MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

AS CONTRIBUIÇÕES DAS TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA BASEADA EM ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Raira Rössner da Silva

Santo Antônio da Patrulha
2023

Raira Rössner da Silva

AS CONTRIBUIÇÕES DAS TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA BASEADA EM ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientadora: Profª. Dra. Karin Ritter Jelinek

Santo Antônio da Patrulha
2023

Ficha Catalográfica

S586c Silva, Raira Rössner da.

As contribuições das tendências em educação Matemática para o ensino de Álgebra no ensino fundamental: uma proposta baseada em atividades experimentais / Raira Rössner da Silva. – 2023.

104 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Santo Antônio da Patrulha/RS, 2023.

Orientadora: Dra. Karin Ritter Jelinek.

1. Ensino de Álgebra 2. Atividades Experimentais 3. Pensamento algébrico I. Jelinek, Karin Ritter II. Título.

CDU 37:512

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Raira Rössner da Silva

AS CONTRIBUIÇÕES DAS TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA BASEADA EM ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Karin Ritter Jelinek (Orientadora)
Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Profª. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior
Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Santo Antônio da Patrulha
2023

RESUMO

Este trabalho origina-se da necessidade de discutir sobre as metodologias utilizadas atualmente no ensino de Álgebra na Educação Básica e também da expectativa de propor uma sequência de atividades didáticas que podem contribuir com uma aprendizagem satisfatória dos estudantes e auxiliar os professores de Matemática da Educação Básica a desenvolverem atividades de ensino mais atrativas e dinâmicas, incentivando uma maior participação dos estudantes na construção de seus conhecimentos. Inicialmente é realizada uma exposição das Tendências em Educação Matemática e suas possibilidades de inserção e aplicação em diferentes conteúdos e contextos escolares, e em seguida é realizada uma busca e análise de teses e dissertações que propõem o ensino de Álgebra através de atividades fundamentadas nestas tendências. Na sequência do trabalho, realizamos o estudo baseado na história do desenvolvimento da Álgebra e nas definições e possibilidades de desenvolvimento das características conhecidas atualmente como pensamento algébrico. De posse de uma fundamentação teórica ampla e consistente, propomos atividades didáticas baseadas na metodologia Atividades Experimentais para o ensino de Álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental e que contemplam as habilidades definidas pela Base Nacional Comum Curricular para esta unidade temática e para o nível de ensino ao qual foi realizada a aplicação. Após a elaboração da proposta didática, validamos nossa pesquisa através da aplicação de parte desta sequência didática baseada em atividades experimentais em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, obtendo resultados que consideramos satisfatórios para o ensino de Álgebra e a aprendizagem dos estudantes em seu primeiro contato com o tema. Finalizamos com a produção de um produto educacional composto por uma sequência de atividades experimentais para o ensino de Álgebra que podem ser abordadas em diferentes turmas do Ensino Fundamental, produto educacional este que pode auxiliar as práticas docentes dos professores de Matemática que tenham interesse em utilizar, modificar e aplicar este material didático.

Palavras-chave: Ensino de Álgebra. Atividades Experimentais. Pensamento algébrico.

ABSTRACT

This work originates from the need to discuss the methodologies currently used in teaching Algebra in Basic Education, as well as the expectation of proposing a sequence of didactic activities that can contribute to satisfactory student learning and assist Mathematics teachers in Basic Education in developing more attractive and dynamic teaching activities, encouraging greater student participation in the construction of their knowledge. Initially, an exposition of Mathematics Education Trends and their possibilities of insertion and application in different content and school contexts is carried out, followed by a search and analysis of theses and dissertations that propose the teaching of Algebra through activities based on these trends. In the course of the work, we conducted a study based on the history of the development of Algebra, and on the definitions and possibilities of development of the characteristics currently known as algebraic thinking. With a broad and consistent theoretical foundation, we propose didactic activities based on the Experimental Activities methodology for teaching Algebra in the final grades of Elementary Education, which encompass the skills defined by the National Common Curricular Base (Base Nacional Comum Curricular - BNCC) for this thematic unit and for the level of education to which the application was made. After the elaboration of the didactic proposal, we validated our research by applying part of this didactic sequence based on experimental activities in a 7th grade group of Elementary School. As an outcome, we had results that we consider satisfactory for the teaching of Algebra and the students' learning in their first contact with the subject. We conclude with the production of an educational product composed of a sequence of experimental activities for teaching Algebra that can be approached in different groups of Elementary Education. This educational product can assist the teaching practices of Mathematics teachers who are interested in using, modifying, and applying this didactic material.

Keywords: Algebra teaching. Experimental Activities. Algebraic thinking.

Lista de Quadros

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas

BDTD - Biblioteca Brasileira Digital de Teses e Dissertações

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

IBICT - Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia

MA - Mestrado Acadêmico

MEC - Ministério da Educação

MP - Mestrado Profissional

MPEM - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

PCM - Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD - Plano Nacional do Livro Didático

PPGECE - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

PPGECEM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

PPGEM - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PPGMAT - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TICs - Tecnologias de Informação e Comunicação

UEM - Universidade Estadual de Maringá

UEPB - Universidade Estadual da Paraíba

UFFS - Universidade Federal da Fronteira Sul

UFG - Universidade Federal de Goiás

UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora

UFPel - Universidade Federal de Pelotas

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFSCAR - Universidade Federal de São Carlos

UNESP - Universidade Estadual Paulista

UNIVATES - Universidade do Vale do Taquari

USP - Universidade de São Paulo

UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Segundo Passos e Nacarato (2018, p.120), a Educação Matemática, enquanto campo de pesquisa e de formação profissional, pode ser considerada um fértil campo de produção de conhecimento e que aponta caminhos para as práticas de ensinar e aprender Matemática. Sobre a formação de professores de Matemática da Educação Básica, mais especificamente aqueles que trabalham com as séries iniciais, os mesmos autores ainda consideram "que os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, na sua grande maioria, provêm de cursos de formação que deixam sérias lacunas conceituais para o ensino de Matemática"(PASSOS e NACARATO, 2018, p.120). Alinhado a isto, Lima (2007) destaca que o professor não está recebendo uma formação adequada para exercer sua importante tarefa. Para o autor, o problema mais grave na formação do futuro professor de Matemática é o fato de que este entra na faculdade sem ter recebido uma boa formação na Educação Básica, apresentando algumas lacunas de conhecimentos da Matemática que irá ensinar futuramente.

Nóvoa (2007), ao emitir sua opinião sobre a distância que separa o excesso dos discursos da pobreza das práticas, declara que pretende sugerir a necessidade de adotar pontos de vista que não se limitem a reproduzir acriticamente os discursos da evidência. Ainda sobre esta questão, o autor argumenta que:

> Não conseguiremos evitar a “pobreza das práticas” se não tivermos políticas que reforcem os professores, os seus saberes e os seus campos de atuação, que valorizem as culturas docentes, que não transformem os professores numa profissão dominada pelos universitários, pelos peritos ou pela “indústria do ensino” (NÓVOA, 2007, p. 5).

Este pensamento vai ao encontro das ideias de Tardif & Raymond (2000) quando estes destacam que os saberes profissionais dos professores são diferentes dos conhecimentos universitários. Para estes autores, os saberes dos professores são temporais, uma vez que são adquiridos no contexto de uma história de vida e história de vida escolar, plurais e heterogêneos porque provém de diversas fontes, são ecléticos e sincréticos e visam, simultaneamente, diferentes objetivos. Ademais, os saberes desenvolvidos na prática docente são preponderantes sobre os conhecimentos adquiridos nos cursos de formação de professores, mas isto de modo algum significa dizer que a formação e as produções acadêmicas não são importantes para o desenvolvimento de um trabalho docente com qualidade. No entanto, conforme Passos e Nacarato (2018, p. 119) “as produções dos últimos anos não têm influenciado os elaboradores de políticas públicas, nem conseguido chegar às salas de aula, pois com tantas demandas e prazos a cumprir, os professores realizam aquilo que é possível, dentro de suas condições de trabalho”.

Os autores supracitados concordam que a profissão docente possui uma categoria de conhecimentos que a distingue das demais, pois, para ensinar não é suficiente somente conhecer os conteúdos da sua disciplina, também é essencial ter conhecimentos inerentes ao ato de ensinar, e, como acontence em qualquer profissão, a prática permite ao docente o seu constante aprimoramento, revendo conceitos, ajustando metodologias, reorganizando atividades, ou seja, aprendizados estes que só são adquiridos com a experiência. Neste sentido, Bondía (2002) nos convida a refletir e pensar a educação sobre o ponto de vista do par experiência/sentido. Conforme dito por Bondía (2002):

> A experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm: requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço (BONDÍA, 2002, p. 24).

Em outros termos, a experiência, aquilo que gera transformação e que contribui para o nosso aperfeiçoamento profissional, tem sido cada vez mais rara justamente pelo excesso de opinião, falta de tempo e excesso de trabalho. Portanto, essas leituras nos ajudam a (re)pensar a formação docente como processo dinâmico, incerto e complexo. Apesar da urgência, é necessário que os professores possuam o tempo e as condições humanas e materiais necessárias para ir mais longe. O trabalho de formação deve estar próximo da realidade escolar, das necessidades de aprendizagem dos estudantes e dos problemas sentidos pelos professores.

1.1 Justificativa do estudo e problema de pesquisa

Um dos grandes desafios da Educação Matemática, em nossa atual estrutura de ensino é elaborar estratégias de ensino que mostrem aos alunos a importância que a Matemática tem, tanto na escola como no seu cotidiano, importância essa que vai além do domínio dos conteúdos estudados e na sua utilização para resolver problemas reais, mas sim, na capacidade intelectual que o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático proporciona ao estudante. Em vista disso, Allevato e Onuchic (2009) afirmam que:

> A Matemática sempre desempenhou um papel importante na sociedade. Esse papel é hoje mais significativo e, possivelmente, será ainda mais no futuro. As pessoas nem sempre pensam matematicamente e tampouco percebem que, se o fizessem, poderiam tomar melhores decisões. A falta dessa percepção pode ser uma falha tanto da Matemática que ensinamos quanto do modo como a ensinamos. Frequentemente, o ensino de Matemática forma estudantes com concepções demasiadamente simplistas e estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas (ALLEVATO, ONUCHIC, 2009, p.143).

Essas concepções simplistas e estratégias mecânicas que as autoras comentam podem ser percebidas em relação a muitos conteúdos de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Como exemplo, podemos citar tranquilamente o ensino de equações do segundo grau (no nono ano do Ensino Fundamental) e progressões aritmética e progressões geométricas (no primeiro ano do Ensino Médio), que geralmente são abordados com foco no ensino das respectivas fórmulas resolutivas em cada caso estudado, muitas vezes ficando de lado os fundamentos de cada conteúdo e as suas respectivas propriedades e aplicações. Além disso, alguns conteúdos, como a Geometria, são deixados de lado em detrimento de outros, como a Álgebra, o que não garante que o aprendizado do conteúdo mais visto seja também mais satisfatório. As dificuldades apresentadas pelos estudantes brasileiros em relação ao aprendizado de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental são frequentemente abordadas em pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem de Álgebra (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; ALMEIDA; SANTOS, 2018; CAMPOS; FARIAS, 2020; LINS;GIMENES, 2005) e os baixos resultados que estes estudantes apresentam em avaliações de larga escala, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), também refletem esta realidade. Essas pesquisas e estes dados mostram a necessidade de se discutir e propor ideias para a melhoria do ensino de Álgebra na Educação Básica, que segundo Lins e Gimenes (2001):

> Essa necessidade vem do fato de que parece haver muita resistência, na comunidade, em se reavaliar a posição da educação algébrica na escola, resistência bastante maior do que aquela que enfrenta a proposta de mudanças na educação aritmética: já mencionamos que a introdução da álgebra é o grande momento de corte na educação matemática escolar, e que a reação usual é deixar para depois, ao invés de antecipar essa introdução. (Lins e Gimenes, 2001, p. 11).

Esta pesquisa surgiu com base nesses dados e a partir das vivências em sala de aula, em que as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos algébricos ficam evidentes, especialmente com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Sabemos, da realidade em sala de aula que, na grande maioria das vezes, os alunos resolvem exercícios mecanicamente, mas não sabem explicar como chegaram a determinado resultado ou porque ele é resolvido de determinada forma, muito menos fazem relações com os conhecimentos que já possuem e utilizam em seu cotidiano. Nesse sentido, esta pesquisa tem como propósito apresentar, aplicar e validar uma proposta pedagógica que busca uma melhoria no ensino de Álgebra e a motivação para a sua realização está diretamente ligada à nossa prática profissional.

O problema de pesquisa que norteia este trabalho é: Como se dá o ensino de Álgebra e quais as contribuições das atividades experimentais nos processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental?

Esse questionamento encontra respaldo na Base Nacional Comum Curricular (2018):

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BRASIL, 2018, p. 265).

Para responder o problema de pesquisa, este trabalho tem como objetivo geral verificar se pesquisas sobre o ensino de Álgebra, publicados no Brasil de 2016 a 2021, justificam o emprego das atuais Tendências em Educação Matemática para o ensino de Álgebra e, a partir desses resultados, propor uma sequência de atividades experimentais com o objetivo de desenvolver as habilidades desta unidade temática previstas pela BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental.

E, para isso, foram listados os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e apresentar pesquisas relacionadas às Tendências em Educação Matemática e ao ensino de Álgebra que foram desenvolvidas no país nos últimos 6 anos;

- Elaborar e aplicar uma sequência de atividades que possibilite aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental o aprendizado de Álgebra através de atividades experimentais;

- Descrever e analisar de que forma ocorreu a compreensão dos alunos no estudo de conteúdos algébricos por meio das atividades experimentais;

- Elaborar um produto educacional com atividades experimentais sobre Álgebra que ofereça suporte e que contribua com a prática docente.

Para tanto, este projeto de dissertação é composto por oito capítulos. No primeiro capítulo, correspondente a este, apresentamos as considerações iniciais, a problemática e os objetivos da pesquisa e a escolha da abordagem metodológica.

O segundo capítulo, destinado ao ensino de Álgebra, foi dividido em dois subcapítulos, sendo que no primeiro apresentamos um breve história do desenvolvimento da Álgebra, iniciando com os povos que resolviam problemas que envolviam quantidades desconhecidas até culminar na simbologia algébrica atual. O segundo subcapítulo trata das concepções da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico, e serão utilizados fundamentalmente os documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC) e autores/pesquisadores que tratam do ensino e aprendizagem de Álgebra, tais como Fiorentini, Miorin e Miguel (1993); Almeida e Santos (2018) e Campos e Farias (2019).

No terceiro capítulo, discorremos sobre algumas Tendências em Educação Matemática (Resolução de Problemas, Etnomatemática, Uso de Jogos, Uso de Tecnologias, Uso da História da Matemática e Investigação Matemática), com o intuito de compreender melhor as pesquisas realizadas contendo propostas para o ensino de Álgebra com base nessas tendências.

O quarto capítulo apresenta o estado da arte das pesquisas acadêmicas brasileiras publicadas entre 2016 e 2021 na Biblioteca Brasileira Digital de Teses e Dissertações (BDTD) que abordam o uso das atuais Tendências em Educação Matemática para o ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

No quinto capítulo, abordamos as atividades experimentais para o ensino de Álgebra que foram desenvolvidas como forma de produto educacional. Estabeleceu-se que o produto educacional seria uma sequência de atividades experimentais que foram orientadas pelos seguintes princípios:

- as atividades devem ser desenvolvidas com recursos ou materiais de fácil acesso aos professores;
- disponibilizar uma versão para o professor e uma versão para o aluno;
- as atividades visam desenvolver as habilidades da unidade temática Álgebra previstas pela BNCC.

