudo inicial sobre Probabilidade Geométrica foi apresentado pelo matemático e filósofo George Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707-

1788) no livro *Essai d'Arithmétique Morale.* Nesse artigo, apresenta o problema conhecido posteriormente como "problema das agulhas de Buffon", que utiliza um método geométrico na resolução, diferentemente do clássico método combinatório (GORROOCHURN, 2016). Curiosamente, o título traduzido do livro remete a "moral aritmética", de acordo com Possani (2012), Buffon analisa situações em que o jogo é honesto, ou seja, visando que os jogadores tenham chances iguais de vencer.

No capítulo quatro de seu livro discutiu o problema das agulhas, que remetia a um jogo praticado nos salões franceses e, segundo Tunala (1992), enuncia que seja considerado uma família de retas paralelas adjacentes arbitrárias que se distanciam de a. Tendo-se lançado, ao acaso sobre o plano, uma agulha de comprimento $l\ (l \leq a)$, determinando a probabilidade de P_5 de que a agulha intercepte uma das retas.

> Além da curiosa consequência mencionada anteriormente, o problema de Buffon é de fundamental importância pelo fato de ser a primeira vez que se trata de uma questão de probabilidades em que tanto o número de casos favoráveis, igual ao número de posições diferentes da agulha em que ela corta alguma linha paralela, como o número de casos possíveis, o total de posições da agulha no plano, são infinitos. E não se aplica a definição de probabilidade como simples quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Trata-se de um novo tipo de problema, que são chamados de probabilidades contínuas ou probabilidades geométricas (SANTALÓ, 1944).

Neste problema, é determinada de forma algébrica a probabilidade de uma agulha lançada de forma aleatória em um assoalho de linhas paralelas cair com a intersecção entre a agulha e as linhas. Um fato interessante é que a partir desse problema podemos estimar o valor de π de forma experimental, considerando *l=2a,* o inverso da probabilidade de uma agulha cair sobre a linha, é igual a π.

Outro fato interessante, relatado por Viana (2013), é que a ideia do problema das agulhas de estimar o $\boldsymbol{\pi}$ deu origem ao Método de Monte Carlo, utilizado na estatística em simulações estocásticas. O Método de Monte Carlo remota a construção da bomba atômica na Segunda Guerra Mundial, onde simulações eram feitas para estudar coeficientes de difusão de nêutrons em materiais.

O Jogo de *Franc Carreau*, um popular jogo francês, foi objeto de estudo do Conde de Buffon. Ele investigou a probabilidade de jogar uma moeda aleatoriamente em um piso ladrilhado com lajotas congruentes, buscando determinar a chance de a moeda cair completamente dentro de um dos ladrilhos.

Além disso, Ritter (2017) menciona que o matemático francês Joseph François Bertrand (1822-1900) também contribuiu para o desenvolvimento da Probabilidade

Geométrica. Publicou em seu livro *Calcul des probabilitíes* um problema que ficou conhecido como Paradoxo de Bertrand. Wagner (1997) enunciou o paradoxo da seguinte forma: escolhendo ao acaso uma corda em uma circunferência, questiona-se a probabilidade de que seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. Este é um problema paradoxal, porque a cada forma utilizada para resolvê-lo, é encontrada uma resposta diferente.

O problema de Bertrand demonstrava as limitações que a Probabilidade Clássica apresentava quando o número de resultados possíveis era infinito. Ele contribuiu para a necessidade, já relatada, de uma axiomatização da Probabilidade.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

A compreensão dos conceitos abordados nesta seção, centrados em torno do acaso, espaço amostral, eventos e da definição axiomática de probabilidade, é fundamental não apenas no âmbito educacional, mas também na aplicação prática em vários contextos, tanto científicos como cotidianos. Esses conceitos instrumentalizam os alunos para a análise de situações do mundo ao seu redor, por meio da avaliação de riscos, previsibilidade e tomada de decisões.

No estudo da Probabilidade e da Probabilidade Geométrica, entender os conceitos básicos constitui parte relevante da pesquisa, pois as situações probabilísticas são caracterizadas pelo acaso e ocorrem a partir de experimentos aleatórios. Isso envolve a definição de um espaço amostral, a análise dos eventos envolvidos e sua probabilidade. Além disso, é indispensável que alunos e professores tenham a oportunidade de discutir e apreender tais conceitos, considerando diferentes aspectos dessas noções para desenvolver as habilidades probabilísticas objetivadas.

2.2.1 Acaso

Discutir sobre Probabilidade Geométrica no ensino pressupõe discorrer também sobre as noções de probabilidade e aleatoriedade. Os currículos e documentos normativos, como BNCC (2017), propõem nos objetivos e habilidades explorar os fenômenos aleatórios. Assim, conhecer o significado de termos como acaso e aleatório de forma clara auxilia na compreensão do que é um experimento aleatório.

As noções de acaso e aleatoriedade são complexas, recebendo várias interpretações durante a história, tanto das ciências como da filosofia. Nessa seção, o tema é abordado através da perspectiva de Coutinho (2001) e (2007), Batanero e Serrano (1995). Nessa pesquisa, compreende-se o acaso e aleatoriedade como sinônimos.

Coutinho (2001) faz um resgate histórico sobre os contextos em que o acaso era considerado, desde os povos mesopotâmicos e do Egito Antigo, que se conectava a ideia com intervenções divinas ou sobrenaturais. A relação do acaso com o divino implicou também no atraso do desenvolvimento de estudos sobre o tema atrelados aos jogos, porque embora o jogo fosse considerado fútil, à época, os resultados poderiam ser atribuídos a causas sobrenaturais, portanto não devendo ser calculado para não confrontar o divino.

Já no século XVI, o cálculo do acaso passa a ser utilizado nos contextos lúdicos, aplicados no uso de geradores de chance, em jogos como lançamentos de dados, moedas, cartas e rodas. Essa evolução ocorre através do desenvolvimento da análise combinatória.

No decorrer do tempo, existem várias discussões sobre o conceito de acaso, Coutinho (2001) destaca o pensamento do matemático francês do século XX, Jules Henri Poincaré (1854-1912), que racionaliza a ideia de acaso.

> É necessário que o acaso seja outra coisa que não o nome que damos à nossa ignorância, que entre os fenômenos dos quais ignoramos as causas, devemos distinguir os fenômenos fortuitos, sobre os quais o cálculo de probabilidades nos informará provisoriamente, daqueles que não são fortuitos e sobre os quais nada podemos dizer, enquantos não determinarmos as leis que o regem (POINCARÉ, 1912, *apud* COUTINHO, 2007).

Então, o acaso seria, na percepção de Poincaré, uma manifestação macroscópica de uma causa muito pequena. Um exemplo pertinente é de um cone perfeito apoiado sobre a sua ponta, que por causa do equilíbrio instável, cairá sem que possamos prever para que lado (COUTINHO, 2007). Seguindo o pensamento de Poincaré, para o exemplo do cone, existem causas regulares como sua simetria perfeita e a posição do eixo, considerada perfeitamente vertical. As causas acidentais são uma trepidação na mesa e um sopro de ar. O acaso está relacionado às causas que nos escapam, que podem ser consideradas pequenas, mas que trazem efeitos macroscópicos.

A ideia de aleatoriedade também apresenta uma evolução histórica. Batanero e Serrano (1995) destacam que na Antiguidade até a Idade Média, o aleatório estava ligado à sorte ou azar, remetendo uma falta de controle sobre a aleatoriedade.

Ayer (1974, *apud* Batanero; Serrano, 1995) ressalta que a definição relacionada aos fenômenos aleatórios depende diretamente da abordagem probabilística contemplada. Na abordagem clássica, a aleatoriedade está relacionada à equiprobabilidade, como exemplo, no lançamento de dados; ou na abordagem frequentista, em que se determina a probabilidade de um evento analisando a frequência com que ocorreu anteriormente, como por exemplo, determinar a probabilidade de uma pessoa nascer do sexo feminino observando o número de casos em razão ao total da população.

Reconhecer esses conceitos abrem caminho para a diferenciação entre fenômenos aleatórios e determinísticos, para então compreender os experimentos aleatórios que são propostos na probabilidade como meio de representar os fenômenos aleatórios, ou seja, uma forma de representar a realidade e, posteriormente, matematizando através dos modelos probabilísticos.

2.2.2 Experimento Aleatório

Experimentos são importantes nas ciências, através deles é possível inferir resultados iguais, sob variáveis idênticas, e assim agir sobre as variáveis para controlar os resultados. Entretanto, a Teoria das Probabilidades se ocupa de outro tipo de experimento, os experimentos aleatórios.

Experimentos aleatórios são aqueles em que não é possível controlar e assegurar o valor de certas variáveis. Spiegel *et al.* (2013) explica que os resultados irão variar em desempenho de um experimento para outro, mesmo que a maioria das condições seja a mesma. Lançar uma moeda é um exemplo de experimento aleatório, mesmo que controlado as variantes que implicam no lançamento, como o local, a altura em relação ao solo e a força aplicada no lançamento, não é possível determinar antecipadamente o resultado, pois ele depende do acaso.

Em outro exemplo, ancorado em Batanero e Godino (2001), podemos utilizar experimento aleatório para descrever um tipo de situação, como a previsão do tempo. Aplicam-se técnicas para coletas dos dados estatísticos para realizar a previsão, mas em determinado dia não se sabe com certeza qual será a temperatura ou se choverá, porém considerando a época do ano, alguns eventos parecem mais prováveis do que outros.

Por outro lado, existem experimentos que vão ter resultados esperados e iguais, quando expostos às mesmas variantes, esses experimentos são chamados determinísticos. Medir a temperatura da água no ponto de ebulição sempre será 100 ºC, observando as variantes como pressão atmosférica e altitude, em condições normais.

Assim, apresentar situações em que se distinguem experimentos determinísticos e aleatórios oportuniza a reflexão sobre o tema. Além de considerar que o conceito de probabilidade é formado pelos alunos, associado à compreensão do acaso e com a explicitação da experiência aleatória que originará o evento ao qual se quer estudar a probabilidade. Coutinho (2001) aponta três características para desenvolver o trabalho didático com uma experiência aleatória: fornecer um protocolo experimental para permitir a repetição dessa experiência; identificar a experiência como aleatória, ou seja, não é possível determinar o resultado *a priori*; determinar uma lista ou conjunto preciso de resultados possíveis para identificar esta experiência aleatória, ou seja, definir o espaço amostral.

2.2.3 Espaço Amostral

No estudo de Probabilidade, conhecer o espaço amostral é o ponto de partida para caracterizar e resolver um problema probabilístico. O espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório, costumeiramente representado por S ou pela letra grega **Ω**.

No ensino de probabilidades, compreender o que é espaço amostral é um pré-requisito para o estudante comparar probabilidades, porque é inerente ao problema considerar que casos favoráveis e casos não favoráveis fazem parte do mesmo conjunto de casos possíveis (HERNÁNDEZ SOLIS *et al.*, 2021).

O espaço amostral pode ser discreto ou contínuo, de acordo com a natureza de seus elementos. Um espaço amostral é discreto se ele consiste em um conjunto finito ou infinito contável de resultados. Um espaço amostral é contínuo se ele contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais (MONTGOMERY; RUNGER, 2009).

No exemplo clássico do lançamento de um dado de seis faces, em que todas as faces têm igual chance de ocorrer, o espaço amostral é conceituado como discreto, pois é definido pelo conjunto $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, um conjunto contável de possíveis resultados.

Um espaço amostral denominado contínuo pode ser exemplificado como escolher um ponto em um segmento de reta de comprimento igual à 20 cm. O espaço amostral é constituído por todos os pontos existentes neste segmento. Outro exemplo é determinar um ponto em uma circunferência de centro (0,0) e raio igual à um. O espaço amostral neste caso é representado por $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$.

Em um experimento aleatório, do qual não é possível determinar o seu resultado, um evento é um subconjunto do espaço amostral. Assim, no experimento aleatório lançar um dado de seis faces não viciado há um espaço amostral discreto representado por S={1,2,3,4,5,6} e um evento possível é $E_1 = \{números\, primos\}$ ou ainda $E_1 = \{2,3,5\}$. Enquanto, no experimento aleatório escolher um ponto ao acaso no segmento $\underline{AB}$, o espaço amostral é contínuo e definido pelo conjunto de pontos do próprio segmento, sendo que um evento possível é $E_2 = \{se\ C \in \underline{AB}/P \subset \underline{AC}\}$.

Na Probabilidade Geométrica, o espaço amostral é contínuo e determinado por inúmeros pontos, de maneira que representá-lo na forma geométrica, seja no plano cartesiano ou através de figuras geométricas, é a forma encontrada para abranger todos os eventos possíveis. Tunala (1992) define que nos modelos em apreço, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação ou ao seu limite, caso exista entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume.

Spiegel *et al.* (2013) classifica os espaços amostrais da seguinte forma:

a) Espaço amostral finito tem um número finitos de pontos, como no lançamento de um dado de 6 faces;

b) Espaço amostral infinito contável é aquele que tem tantos pontos quanto números naturais existentes;

c) Espaço amostral infinito não contável é aquele que tem tantos pontos quanto um intervalo do eixo x, como $0<x<1$.

Os espaços amostrais finitos e infinitos contáveis são considerados espaços amostrais discretos, aquele que é infinito não contável é chamado de espaço amostral não discreto.

2.2.4 Eventos

O evento é um subconjunto do espaço amostral, ou seja, um subconjunto de casos possíveis. Assim, o evento A é um subconjunto do espaço amostral S. Normalmente, os eventos são representados por letras maiúsculas.