O sexto capítulo trata da descrição das atividades experimentais aplicadas, apresentando nossas considerações e dificuldades durante a realização desta etapa e culminando na discussão dos resultados numa perspectiva qualitativa e quantitativa.

As considerações finais sobre a pesquisa foram apresentadas no sétimo capítulo, no qual será exposto uma análise geral da pesquisa e também dos resultados obtidos na aplicação das atividades experimentais propostas, levando em consideração as percepções da autora e as referências teóricas seguidas pela mesma. Por fim, listamos as referências bibliográficas que embasaram esta pesquisa.

1.2 Delineamento metodológico

Do ponto de vista da abordagem do problema, o presente trabalho consiste em uma pesquisa qualitativa, uma vez que há uma predominância de categorizações, de análises mais dissertativas.

Quanto aos procedimentos técnicos empregados no desenvolvimento, consiste em uma pesquisa bibliográfica que, de acordo com Gil (2002, p. 44), é desenvolvida a partir de materiais já elaborados, recorrente de pesquisas anteriores, em documentos como livros, teses e dissertações, periódicos científicos, anais de encontros científicos e periódicos de indexação e resumo. O mesmo autor ainda afirma que "A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente." (GIL, 2002, p .45).

Quanto a seus objetivos gerais, a pesquisa é de natureza exploratória (GIL, 2002, p. 41), tendo por finalidade propiciar maior familiaridade sobre o tema em questão, promover a construção de hipóteses, além do aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Ainda, segundo Severino (2007), "A pesquisa exploratória busca apenas levantar informações sobre um determinado objeto, delimitando assim um campo de trabalho, mapeando as condições de manifestação desse objeto." (SEVERINO, 2007, p. 123).

A partir dos resultados obtidos neste estudo bibliográfico, foi elaborada uma sequência de atividades experimentais sobre conteúdos algébricos para os anos finais do Ensino Fundamental. Algumas das atividades experimentais foram criadas pela autora deste trabalho e outras atividades apresentadas foram extraídas e adaptadas de coleções de livros didáticos aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2018-2019 e em consonância com a BNCC. Considerando a presença significativa dos livros didáticos no cotidiano da sala de aula, sendo utilizado por boa parte dos professores como roteiro principal no preparo e condução de suas aulas, é importante considerar a importância e a influência deles no processo de ensino.

O livro didático é considerado um instrumento e um importante aliado no cotidiano da sala de aula, e sua influência não pode apresentar obstáculos ao projeto pedagógico da escola e à proposta didática realizada pelo professor. Em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> Dentre os diferentes recursos, o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 67).

Diante disso, é importante que ocorra o acompanhamento e a organização do processo de ensino e aprendizagem vivenciados na sala de aula por alunos e professores ao utilizar livros didáticos. De posse do livro didático escolhido, cabe ao professor definir prioridades, localizar e decidir quais aspectos das ações educacionais demandam mais apoio, modificar a sequência de tópicos sugerida, ampliar ou mesmo reduzir a quantidade das atividades. Tais prerrogativas conferem ao professor liberdade de ensinar ao contemplar adaptações a aspectos estruturais de sua realidade.

Vale ressaltar que não iremos realizar uma análise dos livros didáticos adotados pelo MEC atualmente por não se tratar de um dos objetivos principais desta pesquisa, mas acreditamos que cada professor pode escolher o livro didático que mais se aproxime a sua prática docente, ficando a critério do docente realizar as adaptações e complementações necessárias durante o planejamento e execução das atividades planejadas em cada aula, de modo a tornar o ensino e aprendizagem o mais eficiente posssível.

Para a validação do Produto Educacional intitulado Guia de Atividades Experimentais para o Ensino de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, as atividades propostas foram desenvolvidas em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual na turma em que a autora atua como docente, evidenciando a necessidade de a pesquisa trazer resultados para sua prática pedagógica e verificar as potencialidades e contribuições deste tipo de atividade no Ensino da Álgebra e no desenvolvimento do pensamento algébrico.

A turma em que a pesquisa foi aplicada possui 23 alunos matriculados, sendo 14 meninas e 9 meninos, que são atendidos no turno da manhã. A disciplina de Matemática possui 7 períodos semanais, com duração de 50 minutos cada um. A idade média da turma é de 13 anos, porém, dois alunos, repetentes, já têm 14 anos. Há três alunos com laudo de deficiência intelectual, sendo que dois deles não são alfabetizados. O período de desenvolvimento das atividades em sala de aula aconteceu entre os dias 6 e 15 de dezembro e tivemos 6 encontros, num total de 10 períodos. As atividades propostas e a análise dos resultados obtidos serão expostos detalhadamente no capítulo 6.

2 O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

2.1 História do desenvolvimento da Álgebra

A Álgebra é considerada um dos componentes mais antigos da história da Matemática e lida com o estudo e a manipulação formal de incógnitas e variáveis. Ao longo da história, as ideias de Álgebra foram sendo experimentadas e aperfeiçoadas e, assim como as demais áreas da Matemática, o desenvolvimento da Álgebra não foi feito por uma única pessoa ou sociedade. Para que possamos entender as diferentes contribuições dos povos no desenvolvimento da Álgebra através da criação de diferentes notações algébricas, vamos usar a classificação dada por Eves (2011):

> Em 1842, G. H. F. Nesselmann caracterizou, com propriedade, três estágios no desenvolvimento da notação algébrica. Primeiro se tem a Álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a Álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da Álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia Matemática formada de símbolos que aparentemente nada tem a ver com os entes que representam (EVES, 2011, p. 206).

Dos dados históricos de que dispomos, sabemos que povos antigos, que viveram por volta de dois milênios a.C., como os povos da região da Mesopotâmia (sumérios, babilônios, acadianos, ...) e os egípcios, resolviam problemas que envolviam quantidades desconhecidas, sendo assim os pioneiros no desenvolvimento do que entendemos hoje como Álgebra. Logicamente, tanto os egípcios quanto os babilônios não criaram sistemas simbólicos ou mesmo sincopados, enquadrando-se assim na definição de Álgebra retórica, na qual os problemas propostos e as soluções eram descritas em linguagem corrente, exceto pela representação de valores numéricos, uma vez que ambos os povos já apresentavam avanços consideráveis de notação. Vale lembrar que os egípcios realizam suas escritas em papiro, e entre os artefatos históricos encontrados destacam se o papiro de Rhind, ou papiro de Ahmes, e o papiro de Moscou, com números representados por símbolos que se enquadravam em uma notação decimal. Já os babilônios usavam a escrita cuneiforme, fazendo entalhes em tábuas e tabletes de argila tais como os tabletes YBC 7289 e Plimpton 322, com um sistema numérico sexagesimal posicional extremamente avançado se considerado a época de sua criação e utilização.

Os egípcios apresentavam uma Matemática sofisticada no que se refere à decomposição de frações em frações unitárias e alguns feitos consideráveis na resolução de problemas geométricos, como uma boa aproximação para o valor de π, que era utilizado como equivalente a $3\frac{1}{6}$. A maioria dos problemas egípcios encontradas nos papiros referem-se a problemas aritméticos, ou seja, problemas envolvendo objetos concretos, como pães e cerveja. No entanto, segundo Boyer (2012), há outros para os quais a designação de algébricos é adequada pois

> pedem o que equivale a soluções das equações lineares $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de "aha", ou pilha. O Problema 24, por exemplo, pede o valor de pilha sabendo que pilha mais um sétimo de pilha dá 19 (BOYER, 2012, p. 32-3).

A solução dada pelos egípcios é bem diferente do que a que estamos acostumados a utilizar hoje em dia com a notação de equação linear expressa em função de x. Basicamente, o escriba Ahmes tenta o valor 7 para a incógnita, obtendo o valor 8 para pilha mais um sétimo de pilha. Em seguida, utiliza o fato de que $19 = 8\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$, e multiplica 7 pelo valor entre parênteses, obtendo a resposta $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ para o valor de pilha, valor este que somado com sua sétima parte $\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$ resulta no valor 19. Este método utilizado para a resolução deste problema é conhecido como "método da falsa posição", e era muito utilizado pelos egípcios para resolver estes problemas de natureza "algébrica".

> Embora o método da falsa posição fosse o geralmente utilizado por Ahmes, há um problema (Problema 30) em que a equação $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x = 37$ é resolvida fatorando o lado esquerdo da equação e dividindo 37 por $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, o resultado sendo $16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$ (BOYER, 2012, p. 33).

Neste ponto, é fácil perceber que tanto a nossa linguagem atual para representar equações do primeiro grau quanto o agrupamento numérico em representação decimal facilitam em muito o cálculo feito pelos egípcios, embora a exatidão do cálculo e a representação em somas de frações unitárias seja notável. O mesmo ocorre ao analisarmos as equações resolvidas pelos povos mesopotâmicos, principalmente os babilônios. Segundo Boyer (2012, p. 44), os babilônios consideravam as equações lineares demasiadamente elementares para dar muita atenção, apresentando em muitos casos apenas o valor da resposta. Os dois exemplos a seguir ilustram essa situação:

> Em outro problema em um texto da Babilônia antiga, achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas, chamadas respectivamente de "primeiro anel de prata" e "segundo anel de prata". Se as denotarmos por x e y, em nossa notação as equações são $\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = 1$ e $\frac{6x}{7} = \frac{10y}{11}$. A resposta é dada laconicamente em termos da regra
>
> $\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72}$ e $\frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}$

> Em outro par de equações, parte do método de resolução está incluído no texto. Aqui $\frac{1}{4}$ da largura + comprimento = 7 mãos e comprimento + largura = 10 mãos. A solução é achada primeiramente substituindo cada "mão" por 5 "dedos" e então observando que uma largura de 20 dedos e um comprimento de 30 dedos satisfazem a ambas as equações (BOYER, 2012, p. 44).

É interessante notar que os dois problemas citados acima e resolvidos pelos babilônios com o uso de uma técnica mais experimental e expressa através de texto retórico, poderiam ser facilmente resolvidos (e com resposta condensada) através de um sistema de equações do primeiro grau em duas variáveis, método este que, nos dias atuais, é ensinado geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental.

Todavia, os babilônios são comumente mencionados nos estudos sobre história da Matemática não pelas equações lineares, mas sim pelos seus estudos notáveis envolvendo equações quadráticas e equações cúbicas. Vale ressaltar que os babilônios utilizavam tábuas ou tabelas com valores de quadrados e cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas, facilitando assim as resoluções das equações. A exemplo disso, Boyer (2012, p. 45) afirma que cúbicas puras como $x^3 = 0;7,30$ eram resolvidas por referência direta às tabelas de cubos e raízes cúbicas, na qual a solução $x = 0;30$ era encontrada, ambos valores escritos na base 60 (na base decimal teríamos $x = 0,5$ e $x^3 = 0,125$). Vejamos agora um exemplo de problema babilônico envolvendo cálculo de área e a resolução dada pelos mesmos.

> Por exemplo, um problema pede um lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. A solução desse problema, equivalente a resolver $x^2 - x = 870$, é expressa assim:
> Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado (BOYER, 2012, p. 44).

Considerando a equação do exemplo citado na forma $x^2 - px = q$, é fácil perceber que a resolução em forma de receita dada pelos babilônios pode ser escrita na nossa linguagem simbólica atual com $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$, que após uma simples resolução da potenciação e da soma de frações no radicando, equivale a atual fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau. Semelhante a este caso, os babilônios também resolviam equações quadráticas da forma $x^2 + px = q$ e $x^2 + q = px$, ajustando apenas a subtração de $\frac{p}{2}$ no primeiro caso, ficando da forma $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$ e a subtração de q no segundo caso, resultando em $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2}$, ambas em nossa notação algébrica atual.

Além destes exemplos, muitas das tábuas em argila encontradas do período dos babilônios evidenciam que as resoluções dadas por este povo, se considerada o pensamento algébrico envolvido, são extraordinárias e admiráveis. A tábua conhecida como Plimpton

322 traz quatro colunas e quinze linhas, em que duas das colunas representam um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo, e a outra coluna notável traz os valores do que chamamos hoje de quadrado da secante do ângulo oposto ao cateto dado. Além dos valores precisos das frações sexagesimais, os valores dos ângulos ao qual foi relacionado a secante variam nos quinze triângulos de 45º a 31º com variação aproximada de 1º em 1º de uma linha para outra. Não bastasse isso, todos os valores das ternas pitagóricas contidas na Plimpton 322 (considerando o cateto a e a hipotenusa c conhecidos, então o cateto b é facilmente encontrado pelo teorema de Pitágoras) obedecem a construção moderna de ternas pitagóricas expressas algebricamente por $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$, para valores p e q inteiros e $p > q$.

Deste modo, fica evidente o conhecimento notável dos babilônios na área da Matemática que, mesmo sem ter uma simbologia algébrica facilitadora como temos atualmente e que foi desenvolvida mais de 3000 anos depois da sua época, desenvolveram retoricamente regras de cálculo que podemos considerar até mesmo como generalizações ou fórmulas bem definidas e que em alguns momentos permite-nos imaginar que nem todos os problemas resolvidos eram de natureza prática relacionados a situações de comércio, medições de terrenos ou relacionados à geometria, mas sim de natureza mais abstrata, teórica e algébrica.

Passando para a contribuição dos gregos no desenvolvimento da Álgebra, iremos analisar aqui uma das obras mais importantes já produzida em todos os tempos: *Os elementos*, de Euclides (c.325-c.265 a.C.). Este livro contém em sua maior parte, muitos dos conceitos de geometria e aritmética que são estudados na Educação Básica e até mesmo em cursos do ensino superior. Um dos fatores que faz *Os elementos* ser tão respeitado e utilizado até hoje é o fato da sistematização, organização e demonstração das propriedades e teoremas descritos em cada capítulo. Até então não existia o apelo pela Matemática demonstrativa como aparece no texto de Euclides. Outro diferencial desta obra é o fato de as demonstrações realizadas serem totalmente geométricas, escritas de maneira retórica, nas quais tanto incógnitas quanto números eram representados por segmentos de reta, ou área de uma determinada superfície ou volume, respectivamente. Alguns livros da obra *Os elementos* responsáveis pela caracterização da Álgebra desenvolvida pelos gregos ser chamada de Álgebra geométrica. No livro II, por exemplo, é apresentado, através de uma composição de segmentos e retângulos, a propriedade que algebricamente conhecemos como distributiva da multiplicação em relação a adição, neste caso representada facilmente pela expressão $a(b+c+d) = ab+ac+ad$. Nos livros V e VI são expressas, geometricamente, demonstrações das propriedades comutativa e associativa da multiplicação. Esta relação entre a geometria de Euclides e a Álgebra simbólica de hoje é descrita por Boyer (2012), que afirma que:

> O livro II de Os elementos, que é uma Álgebra geométrica, servia aos mesmos fins que nossa Álgebra simbólica. Não há dúvida que a Álgebra moderna facilita grandemente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é sem dúvida verdade que um geômetra grego conhecendo os quatorze teoremas da "Álgebra" de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensuração do que um geômetra experimentado de hoje (BOYER, 2012, p.92).

Além disso, as fórmulas que conhecemos hoje como produtos notáveis e costumam ser ensinadas no 8º ano do Ensino Fundamental, aparecem na obra de Euclides com representação e demonstração geométrica e texto desenvolvido em linguagem corrente.