Considerando o jogo de dados (seis faces), que é um experimento aleatório, temos como espaço amostral S= {1,2,3,4,5,6}. Supõe que em um jogo tenha que tirar um valor igual ou maior que 5, nessas circunstâncias, os resultados que trazem a vitória são {5, 6} e esse é um subconjunto desejado no espaço amostral já determinado, ou seja, é um evento favorável do experimento em questão.

Teoricamente, também se pode pensar em um evento que nunca irá ocorrer, como obter um sete em um dado comum de seis faces. Esse evento é denominado impossível (BATANERO; GODINO, 2002).

2.2.5 Definição axiomática de Probabilidade

A Teoria Matemática se desenvolve a partir de uma série de axiomas que são abstrações de certas propriedades dos fenômenos estudados.

A Teoria das Probabilidade tem três axiomas principais que foram desenvolvidos pelo matemático russo Andrei Kolmogorov (1903-1987) e fornecem a base para um sistema consistente de probabilidades:

a) Todo evento A corresponde uma probabilidade P(A), um número entre 0 e 1;
b) A probabilidade do evento certo é 1, P(E)=1;
c) A probabilidade de um evento, sendo uma união de eventos incompatíveis, é a soma das probabilidades dos eventos que o compõem.

2.3 INTERPRETAÇÕES DE PROBABILIDADE

Na Teoria das Probabilidades encontra-se conceitos de probabilidade clássica, frequentista, subjetiva e geométrica, foco da presente pesquisa. De acordo com Prates (2014), embora nas escolas a abordagem clássica se sobrepõe às demais, é importante que os estudantes vivenciem outros aspectos da Probabilidade e possam identificar nos problemas e no dia a dia os conceitos que devem ser considerados.

A Probabilidade Geométrica recorre a conceitos da probabilidade clássica, por exemplo, e as discussões que envolvem a resolução dos problemas através de experimentos e recursos que contam casos favoráveis e possíveis proporcionam a discussão em torno da probabilidade frequentista e subjetiva. Como exemplifica Wagner (1997), discorrendo sobre casos em que precisa ser estimada a probabilidade de um fato ocorrer, como quando questionado: Qual a probabilidade de um avião cair? Qual a probabilidade de um estudante que entra na faculdade se formar?

Essa probabilidade é estimada observando os casos favoráveis, quantos aviões caíram dentre os casos possíveis e número de aviões que decolaram em um período. A discussão ocorre em torno das condições dessa observação, se estão sendo tendenciosas em dado momento. Portanto, como na discussão dos problemas abordados, se fazem presentes diferentes aspectos da Teoria das Probabilidades e retomar esses conceitos amparam a discussão.

2.3.1 Probabilidade Clássica

A probabilidade clássica é simples e direta, foi proposta por Bernoulli e Laplace, sendo seu precursor o italiano Girolamo Cardano, que publicou no livro *Liber de Ludo Alea*, em 1525.

Considerando que os espaços amostrais são equiprováveis, ou seja, em determinado fenômeno aleatório, com espaço amostral finito, todo evento elementar tem a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade de ocorrer um evento A, representada por P(A), é um número que mede essa possibilidade. É dado por:

$$P(A) = \frac{número\ de\ elementos\ do\ evento\ A}{número\ de\ elementos\ do\ espaço\ amostral}$$

Essa definição não contempla os conjuntos não equiprováveis, onde um caso tem mais probabilidade de ocorrer do que outro. O exemplo de uma apólice de seguro de vida, que lista as prováveis causas de morte, não é equiprovável quando cita causas naturais, acidentes de carros e de avião, quando é sabido que as duas primeiras são mais recorrentes do que a última.

Na probabilidade também há condições gerais que são satisfeitas no cálculo, conhecidos como Axiomas de Kolmogorov, em que:

a) A probabilidade de um evento é um número entre 0 e 1. Se P(E) = 0, o evento E é impossível, não pode ocorrer. Se P(E) = 1, então E é um evento certo, tem que ocorrer.
b) Sejam E e F eventos mutuamente exclusivos, ou seja, se um deles ocorre então o outro não pode ocorrer. Logo, a probabilidade de que pelo menos um deles ocorra é igual à soma de suas probabilidades, P(E ou F) = P(E) + P(F).

2.3.2 Probabilidade Frequentista

Na abordagem frequentista, para determinar a probabilidade de um evento ocorrer, é necessário repetir o experimento aleatório anotando com que frequência o evento aparece. De acordo com Coutinho (2007, p. 61), a abordagem frequentista tem origem nos estudos de Bernoulli, na obra *Ars Conjectandi*, em 1713. A partir dela, Bernoulli discorre acerca da resolução de problemas propostos por Huygens sobre cálculo de probabilidades através da combinatória, generalizando o cálculo e aprofundando-o, aplicados em jogos de azar.

Em contraponto à abordagem clássica, na quarta parte da obra, Bernoulli inicia a aplicação da probabilidade em outros contextos, como a aparição de uma doença ou de fenômenos meteorológicos, em que não são possíveis supor a equiprobabilidade dos eventos, evidenciando a relação entre a frequência e a probabilidade. Dessa forma, no raciocínio frequentista é proposta a observação de um grande número de experimentos semelhantes e a determinação de uma probabilidade de um evento esperado é calculada *a posteriori*. Segundo Borovenik *et al.* (1991, *apud* Coutinho 2007), o método experimental é instituído como uma nova forma de estimar chances de um determinado evento.

Deve-se considerar que apesar da convergência da sequência de frequências observadas, com dados intrínsecos da experiência repetida, há a posição subjetiva do observador que não é considerada nesta abordagem. Prates (2016) traz o argumento de Triola (2008) de que inicialmente a abordagem frequentista se trata de uma estimativa e não um valor exato, e que com a inserção da lei dos grandes números, a quantidade de observações aumente a ponto da estimativa se aproximar da probabilidade real.

2.3.3 Probabilidade Subjetiva

A Probabilidade Subjetiva trata de situações em que não é possível repetir o experimento sob condições semelhantes. Segundo Moreira (2015), a probabilidade subjetiva é aplicada em problemas sobre incertezas onde é necessário a tomada de decisão. O enfoque subjetivo foi introduzido por Thomas Bayes em um ensaio publicado em 1763.

Spiegel *et al.* (2013) fundamenta a abordagem Bayesiana na probabilidade subjetiva, que são probabilidades determinadas usando a intuição e experiências anteriores, relacionadas ao nosso conhecimento ou ignorância sobre certa entidade não variável. A propriedade da aleatoriedade, neste caso, tem como parâmetros as hipóteses, modelos e quantidades fixas. Neste contexto, as variáveis aleatórias convencionais são as variáveis e quantidades observáveis.

Fenômenos que exemplificam essa abordagem são: Qual a probabilidade de existir vida em outro planeta? Qual a expectativa de vida de uma pessoa? Qual a probabilidade de chover amanhã? Essas questões são estimadas pela probabilidade de utilizar parâmetros conhecidos sobre o tema.

Nessa teoria, a probabilidade é pessoal, dependente do sujeito que está mensurando o evento, então reflete a relação do sujeito com o mundo no qual está e como pensa sobre ele. Vertentes como a Teoria de Bayes e a Teoria da Decisão tem seus fundamentos na Probabilidade Subjetiva.

2.3.4 Probabilidade Geométrica

O cálculo de probabilidades em um primeiro momento parece não ter relação com a Geometria, enquanto um se ocupa em calcular as chances de um evento ocorrer, a outra aborda medidas e formas. Apesar do tipo de problema desenvolvido através da Probabilidade Geométrica ser diferente dos tradicionalmente realizados em Probabilidade, a forma de resolução segue a definição clássica sobre a razão entre casos favoráveis e possíveis. Eisen (1969) afirma que:

> Em problemas de probabilidade geométrica, os possíveis acontecimentos podem ser representados por pontos de um segmento de reta, por figuras planas ou ainda por sólidos. Desde que o número de acontecimentos seja usualmente não contável, não podemos definir probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Todavia, podemos ainda definir a probabilidade de um evento de uma maneira natural e calculá-la por meio de considerações geométricas (EISEN, 1969).

Bispo (2018) considera que o trabalho com Probabilidade Geométrica une dois conteúdos distintos, a Probabilidade e a Geometria, ampliando a visão sobre esses temas e proporcionando a aprendizagem com significado para o estudante, pois relaciona aprendizagens de probabilidade e conhecimentos de geometria.

Apesar disso, a Probabilidade Geométrica é uma temática pouco explorada no Ensino Básico. De acordo com Ritter (2017), existem poucas publicações e trabalhos científicos sobre o tema, sendo desconhecido por alunos e professores do ensino fundamental e médio. A sua relevância para o ensino deve ser considerada porque aborda um aspecto da Probabilidade que se diferencia da Probabilidade Clássica devido ao caráter intuitivo na resolução dos problemas. Também é necessário o domínio de conceitos geométricos, possibilitando aplicar tais conteúdos e fórmulas em contextos distintos dos usuais.

2.4 PROBABILIDADE GEOMÉTRICA - CONCEITUAÇÃO TEÓRICA

A Probabilidade é um ramo da Matemática que estuda os fenômenos de caráter aleatório, ou seja, não determinísticos, de acordo com Viali (2008). Denomina-se "acaso" esse conjunto de forças que não são determinadas ou controladas, mas que vão inferir para a ocorrência ou não de um fenômeno ou experimento, sem que se possa antecipar com convicção o que ocorrerá.

A Probabilidade Geométrica, segundo Gondim (2013), é uma das áreas da Teoria das Probabilidades a qual utiliza noções geométricas para resolver os problemas de ordem probabilística com espaços amostrais contínuos. As noções geométricas mais utilizadas são comprimento, área e volume. Dessa forma, Tunala esclarece que:

> Alguns problemas de probabilidades são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em apreço, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação ou ao seu limite, caso exista entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume (TUNALA, 1992, p. 16).

Para tal, a demonstração da aplicação dos meios geométricos utilizados nas resoluções com medidas de comprimento, área e volume, que subsidiam o trabalho com os problemas em estudo, são abordados a seguir.

2.4.1 Probabilidade Geométrica utilizando medidas de comprimento

A determinação da Probabilidade Geométrica em situações que tratam de comprimentos, ou seja, em problemas que exigem a determinação aleatória de um ponto em um segmento (linha), como mostrado na Figura 1, ocorre seguindo as seguintes etapas:

Figura 1 - Representação gráfica de segmento XY

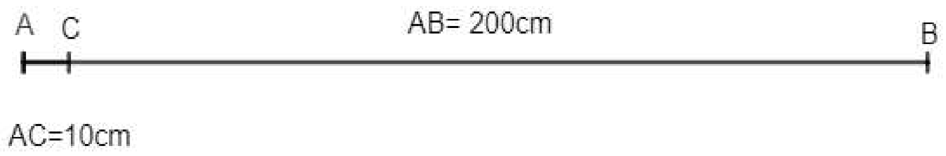
Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Se supõe que esse segmento XY faz parte de um outro segmento AB. Utiliza-se a razão entre o comprimento desse segmento XY e do segmento AB, em que está contido o segmento XY, para aferir a probabilidade de este ponto pertencer a XY.

$$P = \frac{comprimento\ de\ XY}{comprimento\ de\ AB}$$

Outro exemplo, adaptado de Alcântara (2014), questiona: Qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 2 m, um ponto pertencer exatamente aos 10 cm iniciais? A solução é: Efetuada a conversão dos dados para a mesma unidade de medida, se tem a representação gráfica na Figura 2.

Figura 2 - Representação gráfica de segmento AB



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Assim, a probabilidade pedida é a de um ponto do segmento AB, de 200 cm, pertencente ao segmento AC, de 10 cm. Logo:

$$p(AC) = \frac{Medida\ do\ Comprimento\ AC}{Medida\ do\ Comprimento\ AB}$$

$$p(AC) = \frac{10}{200}$$

$$p(AC) = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

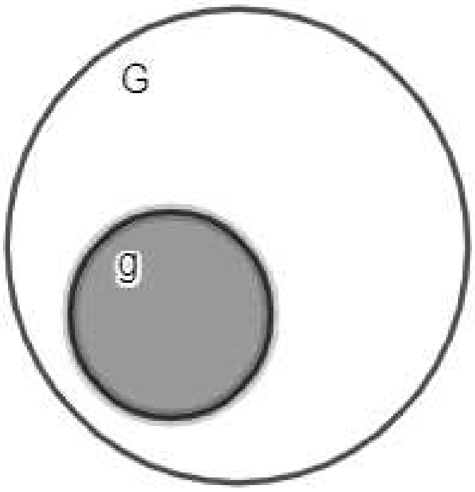
Portanto, a probabilidade de que o ponto pertença aos 10 centímetros iniciais é de 0,05.