Após o período dominado pela geometria na Grécia, até os tempos de Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio de Perga (c.262-c.190 a.C), começou a aparecer obras de destaque na trigonometria, sendo fundado as bases da trigonometria que temos atualmente. Também surgiu uma obra, um pouco distinta de todas as outras que surgiram até o momento, com uma escrita diferente e abordando problemas de aritmética. Esta obra é conhecida como *Aritmética* de Diofanto (c. 221-305), cuja descrição geral é dada por Eves (2011):

> A Aritmética é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. A parte remanescente do trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo graus. Só uma cúbica muito particular é resolvida. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema (EVES, 2011, p. 207).

O que difere esta obra dos demais trabalhos dos gregos, é o fato de que para a resolução dos problemas propostos não era utilizado a abordagem geométrica, como a que vimos na obra de Euclides. Para termos uma noção da profundidade e elegância dos problemas expostos na obra *Aritmética* de Diofanto, vamos listar aqui alguns exemplos trazidos por Eves (2011).

> Problema 28, Livro II: Encontre dois números quadrados tais que seu produto acrescido de um deles resulta um número quadrado. (Resposta de Diofanto: $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{7}{24}\right)^2$.)
> Problema 6, Livro III: Encontre três números tais que a soma de todos é um quadrado e a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado. (Resposta de Diofanto: 80,320,41.)

> Problema 7, Livro III: Encontre três números em progressão aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado. (Resposta de Diofanto: $120\frac{1}{2}, 840\frac{1}{2}, 1560\frac{1}{2}$.)
> Problema 10, Livro IV: Encontre dois números tais que sua soma é igual à soma de seus cubos. (Resposta de Diofanto: $\frac{5}{7}$ e $\frac{8}{7}$.)
> Problema 21, Livro IV: Encontre três números em progressão geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um número quadrado. (Resposta de Diofanto: $\frac{87}{7}$, $\frac{144}{7}$, e $\frac{256}{7}$.)
> Problema 1, Livro VI: Encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo. (Resposta de Diofanto: 40, 96, 104.) (EVES, 2011, p.208).

Certamente a resolução de alguns destes problemas, mesmo com a utilização das ferramentas algébricas que temos disponíveis nos tempos atuais, poderia apresentar dificuldades devido ao grau de indeterminação de alguns enunciados. Mas para além do fato de produzir uma obra com problemas algébricos sofisticados e interessantes, uma das contribuições mais lembradas da obra de Diofanto é a criação do que chamamos hoje de Álgebra sincopada, ou seja, uma transição dos problemas totalmente retóricos para o início do uso de uma notação simbólica, mesmo que primitiva e um pouco confusa.

De acordo com Eves (2011) e Boyer (2012), Diofanto usava um símbolo parecido com a letra grega sigma ς para uma incógnita. Para o quadrado de um número desconhecido usava Δ^Y, símbolo formado pelas duas primeiras letras maiúsculas da palavra grega *dúnamis* (ΔYNAMIΣ), que significa potência e para a incógnita elevada ao cubo usava K^Y, símbolo formado pelas duas primeiras letras maiúsculas da palavra grega *kúbos* (KYBOΣ), que significa cubo. Para a quarta potência (quadrado-quadrado) usava a composição $\Delta^Y\Delta$, para a quinta potência (quadrado-cubo) usava ΔK^Y e para a sexta potência (cubo-cubo), $K^Y K$.

Diofanto também utilizava um sinal de "menos" semelhante a um V invertido com a bissetriz traçada nele, agrupando todos os termos negativos após o sinal de menos. A explicação é que este símbolo seria composto pela junção de Λ e I, letras da palavra grega *leipis* ($\Lambda EI\Psi I\Sigma$), que significa "menos". Neste trabalho, representaremos o sinal de menos somente por Λ, por não encontrarmos, neste editor de texto, o símbolo anteriormente designado. Para representar o valor de uma constante, Diofanto usava o símbolo $\dot{M}$, uma abreviação da palavra grega *monades* ($MONA\Delta E\Sigma$), que significa "unidades", seguido do coeficiente numérico apropriado (EVES, 2011, p. 209).

Considerando que as letras do alfabeto grego também representavam números nos textos de Matemática, as expressões atuais x^3+13x^2+5x e x^3-5x^2+8x-1 eram expressas por $K^Y\alpha\Delta^Y\iota\gamma\varsigma\varepsilon$ e $K^Y\alpha\varsigma\eta\Lambda\Delta^Y\varepsilon\dot{M}\alpha$ e a leitura pode ser feita como "incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5" para a primeira expressão e "incógnita ao cubo 1, incógnita 8" menos "incógnita ao quadrado 5, unidades 1" na segunda expressão. E, dessa forma, a Álgebra retórica se tornou Álgebra sincopada. (EVES, 2011, p. 209).

Partindo para a análise da Álgebra desenvolvida pelos chineses, inicialmente devemos comentar que estes já usavam um sistema decimal posicional, com numeração em barras e a marcação do zero sendo feita por uma casa vazia, sendo este sistema, segundo Eves (2011, p. 242) o sistema de numeração mais avançado do mundo de então, tendo desempenhado um papel importante no caráter da Matemática chinesa antiga, que girava em torno de cálculos. As operações aritméticas eram realizadas com extrema maestria através de tábuas de contar. As obras que expressam a Matemática chinesa tinham a característica de coleções de problemas específicos. Além dos trabalhos que mostram a paixão dos chineses pelo cálculo do valor de π, alguns problemas podem ser traduzidos na nossa linguagem atual por equações lineares e alguns deles eram resolvidos semelhantemente ao que usamos hoje aplicando os conhecimentos de matrizes, usando apenas os coeficientes e resolvendo através de um método que seria o nosso escalonamento atual. Algumas obras apresentavam o método de resolução dos problemas de determinado formato, que poderiam ser aplicados a problemas da mesma natureza. Em consonância com Boyer (2012), a obra *Shushu juizhang* (Tratado matemático em nove partes) de Qin Jiushao (c.1202-1261), marca o ápice da análise indeterminada na China, com a invenção de regras de rotina para resolver congruências simultâneas.

> Nessa obra, ele também achou a raiz quadrada de 71.824 por passos semelhantes ao do método de Horner. Como 200 como primeira aproximação de uma raiz de $x^2 - 71.824 = 0$, ele diminuiu as raízes dessa equação de 200, obtendo $y^2 + 400y - 31.824 = 0$. Para esta última equação, ele achou 60 como aproximação, e subtraiu 60 das raízes, chegando a uma terceira equação, $z^2 + 520z - 4.224 = 0$, de que 8 é raiz. Logo o valor de x é 268 (BOYER, 2012, p. 148).

Podemos perceber que este método descrito acima de tomar $y = x - 200$ e em seguida $z = y - 60$, exige uma compreensão profunda da manipulação de equações, mostrando o desenvolvimento algébrico apresentado pelos chineses. Em outra obra, de 1303, chamada *Precioso espelhos dos quatro elementos*, em que os quatro elementos (céu, terra, homem e matéria) representavam quatro incógnitas da mesma equação, o autor utiliza um método idêntico ao exposto acima para resolver equações quadráticas e cúbicas, além de apresentar equações simultâneas e equações de grau até quatorze, representando, segundo Boyer (2012, p.149), o ápice do desenvolvimento da Álgebra chinesa. A obra traz também somas de séries, mas sem apresentar demonstrações e também o triângulo aritmético ou triângulo de Pascal, mostrando o conhecimento chinês sobre os coeficientes binomiais muito antes do aparecimento na Europa.

Por fim, citamos um problema exposto em uma obra bem mais antiga, talvez do séc. III ou IV e que, segundo Eves (2011, p. 244), nele encontramos a semente do famoso Teorema Chinês dos Restos da teoria dos números. O problema pede para encontrar um certo número desconhecido, e menor possível, que quando divido por 3 deixa resto 2, por

5 deixa resto 3 e por 7 deixa resto 2. Quem está familiarizado com o Teorema Chinês dos Restos sabe que este método envolve algumas manipulações algébricas sucessivas e até mesmo complexas, sendo difícil imaginarmos a resolução sendo feita sem a notação algébrica atual, mostrando a importância do trabalho desenvolvido pelos chineses na área da Álgebra.

Tentando analisar a evolução da Álgebra respeitando uma cronologia, mesmo sabendo que a evolução da Matemática não se deu de forma linear e que muitos povos desenvolveram estudos matemáticos idênticos, mas em épocas distintas e sem contato entre as civilizações, passaremos agora para a análise da Álgebra indiana e, a seguir, a Álgebra árabe. O período notável de produção indiana na área da Matemática está compreendido entre os séculos V e XII. Os hindus desenvolveram, além do sistema de numeração decimal posicional com símbolos semelhantes aos que usamos hoje, algoritmos para a realização das quatro operações aritméticas e tabelas trigonométricas com valores bem precisos, semelhantes ao trabalho de Ptolomeu.

As primeiras obras eram escritas em forma de versos, que descreviam regras para o cálculo de um determinado problema geral. Como exemplo, transcreveremos a seguir dois versos indianos, o primeiro, para encontrar o número de termos de uma progressão aritmética, e o segundo, uma simples regra de três.

> Multiplique a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia a raiz quadrada disso, subtraia duas vezes o primeiro termo, divida pela razão, some um, divida por dois. O resultado será o número de termos.
> Na regra de três, multiplique o fruto pelo desejo e divida pela medida.
> O resultado será o fruto do desejo (BOYER, 2012, p. 154).

As duas regras citadas acima em linguagem corrente e um pouco confusa, são facilmente resolvidas nos tempos atuais com as notações algébricas simples e eficazes tanto para progressões aritméticas e geométricas quanto para regras de três e problemas envolvendo proporcionalidade.

Um dos matemáticos indianos de maior expressão foi, certamente, Brahmagupta que viveu por volta de 628 d.C. Utilizando um tipo de Álgebra sincopada, com abreviações de palavras para representar as operações Matemáticas e as variáveis, Brahmagupta foi o primeiro a produzir uma aritmética sistematizada com números negativos e o zero. Além disso, suas contribuições na área da Álgebra são consideráveis, visto que ele encontrou soluções gerais para as equações quadráticas, considerando as duas raízes mesmo uma delas sendo negativa, e também encontrou todas as soluções inteiras para a equação linear diofantina, enquanto o próprio Diofanto se contentava em dar uma solução particular.

> Os hindus sincoparam sua Álgebra. como Diofanto, indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, "produto") depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karana*, "irracional") antes da quantidade. Brahmagupta denota a incógnita por *yā* (de *yāvattāvat*, "tanto quanto"). Os inteiros conhecidos eram antecedidos de *rū* (de *rūpa*, "número puro"). As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. Assim, uma segunda incógnita poderia ser denotada por *kā* (de *Kālaka*, "preto") e $8xy + \sqrt{10} - 7$ poderia ser escrita como *yā kā 8 bha ka 10 rū 7* (EVES, 2011, p. 256).

A notação sincopada usada pelos hindus pode e deve ser considerada um passo importante no desenvolvimento da Álgebra, mas fica claramente evidente a vantagem da notação simbólica que temos hoje em relação às notações analisadas até o momento.

Passando para a análise das contribuições árabes, começamos percebendo que a Álgebra desenvolvida por eles era retórica e, com exceção dos algarismos hindus que foram adotados e muito difundidos por uma das obras do matemático Mohammed ibn Musa Al-Khwarismi (c.780-c.850), tanto os textos quanto as resoluções dos problemas eram escritos em linguagem corrente. Uma das contribuições importantes dos árabes é o que chamamos de Álgebra geométrica, pois muitas das resoluções de equações eram dadas de forma geométrica, como o caso das quadráticas que eram resolvidas pelo método de completar quadrados em que o autor descreve a "receita" de completamento do quadrado e, no caso das cúbicas, a solução dada por Omar Khayyam (c.1050-1122) era através da interseção de uma circunferência com uma hipérbole equilátera ou de duas hipérboles equiláteras (EVES, 2011, p. 263).

O livro mais famoso de Al-Khwarismi é *Hisob al-jabr wa'l muqabalah* e a palavra *al-jabr* se transformou no que usamos hoje como Álgebra. Em tradução livre, *al-jabr* significa algo como "restauração" ou "completação", e *muqabalah* seria algo como "redução" ou "equilíbrio" (Boyer, 2012, p. 166), representando assim os processos de balanceamento e cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação que usamos para resolver equações atualmente. Além disso, as palavras algarismos e algoritmos são derivadas do nome do autor. A Álgebra de Al-Khwarismi apresenta exemplos de equações do segundo grau e os respectivos procedimentos para resolução e depois realiza as demonstrações geométricas de cada caso. Na equação quadrática $x^2 + 21 = 10x$, Al-Khwarismi considera as duas raízes como resposta, em que a sua resolução em notação atual recai na equação $x = 5 \pm \sqrt{25 - 21}$, e neste caso ele escreve o seguinte argumento:

> É preciso que vocês entendam também que quando tomam a metade das raízes nessa forma da equação e então multiplicam a metade por ela mesma; se o que resulta da multiplicação for menor que as unidades mencionadas acima como acompanhando o quadrado, então vocês têm uma equação (BOYER, 2012, p. 166).

O texto acima, que pode parecer estranho em uma primeira leitura, basicamente quer dizer que, para que seja possível encontrar as duas raízes da equação, o que chamamos hoje de discriminante deve ser maior do que zero. No exemplo acima, a referência de Al-Khwarismi é o fato do 25 ser maior que 21, pra que essa diferença seja positiva, ou seja a "metade da raiz" é o 5, (pois $10x$ pode ser lido como 10 raízes), a "multiplicação da metade por ela mesma" é o $5 \times 5 = 5^2 = 25$ (que seria o $\frac{b^2}{4a^2}$ na nossa quadrática atual da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes a, b, c), as unidades seriam a constante 21, e a subtração $25 - 21 = 4$ fornece o discriminante, em que o cálculo da raiz quadrada é possível e, neste caso, é 2. Generalizando, se considerarmos a equação quadrática da forma $x^2 + q = px$, a resolução de Al-Khwarismi seria $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2}$, exatamente a mesma expressão dada também de maneira retórica pelos babilônios cerca de 2500 anos antes dos árabes chegarem nesta solução. Mesmo assim, a Álgebra de Al-Khwarismi, por apresentar resoluções sistematizadas e com demonstrações geométricas dos resultados das equações, mesmo que desenvolvidas de forma retórica, sem a utilização de uma simbologia moderna e facilitadora, é um grande marco na história da Matemática e, principalmente, da Álgebra.

Por fim, chegamos ao ponto de realizar a análise da evolução da Álgebra na Europa. O período entre os séculos XII e XIV é considerado pelos historiadores como um período de transição, em que ocorreu uma grande parte das traduções para o latim dos textos dos gregos, tais como *O Almagesto* de Ptolomeu, *Os elementos* de Euclides, *Aritmética* de Diofanto, e a clássica *Álgebra* de Al-Khwarismi. No século XIII, o nome de grande destaque foi sem dúvida alguma Leonardo de Pisa (c.1175-1250), conhecido como Fibonacci. Em seu livro *Liber Abaci* de 1202, usava a Álgebra retórica, mas defendia o uso dos algarismos hindu-arábicos. Usava bastante as frações unitárias, porém, às vezes, apresentava as respostas com uma notação não muito comum em relação aos textos da época. Outro matemático de destaque, agora do século XIV, Johann Muller (1436-1476), conhecido como Regiomontanus também utilizava a Álgebra retórica. Só no final do século XV é que iremos perceber uma obra que apresenta algo novo no que diz respeito ao desenvolvimento da Álgebra.

> Em 1494 apareceu a primeira edição impressa da *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, comumente conhecida apenas por *Sūma*, do frade franciscano Luca Pacioli (c. 1445-1509). [...] A Álgebra da *Sūma* chega até equações quadráticas e contém muitos problemas que levam a essas equações. A Álgebra é sincopada, com o uso de abre-

> viações como p (de *piu*, “mais”) para indicar a adição, m (de *meno*, “menos”) para indicar a subtração, *co* (de *cosa*, “coisa”) para a incógnita, *ce* (de *censo*) para x^2, *cu* (de cuba) para x^3 e *cece* (de *censo-censo*) para x^4. A igualdade às vezes é indicada por *ae* (de *aequalis*) (EVES, 2011, p.298).

A partir desta obra, começaram a aparecer com cada vez mais frequência novas notações algébricas, novos símbolos para incógnitas e potências, novos sinais para as operações Matemáticas, fato este que começa a contribuir para o nascimento de uma era de inovações e avanços, não só na Matemática, mas nas ciências em geral. A exemplo disso, em 1514, o matemático holandês Vander Hoecke usou $+$ e $-$ como símbolos de operações algébricas, em 1557 Robert Recorde (c. 1510-1558) apresenta duas barras paralelas e horizontais para representar o sinal de igual (Eves, 2011, p.298-301), em 1525 Christoff Rudolff (c. 1500-1545) apresenta em sua obra o símbolo moderno para raízes e em 1544, Michael Stifel (c. 1487-1567) expôs uma nova abordagem sobre números negativos, radicais e potências e conseguiu reduzir os casos de equações quadráticas ao que parecia ser uma forma única (BOYER, 2012, p. 199).

Na sequência dos acontecimentos, em 1545 Girolamo Cardano (1501-1576) publica em 1545 a obra *Ars magna*, na qual apresenta a resolução algébrica das equações cúbica e equações quárticas. Mesmo utilizando uma Álgebra sincopada e um texto que nos dias atuais apresentaria uma leitura extremamente cansativa, o feito de Cardano causou impacto sobre os algebristas, pois foi algo imprevisto e notável para a época. Cardano aborda as equações cúbicas do mesmo modo que Al-Khwarismi abordou as quadráticas, resolvendo um formato de cada vez. Por exemplo, a equação que na notação moderna seria representada por $x^3 + px = q$, para ele era um caso descrito com “um cubo e coisa igual a um número”, e o caso $x^3 = px + q$ era descrito como “cubo igual a coisa e número”. No caso de uma resposta expressa na notação atual como $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, a resposta de Cardano era “5p : R m : 15 e 5m : R m : 15”, em que R representa a raiz quadrada e p e m representam os sinais de mais e menos, respectivamente (BOYER, 2012, p. 202).

A partir desse momento, grande parte dos avanços em Matemática e, em particular, na Álgebra, foram construídos através de contribuições de vários estudiosas, em obras que podemos até classificar como sucessivas, mesmo sabendo que muito dos conhecimentos produzidos nesta época eram independentes entre si. A título de exemplo, podemos citar o matemático Rafael Bombelli (c. 1526-1573), que de posse das resoluções de Cardano, vislumbrou aquilo que viria ser tratado como números imaginários conjugados. Do mesmo modo, François Viète (1540-1603) encontrou outro método de calcular as raízes das equações cúbicas, e se não fosse a recusa em aceitar coeficientes e raízes negativas, teria descoberto a relação entre coeficientes e raízes de equações polinomiais, o que viria mais tarde a se chamar de relações de Girard. Sobre a questão das notações, Viète introduziu uma notação simples para representar equações, usando vogais maiúsculas para representar uma quantidade desconhecida, e consoantes para representar os coeficientes ou valores conhecidos. Não fosse o uso de abreviações de palavras para representar potências, a notação de Viète seria semelhante ao que temos na Álgebra moderna.

Para finalizar esta análise histórica, vale lembrar que os avanços a partir do século XVII em todas as áreas da Matemática forma gigantescos e receberam contribuições de muitos matemáticos, como por exemplo René Descartes (1596-1650), no tratamento analítico das equações, e posteriormente, Leonard Euler (1707-1783), que além de ter desenvolvido inovações em praticamente todos os ramos da Matemática, contribuiu significativamente para o uso da simbologia moderna nas equações, funções, no cálculo e aritmética. Diante do exposto, fica evidente que a Álgebra que temos atualmente nos possibilita calcular e resolver muitos problemas instigantes e também muitos problemas aplicados a situações reais, possibilidade esta que muitos não tiveram no passado e consequentemente não conseguiram avançar nos seus estudos ou aprimorar as suas obras. Por isso, é extremamente necessário, desde o ensino a nível de Educação Básica, valorizarmos significativamente e indubitavelmente a simbologia algébrica que temos hoje e o que ela nos permite evoluir como pensadores e como sociedade em geral.

2.2 O desenvolvimento do pensamento algébrico

Ao pensarmos em como ensinar Álgebra na Educação Básica, é indispensável esclarecermos algumas definições e concepções do que é Álgebra. De acordo com as literaturas pesquisadas, esta definição e/ou classificação não é algo fácil de fazer e notadamente não é consenso entre os pesquisadores desta área. Citaremos brevemente algumas destas definições e concepções de Álgebra para que possamos ter um ponto de partida sobre o que devemos abordar no ensino da Álgebra neste trabalho.

Em um primeiro momento, com base na pesquisa de Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), que, analisando os aspectos históricos da Álgebra,

> [...] considera como ponto de referência o momento em que se teve a clara percepção de que o objeto de investigação desse campo do conhecimento da Matemática ultrapassava o domínio exclusivo do estudo das equações e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em quantitativos, isto é, sobre estruturas Matemáticas tais como grupos, anéis, corpos etc (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p. 78).

Os mesmos autores reforçam que neste momento, o debate evidente versava sobre duas concepções: "por um lado, uma tendência tradicional que insistia em considerar a Álgebra como uma Aritmética universal generalizada, e por outro lado, uma tendência moderna para a qual a Álgebra consistia em um sistema simbólico postulacional" (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p.79). A partir desta análise, os autores enquadram a concepção de Álgebra em quatro classificações, que podemos listar de uma forma bem sintética como:

> 1) [...] processológica, encara a Álgebra como um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas;
> 2) [...] linguístico-estilística: encara a Álgebra como uma linguagem específica, artificialmente criada com o propósito de expressar concisamente aqueles procedimentos específicos a que fizemos referência anteriormente. [...] Identifica, então o obstáculo com a linguagem natural e a condição de ruptura com a possibilidade de criação de uma "nova linguagem", isto é, de uma linguagem adequada àquela forma específica de pensamento.
> 3) [...] linguístico-sintático-semântica, é aquela que, como a anterior, concebe a Álgebra como uma linguagem específica e concisa, mas cujo poder criativo e instrumental não reside propriamente em seu domínio estilístico, mas em sua dimensão sintático-semântica. É apenas quando os signos dessa linguagem específica adquirem o caráter de símbolos, ou seja, é apenas quando se estabelece ao nível semântico, a sutil e fundamental distinção entre o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas ou contínuas, determinadas e particulares, e o uso da letra para representar genericamente quantidades genéricas, que essa linguagem revela sua dimensão operatória ou sintática, isto é, sua capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas estritamente simbólicas.
> 4) [...] linguística-postulacional, é aquele que concebe a Álgebra como a ciências das estruturas gerais comuns a todas as partes da Matemática, incluindo a Lógica.[...] De fato, para essa concepção, o caráter simbólico do signo é ampliado, isto é, ele passa a representar não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas também entidades Matemáticas que não estão, necessariamente, sujeitas ao tratamento quantitativo, tais como estruturas topológicas, as estruturas de ordem, a estrutura de espaço vetorial etc (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p. 82-83).

De uma maneira mais geral, podemos perceber que as concepções trazidas pelos autores evidenciam que a Álgebra é um tipo específico de linguagem que pode ser considerada criada artificialmente, em que as técnicas, métodos, processos e símbolos carregam consigo um sentido próprio que visam trazer, junto com as generalizações e propriedades operatórias, a possibilidade de resolver problemas de diversas áreas da Matemática, podendo ser considerada uma ferramenta fundamental no desenvolvimento da Matemática ao longo dos tempos. Mantendo certo alinhamento às concepções de Álgebra definidas por Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Usiskin (1994) também traz quatro concepções que listaremos a seguir:

> Concepção 1: A Álgebra como aritmética generalizada.
> Concepção 2: A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.
> Concepção 3: A Álgebra como estudo de relações entre grandezas.
> Concepção 4: A Álgebra como estudo das estruturas (USISKIN, 1994, p.13-15).

Resumindo as concepções listadas acima, Usiskin (1994) afirma que na concepção de Álgebra como generalizadora de modelos não se tem a sensação de se ter incógnitas, visto que são generalizadas relações conhecidas entre números. Já no que se refere à concepção 2, o autor esclarece que

> Nesta concepção de Álgebra, as variáveis são ou incógnitas ou constantes. Enquanto as instruções-chave no uso de uma variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, neste caso as instruções-chave são simplificar e resolver (USISKIN, 1994, p. 15).

Quando considerado a Álgebra como estudo das relações entre grandezas, o autor menciona que a distinção desta concepção das demais é que neste caso, as variáveis variam (USISKIN, 1994 p. 15), mostrando a relação da Álgebra com as funções e fórmulas que relacionam duas ou mais grandezas. Por fim, ao considerar a Álgebra como estudo das estruturas, o autor comenta que não se trata apenas de considerar a Álgebra estudada nos cursos superiores, que envolve o estudo de grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, mas sim de reconhecer a Álgebra como estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios, na qual a variável torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades (USISKIN, 1994, p. 18). Evidentemente, esta concepção refere-se à Álgebra abstrata, em que o que importa realmente é a manipulação e fatoração das expressões algébricas, demonstração de fórmulas e propriedades gerais, independente dos valores que a variável pode assumir.

Diante do exposto até o momento, podemos perceber que a Álgebra, definida e desenvolvida como uma linguagem própria, utilizada tanto para generalizar situações e propriedades envolvendo números conhecidos e também para resolver problemas através de equações, fórmulas e manipulações através de operações e simbologia específica, quanto para estabelecer um sistema de propriedades genéricas manipuladas com um grau de abstração maior, é um dos ramos da Matemática que mais se relaciona com os demais ramos dessa ciência e que mais possibilitam a compreensão ampla do objeto de estudo, se tornando assim uma área que requer atenção especial no que se refere ao seu ensino e aprendizagem por parte dos estudantes da Educação Básica.

Assim sendo, é importante demandar atenção especial às contribuições que o ensino de Álgebra proporciona na estrutura cognitiva dos alunos, às habilidades que estes adquirem ao compreender de maneira satisfatória as propriedades e manipulações algébricas definidas na grade curricular da Educação Básica, fatores estes que estão diretamente ligados ao que é definido por alguns autores como pensamento algébrico.

Talvez mais complexo e menos consensual do que a definição de Álgebra, está a definição de pensamento algébrico. A seguir, iremos expor o posicionamento de alguns autores sobre o que é e qual a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes da Educação Básica. Para Fiorentini, Miorin e Miguel (1993)

> [...] perceberemos a existência de elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p. 87).

Os autores ainda enfatizam que o pensamento algébrico pode se manifestar não somente nos diversos campos da Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento e que "ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim" (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p.88).

Outros autores trazem definições que podem parecer distintas, mas no fundo alinham-se ao que foi exposto anteriormente. Por exemplo, Lins (1992) define que

> o pensamento algébrico é um meio de organizar o mundo ao modelar situações e manipular aqueles modelos de certa forma, [...] um modo no qual eu quero fazer coisas, mesmo nos casos nos quais os conceitos ou métodos necessários para realizar não estejam disponíveis ou desenvolvidos (LINS, 1992, p. 11 apud NACARATO e CUSTÓDIO, 2018, p. 15).

Nesta mesma linha, Cyrino e Oliveira (2011, p. 103), definem o pensamento algébrico como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da Álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos. Já Smith (2008, apud RIBEIRO e CURY, 2015, p. 15) classifica o pensamento algébrico em dois tipos: o pensamento representacional, que está relacionado aos processos mentais por meio dos quais um indivíduo cria significados referenciais para algum sistema representacional; e o pensamento simbólico, que está ligado à forma de usar e compreender um sistema simbólico.

Percebemos que, além destes, outros autores trazem de forma explícita ou implícita em suas pesquisas, de um modo geral, que o pensamento algébrico é aquele que permite ao indivíduo modelar e resolver problemas, utilizando uma linguagem simbólica, generalizações e manipulações, formalismos, estabelecendo relações entre as variáveis extraídas da situação a ser resolvida, percebendo regularidades e trabalhando com valores desconhecidos como se fossem conhecidos ou mesmo percebendo estruturas e propriedades algébricas abstratas e gerais. Sendo assim, é possível que ao conseguir estabelecer essas relações, ou seja, desenvolver satisfatoriamente o pensamento algébrico, o indivíduo se torna sujeito das ações impostas não somente nas questões escolares, mas sim do cotidiano de modo geral, podendo se tornar capaz de resolver algumas situações adversas que lhe sejam apresentadas de uma maneira mais eficaz, sistemática e satisfatória.

3 TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Atualmente, ao nos depararmos com a discussão sobre as metodologias eficazes no ensino de Matemática, algumas abordagens são corriqueiramente mencionadas e exploradas, tais como a Etnomatemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, História da Matemática, uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), uso de Jogos Didáticos e Investigação Matemática. Iremos comentar brevemente cada uma destas tendências, com o objetivo de elucidar melhor a análise que será realizada posteriormente sobre os textos e propostas didáticas para o ensino de Álgebra, cada uma delas tendo como metodologia de ensino e embasamento teórico uma destas tendências citadas.

Uma tendência muito conhecida e respeitada no meio acadêmico é a tendência conhecida como Etnomatemática, tendo como principal criador e defensor o professor Ubiratan D'Ambrósio, referência nacional quando se fala em Ensino e Educação Matemática. No cerne da sua teoria D'Ambrósio afirmava que

> Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetos e tradições comuns aos grupos (D'AMBRÓSIO, 2013, p. 9).

De maneira simplificada, pode-se dizer que Etnomatemática é a metodologia de ensino de Matemática desenvolvida por cada grupo social, cultural ou econômico de modo particular, com sua própria linguagem, seu próprio significado e carregada de objetivos específicos. Como exemplo disso, basta perceber que a Matemática desenvolvida por um acadêmico que estuda Matemática pura é uma Matemática distinta daquela desenvolvida por um grupo de engenheiros projetistas de aviões, e ambas certamente são distintas da Matemática usada por um pedreiro ou marceneiro, e logicamente, ambas são distintas da Matemática desenvolvida por uma criança na escola ou por um feirante ou comerciante. Talvez seja possível afirmar, tomando como referência os exemplos aqui citados, que todas as diferentes Matemáticas desenvolvidas por cada grupo social são distintas entre si, mesmo que enraizadas na mesma vertente de raciocínio lógico-dedutivo e conceitos básicos comuns. Sendo assim, considerar a Etnomatemática no ensino de conceitos de Matemática, inevitavelmente consiste em considerar a realidade dos sujeitos envolvidos no processo de aprendizagem, suas necessidades e seus objetivos no processo de formação Matemática, e as diferentes Matemáticas que existem atualmente e que fazem mais sentido para um grupo do que para outro, ou seja, está carregada de significados dependendo do contexto social, cultural e econômico dos envolvidos no processo.