2.4.2 Probabilidade Geométrica utilizando medidas de área

Nos problemas envolvendo figuras planas, como demonstrado na Figura 3, a probabilidade de escolher, ao acaso, um ponto pertencente à figura plana *g*, sabendo que esta mesma figura está contida na figura plana G, que a probabilidade é proporcional à área de *g* e não depende do lugar que *g* ocupa em G. Então,

$$P = \frac{área\ de\ g}{área\ de\ G}$$

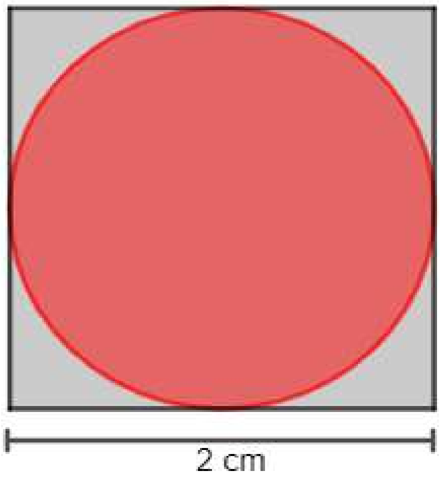
Figura 3 - Representação gráfica das figuras planas *g* e G



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

O exemplo adaptado de Ritter (2017) e ilustrado na Figura 4 é sobre um alvo formado por um quadrado de lado 2 cm e um círculo inscrito nesse quadrado. Um menino lança um dardo que vai atingir o alvo. Qual é a probabilidade que o dardo atinja o círculo?

Figura 4 - Representação gráfica das figuras planas círculo e quadrado



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

A solução obtida indica que a probabilidade do dardo atingir o círculo, dada por p(C), onde:

$$p(C) = \frac{\acute{a}rea\ do\ c\acute{i}rculo}{\acute{a}rea\ do\ quadrado}$$

$$p(C) = \frac{\pi . r^2}{l^2} = \frac{\pi . 1^2}{2^2} = \frac{3{,}14cm^2}{4cm^2} \simeq 0{,}785.$$

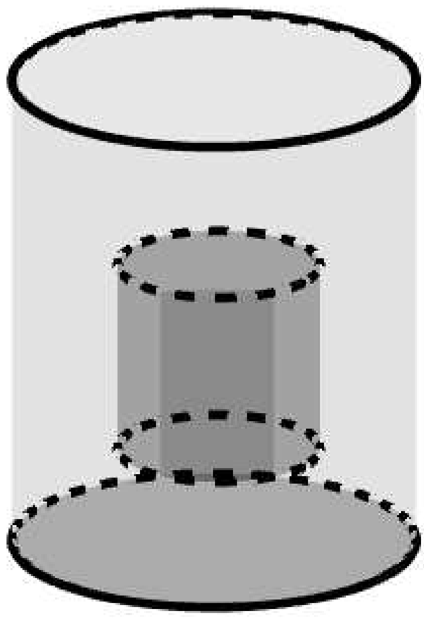
Portanto, a probabilidade do dardo atingir o círculo é de, aproximadamente, 0,785.

2.4.3 Probabilidade Geométrica utilizando medidas de volume

Analogamente, determina-se a probabilidade de que um ponto dado em um sólido *D* pertença a uma parte *d* deste sólido, como a Figura 5.

$$P = \frac{volume\ de\ d}{volume\ de\ D}$$

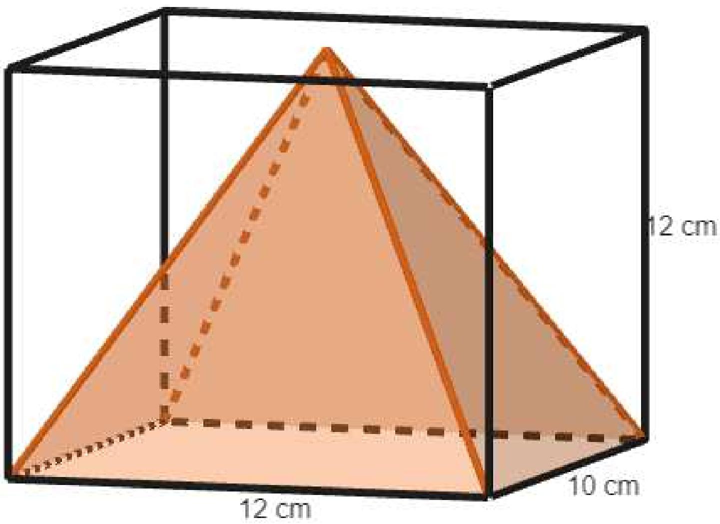
Figura 5 - Representação gráfica das figuras volumétricas



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Um exemplo adaptado de Gondim (2013) sobre um paralelepípedo retangular de 12 centímetros de comprimento por 10 centímetros de largura por 12 centímetros de altura, com uma pirâmide retangular inscrita, como mostra a Figura 6, pode ser utilizado:

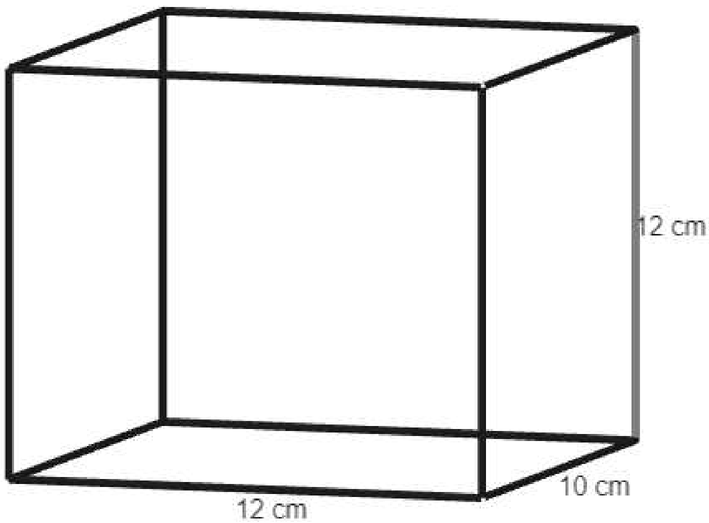
Figura 6 - Representação gráfica de paralelepípedo e pirâmide retangular



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Qual a probabilidade de, ao escolher um ponto ao acaso no interior do paralelepípedo, esse ponto pertencer a pirâmide? Para resolver, inicia-se pelo cálculo do volume do paralelepípedo e da pirâmide, de acordo com as Figuras 7 e 8.

Figura 7 - Representação gráfica do volume do paralelepípedo

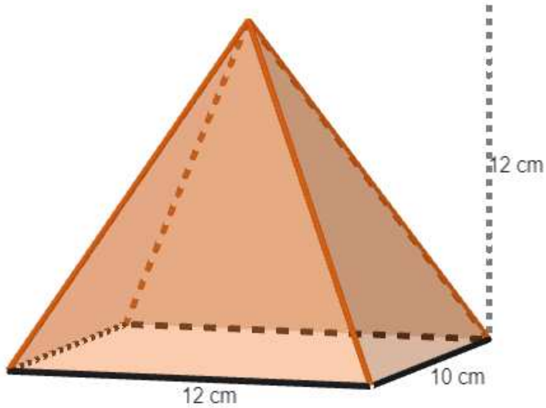


Fonte: Elaborado pela autora (2023)

$V = A_b . h$, onde V é o volume; A_b é a área da base e h é a altura.

$$V = 12.10.12 = 1440cm^2$$

Figura 8 - Representação gráfica do volume da pirâmide



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

$V = \frac{1}{3} A_b . h$, onde V é o volume; A_b é a área da base da pirâmide e h é a altura.

$$V = \frac{1}{3} . 12.10.12 = 480cm^2$$

Portanto, a Probabilidade pedida é:

$$P = \frac{volume\ da\ pirâmide}{volume\ do\ paralelepipedo} = \frac{480}{1440} = \frac{1}{3} .$$

A Probabilidade de, escolhido um ponto ao acaso no paralelepípedo retângulo, ele pertencer a pirâmide é de $\frac{1}{3}$.

2.5 ENSINO DE PROBABILIDADE

Ao demonstrar que existem abordagens novas e diferentes para solucionar uma situação, incluindo práticas experimentais, o estímulo à investigação e desenvolvimento da argumentação, a análise de espaços amostrais diversos e a aplicação de geometria, expandem a análise oferecida dos problemas probabilísticos.

A Probabilidade é fundamental para a compreensão de fenômenos naturais e do cotidiano (CAETANO; PATERLINI, 2013), por consequência é uma temática da matemática abordada na educação básica e está presente nos documentos orientadores e norteadores da Educação no Brasil. Inicialmente, quando relacionada com a Estatística, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), estava inserida no campo do Tratamento da

Informação. Com a Base Nacional Curricular Comum - BNCC (BRASIL, 2017), houve uma reestruturação e mudança da nomenclatura para Estatística e Probabilidade.

Na BNCC (BRASIL, 2017) é abordado o conceito de letramento matemático afirmando que “assegura que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e fruição”. Assim, recomenda-se que o ensino de Matemática deve desenvolver habilidades relacionadas à compreensão, interpretação e utilização de informações numéricas e estatísticas em diferentes contextos. Isso inclui o estudo de probabilidade, que permite aos estudantes analisar e interpretar situações que envolvem incertezas e aleatoriedades. Portanto, a abordagem da probabilidade visa capacitar os estudantes a compreender e utilizar a probabilidade como uma ferramenta para tomar decisões informadas e lidar com situações incertas na vida cotidiana, além de fornecer as bases necessárias para o desenvolvimento de conhecimentos estatísticos mais avançados em etapas posteriores da Educação Superior.

No Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017) prevê que os alunos devem aprender noções básicas de probabilidade, como o reconhecimento e representação de eventos aleatórios e não aleatórios, a identificação e utilização da linguagem adequada para expressar a probabilidade de um evento, empregando termos como "impossível", "possível", "certo", "incerto", "provável", "pouco provável", "igualmente provável", entre outros, além da resolução de problemas que envolvam experimentos aleatórios, estimando e comparando resultados prováveis com resultados possíveis.

No Ensino Médio, os estudantes devem aprofundar seus conhecimentos em probabilidade, com a introdução de conceitos mais avançados, tais como noções de probabilidade condicional, em que a probabilidade de um evento é afetada por outro evento; cálculo de probabilidades utilizando a regra do produto e a regra da soma; análise de distribuições de probabilidade, incluindo a distribuição binomial e a distribuição normal; e uma introdução ao cálculo de probabilidades utilizando conceitos de combinatória (BRASIL, 2017).

Os estudos de Batanero e Godino (2002) sobre Estatística e Probabilidade elencam algumas orientações que são potencializadores do desenvolvimento do raciocínio probabilístico:

1. Proporcionar uma ampla variedade de experiências que permitam observar os fenômenos aleatórios e diferenciá-los dos determinísticos.

2. Estimular a expressão de previsões sobre o comportamento destes fenômenos e os seus resultados, bem como sua probabilidade.
3. Organizar a recolha de dados experimentais de forma a que os alunos tenham oportunidade de confrontar as suas previsões com os resultados produzidos e rever as suas crenças com base nos resultados.
4. Destacar a imprevisibilidade de cada resultado isolado, bem como a variabilidade de pequenas amostras, comparando os resultados de cada criança ou dos pares.
5. Ajudar a apreciar o fenômeno da convergência acumulando os resultados de toda a turma e comparando a confiabilidade de amostras pequenas e grandes.

Portanto, baseados nas diretrizes apontadas pela BNCC (BRASIL, 2017) e pelas orientações de Batanero e Godino (2002), serão abordadas atividades que visam atingir os objetivos já relatados e contribuam para o desenvolvimento do conhecimento probabilístico.

2.6 PROBLEMAS DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Neste item serão abordados vários problemas envolvendo Probabilidade Geométrica, utilizando temáticas abrangentes com potencial de serem exploradas em sala de aula. O enfoque desta seção é apresentar os problemas, demonstrando suas potencialidades, apontando caminhos para a resolução geométrica e inserindo algumas discussões sobre conceitos a serem explorados.

A descrição da aplicação das questões, na forma de proposta de atividades com objetivos, pré-requisitos e formas de experimentação estão especificadas no Produto Educacional proposto como desdobramento dessa pesquisa.

2.6.1 Problema do Macarrão

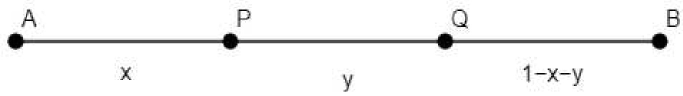
O problema que fomentou o início desta pesquisa é o Problema do Macarrão, sua análise e perspectivas de aplicação através da experimentação, instigaram o desenvolvimento de um roteiro de atividades que foi proposto no Produto Educacional.

O enunciado proposto por Wagner (1997), indica a divisão aleatória de um segmento em três partes e questiona qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo. A proposta é acompanhada pelo experimento realizado com professores, em que foi proposto partir um macarrão do tipo espaguete em três partes.

O resultado do experimento foi contestado com o cálculo de probabilidade realizado por meios geométricos, utilizando a desigualdade triangular e a área de triângulos.

A resolução matemática sugerida por Wagner (1997) é a seguinte: dado o macarrão do experimento, considerando-o como um segmento de reta AB de comprimento 1. Ao dividi-lo em três partes: uma, AP, de comprimento x, outra PQ, de comprimento y e a terceira, QB, naturalmente com comprimento $1 - x - y$, conforme a Figura 9.

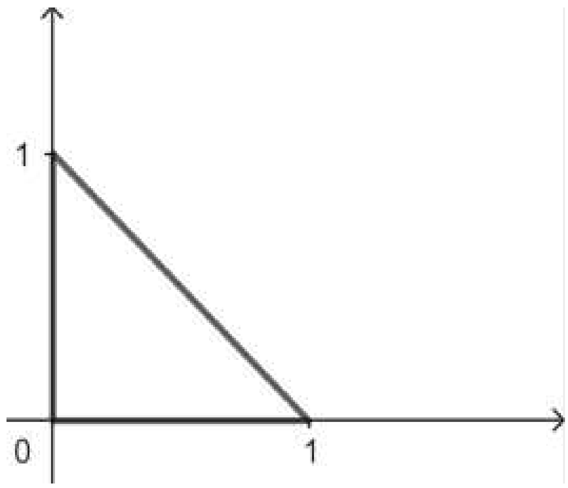
Figura 9 - Representação gráfica do segmento para resolução do problema do macarrão



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Cada forma de dividir o segmento unitário fica associada ao par ordenado (x, y), onde $x + y < 1$. Ilustrando a correspondência no plano cartesiano, foi obtida a Figura 10, onde cada forma de dividir o segmento fica representado por um ponto no interior do triângulo.