Uma outra tendência também estruturada no país a partir dos anos 80, mas que nos últimos anos vem dominando os holofotes das propostas didático-pedagógicas de ensino e aprendizagem de Matemática, é a metodologia conhecida como Resolução de Problemas, elaborado pelo grande matemático e professor húngaro George Polya. Essa teoria apresenta alguns aspectos comuns com o que é proposto na Modelagem Matemática (que não abordaremos neste trabalho por não encontrarmos pesquisas acadêmicas sobre esta tendência que se encaixavam nos filtros de pesquisa), visto que um dos objetivos também é resolver algum problema (não necessariamente de natureza prática ou cotidiana) e como estratégia de resolução o aluno deve investigar as possibilidades e lançar mão dos mecanismos que conhece para tentar obter êxito em sua resolução. Polya definiu quatro etapas para a resolução de um problema. Primeiro, é necessário compreender o problema, extrair as informações relevantes, identificar quais as incógnitas, identificar o que deve ser resolvido. A segunda etapa consiste em traçar estratégias para resolver o problema, elaborar um plano consistente, partindo de casos particulares para casos gerais ou vice-versa, fazendo analogias entre problemas semelhantes. A terceira etapa é a que determina a execução do plano, ou seja, a resolução do problema usando a estratégia construída na etapa 2 com base nas informações coletadas na etapa 1. Por fim, a quarta etapa sugere a retomada da resolução, fazendo uma análise dos caminhos que poderiam ter sido utilizados, o que poderia ser generalizado e quais implicações a resolução permite inferir acerca de problemas semelhantes. Estes questionamentos finais permitem uma compreensão ampla do problema e da resolução em si, permitindo ao aluno visualizar novos caminhos que poderiam auxiliar ou não na resolução do problema e ainda permite estabelecer relações com outros problemas semelhantes já resolvidos ou estabelecer estratégias de resolução para problemas a serem resolvidos futuramente.

Com base no exposto, percebe-se que na Resolução de Problemas o problema pode ser de natureza prática ou de caráter acadêmico, e não necessariamente exige que o estudante domine as ferramentas utilizadas durante a resolução, visto que em algumas situações, o problema permite ao aluno construir um conhecimento novo a partir das informações dadas, com o intuito de resolvê-lo satisfatoriamente. Neste ponto, vale ressaltar um detalhe muito importante mencionado pelos principais autores que defendem a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, que é a escolha do problema a ser explorado pelo aluno. Segundo os textos de Polya (2006) (Publicado originalmente em 1985), Dante (1999) e Onuchic (2007), o problema deve ter um grau de dificuldade adequado ao nível dos estudantes, não podendo ser muito fácil a ponto de não ter um caráter desafiador e ser encarado pelo aluno com um exercício, e também não ser tão difícil a ponto de ser impossível a resolução por parte do aluno, podendo assim desestimular o mesmo na tentativa de resolução de outros problemas. Alinhado a isto, Dante (1999) afirma que:

> Problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. A resolução de problema exige certa dose de iniciativa, e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias. O problema é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o segredo da evolução Matemática. Um problema tem seu grau de importância de acordo com a quantidade de ideias novas que ele traz a Matemática (DANTE, 1999, p. 43).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), a resolução de problemas é uma estratégia para ensinar Matemática, não como exercício do que já foi ensinado, mas como uma inserção do que se pretende ensinar, visto que a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de lidar com situações que o cercam. Ainda sobre esta estratégia de ensino, Allevato e Onuchic (2009) afirmam que

> Sem dúvida, ensinar Matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM (NCTM, 2000) e dos PCN (BRASIL, 1997, 1998, 1999), pois conceitos e habilidades Matemáticas são aprendidos no contexto da resolução dos problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior será promovido através dessas experiências e o trabalho de ensino de Matemática acontecerá num ambiente de investigação orientada em resolução de problemas.(ALLEVATO, ONUCHIC, 2009, p.142)

As autores também enfatizam que "ao invés de colocar-se como foco do ensino de Matemática, ao ser considerada como metodologia de ensino, a resolução de problemas faz da compreensão seu foco central e seu objetivo"(ALLEVATO, ONUCHIC, 2009, p.142), deixando claro que o mais importante ao se usar problemas para desenvolver o ensino em Matemática é atingir a aprendizagem satisfatória do estudante, através da compreensão de todas as nuances que um bom problema de Matemática que instiga e desafia o aluno pode trazer para a sua evolução enquanto sujeito da ação e construtor do seu próprio conhecimento.

Seguindo a análise sobre as tendências em Educação Matemática, nos deparamos com uma proposta que, como as listadas anteriormente, apresenta adeptos e defensores desde os anos 80 e 90, chamada História da Matemática. No entanto, quando se se discute como deve ser inserida a história da Matemática no ensino e quais os objetivos pedagógicos que ela pode contemplar, não há um consenso entre as pesquisas atuais, surgindo assim diferentes abordagens metodológicas para o uso da história no ensino da Matemática. Exemplificando este fato, pode-se tomar a classificação dada por Michael Fried (apud ROQUE, 2014, p. 168), que acredita que as iniciativas de inserção da história no ensino e Matemática baseiam-se em três temáticas distintas, sendo elas: motivacional, curricular e cultural. Resumindo as ideias do autor sobre os três temas, iniciando pelo tema motivacional tem-se que:

> O principal aqui é que a história possa despertar os estudantes, não importando se o que se conta é informativo, verdadeiro ou pertinente. [...]
> No tema curricular, propõe-se incluir no ensino argumentos sobre supostos tratamentos históricos de tópicos da Matemática. Estas abordagens teriam um poder pedagógico por si mesmas ou por oferecer um contraste com abordagens modernas. [...]
> Supõe-se que a cultura inclui a Matemática e que a Matemática é cultural, logo Matemática e história são inseparáveis. A história poderia, assim, esclarecer ou aprofundar a compreensão das ideias Matemáticas, mostrando que estão incluídas na cultura, levando os estudantes a compreenderem a Matemática como uma invenção humana (FRIED apud ROQUE, 2014, p. 168).

Alinhado a isto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental é:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 267).

Outra visão sobre o uso da história da Matemática é dada pelo autor Antônio Miguel em sua tese de doutorado intitulada “Três Estudos sobre História e Educação Matemática” (1993) e no artigo “As potencialidades pedagógicas da história da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores” (1997), publicado na revista Zetetiké. O autor, baseando-se em livros e textos de autores nacionais e internacionais publicados em Simpósios e Encontros de Educação Matemática, elenca os diferentes argumentos levantados pelos defensores do uso da história da Matemática no ensino e faz uma breve explicação sobre cada argumento. Sinteticamente, serão descritos aqui apenas a classificação dos argumentos listados pelo autor:

> 1º Argumento - A história é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem de Matemática;
> 2º Argumento - A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino de Matemática;
> 3º Argumento - A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da Matemática;
> 4º Argumento - A história é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de Matemática;

> 5º Argumento - A história é um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino;
> 6º Argumento - A história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
> 7º Argumento - A história é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico;
> 8º Argumento - A história é um instrumento unificador dos vários campos da Matemática;
> 9º Argumento - A história é um instrumento promotor de atitudes e valores;
> 10º Argumento - A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica;
> 11º argumento – A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática;
> 12º argumento – A história é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural (MIGUEL, 1997, p. 75-92).

A lista de argumentos elaborada pelo autor e suas justificativas para cada um deles mostram que a história da Matemática é uma ferramenta poderosa e de grande aplicabilidade no contexto escolar, podendo solidificar consideravelmente a aprendizagem da Matemática dos estudantes. Diante do exposto, fica evidente que o uso da história da Matemática como uma metodologia de ensino para os conteúdos de Matemática pode contribuir significativamente para uma aprendizagem mais completa e mais eficaz por parte dos estudantes da Educação Básica e também do Ensino Superior, o que vai ao encontro do que Mendes e Chaquiam (2016) defendem quando afirmam que:

> [...] podemos asseverar que a história da Matemática que consideramos adequada para ser inserida no desenvolvimento conceitual dos estudantes refere-se diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações Matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 19).

Vale ressaltar ainda, que a História da Matemática apresenta intrinsecamente um caráter intradisciplinar, pois contempla todos os conteúdos de Matemática das mais diversas áreas, possibilitando um diálogo com as subáreas da Matemática tais como Álgebra, Probabilidade e Estatística, Geometria, Cálculo, entre outras.

Atualmente, é quase impossível discutir sobre novas possibilidades para o ensino e aprendizado de Matemática sem mencionar o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação, conhecida popularmente pela sigla TICs. Esta tendência incentiva e valida o uso das novas tecnologias para auxiliar o ensino de Matemática, aproveitando a evolução tecnológica produzida nos últimos anos, tanto no ramo da informática quanto no ramo da comunicação. Neste contexto, os autores que pesquisam o uso de TICs como uma metodologia de ensino de conteúdos de Matemática argumentam que as ferramentas a serem exploradas vão além do uso de computadores e smartphones, mas sim englobam uma série de elementos, como o uso de internet em sala de aula como ferramenta pedagógica de pesquisa, uso de calculadora em atividades envolvendo alguns conteúdos em que os cálculos mecânicos podem tomar muito tempo ou atrapalhar o objetivo pedagógico da atividade, uso de softwares de Matemática para auxílio, construção e conferência de cálculos e de propriedades Matemáticas, uso de aplicativos mobile ou programas computacionais que auxiliam o desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes. É comum encontrar publicações e propostas didáticas explorando as potencialidades pedagógicas de ferramentas tecnológicas, como por exemplo uso do software GeoGebra para o ensino de Geometria, Trigonometria, Álgebra ou outros tópicos de Matemática, uso do software Scratch para auxiliar o ensino de Álgebra, Trigonometria e aprimorar o raciocínio lógico dos alunos, uso de planilhas eletrônicas no ensino de Matrizes, Estatística, Matemática financeira ou outras áreas da Matemática, uso do software GrafEq no ensino de funções e de inequações, e assim por diante.

De modo geral, um argumento validado pelos pesquisadores das TICs como metodologia de ensino de Matemática é de que o uso da internet e das ferramentas tecnológicas acessíveis aos estudantes atualmente, principalmente os softwares e plataformas que permitem uma interação entre o aluno e o objeto de estudo, permitem ao aluno ser protagonista na sua própria aprendizagem, pois os mesmos aprendem a organizar as informações atuando ativamente na manipulação dos comandos e ferramentas disponíveis em cada software, construindo o conhecimento através de atividades mais dinâmicas, atrativas e significativas.

Considerando as ferramentas que podem e devem ser utilizadas em sala de aula, principalmente no que se refere ao ensino da Matemática e construção e desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, não podemos deixar de citar os jogos didáticos e suas potencialidades como material didático-pedagógico auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Esta tendência, conhecida como Jogos Didáticos ou uso de Jogos no ensino de Matemática já é mencionada desde a década de 90 pelos PCNs, enfatizando que além de ter conceitos de Matemática presentes, “o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um ‘fazer sem obrigação externa e imposta’, embora demande exigências, normas e controle” (BRASIL, 1997, p. 35). Além disso, os PCNs (1997) salientam que:

> Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações. Além disso, passam a compreender e a utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração num mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações. Em estágio mais avançado, as crianças aprendem a lidar com situações mais complexas (jogos com regras) e passam a compreender que as regras podem ser combinações arbitrárias que os jogadores definem; percebem também que só podem jogar em função da jogada do outro (ou da jogada anterior, se o jogo for solitário). Os jogos com regras têm um aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda (BRASIL, 1997, p. 35-36).

Alguns autores que defendem o uso dos jogos como ferramenta didática para o ensino de conteúdos de Matemática enfatizam que através dos jogos os alunos conseguem participar ativamente do processo de aprendizagem, deixando de ser apenas espectadores e receptores das informações que lhe são apresentadas prontas e formais para serem os criadores das ações que, por serem sistematizadas simbolicamente e respeitando regras pré-estabelecidas inicialmente, percebem nas regularidades e incertezas que ocorrem durante o jogo os caminhos e tomadas de decisões que apresentam melhores resultados para atingir os objetivos traçados. O simples fato de um jogo proporcionar algo desconhecido para o aluno e apresentar obstáculos e desafios ao longo do processo a fim de atingir um objetivo final, trazem em si um caráter motivacional que na maioria das vezes atinge os alunos de uma sala inteira. Alinhado a isto, os PCNs (1997) defendem que:

> [...] um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (BRASIL, 1997, p. 36).

Neste sentido, as diversas propostas de materiais didáticos baseadas em jogos, tais como, trilhas Matemáticas, jogo de xadrez, batalha naval, bingos com frações, equações ou polinômios, torre de Hanói, dominós algébricos ou com operações Matemáticas, entre várias outras, permitem utilizar a ludicidade contida em atividades que parecem simples brincadeiras como fator intermediário para a aquisição de informações e conceitos de Matemática que em muitas vezes não são assimilados significativamente, deixando lacunas na aprendizagem dos sujeitos que se intensificam durante todo o processo de educação escolar.

Outra tendência que vem ganhando espaço nos currículos brasileiros é a Investigação Matemática, em que o aluno é chamado a fazer o papel de matemático, pesquisando e construindo seu conhecimento. Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) afirmam que:

> As atividades de investigação contrastam-se claramente com as tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que são muito abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir. Numa investigação parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar. A partir daí formula-se questões, para as quais se procura fazer conjecturas. O teste destas conjecturas e recolha de mais dados pode levar a formulação de novas conjecturas ou à confirmação das conjecturas iniciais. Neste processo podem surgir também novas questões a investigar (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA e SEGURADO, 1998, p.10).

Ao trabalhar com Investigação Matemática, os alunos não devem ser conduzidos a uma resposta imediata, mas estimulados a realizar diversas articulações e desenvolver quantas interpretações forem possíveis, segundo os conhecimentos matemáticos que eles possuem. Além disso, a Investigação Matemática está em consonância com os PCNs (1998):

> [...], a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p. 27).

Em uma proposta pautada pela Investigação Matemática, o aluno é levado "a justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante seus colegas e o professor" (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA e SEGURADO, 1998, p.10). De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), a investigação Matemática é desenvolvida em quatro momentos principais:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO e OLIVEIRA, 2019, p. 20).

Para que a Investigação Matemática ocorra de forma satisfatória, é importante que o professor, ao preparar a sua aula, selecione ou crie tarefas com objetivos claramente definidos de acordo com o nível e o desenvolvimento matemático dos alunos. Ainda, é fundamental que o aluno participe como o principal responsável pela própria aprendizagem, cabendo ao professor organizar o ambiente, administrar o desenvolvimento das atividades, deter conhecimentos e recursos que possam ser úteis aos alunos no processo de investigação e estimular constantemente a autonomia dos alunos na resolução das questões.

Como a proposta deste trabalho é explorar as potencialidades da tendência Atividades Experimentais no Ensino de Álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental, iremos expor e conceituar melhor esta tendência no capítulo 5, onde poderá ser percebido as congruências metodológicas entre Atividades Experimentais, Resolução de Problemas e Investigação Matemática, estas últimas já citadas anteriormente e presentes nos textos que serão analisados no próximo capítulo, que evidencia implicitamente a necessidade de pesquisas e propostas didáticas envolvendo Atividades Experimentais.

4 ESTADO DA ARTE

Neste capítulo, será apresentado o estado da arte de pesquisas acadêmicas brasileiras que abordam o uso de algumas Tendências em Educação Matemática (Resolução de Problemas, Etnomatemática, Uso de Jogos, Uso de Tecnologias, Uso da História da Matemática e Investigação Matemática) para o ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

Em linhas gerais, o estado da arte, ou estado do conhecimento, consiste em um mapeamento e discussão da produção acadêmica já existente sobre um determinado tema que está sendo analisado. Sobre os pesquisadores que se dedicam ao estado da arte, Ferreira (2002), declara que:

> Sustentados e movidos pelo desafio de conhecer o já construído e produzido para depois buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade, todos esses pesquisadores trazem em comum a opção metodológica, por se constituírem pesquisas de levantamento e de avaliação do conhecimento sobre determinado tema (FERREIRA, 2002, p. 259).

O intuito dessa revisão de literatura consistiu em identificar e analisar dissertações de mestrado que versam sobre o uso das Tendências em Educação Matemática para o ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, no período de 2016 a 2021. A busca teve por objetivo encontrar pesquisas que tratam do ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental a partir de estudos de professores que elaboraram ou desenvolveram algum tipo de atividade envolvendo o uso de alguma Tendência em Educação Matemática para tal fim.

Para mapear as dissertações sobre o ensino de Álgebra desenvolvidas no Brasil nos últimos seis anos, realizou-se buscas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT). As pesquisas foram realizadas na BDTD devido ao fato desta base integrar os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa do Brasil. No entanto, cabe mencionar que isso não significa que todas as Instituições de Ensino Superior brasileiras disponibilizam seus trabalhos de forma on-line no acervo da BDTD do IBICT.

Quanto ao sistema de busca, a BDTD disponibiliza em seu sistema a possibilidade de busca básica e busca avançada através das palavras-chave que melhor representam a pesquisa, além de permitir refinar a busca a partir de critérios definidos previamente como: título, autor, assunto, resumo (em português ou inglês), editor, idioma, tipo de documento (mestrado ou doutorado) e ano de defesa (a ser definido pelo usuário).

Para determinar o campo de análise deste estado da arte, foram selecionadas dissertações publicadas entre 2016 e 2021, relacionados ao ensino de Álgebra a partir das atuais Tendências em Educação Matemática. As pesquisas foram feitas utilizando o campo de busca avançada, buscando por palavras chaves pertinentes aos trabalhos que se pretendia encontrar, que foram: a Tendência em Educação Matemática utilizada, Ensino de Álgebra e Ensino Fundamental. Tal mapeamento resultou em um total de 155 trabalhos, sistematizados no quadro a seguir.

Quadro 1: Quantidade de trabalhos obtidos na primeira filtragem

Palavras-chave	**BDTB**
Resolução de Problemas; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	37
Etnomatemática; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	1
Modelagem; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	1
Jogos; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	13
Tecnologias; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	41
História da Matemática; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	30
Investigação Matemática; Ensino de Álgebra; Ensino Fundamental	32
Total	155

Fonte: A autora, 2022.

Apesar de apresentar um número de trabalhos consideravelmente maior na busca inicial, a grande maioria acabou sendo desconsiderada por tratar de temas que fogem do escopo desta pesquisa, como introdução ao estudo da Álgebra, formação de professores e trabalhos destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Superior, além de apresentar alguns trabalhos repetidos.

Após essa filtragem inicial, buscamos analisar e compreender os objetivos, as bases teóricas e metodológicas, os principais resultados e a forma como as Tendências em Educação Matemática são apresentadas nos trabalhos que se enquadram no escopo da nossa pesquisa. A seguir, apresentamos o resultado da análise destes trabalhos.

4.1 Trabalhos selecionados na BDTD

Dos 128 trabalhos selecionados até esta etapa do estudo, foi dado continuidade selecionando 17 dissertações de mestrado, 12 relativas ao Mestrado Profissional (MP) e 5 ao Mestrado Acadêmico (MA), que identificamos estarem de acordo com a nossa proposta de pesquisa. Organizamos os trabalhos que constituem nosso campo de análise em um quadro explicativo utilizando: autor, orientador, título do trabalho, ano de defesa e nome da instituição, programa e nível, cujos dados estão apresentados no Quadro 2.

Quadro 2: Relação dos trabalhos selecionados na BDTD

Autor	**Orientador**	**Título do trabalho**	**Ano**	**Instituição/ Programa/ Nível**
Andriely Iris Silva de Araújo	Silvanio de Andrade	Ensino-aprendizagem de Álgebra através da resolução e exploração de problemas	2016	UEPB/ PPGECEM/ MP
Aline Souza Reis	Sandro Rodrigues Mazorche	A colaboração da História da Álgebra para análise e compreensão de problemas matemáticos: Uma proposta para o ensino de equação polinomial do primeiro grau	2017	UFJF/ PROFMAT/ MP
Ludmila Maccali	Marli Teresinha Quartieri	Atividades investigativas para o ensino da Álgebra em turmas de 7° ano e 9° ano do ensino fundamental	2017	UNIVATES/ PPGECE/ MP
Fabiana de Souza Bomfim	Antonio Carlos Brolezzi	História da Matemática e Cinema: o caso da criptografia na introdução do ensino de Álgebra	2017	USP/ MPEM/ MP
Ricardo Kucinskas	Grazielle Feliciani Barbosa	Introdução ao estudo da Álgebra para alunos do ensino fundamental	2017	UFSCAR/ PROFMAT/ MP
Franciely Fabrícia de Souza Matsuda	Marcelo Carlos de Proença	Um ensino de equação de 1º grau com uma incógnita via resolução de problemas	2017	UEM/ PCM/ MA
Leonardo Silva Santos	John Andrew Fossa	Uma abordagem histórica e metodológica dos métodos de resolução de equação do 2º grau desenvolvidos por Al-Khwarizmi	2017	UEPB/ PPGECEM/ MA
Hélio Roberto da Rocha	Ivonildes Ribeiro Martins Dias	Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino e Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º Grau no Ensino Fundamental	2017	UFG/ PROFMAT/ MP
Bianca Medeiros Marques	Márcia Souza da Fonseca	A mobilização do pensamento algébrico através da resolução de problemas enxadrísticos	2018	UFPel/ PPGECM/ MP
Lilian Esquinelato da Silva	Lourdes de la Rosa Onuchic	Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks	2018	UNESP/ PPGEM/ MA
Sandra Mara Oselame Riboldi	Janice Teresinha Reichert	A linguagem de programação Scratch e o ensino de funções: uma possibilidade	2019	UFFS/ PROFMAT/ MP

Dayane Moara Coutinho	Claudete Cargnin	Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica	2019	UTFPR/ PPGMAT/ MP
Lindinalva da Silva Dias	Rogério Fernando Pires	Introdução da Álgebra: desenvolvimento do pensamento algébrico no 6° ano do ensino fundamental	2019	UFSCAR/ PPGECE/ MP
Sérgio Luis Silva	Marta Borges	Problemas Matemáticos com Cálculos Algébricos: Da Resolução à Formulação no 8° ano do Ensino Fundamental	2019	UFG/ PROFMAT/ MP
Juscelino de Araújo Silva	Silvanio de Andrade	Resolução de Problemas e representações múltiplas no ensino de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas	2019	UEPB/ PPGECEM/ MA
Luciane Führ	Luisa Rodriguez Doering	Um olhar para a introdução à escrita simbólica no ensino à luz da história da Matemática	2019	UFRGS/ PPGEMAT/ MA
Renata Ranielly Cabral da Silva	Silvanio de Andrade	Ensino e aprendizagem de expressões algébricas através da exploração, resolução e proposição de problemas	2020	UEPB/ PPGECM/ MP

Fonte: A autora, 2022.

A seguir, apresentamos o resultado da análise das dissertações.

A pesquisa de Andriely Araújo (2016) teve como objetivo identificar como a metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução e Exploração de Problemas possibilita o entendimento de ideias e conceitos que vão desde a generalização de padrões até a resolução de equações polinomiais do primeiro grau. A autora norteou sua pesquisa a partir da reflexão sobre as dificuldades dos alunos em relação a aprendizagem dos princípios básicos da Álgebra na compreensão e apropriação de ideias e conceitos, sentindo a necessidade de buscar uma metodologia que propusesse uma melhor aprendizagem dos alunos. O trabalho de sala de aula foi desenvolvido em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, de uma escola municipal. Araújo (2016) relata que ao trabalhar com a metodologia de Resolução e Exploração de Problemas foi possível constatar uma maior motivação por parte dos alunos, quando estes questionavam e refletiam sobre as ideias discutidas, sendo instigados a atuarem durante o seu processo de ensino e aprendizagem. Com a análise dos resultados obtidos, a autora declara que foi possível destacar a relevância da metodologia adotada, que permitiu uma maior compreensão da Álgebra, de modo a minimizar ou até superar as dificuldades apresentadas constantemente pelos alunos.

A pesquisadora Aline Souza Reis (2017), preocupada com o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos estudantes, apresenta a metodologia de Resolução de Problemas aliada a História da Álgebra como método facilitador para a compreensão de conceitos algébricos. Para isso, Reis (2017) apresenta uma proposta de atividades pedagógicas que abordam o desenvolvimento da linguagem algébrica a partir da utilização da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de equação polinomial do primeiro grau, utilizando ainda o recurso da História da Álgebra com a finalidade de facilitar o entendimento da transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica. As atividades propostas foram pensadas para ser aplicadas com turmas de 7º do Ensino Fundamental, em encontros semanais com 1 hora e 40 minutos de duração, ao longo de oito semanas. Como trabalho futuro, a autora pretende aplicar a sequência didática por ela elaborada.

O trabalho de Ludmila Maccali (2017) buscou analisar as estratégias de resolução elaboradas por estudantes do 7º e do 9º anos ao realizarem atividades investigativas envolvendo as diferentes concepções algébricas. As atividades foram desenvolvidas com alunos de duas escolas públicas de Educação Básica, localizadas no Vale do Taquari/RS, as quais são parceiras do programa Observatório da Educação, desenvolvido no Centro Universitário UNIVATES e cabe destacar que a autora não é a professora titular das turmas. A escolha das turmas ocorreu porque os alunos do 7° ano ainda não haviam efetivado seus estudos acerca do conteúdo de Álgebra, enquanto os do 9° ano possuíam alguns conhecimentos sobre esse conteúdo. As atividades foram desenvolvidas em sete encontros, com duração de 2 horas/aulas, totalizando 100 minutos, com cada uma das turmas, que foram divididas em grupos de até quatro integrantes. A autora propôs um total de dez atividades, utilizando as quatro concepções algébricas de Usiskin (1995) (a aritmética generalizada, a Álgebra como processo na resolução de problemas, a Álgebra como estudo das relações entre grandezas e a Álgebra como estudo das estruturas), com situações em que os alunos tinham disponibilidade de encontrar diferentes estratégias. A autora declara que os grupos de alunos realizaram diferentes estratégias para a resolução das atividades propostas, como desenho e fórmulas e também destaca que os alunos não conheciam a maioria dos assuntos abordados, mas, com as atividades propostas, conseguiram aprender diferentes conteúdos. A autora conclui que os resultados apontaram que as atividades de Investigação Matemática proporcionam aos estudantes, dos dois níveis de escolaridade, momentos de autonomia, cooperação e interesse pela descoberta.

Motivada pelos resultados poucos satisfatórios que o Brasil tem obtido em avaliações nacionais e internacionais de Matemática, a falta de motivação dos alunos para aprender Matemática, a pseudo contextualização da disciplina e as discussões da Base Nacional Comum Curricular, Fabiana de Souza Bomfim (2017) estudou sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa, no sentido de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), refletiu sobre o uso intencional da História da Matemática, especialmente a História da Criptografia, para contextualizar e inspirar sequências didáticas para introduzir o ensino de Álgebra no Ensino Fundamental II e buscar no cinema um organizador prévio capaz de estabelecer relações mais amplas de conhecimento e vínculos maiores com a nova geração. Para tanto, inicialmente, a autora estudou a Teoria da Aprendizagem Significativa com foco em métodos para acelerar o processo da aprendizagem através dos organizadores prévios, bem como valorizando o uso intencional da História da Matemática, da humanidade e da criptografia através do cinema. Com base nesses estudos, a autora elaborou uma sequência didática visando uma aprendizagem potencialmente significativa no ensino introdutório da Álgebra, utilizando o filme O Jogo da Imitação como organizador prévio atuando como uma "ponte cognitiva" entre o que o aluno já sabe e o que ele irá saber. A sequência didática proposta conta com 8 atividade e foi aplicada em 3 turmas do 8º ano em uma escola privado do município de São Paulo, em que os alunos foram levados a desvendar "mensagens secretas" em diferentes "técnicas" de criptografia (transposição e substituição). A autora declara que a utilização do filme como organizador prévio aproximou os alunos do conteúdo, permitiu interrelações posteriores, possibilitou a problematização, a investigação e a interpretação dos fatos fazendo com que os aluns fossem protagonistas na criação do conhecimento relevante à sociedade em que estão envolvidos. Além disso, ao passo que os alunos entendiam como as coisas foram se desenvolvendo no decorrer da história, começaram a perceber e aceitar de forma mais natural que em todo o conhecimento estudado é utilizado no seu dia a dia, mas que o modo de pensar matemático que cada conteúdo trás é importante para o cotidiano. Para a autora, a criptografia foi um ótimo assunto para introduzir a Álgebra, uma vez que tira a visão estigmatizada que a maioria tem em relação a esse conteúdo e ajuda a estabelecer um diálogo do passado com o presente, na construção de novos significados. A autora conclui que a utilização da História da Matemática permitiu uma experiência com mais significado, uma vez que possibilitou não apenas a inserção de conceitos e princípios científicos, mais também a reflexão crítica dos mesmos, agregando valores à ação da humanidade.

A pesquisa realizada por Ricardo Kucinskas (2017) tem como objetivo principal introduzir o estudo da Álgebra para alunos do Ensino Fundamental, mais precisamente alunos do 7º ano. Para isso, o autor elabora uma sequência didática, baseada na Metodologia Resolução de Problemas, composta por três fases: Pensamento Algébrico, Expressões Algébricas e Equações do 1º grau. Inicialmente foi elaborada uma avaliação diagnóstica através de atividades que apresentavam padrões e regularidades em sequências de figuras geométricas, como por exemplo, fractais, e logo após, utilizado novas sequências geométricas e numéricas na tentativa de instigar e desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes. Percebeu-se que alguns grupos de alunos não conseguiram perceber as regularidades ou expressar algebricamente os resultados encontrados por tentativa e erro. Em um segundo momento, as atividades propostas versavam sobre expressões numéricas geradas através da tradução em linguagem matemática de expressões em linguagem corrente e tentativas de construção de fórmulas gerais para cálculo de algumas situações Matemáticas, como por exemplo, área e perímetro de figuras planas. Mesmo apresentando alguns erros nas resoluções, o autor afirma que os alunos demonstraram uma melhor familiaridade com a linguagem matemática para representar expressões algébricas. A última fase da sequência didática proposta apresentava a tradução de situações expressas em linguagem corrente ou construídas na balança de dois pratos em equações do primeiro grau com uma variável e problemas envolvendo a construção de fórmulas gerais, relacionando assim, duas variáveis. Por fim, o autor aplica uma avaliação final aos estudantes, a fim de verificar a efetividade da proposta desenvolvida. Mesmo com alguns equívocos em algumas resoluções e falta de compreensão por parte dos alunos em algumas atividades propostas, o autor conclui que a Resolução de Problemas é uma metodologia eficaz para que os alunos se apropriem dos conceitos de Álgebra de maneira significativa.