Figura 10 - Plano cartesiano para resolução do problema do macarrão



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Entretanto, não são todas as divisões que formam triângulos. Um triângulo existe se, e somente se, cada lado for menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semiperímetro, que no nosso caso é igual a $\frac{1}{2}$. Temos, portanto:

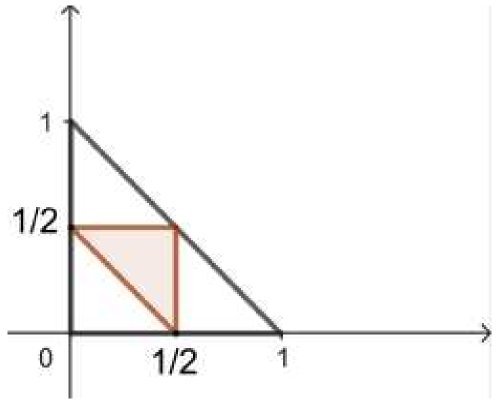
$$x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2} \text{ e } 1 - x - y < \frac{1}{2}.$$

Assim, a última condição equivale a:

$$x + y > \frac{1}{2}.$$

Sendo que a região *favorável* é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial, como ilustrado pela Figura 11.

Figura 11 - Plano cartesiano para resolução do problema do macarrão



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Assim, o triângulo formado pelos pontos médios tem área igual a 1/4 da área do triângulo grande, o que nos leva a concluir que a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é 0,25.

Por fim, observou-se que a estimativa obtida no experimento foi muito diferente da encontrada com o cálculo. Portanto, Wagner (1997) concluiu que a experimentação não ocorreu de forma aleatória, sabendo que possivelmente uma pessoa tende a dividir o macarrão em três partes iguais.

Uma argumentação para a resposta precisa que ocorre com a resolução matemática é que o espaço amostral que se define a probabilidade geométrica é contínuo, por isso sua representação geométrica, a fim de tomar todos os pontos possíveis, que são infinitos, para resolução do problema.

Além disso, o problema do macarrão, de acordo com Gondim (2013), oportuniza a discussão entre os resultados de um experimento prático, com um espaço amostral relativamente pequeno e da generalização que é encontrada através do cálculo matemático.

Na educação básica, propiciar ao aluno situações de aprendizagem que instiguem a investigação, a discussão, a análise de conhecimentos e o desenvolvimento de argumentos é parte do fazer pedagógico que as metodologias ativas destacam.

O evento neste caso é que as três partes originem um triângulo e o que se busca é determinar a probabilidade do evento ocorrer. Para isso, o aluno também precisa compreender alguns conceitos geométricos sobre as condições de existência do triângulo.

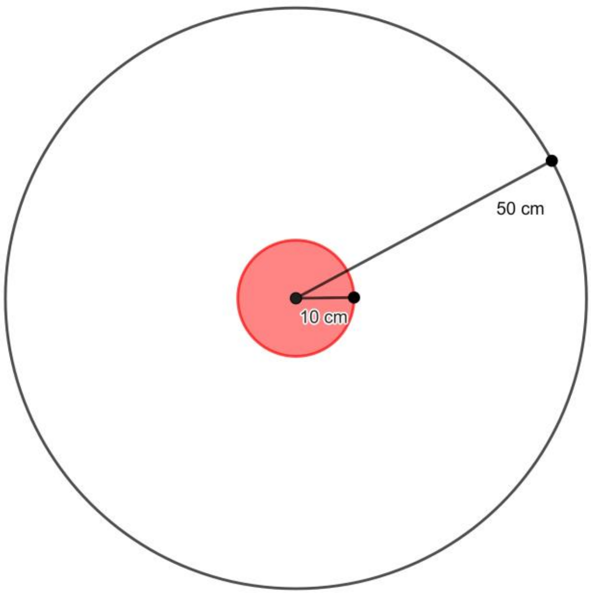
2.6.2 Problema do Atirador

Wagner (1997) explana sobre o espaço amostral na probabilidade geométrica ao trazer o exemplo do problema do atirador e argumenta que obteve respostas corretas dos alunos do ensino médio. O problema é enunciado como:

> Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central (WAGNER, 1997).

Ao resolver com meios geométricos, o atirador cego não tem pontos privilegiados e não há como contar os casos favoráveis e possíveis, a probabilidade de acertar o alvo é a razão entre a área do disco menor e a área do alvo, conforme a Figura 12.

Figura 12 - Representação do alvo



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Segue a resolução:

$$\text{Área do disco de 10 cm de raio} = 10^2\pi = 100\pi$$
$$\text{Área do alvo de 50 cm de raio} = 50^2\pi = 2500\pi$$

$$P = \frac{100\pi}{2500\pi} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$ é a probabilidade de atingir o disco central.

Considerando outros problemas que são similares ao problema do atirador, Gondim (2013) argumenta que são acessíveis e relativamente fáceis porque necessitam de conhecimentos básicos, como noções de operações, de área de figuras planas e de probabilidades. Wagner (1997) contesta que mesmo sem noções básicas de probabilidade, o estudante pode atribuir intuitivamente a resposta correta usando conhecimentos geométricos.

2.6.3 Problema do Encontro

O Problema do Encontro é apresentado na versão escrita por Tunala na Revista do Professor de Matemática. No entanto, existem variações do mesmo problema probabilístico, resolvidos por meios geométricos.

> Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira pessoa a chegar esperará no máximo 15 minutos pela outra. Ache a probabilidade P4 de este encontro realizar-se neste intervalo, admitindo-se que os instantes de chegada (entre 11 e 12 horas) de cada uma das pessoas provêm do acaso (TUNALA, 1992).

A solução do problema inicia com a associação do instante de chegada das pessoas a dois pontos no segmento, ou seja, a amplitude de um intervalo, representado no plano cartesiano. Com as coordenadas numericamente iguais às frações de horas dos respectivos instantes de chegada, sendo solucionado da seguinte forma:

> Suponhamos que uma figura plana *g* seja parte de uma outra figura plana *G* e que se tenha escolhido ao acaso um ponto de *G*. Se admitirmos que a probabilidade de este ponto pertencer a *g* é proporcional à área de *g* e não depende do lugar que *g* ocupa em *G*, então a probabilidade de que o ponto selecionado esteja em g será P=área de g/área de G (TUNALA, 1992).

O espaço amostral é o período de tempo que foi determinado para chegar no local, sendo ele de uma hora. Para compreender o espaço amostral, é necessário pensar nos eventos futuros que são possíveis de ocorrer em determinada situação.

O evento analisado é o encontro entre as duas pessoas. Para tal, é necessário avaliar as situações que são favoráveis a tal acontecimento. Para que ocorra o encontro, a diferença de tempo de chegada deve ser menor ou igual a 15 minutos.

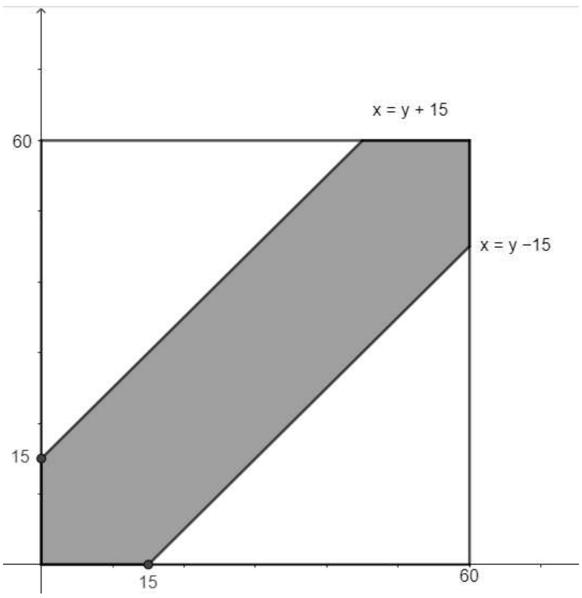
Ao propor tal questão aos alunos, a discussão, mediada pelo professor quando necessário, é importante para a construção da solução. Assim como, abordar situações concretas que elucidam o caminho ao sugerir que os alunos mostrem exemplos de eventos para esse encontro, como evento A: pessoa 1 chegando às 11:10 e a pessoa 2 às 11:24; evento B: pessoa 1 chegando às 11:18 e a pessoa 2 às 11:40.

O questionamento principal do problema é a probabilidade de ocorrer um encontro. Esse problema não evidencia em seu enunciado o caráter geométrico da questão, porém recorrendo ao plano cartesiano e transformando o momento da chegada em coordenadas, é possível calcular essa probabilidade com a análise da área das figuras formadas.

Para resolução propomos que se associe os instantes de chegada das duas pessoas, no intervalo de 60 min, entre 11 e 12 horas, a um par (x,y) de [0, 60] x [0, 60] representados por pontos em eixos ortogonais x e y em R^2. Cada ponto tem coordenadas x, numericamente igual à quantidade de minutos dos respectivos instantes de chegada, 11h e x min, 11h e y min, das duas pessoas.

O encontro somente terá lugar se $|y - x| \leq 15$, ou seja, se $y \leq x + 15$ e $y \leq x - 15$. Essas restrições definem a região cinza da Figura 13.

Figura 13 - Representação gráfica para resolução do problema do encontro



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Logo, se g é a área da região cinza e G representa a área total associada ao intervalo de 60 minutos. Temos que:

$$g = 60^2 - 2(\frac{45 \times 45}{2}) = 60^2 - 45^2 = 1575$$

Pela probabilidade geométrica,

$$P = \frac{área\ g}{área\ G} = \frac{1575}{3600} = 0{,}437.$$

Uma característica da Probabilidade Geométrica é que ela mensura a probabilidade de um evento ocorrer, não o quantifica. Na análise do problema do encontro se observa essa característica devido às infinitas possibilidades do encontro ocorrer.

A linguagem matemática para a representação de tais conclusões se ajusta à realidade do grupo de alunos que analisa a questão. O formalismo e a generalização devem ser considerados no momento oportuno.

2.6.4 Paradoxo de Bertrand

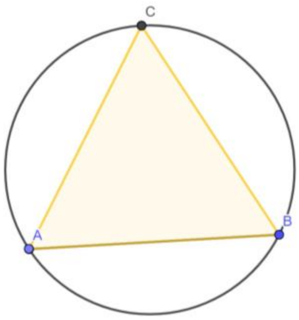
Joseph Louis François Bertrand foi um matemático francês que viveu no final do século XIX. Em 1907, ele formulou um problema conhecido por Paradoxo de Bertrand, que evidencia a importância da interpretação da aleatoriedade. Esse problema é considerado paradoxal, pois a cada forma diferente de resolvê-lo, se encontra um resultado diferente.

O problema enuncia que "Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência, qual é a probabilidade de que ela seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?"

Bertrand propõe três resoluções para o problema, preocupado com a confiabilidade da Probabilidade quando utilizados espaços amostrais infinitos. Wagner (1997) descreve as soluções para tal paradoxo.

Considerando uma circunferência de raio 1, o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência, conforme a figura 14, mede $\sqrt{3}$ e o menor arco que a corda determina mede 120º. Como estamos buscando cordas maiores que o lado do triângulo equilátero, então o seu comprimento *x* é tal que $\sqrt{3} < x \leq 2$ e o menor arco a que ela determina sobre a circunferência é tal que $120° < \alpha \leq 180°$.

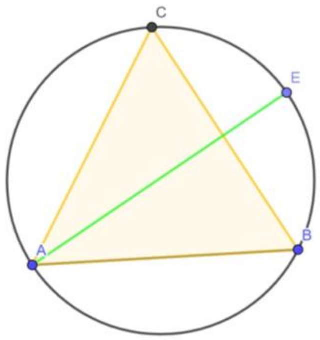
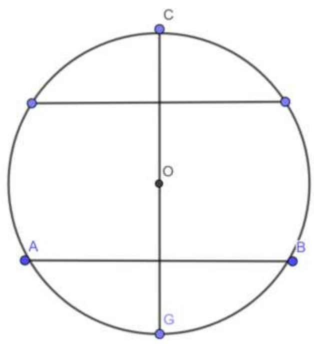
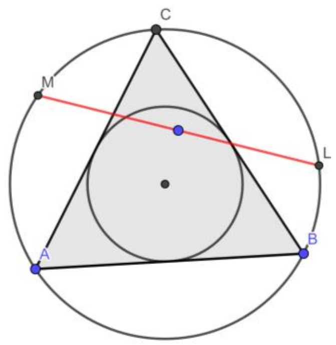
Figura 14 - Representação gráfica do Problema do Paradoxo de Bertrand



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Assim, de acordo com as ilustrações do Quadro 1, na primeira solução, utilizando dois pontos aleatórios e distintos na circunferência, resulta em ⅓. Na segunda solução proposta, determinando um diâmetro qualquer e considerando todas as cordas perpendiculares, a resposta é P=½. E, na terceira resolução, tomando que qualquer ponto da circunferência será o ponto médio da corda por ele determinado, a P=¼.