Franciely Matsuda (2017), motivada pelas inquietações que surgiram a partir de suas observações durante o estágio obrigatório no período da graduação em Licenciatura em Matemática e permaneceu durante sua atuação docente em turmas nos anos finais do Ensino Fundamental, alunos nas quais foi detectada uma lacuna na aprendizagem dos conceitos relacionados à Álgebra. Com base nessas questões, o trabalho de Matsuda (2017) trata da implementação do ensino via resolução de problemas para abordar o conteúdo de equação do 1º grau e em como esta metodologia pode contribuir para a aprendizagem deste conteúdo. Os participantes dessa pesquisa foram 30 alunos matriculados no 7º ano do Ensino Fundamental, em uma escola estadual localizada no norte do Paraná, que foi escolhida devido a facilidade de acesso da pesquisadora à essa sala de aula e a aceitação da equipe diretiva da escola, assim como a aceitação da professora de Matemática da turma, que se prontificaram a conceder o espaço necessário para o desenvolvimento da pesquisa. Nas atividades propostas pela autora, foram elaborados três problemas que envolvem o conceito de equação de 1° grau e a ordem de implementação dos problemas foi escolhida de acordo com os níveis de complexidade de cada um, considerando a quantidade de relações entre os termos conhecidos e desconhecidos do problema, objetivando identificar e analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas e suas dificuldades diante das etapas da resolução de problemas. Para o desenvolvimento das atividades, que foram desenvolvidas em sete encontros com duração de 50 minutos cada, inicialmente, a autora propôs o problema como ponto de partida, antes da formalização do conteúdo; em um segundo momento, foi solicitado aos alunos que expusessem suas estratégias; posteriormente, foi o momento de discutir as estratégias dos alunos; e, finalmente, articular as estratégias dos alunos ao conteúdo. A autora conclui que, apesar das dificuldades enfrentadas pelos alunos, a abordagem de ensino desenvolvida em sala de aula possibilitou aos alunos a compreensão da necessidade de aprender equação do 1º grau e que evitou a formalização descontextualizada do mesmo. Além disso, a autora relata foi possível constatar que os alunos conseguiram identificar as características de uma equação do 1º grau como o uso de incógnita e do sinal de igualdade, destacando que os mesmos se sentiram motivados e que participaram das aulas de maneira colaborativa e respeitosa, o que enfatiza a importância de trabalhar diferentes abordagens de ensino em sala de aula, em especial a resolução de problemas.

Motivado pela problemática relacionada ao ensino e aprendizagem da Álgebra, Leonardo Santos (2017) elaborou e aplicou uma sequência didática mediada pela História da Matemática abordando os métodos de resolução da equação do 2º grau desenvolvidos por Al-Khwarizmi. Tal sequência conta com doze atividades dirigidas que foram elaboradas à luz da História da Matemática, objetivando uma melhor atuação do aluno no momento da construção da aprendizagem por meio da interação com atividades. As atividades foram desenvolvidas entre os meses de maio e agosto de 2016, tendo um recesso no mês de junho devido às férias escolares, em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 28 alunos, em uma escola estadual no interior da Paraíba, escolhida pelo autor devido ao fácil acesso que este tinha à escola por conhecer os professores e a equipe diretiva. As atividades foram desenvolvidas, basicamente, em quatro momentos: formação de duplas ou trios e entrega do material, solicitação da leitura da atividade, explicação por parte do professor da atividade proposta, discussão e execução das atividades. No desenvolvimento da sequência didática proposta, o autor buscou investigar os efeitos das atividades aplicadas, de modo que os estudantes percebessem a construção dos métodos desenvolvidos por Al-Khwarizmi ao passo que interagiam com as atividades, tornando o estudo deste tópico mais significativo. Quanto às dificuldades no decorrer da aplicação das atividades, o autor destaca que os alunos não tinham o costume de ler, a falta de embasamento matemático, a indisciplina e a dependência da ajuda do professor para dar início às atividades propostas, contudo, estas dificuldades foram amenizadas durante a intervenção. O autor conclui que, de maneira geral, foi possível observar uma evolução no desempenho dos alunos nas atividades e que, muitas vezes, os alunos apresentavam respostas incompletas, incorretas e até respostas avançadas, gerando discussões ricas e mostrando que o trabalho através de atividades mediadas pela História da Matemática revela o pensamento dos alunos, além do conhecimento histórico contido nas atividades.

Hélio da Rocha (2017), preocupado com o ensino de Matemática e com o baixo desempenho dos alunos nesta disciplina, elabora uma proposta para ensinar a Álgebra no 7º e 9º ano do Ensino Fundamental, mais especificamente Expressões Algébricas, Equações do 1º grau, Equações do 2º grau e um breve estudo sobre Equações do 3º grau, através de jogos e materiais concretos. Para o autor, o uso de jogos e materiais concretos é uma metodologia que busca inovar e contextualizar o ensino, levando o aluno a construir e compreender melhor a Matemática e seus procedimentos, além de ser uma proposta de metodologia viável e fácil de se promover sendo, no entanto, necessário refletir sobra a sua aplicação. O autor defende que cabe aos professores experimentar a utilização dessa metodologia lúdica, deixando de lado as dificuldades, o desinteresse e todos os problemas que permeiam a Educação Básica, de modo a tornar a aprendizagem mais significativa, motivadora, atrativa e espontânea. Algumas das atividades propostas foram aplicadas pelo autor, que não especificou quais atividades, forma de aplicação ou detalhes da turma, mas relatou que foi possível perceber que o interesse aumentou e que um número maior de alunos aprendeu um pouco mais.

A pesquisadora Bianca Medeiros Marques (2018) buscou entender, através dos Jogos de Linguagem de Wittgenstein, o pensamento algébrico que o Jogo de Xadrez mobiliza nos estudantes pesquisados através da resolução de problemas enxadrísticos de xeque-mate. Com o intuito de sugerir uma forma alternativa e diferente de se trabalhar o pensamento algébrico, a autora escolheu utilizar o jogo de xadez para possibilitar outra forma de perceber e fazer Matemática, dialogando com a Etnomatemática e através dos Jogos de Linguagem dos alunos. A Etnomatemática foi utilizada pela autora por sustentar a ideia da existência de diferentes Matemáticas que emergem através de produções culturais distintas, como é o caso da Matemática existente no jogo de xadrez que, por sua vez, possui jogos de linguagem próprios que também possuem linguagens Matemáticas por se tratar de um jogo que exige o uso de raciocínio e lógica Matemática. A pesquisa foi realizada com cinco alunos (que já sabiam jogar xadrez) do 6º ano do Ensino Funfamental de uma escola privada do município de Pelotas/RS e os cinco encontros para a realização das atividades ligadas à pesquisa aconteceram uma vez por semana com duração de uma hora cada. Os problemas de xeque-mate utilizados foram retirados de aplicativos da Chess King Learn (aplicativo de ensino de xadrez sem precedentes) e proporcionaram a resolução de problemas de mate em um, dois e três lances e, além disso os alunos puderam elaborar seus próprios problemas de xeque-mate. As atividades propostas não se tratavam de jogar uma partida de xadrez, mas em finalizar uma partida já em andamento, cabendo aos alunos solucionar os problemas dando xeque-mate ao rei (jogada em que o rei é atacado e fica sem possibilidades para se locomover). Durante a resolução dos problemas de xeque-mate, os alunos anotaram os seus lances para, posteriormente, avaliarem ou estudarem as suas jogadas, possibilitando detectar e corrigir erros que tenham acontecido e buscando melhorar sua técnica de jogo. O registro das jogadas no jogo de xadrez é feito utilizando a notação algébrica, único sistema de notação reconhecido pela Federação Internacional de Xadrez (FIDE) e consiste em utilizar letras, números e símbolos. A autora destaca que, durante a realização das atividades que buscavam solucionar problemas enxadrísticos de xeque-mate, foi possível constatar a mobilização do pensamento algébrico como: utilização de padrões e regularidades, utilização de simbolismo, construção e análise de hipóteses e (re)construção de estratégias, abstração e generalização. A autora conclui que, com sua pesquisa, foi possível perceber a importância de considerar aspectos culturais que atentem para outras Matemáticas que não, somente, a trabalhada na escola e espera que, ao dialogar com a Etnomatemática, seu estudo aproxime os alunos de outra forma de fazer Matemática, no caso, a existente no jogo de xadrez.

A pesquisadora Lilian Esquinelato da Silva (2018) apresenta em sua pesquisa uma forma de promover o ensino intradisciplinar de Matemática utilizando o material manipulativo Algeblocks, material este composto por paralelepípedos retos com diferentes tamanhos, e com cores variadas, que representam os valores $1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3$ e y^3. A autora utiliza a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sua proposta de atividade didático-pedagógica, baseando-se também na Metodologia Científica de Romberg-Onuchic, que embasa teoricamente todo o desenvolvimento da pesquisa. As conexões entre os diferentes ramos da Matemática se dão através das atividades propostas aos alunos de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do município de Rio Claro-SP, que se apoiam no uso dos blocos geométricos que compõem o Algeblocks para a resolução de questões numéricas e algébricas, tais como a montagem de expressões algébricas e manipulação de produtos notáveis, possibilitando assim a relação entre Aritmética, Álgebra e Geometria. Segundo a autora, a análise dos resultados gerou a conclusão de que o uso dos Algeblocks para a resolução dos problemas propostos na atividade permitiu aos estudantes visualizarem concretamente conceitos matemáticos abstratos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A pesquisadora Sandra Mara Oselame Riboldi (2019) elaborou uma atividade didática aplicada a uma turma de alunos de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de Santa Catarina, com o objetivo de investigar as possíveis contribuições que o uso da linguagem de programação Scratch pode trazer na introdução do conceito de função. A pesquisa foi desenvolvida ao longo de 20 encontros, totalizando 30 horas de atividades. Embasada teoricamente pelo Construcionismo de Papert e a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, a autora realizou uma atividade avaliativa antes e outra após a execução da proposta, permitindo assim verificar os conhecimentos prévios e os avanços proporcionados pela atividade. Utilizando problemas matemáticos que necessitavam da construção de uma lei de formação em sua resolução geral e transpondo esses problemas e resoluções para o software Scratch, a autora conclui que a ferramenta tecnológica despertou o interesse dos estudantes em realizar as atividades, permitindo que os mesmos conseguissem estabelecer relações entre grandezas e encontrar as leis de formação das situações construídas no Scratch, validando assim a eficácia do uso desta tecnologia no ensino de conceitos de funções.

Em sua dissertação, a pesquisadora Dayane Moara Coutinho (2019) explora o ensino de multiplicação e divisão de polinômios através do uso de materiais manipuláveis e da ferramenta tecnológica GeoGebra, que possibilitou a realização de algumas atividades de forma on-line. A sequência didática foi aplicada em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular do município de Campo Mourão – PR, e embasada teoricamente pela Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS). A sequência didática elaborada pela a autora baseia-se no uso de retângulos construídos em material manipulável e também no software GeoGebra, sendo estes utilizados de modo a possibilitar a realização de multiplicações e divisões entre polinômios. A autora concluiu que a sequência didática proposta apresenta potencialidades para auxiliar a aprendizagem dos estudantes, mas ressalta que foi perceptível a falta de exercícios introdutórios sobre retângulos e sobre propriedades da multiplicação e divisão de números inteiros, pois foi nestes tópicos, que geralmente são considerados como pré-requisitos para o desenvolvimento da Álgebra com alunos do 8º ano, que os alunos apresentaram as maiores dificuldades. Por fim, a autora enfatiza que TRRS contribuiu para a análise e reformulação de algumas atividades, e a abordagem dos conteúdos usando várias representações contribuiu para a evolução da aprendizagem dos estudantes.

A pesquisadora Lindinalva da Silva Dias (2019) elaborou uma sequência didática distribuída em 6 fichas de atividades, cada ficha aplicada em um encontro de 50 minutos com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de São Paulo, localizada na cidade de Sorocaba. A autora considera que a metodologia que fundamenta a elaboração das atividades propostas é a Resolução de Problemas, embora a atividade proposta na ficha 6 apresente característica de lista de exercícios ao invés de problemas a serem resolvidos. A autora utiliza também como recurso didático manipulativo a balança de dois pratos, para instigar os alunos a compreenderem a equação como sendo um sistema da balança em equilíbrio. Ao final da pesquisa, a autora conclui que os estudantes perceberam a importância de atividades práticas de ensino para possibilitar maior compreensão dos conceitos estudados. Salienta ainda a autora, que os estudantes apresentam dificuldades na leitura e interpretação de problemas e sua transcrição da língua materna para a linguagem matemática, pois foi nas atividades que envolviam situações-problema que os estudantes obtiveram altas índices de erros. Por fim, a autora menciona que os alunos apresentaram dificuldades na resolução de uma equação e que não sabiam com resolver algo que continha letra, análise esta que parece um pouco incoerente com a proposta e com o contexto escolar escolhido para o desenvolvimento da atividade, visto que, os primeiros contatos com a linguagem algébrica e com equações do primeiro grau, de acordo com as diretrizes curriculares vigentes no país, se manifestam normalmente nas turmas de 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. Percebe-se assim que é essencial ao pesquisador considerar os conhecimentos prévios dos estudantes antes de aplicar uma atividade de ensino, mesmo que tal atividade aborde um conteúdo de Matemática já estudado pelo aluno em momentos anteriores.

O estudo de Sérgio Luis Silva (2019) buscou analisar as contribuições da Resolução e Formulação de Problemas como metodologia de ensino de cálculo algébrico para alunos do Ensino Fundamental. As atividades foram desenvolvidas em uma turma de 8º ano de uma escola estadual do município de Patos de Minas/MG, na qual o pesquisador é também professor de Matemática, composta por 31 alunos. Para o desenvolvimento de sua pesquisa, que teve início no final do mês de agosto e se estendeu até outubro de 2018, inicialmente, o autor aplicou um questionário com o objetivo de verificar o conhecimento adquirido pelos alunos nas oito aulas (com duração de 50 minutos cada) lecionadas por ele sobre cálculo algébrico utilizando a Resolução de Problemas e Formulação de Problemas como metodologia de ensino. Silva (2019) utilizou o que chamou de diário do pesquisador para registrar as atividades desenvolvidas pelos alunos, bem como as práticas, interações e discussões, principalmente na aplicação da metodologia Resolução de Problemas e Formulação de Problemas como uma prática de ensino. Em seguida, o autor propôs uma atividade em que, divididos em pequenos grupos, os alunos elaborassem seis questões sobre o tema cálculo algébrico, com as respectivas resoluções, em forma de problemas matemáticos. Posteriormente, o autor organizou treze provas compostas por seis questões cada, que foram redigidas a partir das questões elaboradas pelos alunos. Essas provas foram aplicadas aos alunos, de forma que cada um resolvesse questões que não elaboraram, ou seja, houve uma troca de provas elaboradas pelos próprios alunos. Finalmente, o autor aplicou um segundo questionário ao final das atividades, que tratou sobre a metodologia adotada no ensino de cálculo algébrico aplicada aos alunos e norteadas pelo professor-pesquisador. Após a realização de todas as etapas da pesquisa, o autor relata que foi possível constatar que houve mais envolvimento e maior interação entre ele e os alunos participantes e, mesmo que alguns alunos tenham demonstrado um pouco de dificuldade na resolução e formulação de problemas nas aulas sobre cálculo algébrico, foi possível observar grande motivação por parte dos alunos sobre as atividades desenvolvidas. Conclui que as atividades que foram realizadas utilizando a Resolução de Problemas e Formulação de Problemas como metodologia de ensino pode trazer benefícios para o ensino de Matemática ao desenvolver a capacidade de investigação, de análise e de reflexão, levando os alunos a pensarem criativamente e criticamente sobre suas produções, seus interesses, suas curiosidades e possibilidades para a descoberta de respostas.