Quadro 1 - Ilustrações das Soluções do Paradoxo de Bertrand

1ª Solução	2ª Solução	3ª Solução
		

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Wagner (1997) discute que cada alternativa conduz uma resposta diferente, porque o termo escolhido deve estar acompanhado de um procedimento. Sem essa orientação, é possível ter diversas interpretações. Já Cavalcanti (2017), ressalta que o problema evidencia que o método de resolução restringe o universo de amostras, alterando a distribuição dos eventos.

Historicamente, esse problema contribuiu para a evolução da Teoria da Probabilidade porque demonstrou certa insatisfação com a Probabilidade Clássica na virada do século XX e impulsionou a axiomatização rigorosa da Teoria das Probabilidades, iniciada na proposta de 1933 por Kolmogorov, como discorre Vidarte *et al.* (2021).

2.6.5 Problema do Celular Perdido

Além dos problemas que podem ser rotulados como clássicos, ou seja, que são recorrentes quando a temática Probabilidade Geométrica é proposta, esta pesquisa buscou outros problemas, alguns foram traduzidos e adaptados visando os objetivos da pesquisa.

O Problema do Celular Perdido foi elaborado com a proposta de um tema recorrente aos estudantes, que é o uso do celular e, por consequência, a perda do aparelho, além da discussão na possibilidade de recuperar o mesmo diante de uma situação definida. Então, a motivação inicial para resolução desse tipo de problema é intrínseca à realidade.

O enunciado principal é: Miguel andou de bicicleta ao longo de um caminho de 8 km e perdeu seu celular em algum local aleatório deste caminho. Diante dessa situação, questiona-se:

- Qual é a probabilidade de que o telefone de Miguel tenha caído durante o primeiro quilômetro do percurso?
- Determine a probabilidade de Miguel ter deixado cair o telefone durante o primeiro quilômetro ou nos últimos três quilômetros.
- Uma torre de telefonia celular está localizada no quilômetro quatro, exatamente no centro do caminho. A torre tem um alcance de 2,75 km. Se Miguel usa um segundo telefone celular para ligar para o telefone perdido, qual é a probabilidade de que o telefone perdido toque?
- Qual alcance a torre precisaria ter para que o telefone perdido certamente toque?

Utiliza-se a probabilidade geométrica para abordar essa questão, visto que se assume que o ponto procurado está situado dentro de um intervalo contido entre os pontos A e B. Para calcular essa probabilidade, é essencial determinar o comprimento de XY em relação ao comprimento total do caminho AB, o que permitirá obter uma estimativa acurada da probabilidade de encontrar o celular.

Neste experimento, o objetivo é encontrar um celular perdido em um determinado caminho e mensurar a probabilidade de sucesso nessa busca. Para tanto, deve ser considerado o espaço amostral, que é representado pela distância entre o ponto inicial e o final do caminho, totalizando um comprimento de 8 km.

É válido ressaltar a importância de consolidar os conhecimentos iniciais sobre probabilidade, pois isso é fundamental para aprofundar os estudos acerca desse tema. Portanto, reservar tempo para propor, analisar e discutir problemas que possam ser considerados simples, mas que envolvam conceitos probabilísticos, é crucial para o desenvolvimento de uma compreensão sólida nesta área do conhecimento.

Na elaboração do produto educacional esses problemas estão inseridos de maneira a proporcionar uma dinâmica no trabalho docente, com a descrição necessária para a aplicação em sala de aula.

2.7 DESIGUALDADE TRIANGULAR

A desigualdade triangular é uma importante proposição de geometria euclidiana, precisamente a proposição 20 do livro I de Elementos de Euclides que diz: em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior do que o lado restante. Apresentando as correlações, no triângulo de lados *a, b* e *c*:

$$a < b + c,$$
$$b < a + c,$$
$$c < a + b.$$

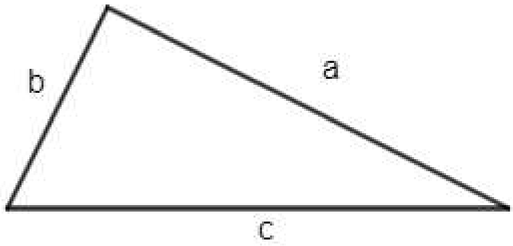
Na BNCC (2017), as habilidades da unidade temática relacionada à Geometria, no Ensino Fundamental, orientam que o aluno reconheça a condição de existência de um triângulo quanto à medida de seus lados e aplique na resolução de problemas geométricos.

Abordando didaticamente a desigualdade triangular, Campelo (2013) afirma que é possível trabalhá-la desde o ensino fundamental, com menos rigor, até o ensino médio, aplicando maior rigor. Entretanto, é válido o ensino de desigualdade triangular desde os anos iniciais para motivar a criatividade dos alunos em resolver problemas.

Ao analisar as possíveis maneiras de discutir a desigualdade triangular, considerando os níveis de ensino, pode-se iniciar pelo experimento empírico, sendo desenvolvido de forma intuitiva e com material didático manipulativo em sala de aula.

De modo simples, é possível afirmar que dado um triângulo qualquer, conforme a Figura 15, cujas medidas dos lados sejam a, b e c, reais, temos que: $a < b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$.

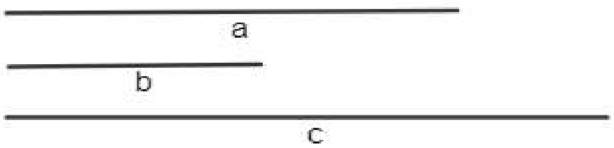
Figura 15 - Triângulo qualquer de medidas *a, b* e *c*



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Para ilustrar, baseado na proposição 22 (EUCLIDES, 2009) que de três retas, que são iguais às três retas dadas, para construir um triângulo é preciso que duas, sendo tomadas juntas de toda maneira, sejam maiores que o restante. Assim, tomando três segmentos de reta, de acordo com a Figura 15, em que cada um tenha a mesma medida que um dos lados do triângulo ABC, representado pela Figura 16.

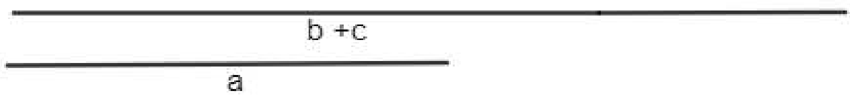
Figura 16 - Segmentos de reta com medidas *a, b* e *c*



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Unindo os segmentos de medidas b e c, surge um novo segmento de reta cuja medida será $b + c$, conforme a construção da Figura 17. Logo: $a < b + c$.

Figura 17 - Segmentos de reta com medidas *a, b* e *c*



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

De forma análoga, pode-se mostrar que $b < a + c$ e $c < a + b$.

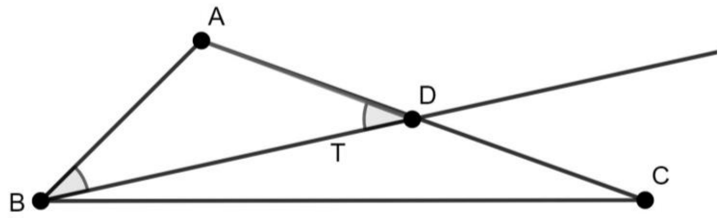
Para realizar esta demonstração, é necessário estabelecer uma relação entre os comprimentos dos lados dos triângulos e seus ângulos opostos através da seguinte proposição:

a) se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \widehat{C}$, então $\underline{AC} > \underline{AB}.$

De fato, como $\hat{B} > \hat{C}$, podemos traçar a semirreta $\underline{BT},$ intersectando o interior do triângulo ABC, ilustrado pela Figura 18, de tal modo que:

$$C\hat{B}T = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$$

Figura 18 – Semirreta intersectando o Triângulo ABC



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Sendo D o ponto de interseção de $\underline{BT}$, com o lado AC, segue o teorema do ângulo externo em que:

$$A\hat{D}B = C\hat{B}D + B\hat{C}D = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$$

Mas como $A\hat{B}D = \hat{B} - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$, logo o triângulo ABD é isósceles de base BD. Desse modo:

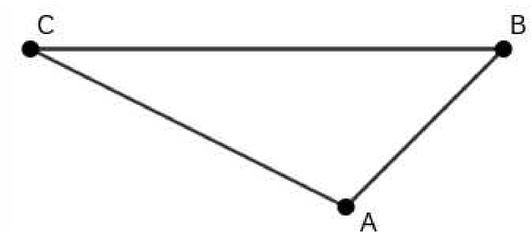
$$\underline{AB} = \underline{AD} < \underline{AC}$$

A partir daí, pode-se concluir que no triângulo ABC, se $\hat{A} \geq 90°$, então $\underline{BC}$ é o seu lado maior, pois se $\hat{A} \geq 90°$, então $\hat{A}$ é o maior ângulo de ABC, de modo que $\underline{BC}$ é, pela sua proposição anterior, o maior lado do triângulo.

Concluindo que o enunciado da desigualdade triangular é: em qualquer triângulo, cada lado tem um comprimento menor do que a soma do comprimento dos outros dois lados.

Para comprovar essa afirmação, seja ABC um triângulo, como a Figura 19, onde $\underline{AB} = c, \underline{AC} = b$ e $\underline{BC} = a$.

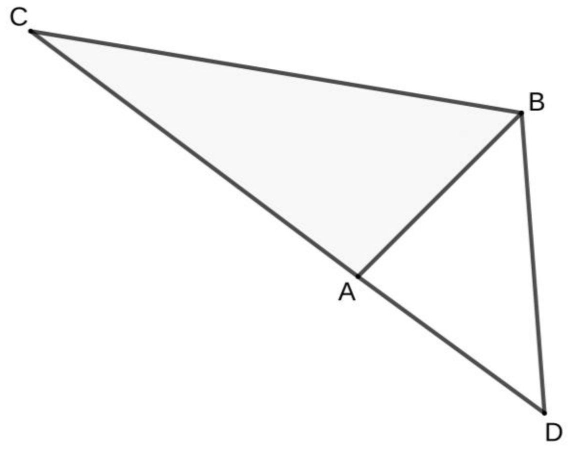
Figura 19 - Triângulo ABC



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

A demonstração será realizada para $a < b + c$ e, de forma análoga, podemos mostrar que $b < a + c$ e $c < a + b$, conforme a Figura 20. Primeiro, marca-se o ponto D sobre a semirreta $\underline{CA}$ de modo que $A \epsilon CD\ e\ \underline{AD} = \underline{AB}$.

Figura 20 – Demonstração no Triângulo ABC



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Observa-se que $\underline{CD} = \underline{AC} + \underline{AD} = \underline{AC} + \underline{AB} = b + c$ pela proposição "a" é suficiente para provarmos que $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$, mas como $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$, basta notar que $B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C$.

3. UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA

Essa seção revisa a literatura publicada na intersecção entre o Ensino de Matemática e Probabilidade Matemática, focada no uso da Probabilidade Geométrica para aprimorar habilidades no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

As dissertações pesquisadas revelam evidências iniciais sugerindo que a Probabilidade Geométrica é uma ferramenta para o ensino de Probabilidade na Educação Básica. Gondim (2013) destaca que problemas geométricos e experimentos práticos são uma alternativa aos problemas clássicos envolvendo jogos de azar utilizados em sala de aula. Assim como, a BNCC (2017) afirma a necessidade de estudar os conceitos probabilísticos desde os anos iniciais do ensino fundamental, construindo noções de acaso, ideia de experimento aleatório e noções de probabilidade, corroborando com Ritter (2017), que salienta que refletir sobre o Ensino de Probabilidade está interligado com a relevância do estudo desse conteúdo.

Então, a pesquisa bibliográfica iniciou pela busca de trabalhos sobre o tema Probabilidade Geométrica através de repositórios digitais. Foi realizada análise em duas plataformas de dados, no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no repositório de Dissertações de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Na BDTD, os termos utilizados foram probabilidade geométrica, ensino e matemática, resultando em dezoito trabalhos. Na plataforma PROFMAT foram encontrados quatorze registros com a utilização do termo probabilidade geométrica, ressaltando que o PROFMAT é um programa de mestrado profissional de Matemática, compreendendo somente trabalhos na área em que a busca já está refinada pela proposta do programa.

A segunda etapa foi a filtragem dos trabalhos abordando o tema da presente pesquisa: a relação entre o Ensino de Matemática e a Probabilidade Geométrica na Educação Básica. Através da análise dos títulos, resumos e palavras-chaves de todos os trabalhos selecionados foram utilizados como critérios aqueles com propostas de ensino na Educação Básica. Nessa fase observou-se que nove trabalhos estavam listados nos dois repositórios, totalizando 21 dissertações de mestrado sobre o tema, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 - Dissertações pesquisadas com o tema Probabilidade Geométrica

(continua)

Título da Dissertação	**Autor**	**Ano**	**Palavras-chave**	**Plataforma**
Probabilidade e probabilidade geométrica: além dos dados, moedas e cartas de baralho	Bezerra	2015	Probabilidades. Probabilidade geométrica. Agulhas de Buffon.	BDTD e PROFMAT
Probabilidade geométrica e aplicações	Moraes	2014	Probabilidade geométrica. Probabilidade clássica.	BDTD e PROFMAT
O Ensino de Probabilidade Geométrica: desafios e possibilidades	Ritter	2017	Ensino de Probabilidade. Probabilidade Geométrica. Aprendizagem significativa. Três Momentos Pedagógicos.	BDTD
A geometria no ensino da probabilidade	Bispo	2018	Probabilidade. Geometria. Aplicações	BDTD
Probabilidade geométrica com abordagem na esperança Matemática	Jesus	2018	Probabilidade Discreta. Probabilidade Geométrica. Esperança Matemática. História da Probabilidade.	BDTD e PROFMAT
O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade	Albuquerque	2015	Probabilidade geométrica. Jogos matemáticos. Experimentação	BDTD
Probabilidade geométrica no Ensino Médio: Uma experiência usando o Geogebra	Araújo	2017	Probabilidade Geométrica. Geogebra. Ensino de Matemática. Recursos didáticos.	BDTD e PROFMAT
Estudo e aplicações de probabilidade geométrica e paradoxos	Viana	2013	Probabilidade geométrica. Paradoxo. Intuição. Problema da agulha de Buffon.	BDTD e PROFMAT
Alguns tópicos em probabilidade geométrica	Pereira	2011	Probabilidades Geométricas. Distribuição (Probabilidades). Geometria.	BDTD
Uma proposta lúdica com utilização do GeoGebra para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica	Canavezi	2016	Funções quadráticas. Probabilidade geométrica. Problemas de otimização. GeoGebra. Engenharia didática.	BDTD e PROFMAT
Motivações matemáticas por meio de resolução de problemas de probabilidade geométrica	Silva	2017	Probabilidade. Geometria. Resolução de Problemas. Aprendizagem.	BDTD e PROFMAT
Combinatória e probabilidade com aplicações no ensino de geometria	Neto	2014	Combinatória. Probabilidade. Ensino de Geometria.	BDTD
Probabilidade e probabilidade geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico	Gondim	2014	Probabilidade Geométrica. Geometria. Probabilidade. Inequações. Área de figuras planas. Ensino Básico.	BDTD e PROFMAT

Quadro 2 - Dissertações pesquisadas com o tema Probabilidade Geométrica

(conclusão)

Probabilidade geométrica: generalizações do problema da agulha de Buffon e aplicações	Silva	2014	Probabilidades. Diagnóstico por imagem. Variáveis aleatórias.	BDTD e PROFMAT
O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade	Albuquerque	2015	Probabilidade geométrica. Jogos matemáticos. Experimentação.	BDTD
O Estudo de Probabilidade no Ensino Médio	Carloni	2019	Probabilidade. Probabilidade geométrica.	BDTD
Resolução de problemas e educação matemática crítica: uma proposta para o ensino de probabilidade.	Fernandes	2018	Probabilidade. Educação Básica. Resolução de Problemas. Educação Matemática Crítica.	BDTD
A Geometria Fractal No Processo De Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Probabilidade Geométrica	Able	2021	Probabilidades. Matemática - Estudo e ensino. Geometria. Fractais.	PROFMAT
Probabilidade Geométrica: Uma Abordagem Através Do Método De Monte Carlo E Geometria Fractal	Cavalcante	2017	Probabilidade Geométrica. Estatística. Ensino da Matemática. Método Monte Carlo. Fractais. Paradoxo de Bertrand. Ferramenta de software.	PROFMAT
Probabilidade Geométrica: Uma Estratégia De Ensino Via Resolução De Problemas	Prates	2016	Probabilidade Clássica. Probabilidade Frequentista. Resolução de Problemas. Probabilidade Geométrica.	PROFMAT
Probabilidade Geométrica Em Lançamentos Aleatórios	Alcântara	2014	Probabilidade Geométrica. Jogo dos Discos. Rejunte.	PROFMAT
Discutindo Probabilidade Geométrica No Ensino Básico	Silva	2013	Ensino. Probabilidade. Geometria. Currículo.	PROFMAT

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Na última etapa, os trabalhos de pesquisa resultantes foram lidos na perspectiva de encontrar pressupostos teóricos, projetos de pesquisa, propostas de atividades, procedimentos e resultados de aprendizagem que contribuam para os encaminhamentos da presente pesquisa.

Dentre esses, destaca-se a produção de Ritter (2017) que faz uma rigorosa revisão da literatura, de 1982 até 2016. O mapeamento de Ritter (2017) analisa onze dissertações, destas nove constam no Quadro 2. Esses trabalhos abordam a Probabilidade Geométrica com atividades de recursos diversos que são aplicáveis preferencialmente no Ensino Médio e na Graduação, porém o interesse é expandir a aplicação para o Ensino Fundamental e a discussão de conceitos matemáticos que estão presentes não só na probabilidade geométrica, mas em outras áreas da matemática seja ela escolar ou não.

Na pesquisa, um aspecto considerado foi a aplicação de atividades que tenham como foco os estudantes do Ensino Fundamental nos Anos Finais, do sexto ao nono ano. Neste contexto, estão inseridas as dissertações de Jesus (2018), que aborda o tema Probabilidade Geométrica através do jogo Girou Girou, aplicando conceitos de esperança matemática e de Canavezi (2016), que relaciona o estudo das funções quadráticas e a probabilidade geométrica através do jogo dos dardos, aplicado no nono ano do Ensino Fundamental.

É recorrente que as propostas de aplicação sejam direcionadas para os estudantes de Ensino Médio, tendo em vista que os conceitos geométricos e probabilísticos que usualmente são utilizados para resolução dos problemas já estão apreendidos nesta etapa de ensino. Assim, Gondim (2013) visa introduzir conceitos de Probabilidade e Probabilidade Geométrica nos anos finais do Ensino Médio com a utilização de problemas típicos da probabilidade geométrica. Silva (2013) discute a Probabilidade Geométrica no ensino básico através da análise do currículo para propor o momento propício de introduzir a resolução de problemas sobre probabilidade geométrica.

A Probabilidade Geométrica é um meio para a resolução de problemas probabilísticos que utiliza entes geométricos no seu desenvolvimento, as dissertações mapeadas utilizam problemas clássicos da temática como O Problema das Agulhas de Buffon, o Jogo dos Discos, o Paradoxo de Bertrand e o Método de Monte Carlo.

O Jogo dos Discos é uma proposta que aparece como tema central nas dissertações de Albuquerque (2015) e Alcântara (2014), que o abordam como meio para desenvolver conceitos de probabilidade e geometria no Ensino Médio. De acordo com Paterlini e Caetano (2010), o Jogo dos Discos tem origem francesa, quando se ladrilhava jardins e castelos, esses ladrilhos começaram a ser utilizados como tabuleiros onde eram jogadas moedas, as apostas versavam sobre a moeda cair inteiramente dentro do ladrilho.

Viana (2013) discute paradoxos e aplicação do Método de Monte Carlo para a sala de aula. Cavalcante (2017) aborda o método de Monte Carlo e fractais através de experimentação e uso de ferramentas computacionais. Araújo (2017) propõe atividades de pesquisa como o problema do paraquedista, o Jogo dos discos, o problema do macarrão e o uso do método de Monte Carlo para estimar áreas de figuras.

A metodologia da resolução de problemas, com suas diferentes abordagens, se faz presente para significar a sua aplicação, sejam tradicionais na Probabilidade Geométrica ou desenvolvidos a partir dos objetivos das pesquisas. Fernandes (2018) aborda a Probabilidade Geométrica através da Resolução de Problemas embasado na teoria de Onuchic (1999). Assim como Able (2021), que usa a mesma metodologia, porém desenvolve o trabalho a partir da geometria de fractais. Prates (2016) também traz a proposta da resolução de problemas amparado na teoria de Polya e Silva (2017) utiliza a resolução de problemas de Probabilidade Geométrica como motivação para aprender matemática.

Dentre as metodologias utilizadas, pode-se perceber que existe uma concentração na resolução de problemas, além do uso de metodologias investigativas que visem a exploração do problema permeando tanto a geometria como a probabilidade. Ademais, aplicar as propostas de ensino com estudantes da Educação Básica para discutir as possibilidades do uso de Probabilidade Geométrica se apresenta como potencializador da pesquisa na área.

O uso de recursos tecnológicos, como software Geogebra, aparece em poucas propostas, o que mostra que há potencial na utilização desses recursos para fomentar o processo de ensino e aprendizagem.

Assim, percebe-se que a presente pesquisa contribui para a literatura sobre o Ensino de Matemática através da Probabilidade Geométrica ao considerar a análise dos problemas sobre a temática, com enfoque nas discussões sobre conceitos probabilísticos como acaso, experimento aleatório, espaço amostral e eventos para compreender e aplicar nas situações matemáticas, de acordo com Batanero e Godino (2002), na abordagem do raciocínio probabilístico.

Os aspectos geométricos abordados nas situações propostas, as construções desses conceitos com ilustrações no Geogebra, nas quais os alunos têm oportunidade de manipular e desenvolver suas percepções e inferir sobre o envolvimento na resolução dos problemas, apresenta outra contribuição da Probabilidade Geométrica para a Educação Básica. Discutir conceitos, métodos e demonstrações matemáticas com o Ensino Fundamental e Ensino Médio são propostas da pesquisa que trazem um contraponto com as dissertações analisadas, utilizando como ponto de partida o problema probabilístico e considerando os aspectos acima citados, em atividades que os alunos serão protagonistas no processo e mediados pelo professor, na busca do entendimento do processo como um todo.

4. METODOLOGIA

Esse capítulo descreve, primeiramente, a metodologia da pesquisa, indicando o tipo de pesquisa, instrumentos de coleta de dados e os procedimentos adotados na análise dos dados. Assim como, o contexto e os participantes da pesquisa. Na sequência, é apresentada a metodologia que embasa o planejamento das atividades que compõem o produto educacional, com a descrição da investigação matemática na sala de aula, adotada como metodologia de trabalho.

4.1. METODOLOGIA DA PESQUISA

Com o intuito de verificar as contribuições da Probabilidade Geométrica no Ensino de Matemática na Educação Básica, esta pesquisa apresenta caráter qualitativo, quando, de acordo com Gerhardt e Silveira (2009) se caracteriza pela: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados mais fidedignos possíveis.

Marconi e Lakatos (2003) definem a pesquisa exploratória como empírica com o objetivo de desenvolver hipóteses, afinar a relação do pesquisador com o ambiente, fatos ou fenômenos e alterar ou esclarecer conceitos. Gerhardt e Silveira (2009) argumentam que as pesquisas exploratórias buscam uma abordagem do fenômeno pelo levantamento de informações que possam levar o pesquisador a conhecer mais a seu respeito.

Considerando as concepções de pesquisa exploratória, essa pesquisa se caracteriza por buscar conhecer sobre o tema probabilidade geométrica, explorando conceitos de Probabilidade e de Geometria a fim de apontar contribuições para o ensino de probabilidade na Educação Básica.

A construção do referencial teórico utilizou a literatura teórica amparada em Flick (2013) que indica a revisão de literatura, tanto empírica como teórica, são maneiras de sintetizar os contextos e conceitos e analisá-los com criticidade.

Para tal, foi executada uma análise do histórico da Probabilidade e onde se insere a Probabilidade Geométrica neste contexto. Os conceitos básicos de Probabilidade foram discutidos buscando compreender e defini-los. Como a Probabilidade Geométrica é uma das abordagens na área da Probabilidade, foram descritas as abordagens clássica, frequentista, subjetiva e geométrica, para distinguir e relacioná-las. O ensino de Probabilidade considerou os documentos normativos nacionais e as orientações de teóricos.

No referencial também se inseriu a análise de problemas sobre o tema, interessando-se pelos aspectos acima relacionados e objetivando a utilização desses problemas em sala de aula. A revisão de literatura foi realizada para conhecer pesquisas anteriores sobre a temática e suas nuances.

Produzir conhecimento é um ato coletivo e é realizado de forma contínua, quando propõe se investigar determinado assunto, conscientemente há inserção nessa busca, contribuindo ou contestando os resultados já obtidos. Compreendendo que toda pesquisa necessita investigar, em outros estudos, o estado atual da sua temática, para conhecer o que já foi discutido em termos metodológicos e teóricos, o que já foi questionado e os resultados encontrados.

Minayo (2001) determina que uma amostragem boa é aquela que possibilita abranger a totalidade do problema investigado em suas múltiplas dimensões. Deste modo, a investigação foi realizada com a aplicação de um Roteiro de atividades com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, discentes do turno da manhã, de duas escolas distintas, a primeira de Ensino Fundamental e a segunda que atua no Ensino Médio, na rede pública estadual, em um município do Vale do Paranhana, no Rio Grande do Sul.

Diante do contexto em que se inserem os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental optou-se em realizar duas atividades no roteiro, a primeira envolvendo o Problema do Celular perdido para desenvolver conceitos probabilísticos que seriam pré-requisitos para resolver as atividades envolvendo o Problema do Macarrão, essa primeira etapa foi desenvolvida durante duas horas aula. Na segunda etapa, foi aplicado o roteiro sobre o Problema do Macarrão, utilizando três horas aulas.

Na abordagem com o 3º ano do Ensino Médio não houve proposta de atividade introdutória, já que os alunos têm conhecimentos sobre probabilidades necessários para a atividade. Portanto, aplicou-se às atividades referentes ao Problema do Macarrão, utilizando três horas aulas para efetivar o plano.

Moreira (2003) destaca que o ensino tem como meta a aprendizagem e para verificar se houve aprendizagem é necessário avaliar. Esta prática visou validar as atividades, oportunizando a reflexão sobre os aspectos positivos e negativos da proposição de problemas de Probabilidade Geométrica na sala de aula.

A coleta de dados ocorreu através de relatórios produzidos pelos alunos no decorrer das atividades e de observações realizadas pela pesquisadora. Para tal, a metodologia foi embasada na Análise de Conteúdo, de acordo com Mendes e Miskulin (2017), que destacam as definições de Bardin (1977) e Franco (2008), na qual o objetivo é obter indicadores, quantitativos ou qualitativos, que possam inferir conhecimentos sobre as condições de produção/recepção dessas mensagens. As mensagens podem assumir diversas formas, como verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou provocada diretamente. Assim, foram discutidos os resultados da pesquisa, que inferiram na elaboração do Produto Educacional.

4.2. PRODUTO EDUCACIONAL

Fundamentado nesta pesquisa, foi elaborado o Produto Educacional intitulado Probabilidade Geométrica na Sala de Aula, com objetivo de proporcionar acesso à problemas com a temática em questão, contextualização dos mesmos, propostas de atividades que se desdobram buscando explorar os conceitos probabilísticos e geométricos. Este produto educacional é classificado como produto técnico-tecnológico (PTT1) - Material didático/instrucional, segundo sua especificidade.

4.2.1 Metodologia do Produto Educacional - Investigação Matemática

As propostas de atividades que compõem o Produto Educacional estão embasadas na metodologia da Investigação Matemática, ancorado na percepção de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), em que as investigações matemáticas têm como característica predominante o estilo de conjectura-teste-demonstração.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Assim, para o aluno, investigar não significa que tenha um problema difícil para solucionar, e sim, trabalhar com questões desafiadoras em que o processo é tão ou mais significativo do que a solução do problema em si.

Dessa forma, Cunha *et al.* (1995) afirma que as atividades matemáticas dos alunos reúnem elementos como: identificar questões, formular, testar e provar conjecturas, argumentar, refletir e avaliar. Destacando que:

> A realização de atividades de investigação em matemática são importantes porque elas: (a) constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa dessa ciência; (b) estimulam o envolvimento dos

> alunos, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por alunos de ciclos diferentes e níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (CUNHA *et al.*, 1995).

Investigar em matemática assume características próprias que conduzem à formulação de conjecturas, a busca por testar e provar e, por fim, sistematizar e refletir sobre as soluções encontradas. Quando se estuda um problema, o objetivo é resolvê-lo, mas enquanto tenta solucioná-lo, outras descobertas podem ser encontradas e até se revelarem tão importantes quanto, ou mais, do que a solução do problema original (SILVA, 2022).

No geral, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), uma tarefa investigativa ocorre em três fases: introdução da tarefa, realização da investigação e discussão dos resultados. Na introdução da tarefa, o professor propõe à turma a atividade a ser realizada de forma escrita ou oralmente, denominando de "arranque da aula" o momento inicial de motivação e organização do trabalho. Também é importante que os alunos compreendam a tarefa por intermédio do professor. Na segunda fase, ocorre a realização da investigação, definindo a forma de trabalho (individual ou em grupos). Nesta fase, os alunos exploram e formulam questões; fazem conjecturas, testando-as e reformulando-as; justificam; e há a avaliação do trabalho. A última fase é a discussão dos resultados para o grupo com a sistematização dos princípios e a reflexão sobre o trabalho realizado. Além disso, a realização de uma investigação matemática é dividida em quatro etapas principais, que ocorrem por vezes de forma simultânea, sem uma delimitação linear entre as fases, de acordo com o Quadro 3.

Quadro 3 - Etapas de uma investigação matemática

ETAPAS	DESCRIÇÃO DA ETAPA
1. Exploração e formulação de questões	● Reconhecer uma situação problemática ● Explorar a situação problemática ● Formular questões
2. Conjecturas	● Organizar dados ● Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
3. Teste e reformulação	● Realizar testes ● Refinar uma conjectura
4. Justificação e avaliação	● Justificar uma conjectura ● Avaliar o raciocínio ou resultado dele

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2003)

O professor tem um papel importante no desenvolvimento da investigação, ele desafia os alunos, avalia o progresso, raciocina matematicamente e apoia o trabalho deles. O professor planeja a atividade, escolhendo problemas desafiadores em potencial, preparando o ambiente e motivando os alunos no arranque da aula. No decorrer da investigação, o professor deve continuar desafiando os alunos para que a atividade avance, principalmente quando eles se deparam com dificuldades ou quando julgam o trabalho finalizado.

A avaliação da atividade investigativa possibilita perceber a evolução dos alunos e refletir sobre o seu trabalho, se é necessário reorganizá-lo. O retorno da avaliação para os alunos permite que saibam os aspectos que precisam de aprimoramento. Uma ferramenta de avaliação é o relatório produzido pelos alunos. O relatório explicita o trabalho desenvolvido, através da explicação do processo que resultou nas conclusões, anotando também as perguntas que surgiram, como organizaram os dados e os procedimentos que validaram as conjecturas.

Na investigação matemática são desenvolvidos processos cognitivos importantes, de acordo com Silva (2022). O primeiro é aprimorar as competências e habilidades que remetem ao pesquisador organizar dados, formular conjecturas e justificá-las. A segunda consequência é a que envolve a comunicação oral e escrita, ao discutir com os colegas e escrever os relatórios, o estudante é estimulado a utilizar de linguagem matemática para organizar seus raciocínios e comunicá-los de forma compreensiva.

Esses processos auxiliam na formação cidadã, desenvolvendo habilidades e preparo para a resolução de problemas nos contextos em que o aluno vive.

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nas seções a seguir, descreveremos as principais atividades realizadas durante a aplicação do produto educacional proposto e concomitantemente realizaremos a análise e discussão dos resultados. Na seção 5.1, a execução dos roteiros de atividades que compõem o Produto Educacional é detalhada, analisando as reações e compreensão dos alunos em relação ao Problema do Celular Perdido e ao Problema do Macarrão que são discutidas, destacando a interação entre os estudantes e os conceitos de probabilidade e geometria.

Na seção 5.2, denominada "Análise da Proposta", é feita uma avaliação crítica das atividades aplicadas. Aqui, são discutidas as observações feitas durante a execução das atividades, levando em consideração o nível de aprendizado dos alunos e a eficácia das abordagens utilizadas.

As conclusões indicam que o produto educacional foi relevante para validar as propostas como prática docente na Educação Básica. Destacamos a importância da metodologia da investigação matemática, enfatizando o papel do professor em desafiar os alunos, avaliar seu progresso e apoiar seu trabalho. Além disso, são ressaltadas as contribuições do produto educacional para o ensino de Probabilidade, integrando habilidades de geometria e probabilidade na resolução de problemas, enfatizando a eficácia da Probabilidade Geométrica como ferramenta pedagógica tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, proporcionando uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos.

5.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES SOBRE O PROBLEMA DO CELULAR PERDIDO E DO MACARRÃO

Os resultados descritos a seguir foram coletados durante a aplicação das atividades sobre probabilidade geométrica, propostas neste trabalho de acordo com a descrição na metodologia e no Produto Educacional (KAYSER, 2023).

As atividades foram realizadas com estudantes do Ensino Fundamental e Médio de duas escolas da região do Vale do Paranhana, em momentos distintos para cada grupo de estudantes. Foram escolhidas duas escolas, porque cada uma atua em determinada etapa do Ensino. A turma do 9º ano era composta por quatorze alunos e as atividades foram aplicadas em cinco períodos de cinquenta minutos, enquanto a turma do 3º ano do Ensino Médio tinha dezessete alunos e as atividades foram realizadas em três períodos de quarenta e cinco minutos cada.

Os instrumentos utilizados para coleta de dados durante as oficinas foram o diário de bordo preenchido pela pesquisadora durante e no final das atividades e as respostas escritas e comentadas pelos estudantes.

A primeira aplicação ocorreu com a turma do nono ano do ensino Fundamental, em conversa informal realizada com a professora titular constatou se que os estudantes não tinham conhecimentos sistematizados sobre Probabilidade, então, optou-se em propor primeiramente o problema: o Celular Perdido, para verificar quais conceitos são familiares aos alunos desta etapa e aprimorar a discussão sobre o tema.

A introdução da atividade foi realizada e os alunos foram agrupados para resolver o problema. Foi entregue uma folha com o problema e as questões, nesta folha os alunos registraram suas hipóteses, de forma descritiva. Conforme descrito na seção 2.6.5, o problema do Celular enuncia que: Miguel andou de bicicleta ao longo de um caminho de 8 km e perdeu seu celular em algum local aleatório deste caminho. Diante dessa situação, questiona-se:

a. Qual é a probabilidade de que o telefone de Miguel tenha caído durante o primeiro quilômetro do percurso?
b. Determine a probabilidade de Miguel ter deixado cair o telefone durante o primeiro quilômetro ou nos últimos três quilômetros.
c. Uma torre de telefonia celular está localizada no quilômetro quatro, exatamente no centro do caminho. A torre tem um alcance de 2,75 km. Se Miguel usa um segundo telefone celular para ligar para o telefone perdido, qual é a probabilidade de que o telefone perdido toque?
d. Qual alcance a torre precisaria ter para que o telefone perdido certamente toque?

Na questão “a”, nove alunos afirmaram que a probabilidade seria baixa e cinco alunos afirmaram que a probabilidade seria alta, a utilização desses termos ocorreu como uma forma de mensurar a probabilidade. Os argumentos foram dos mais distintos e a discussão entre os grupos predominou entre a análise do tamanho da parte analisada em relação ao comprimento total do caminho percorrido. Também houve discussões sobre as situações que não eram do conhecimento do problema como: a forma como se sobe na bicicleta, onde se carregava o celular, entre outras.

Na questão “b”, as respostas foram relacionadas a alternativa “a”. A maior parte da turma indicou que a probabilidade aumentaria porque além do primeiro quilômetro, também são considerados os últimos três.

Em relação a resolução da questão “c”, os alunos esboçaram a representação da antena no trajeto e sua área de abrangência. Demonstraram compreender que a probabilidade de encontrar o celular naquelas condições estava diretamente relacionada com a parte do caminho que haveria sinal de celular. E por consequência, na questão “d”, todos indicaram que precisaria ter 4 km de alcance para que houvesse certeza de que o encontro ocorreria.

Após realizarem os registros, o grande grupo foi reunido para socializar as respostas, argumentar e instigar novas conjecturas. A pesquisadora realizou questionamentos sobre qual a importância de determinar o espaço analisado, ou seja, o espaço amostral.

Mesmo sem o conhecimento de Probabilidade, a maior parte dos alunos conseguiu inferir com sucesso suas respostas, o que reforça que a probabilidade geométrica pode ser um meio para o trabalho com probabilidade, porque também traz elementos visuais, embora os espaços amostrais sejam contínuos, existe uma familiaridade em aferir resultados diante dos conhecimentos já adquiridos de geometria.

Na segunda etapa da proposta, o Problema do Macarrão foi o norteador. Como no roteiro de atividades, a introdução ocorreu com a conversa com os alunos, organização em grupos e com o experimento prático da quebra do macarrão em três pedaços de forma aleatória. E depois de quebrado, buscassem formar um triângulo.

Nesta etapa, observou-se que os estudantes buscavam a simetria entre as partes, alheios à orientação que a quebra fosse ao acaso, sem obrigatoriedade de observar medidas específicas. Assim, todos os alunos formam triângulo, e questionaram se aqueles triângulos, de lados díspares, seriam considerados para o experimento.

Diante da situação, perguntou se sempre é possível formar um triângulo, todos os alunos disseram que sim, então seguiu a proposta de apresentar o GeoGebra com a proposta de construir o conceito de desigualdade triangular.

Nesta etapa, em duplas e trios, os estudantes formularam diversas conjecturas sobre a condição de existência do triângulo. No grande grupo, houve a discussão sobre essas conjecturas e por fim a sistematização do conhecimento através do enunciado do conceito de desigualdade triangular.

A proposta de discussão para o nono ano foi centrada em comparar os resultados do experimento empírico e da solução matemática, a pesquisadora apresentou a resolução aos alunos. Mesmo apresentando a questão da desigualdade triangular, os alunos continuaram apontando quase todos os casos como favoráveis. Ao término da apresentação da resolução, onde apenas 0,25 dos casos são favoráveis, foram questionados quais hipóteses consideravam para diferença de uma situação para outra. A turma apresentou dificuldades em considerar hipóteses visualizando a representação no plano cartesiano.

Na aplicação com o Ensino Médio, os alunos demonstraram ter consolidadas as noções sobre triângulos e sua classificação quanto ao comprimento dos lados, foi resolvido o experimento prático, mesmo aparecendo triângulos escalenos, equiláteros e isósceles, todos os alunos foram triângulos.

Quando apresentado a representação no GeoGebra, os alunos foram escolhendo ternas diversas para efetivar as testagens de suas hipóteses, o primeiro grupo sugeriu que a soma de dois lados deveria ser maior que o comprimento do terceiro, fez a testagem, alternando os comprimentos dos três lados. Os estudantes discutiam entre si, enquanto rolavam o controle deslizante e o triângulo sumia.

No grande grupo, para discussão dos resultados, houve consenso de que as condições de existência de um triângulo quanto à medida dos lados, deveriam respeitar a desigualdade entre a soma de dois lados e a medida do terceiro lado.

No arranque da segunda etapa da aula, quando questionado a probabilidade de que três segmentos (pedaços de macarrão), partidos ao acaso, formam triângulo, os alunos tomaram uma postura diferente da turma do Ensino Fundamental, questionando-se sobre a desigualdade triangular interferida e consideraram que não seriam 100% dos casos, como ocorreu no experimento prático. Porém, assim como relatou Wagner (1997), os valores sugeridos ficaram entre 80% e 70%. Os alunos utilizaram os valores referentes a porcentagem devido a concepções de probabilidade prévias.

A pesquisadora sugeriu que encaminhássemos a resolução matemática, optando pela explanação do cálculo, com a inferência dos estudantes quanto aos procedimentos escolhidos, de acordo com o relatado no Produto Educacional. A turma foi participativa, demonstrando compreender o uso dos pares ordenados, equações e representação no plano cartesiano, com a solução, ficaram surpresos com a probabilidade de 0,25.

Questionados sobre porque essa discrepância entre uma situação e outra, um aluno destacou que ninguém tentou quebrar o macarrão com uma parte muito pequena, trazendo a discussão sobre o quanto interferimos nas variáveis dos experimentos.

Esse raciocínio conduz a uma reflexão sobre a variedade de tamanhos possíveis e, por conseguinte, ao espaço amostral contínuo que a Probabilidade Geométrica abrange. Considerando que em um plano existem infinitos pontos e, consequentemente, infinitos pares ordenados, surge a questão sobre até que ponto o experimento consegue limitar essas possibilidades.

Outro ponto considerado foi que ao partir um espaguete em três partes, o processo não ocorre ao acaso ou de forma aleatória, os alunos do nono ano não pareceram identificar esse conceito e discorrer sobre o tema, reforçando que o desenvolvimento de atividades nas quais se discutam processos determinísticos e aleatórios são relevantes para o discernimento de tais conceitos.

5.2 ANÁLISE DA PROPOSTA

As atividades aplicadas do produto educacional foram relevantes para a validação das propostas como prática docente que pode ser executada na Educação Básica. Foram desenvolvidas de acordo com a realidade que as turmas escolhidas se encontravam, em níveis de aprendizagem distintos, por isso foi planejado a aplicação diferenciada entre as turmas.

Na aplicação, percebeu-se que os estudantes do nono ano ainda não tinham desenvolvido os conhecimentos prévios de geometria e de probabilidade, o que interferiu no aprofundamento da discussão sobre o Problema do Macarrão, em contraponto, a discussão do Problema do Celular Perdido foi produtiva, acredita-se que a justificativa para tal é que os alunos dominavam os conceitos sobre medidas de comprimento e prontamente fizeram a relação entre essas medidas com a probabilidade do evento ocorrer.

Na turma do terceiro ano do Ensino Médio, a aplicação transcorreu como o esperado e oportunizou as discussões instigadas pelo Problema do Macarrão e que permeiam a Probabilidade Geométrica.

Assim, é relevante a aplicação do Produto Educacional no Ensino Básico aprimorando e aprofundando habilidades e competências dos estudantes. O uso da metodologia da investigação matemática em sala de aula foi enriquecedor para o desenvolvimento da autonomia, incentivo a pesquisa, formulação de hipóteses e argumentação por parte dos alunos, corroborando para que os estudantes aprimorem a habilidade de se comunicar matematicamente e de refletir sobre seu trabalho (PONTE *et al.*, 2003; SILVA, 2022).

Neste movimento, o professor tem que desempenhar um "conjunto de papéis bem diversos: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles" (PONTE *et al.*, 2003). Esses papéis são desafiadores para o professor e também podem ser traduzidos como realização profissional, ao observar a evolução dos estudantes no decorrer das atividades propostas.

Deste modo, o produto educacional: Probabilidade Geométrica na Sala de Aula apresenta contribuições para o ensino de Probabilidade na apresentação de problemas que aliam habilidades e competências de geometria e probabilidade na sua resolução. A sistematização apresentada mostra as potencialidades da Probabilidade Geométrica como agente para o ensino de Probabilidade seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Situações envolvendo fenômenos não-determinísticos fazem parte do cotidiano e o estudo de Probabilidade desenvolve habilidades e competências que auxiliam na sua análise, compreensão e avaliação. Na Probabilidade, espaços amostrais discretos e contínuos fazem parte do conjunto de situações aleatórias, embora conceitos e problemas envolvendo espaços discretos, denominada também como Probabilidade Clássica, sejam abordados com maior frequência no Ensino Básico, com ênfase no Ensino Médio.

Entre as abordagens na Teoria das Probabilidades, a Probabilidade Geométrica resolve problemas de natureza contínua, utilizando medidas de comprimento, área e volume em situações em que não é possível quantificar os casos favoráveis em razão dos casos possíveis.

Integrar conhecimentos geométricos e probabilísticos e ampliar as possibilidades de promover o ensino de Probabilidade fomentou esta pesquisa. Assim, buscou-se conhecer alguns aspectos da história da Probabilidade e as diferentes abordagens que se desenvolveram, compreendendo que existem visões diferentes sobre contextos probabilísticos que influem na tomada de decisões de acordo com as variáveis disponíveis.

Conhecendo as abordagens, foi possível aprofundar os estudos sobre a Probabilidade Geométrica, impulsionados no artigo escrito por Wagner (1997) e desenvolver o produto educacional tencionando responder à questão de pesquisa: como a Probabilidade Geométrica pode contribuir para o Ensino de Matemática na Educação Básica?

As contribuições da Probabilidade Geométrica para o Ensino de Matemática são a integração entre a probabilidade e a geometria; desenvolver o raciocínio probabilístico; visualização dos espaços amostrais e outros conceitos probabilísticos através da representação geométrica; propor a aprendizagem de matemática com a aplicação de problemas instigadores.

Analisar as potencialidades dos problemas com a temática da Probabilidade Geométrica que favorecem o ensino de matemática foi o meio utilizado na pesquisa. Neste sentido, se destacaram o Problema do Macarrão com seu enunciado instigante e suas diversas possibilidades, como explorar o conceito de desigualdade triangular, discussão sobre o experimento prático e a solução matemática, e os conceitos probabilísticos, como acaso e espaço amostral.

A proposta de desenvolver atividades por meio da metodologia da investigação matemática, utilizando os problemas do Celular Perdido e do Macarrão corroboram com os objetivos da pesquisa e foram validadas com as práticas realizadas nas turmas de Ensino

Básico, percebendo o quão importante é enriquecer a discussão sobre os conceitos de probabilidade, sejam intuitivos ou contraintuitivos.

Assim, a análise e desenvolvimento de atividades com problemas de Probabilidade Geométrica contribui para o Ensino de Matemática na Educação Básica, através da produção materiais significativos que possam ser aplicados em sala de aula visando o aprimoramento do raciocínio probabilístico e matemático.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Rodrigo Ricardo Cavalcanti de. **O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade**. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/20828. Acesso em 12 ago. 2022.

ALCÂNTARA, Ricardo Ribeiro. **Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios**. 2014. 47 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Curso de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014. Disponível em: file:///home/chronos/u-2ad423a96621b3199fde3ad6873fb79140ca9780/MyFiles/Downloads/1438556879.probabilidade_geometrica_em_lancamento_aleatorios%20(7).pdf. Acesso em: 06 jan. 2022.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan D.; ROA, Rafael. Training Teachers to Teach Probability. **Journal Of Statistics Education**, [S.L.], v. 12, n. 1, p. 1-15, jan. 2004. Informa UK Limited. http://dx.doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10691898.2004.11910715?needAccess=true. Acesso em: 15 dez. 2021.

BATANERO, Maria del Carmem; SERRANO, Luis Serrano. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. **Uno: Revista de didáctica de las matemáticas**, n. 5, p. 15-28, 1995. Disponível em: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf. Acesso em: 16 jan. 2023.

BISPO, Davi Marques. **A geometria no ensino da probabilidade.** 2018. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/34412. Acesso em: 13 fev. 2022.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO (2017). **Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria de Educação, Brasília.

BRASIL, Ministério da Educação, (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. Children's understanding of probability: A literature review (full report). **London: Nuffield Foundation**, 2012. Disponível em: https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 10 set. 2022.

CAETANO, Paulo Antonio Silvani; PATERLINI., Roberto Ribeiro. **Jogo dos discos: módulo I**: matemática na prática. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

CAMPELO, Alexandre Francisco. **A Desigualdade triangular e a desigualdade de Jensen.** 2013. 43 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/5784, acesso em: 12 dez. 2021.

CANAVEZI, Leandro Souza. **Uma proposta lúdica com utilização do GeoGebra para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8120. Acesso em: 12 ago. 2022.

CAVALCANTE, Igor Dutra. **Probabilidade geométrica: uma abordagem através do Método Monte Carlo e Geometria fractal**. 2017. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Introduction aux situations aléatoires dès le Collège : de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II**. 2001. 500 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Didática da Matemática, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/287808247_Introduction_aux_situations_aleatoires_des_le_College_de_la_modelisation_a_la_simulation_d'experiences_de_Bernoulli_dans_l'environnement_informatique_Cabri-geometre_II. Acesso em: 25 fev. 2023.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática.**, Florianópolis, v. 3, n. 2, p. 50-67, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092. Acesso em: 17 dez. 2022.

CUNHA, Helena; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João (1995). Investigações matemáticas na sala de aula. **Actas do ProfMat95.** p. 161-167, Lisboa: APM, 1995. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Joao-Ponte-2/publication/242306039_Investigacoes_matematicas_na_sala_de_aula/links/0deec5303188c7114d000000/Investigacoes-matematicas-na-sala-de-aula.pdf. Acesso em: 03 jun. 2022.

DE VASCONCELOS, Veraciv Brabo; DE VASCONCELOS, Gabriel Brabo; CHAQUIAM, Miguel. Um percurso pela história da probabilidade. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 31-46, 2022.

EISEN, M. **Introduction to mathematical probability theory**. New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.

FLICK, Uwe. **Introdução a metodologia de pesquisa: um guia para iniciantes**. Porto Alegre: Penso, 2013. Tradução de Magda Soares.

GONDIM, Hellen Fernandes. **Probabilidade e Probabilidade Geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico**. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2243. Acesso em: 16 set. 2021.

HERNÁNDEZ-SOLÍS, Luis Armando; BATANERO, Carmen; GEA, María M.; ÁLVAREZ-ARROYO, Rocío. Comparing probabilities in urns: a study with primary school students. **Uniciencia**, [S.L.], v. 35, n. 2, p. 1-18, 31 jul. 2021. Universidad Nacional de Costa Rica. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9.

KAYSER, Tatiane A. Rodrigues. **Probabilidade Geométrica na Sala de Aula**. 2023. Produto Educacional da Dissertação (Mestrado Profissional em Ciências Exatas) - Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas, Santo Antonio da Patrulha, 2023.

JESUS, Marco Antônio de**. Probabilidade geométrica com abordagem na esperança Matemática**. 2018. 73f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Arraias, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/11612/937. Acesso em: 12 ago. 2022.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MOREIRA, M. A. **Abandono da narrativa, ensino centrado no aluno e aprender a aprender criticamente**. Ensino, Saúde e Ambiente, v. 4, n. 1, 30 abr. 2011.

MOREIRA, M.A. Pesquisa em Ensino: Aspectos Metodológicos. **Actas del PIDEC, n.** 1, p. 05-38, Burgos, Espanha: Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos, 1999. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquisaemensino.pdf. Acesso em: 15 mai. 2022.

MOREIRA, Andréa de Paula Machado**. Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio.** 2015. 1 recurso online (xxii, 180 p.) Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. Disponível em: https://hdl.handle.net/20.500.12733/1626167. Acesso em: 13 jan. 2023.

PONTE, J. P. do; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POSSANI, Claudio. Probabilidade geométrica: história, paradoxos e rigor. **ComCiência [online].** 2012, n. 143. ISSN 1519-7654.

RITTER, Denise. **O ensino de probabilidade geométrica: Desafios e possibilidades**. 2017. 226f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria - RS.

SAMPIERI, Roberto H.; COLLADO, Carlos F.; LUCIO, María del Pilar B. **Metodologia de Pesquisa.** Grupo A, 2013. E-book. ISBN 9788565848367. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565848367/. Acesso em: 12 out. 2022.

SANTALO, Luis A. Origen y desarrollo de la geometria integral. **Revista de la Universidad Catolica del Peru**, Lima - Peru, outubro de 1944. Disponível em: https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/53510/origen%20y%20desarrollo%20de%20la%20geometria%20integral.pdf?sequence=1. Acesso em: [data de acesso].

SILVA, Francisco Heber da. **Discutindo probabilidade geométrica no ensino básico**. 2013. 42 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de (Pós-Graduação em Matemática) – Área de Concentração: Estatística, Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró, 2013. Disponível em: https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Francisco-Heber.pdf. Acesso em: 12 ago. 2022.

SPIEGEL, Murray R.; SCHILLER, John J.; SRINIVASAN, R A. **Probabilidade e estatística.** (Schaum). Grupo A, 2013. E-book. ISBN 9788565837477. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837477/. Acesso em: 09 out. 2022.

SILVA, Breno Puertas de Freitas e. **Investigações matemáticas como metodologia de ensino para uma aprendizagem significativa**. 2022. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6574&id2=171055580. Acesso em: 25 maio 2022.

TUNALA, Nelson. Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 20, p. 16-22, jan. 1992. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/20/5.htm. Acesso em: 20 set. 2021.

VIANA, Fernando Cesar de Abreu. **Estudo e aplicações de Probabilidade Geométrica e paradoxos**. 2013. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2020. Disponível em: http://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177. Acesso em: 27 out. 2021.

VIALI, Lorí. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

VIDARTE, J.; CHACHAPOYAS, N.; CAVALARI, M. F. O paradoxo de Bertrand e os axiomas de Kolmogorov: uma proposta para a formação de professores. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 24, p. 84-103, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i24.5078. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5078. Acesso em: 7 ago. 2023.

WAGNER, E. Probabilidade Geométrica – O problema do macarrão e um paradoxo famoso. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, v.34, p. 28-35, 1997. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/34/6.htm. Acesso em: 10 set. 2021.