A pesquisa elaborada por Juscelino de Araújo Silva (2019) tem por objetivo principal verificar quais as potencialidades do uso da metodologia Resolução de Problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, se sobressaem no ensino de sistemas de equações do primeiro grau em duas variáveis, em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de escola da rede municipal do município de Mari, na Paraíba. As atividades desenvolvidas com a turma foram repartidas em 6 blocos e abordadas em um total de 13 encontros com aulas de 40 minutos cada. Os dois primeiros blocos abordam problemas que podem ser traduzidos em um sistema de equações do primeiro grau e sua resolução pode ser feita numericamente por tentativa e erro. Já nos blocos 3 e 4, os problemas apresentados tem características semelhantes aos problemas anteriores, mas nestes casos busca-se trabalhar os métodos da adição e da substituição para resolver formalmente os sistemas de equações do primeiro em duas variáveis gerados a partir das situações apresentadas como problemas. No bloco 5, o autor propõe que os estudantes criem e resolvam problemas que recaiam em um sistema de equações do primeiro grau em duas variáveis. No bloco 6, as atividades propostas abordam a representação gráfica de sistemas de equações oriundos de situações semelhantes aos problemas propostos anteriormente. Ao fim destas atividades, o autor ressalta que na maioria dos problemas propostos, a maior parte dos alunos buscava resolvê-los sempre recorrendo a uma abordagem numérica, mesmo após as atividades que foram desenvolvidas utilizando os métodos de adição e substituição, pois segundo o autor, aparentemente tais métodos não foram aprendidos plenamente pela maior parte dos alunos já que as tentativas de resolução utilizando estes métodos algébricos não tiveram sucesso. Por fim, o autor comenta que a utilização da metodologia Resolução de Problemas contribui para tornar o aluno protagonista no processo de aprendizagem e autonomia no pensamento, mas admite que foi possível perceber que ficou uma lacuna na aprendizagem dos métodos da adição e da substituição e também no trabalho da representação gráfica no plano cartesiano, seja por falta de tempo ou por falta de um amadurecimento no pensamento algébrico dos estudantes, visto que em alguns momentos a dispersão da maioria dos alunos contribuiu negativamente para o efetivo aprendizado da turma.

A pesquisa de Luciane Führ (2019) buscou responder se as atividades inspiradas na história da Matemática quanto ao processo de construção da simbologia Matemática podem favorecer o aprendizado da escrita simbólica da Matemática escolar na perspectiva de Raymond Duval, que valoriza o processo de compreensão dos objetos matemáticos a partir das diferentes formas de representá-los e da possibilidade de transitar pelas diferentes representações. Para tal fim, a autora elaborou e aplicou uma proposta pedagógica apoiada pelo estudo da história do desenvolvimento da simbologia algébrica, analisando suas potencialidades para o ensino e aprendizagem da escrita simbólica a partir dos dados coletados. As atividades propostas foram aplicadas em uma turma de 9º ano em uma escola municipal de São Leopoldo, Rio Grande do Sul, onde a pesquisadora é professora da turma, sendo realizadas em seis aulas de dois períodos de 40 minutos cada uma. Para a autora, o estudo da história do desenvolvimento da Álgebra mostrou que, inicialmente, a linguagem utilizada para descrever problemas e resultados era predominantemente retórica, com o uso da língua materna e, com o passar do tempo, a escrita foi abreviada e símbolos foram sendo padronizados, constituindo uma linguagem simbólica aceita e compreendida pelos pesquisadores e estudiosos de Matemática. Com suas atividades, a autora pretende que os alunos tenham a experiência de perceber vantagens na escrita simbólica, refletissem sobre os símbolos que conhecem e utilizam no cotidiano e a importância de todos utilizarem os mesmos símbolos e compreenderem o seu significado no contexto, possibilitando a reflexão e relação com o uso de símbolos em Matemática. Segundo o estudo realizado, a autora observou que a elaboração de uma simbologia própria por parte dos alunos, discussão e socialização dos resultados, indicou favorecer o processo de conversão da escrita em língua materna para a escrita simbólica. A autora conclui que, ao pensar a história da Matemática de maneira mais abrangente, e não apenas informativa, nem sempre é possível ou mais acertado levá-la para a sala de aula, pois os termos e o contexto histórico nem sempre são simples de apresentar aos alunos, no entanto, por ser um campo rico em conhecimentos, a história da Matemática pode ser amplamente explorada pelos professores, pois fornece complemento para a formação docente e inspiração para desenvolver atividades que possam contribuir para a aprendizagem dos estudantes.

A pesquisadora Renata Ranielly Cabral da Silva (2020) propôs em sua pesquisa identificar e analisar quais contribuições a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas podem propiciar ao ensino de expressões algébricas, usando como público-alvo para a realização da investigação uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual situada na cidade de Ingá – PB. As atividades propostas foram desenvolvidas em 10 encontros de 90 minutos (duas aulas de 45 minutos), totalizando 20 horas aula. A autora elaborou 5 atividades que foram aplicadas com a turma nestes 10 encontros. A primeira atividade engloba uma explicação geral do contexto histórico da evolução da Álgebra servindo como justificativa para o estudo deste conteúdo atualmente. A segunda atividade, envolvia uma situação problema que gerava uma expressão algébrica, mas neste momento o enfoque era a substituição numérica para encontrar os valores solicitados. A terceira atividade envolvia um problema de sequência de triângulos formados com palitos de fósforos, em que a generalização através de uma expressão algébrica seria eficaz e dinâmica, mas que foi resolvida pela maioria dos alunos através de uma abordagem numérica, de tentativa e erro. O quarto problema chamado de "Vou de táxi", apresentava a situação problema bem comum de se encontrar nos livros didáticos que exploram o estudo das funções afins, que relaciona o valor a ser pago por uma "corrida" de táxi em função da quantidade de quilômetros rodados. Vale ressaltar que durante a realização desta atividade, a autora explorou outras possibilidades de problemas, tais como o lucro obtido pelo taxista ao considerar as despesas geradas pelo consumo e preços do combustível. A atividade 5 foi um "Bingo das Expressões Algébricas" em que as cartelas do bingo utilizadas apresentavam, ao invés de números em cada "casa", valores em forma de expressões algébricas. Após a realização destas atividades, a autora concluiu que o ensino de expressões algébricas através da metodologia Resolução de Problemas tornou-se mais compreensivo ao aluno, visto a notável participação ativa dos estudantes na exploração dos problemas, sendo estes capazes de refletir, argumentar e justificar ideias sobre os problemas propostos, mesmo que estes apresentem dificuldades em suas tentativas de resoluções ou não dominem completamente as manipulações possíveis através dos mecanismos algébricos.

Diante dos resultados obtidos pelos trabalhos analisados, percebe-se que ainda é necessário realizar muita pesquisa e também elaborar mais materiais didáticos e para-didáticos explorando outras abordagens para o ensino da Álgebra na Educação Básica. Sendo assim, a proposta deste trabalho alinha-se aos trabalhos citados anteriormente por propor uma dessas abordagens, mas difere-se consideravelmente dos trabalhos publicados até o momento por trazer uma proposta de ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental através de Ativdades Experimentais, visando comprovar que esta metodologia pode trazer bons resultados no entendimento e aprendizagem de conceitos de Álgebra por parte dos estudantes. Outro ponto de destaque deste trabalho, é o fato de a atividade proposta ser planejada e aplicada em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, alunos estes que terão o seu primeiro contato com este conteúdo através da sequência de atividades propostas, o que difere das pesquisas realizadas com turmas de 8º ano em diante em que os alunos já tiverem contato com a linguagem algébrica e podem, em alguns casos, realizar as atividades mais como uma revisão dos conteúdos estudados anteriormente. Acreditamos que este primeiro contato com a linguagem algébrica através de atividades experimentais pode produzir uma aprendizagem satisfatória e duradoura, além de servir como motivação para o estudo da Álgebra e entendimento das suas possíveis aplicações e da sua importância como ferramenta de resolução de problemas.

5 ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Uma Tendência em Educação Matemática que parece-nos ser apropriada para o desenvolvimento deste trabalho é a que enfatiza o ensino de Matemática através de Atividades Experimentais. O simples fato de considerar ou classificar a Matemática como uma ciência já implica no fato de que o conhecimento nesta área também se desenvolve a partir da experimentação, permitindo a preparação e desenvolvimento das aulas, tanto por parte do docente como por parte dos estudantes, através de atividades envolvendo testagem ou realização de experiências, admitindo um caráter investigativo na produção dos conhecimentos e conceitos de Matemática. Alinhado a isto, Lorenzato (2010) afirma que:

> Na escola, a experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas. [...] a importância da experimentação reside no poder que ela tem de conseguir provocar raciocínio, reflexão, construção do conhecimento.
> A experimentação facilita que o aluno levante hipótese, procure alternativas, tome novos caminhos, tire dúvidas e constate o que é verdadeiro, válido, correto ou solução.
> Experimentar é valorizar o processo de construção do saber em vez do resultado dele, pois, na formação do aluno, mais importante que conhecer a solução é saber como encontrá-la. Enfim, experimentar é investigar (LORENZATO, 2010, p.72).

Concordando com o exposto pelo autor, as atividades escolares que proporcionam ao aluno a assimilação por descoberta produzem um efeito benéfico na construção do conhecimento deste aluno sobre o objeto/conteúdo estudado. E acreditamos que o professor em sala de aula consegue perceber isso em vários momentos, como por exemplo quando um aluno se depara com um triângulo impossível de ser construído, percebendo que se um dos lados é maior do que a soma dos outros dois não tem como formar o triângulo, e neste caso, a intervenção do professor explicando o conceito de desigualdade triangular contribui para validar a "descoberta" e completar a satisfação pessoal do aluno. Ou quando, por testagem numérica, o aluno percebe que $(a+b)^2$ não é a mesma coisa que a^2+b^2 (erro clássico que ocorre em muitos níveis escolares), e com o auxílio do professor, completando o quadrado perfeito, permite ao aluno associar a Álgebra à geometria exatamente como era feita pelos gregos e pelos árabes, produzindo um conhecimento satisfatório. Outro bom exemplo de que é possível ensinar Matemática por meio da experimentação é apresentado por Lorenzato (2010):

> Um aluno sem calculadora precisava do valor de $\sqrt{2}$ e não sabia de memória. Mas sabia que $\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{4} = 2$. O professor poderia dizer ao aluno que o valor procurado era 1,41 e teria perdido uma excelente oportunidade didática, que foi aproveitada assim:
> (Professor): Vamos colocar as raízes em ordem, da menor para maior.
> (Aluno): $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{2} =?$, $\sqrt{4} = 2$.
> (Professor): Se $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, qual valor pode ser experimentado?
> (Aluno): 1,5.
> (Professor): Como fazer para verificar se 1,5 é $\sqrt{2}$?
> (Aluno): Faz $1,5 \times 1,5$. Dá 2,25. É, passou. Vou tentar 1,4. Deu 1,96. Então $\sqrt{2}$ é um pouco mais que 1,4. Ah, lembrei é 1,41.
> (Professor): Note que você é capaz. (LORENZATO, 2010, p.73).

Certamente a quantidade de exemplos que validam a utilização de atividades experimentais em sala de aula é enorme, podendo esta técnica ou metodologia ser usada em praticamente todas as áreas da Matemática e em todos os níveis. Mas no campo teórico, deve-se perceber que estas atividades devem ser bem planejadas, necessita da participação ativa dos alunos e exige exímio conhecimento por parte do professor do objeto a ser estudado, manipulado ou testado, para que não se perca a potencialidade pedagógica deste tipo de atividade. Sobre a caracterização da metodologia desenvolvida através das Atividades Experimentais, Sá (2020) afirma que

> Essa estratégia metodológica tem como característica ser a aula desenvolvida por meio da realização de tarefas experimentais, elaboradas e acompanhadas pelo docente, com o objetivo de levar o estudante ao encontro com um conhecimento matemático específico após a execução de tarefas, registro de resultados, análise e reflexões sobre os resultados obtidos culminando com a sistematização do conteúdo (SÁ, 2020, p. 155).

O mesmo autor enfatiza que, quanto aos objetivos, as Atividades Experimentais podem ser classificadas como conceituação ou redescoberta, mas que em ambos os casos a aula terá momentos de organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização (SÁ, 2020, p. 156). Por fim, alinhando ou que já comentamos anteriormente, o mesmo autor enfatiza alguns cuidados que se deve ter ao se desenvolver atividades experimentais em sala de aula, para que não ocorra a descaracterização da ação e consequentemente a inibição do potencial pedagógico desta metodologia. Segundo Sá (2020), o ensino de Matemática por atividade experimental

> 1)Não deve ocorrer de forma improvisada;
> 2) Não dispensa a participação ativa do docente durante a sua realização;
> 3) Não deve ser utilizado após se ministrar exposição sobre o conteúdo;
> 4) Não deve ser utilizado para verificar a validade de um resultado já estudado;
> 5) Não dispensa do docente o conhecimento do assunto a ser trabalhado;
> 6) Não deve ser utilizado como reforço de assunto explorado (SÁ, 2020, p. 158).

Alinhado ao exposto pelo autor, as atividades que serão propostas para promover a aprendizagem inicial de conceitos de Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico servirão para introduzir e explorar o conteúdo, contando sempre com um planejamento bem elaborado e organizado, uma boa preparação da professora que irá desenvolver as atividades experimentais de modo a possibilitar aos alunos uma participação ativa na resolução das atividades propostas e uma produção de conhecimentos em Álgebra satisfatórios e adequados ao nível de ensino do público-alvo desta ação. Estas atividades foram elaboradas e organizadas pela autora deste trabalho de modo a contemplar as habilidades envolvendo a aprendizagem em Álgebra previstas na Base Nacional Comum Curricular, que é um documento guia para nortear as instituições de ensino de todo o país, englobando desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. A BNCC visa definir uma série de aprendizagens essenciais que devem ser aprendidas pelos estudantes ao longo de todo o Ensino Básico.

É importante enfatizar que a BNCC, ao definir as aprendizagens essenciais, não anula a necessidade da elaboração de currículos próprios pelos estados, municípios e escolas. Os currículos e as propostas pedagógicas devem ser orientados pela BNCC e não substituídos, como segue:

> BNCC e currículos têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, uma vez que tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação. São essas decisões que vão adequar as proposições da BNCC à realidade local, considerando a autonomia dos sistemas ou das redes de ensino e das instituições escolares, como também o contexto e as características dos alunos (BRASIL, 2018, p. 16).

Além disso, enquanto referência nacional, a Base, como um farol, indica o resultado que se pretende alcançar, mas não diz como o caminho deve ser percorrido para chegar até o resultado, isto é, o caminho a ser percorrido deverá ser definido pelas escolas, pelas Secretarias Municipais e Estaduais e pelos professores locais. É o currículo quem vai apontar quais materiais serão utilizados, como os professores serão formados, quais serão as estratégias didático-pedagógicas que serão adotadas, como será a metodologia, como será o acesso dos estudantes às aprendizagens definidas pela BNCC, entre outras decisões.

No que se refere à Matemática, o documento da Base elucida a importância acerca do conhecimento matemático defendendo que este é necessário para todos os estudantes da Educação Básica, tanto por sua vasta aplicação na sociedade, quanto por suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais.

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018, p. 265).

Ademais, a BNCC declara que o Ensino Fundamental precisa ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, que pode ser definido como as competências e habilidades de "raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, favorecendo o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas Matemáticas." (BRASIL, 2018, p. 266). A Base ainda destaca que é o letramento matemático que garante que os alunos possam reconhecer que os conhecimentos matemáticos são indispensáveis para a compreensão e atuação no mundo contemporâneo, além de perceber a Matemática propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazerosa. Nesse sentido, acreditamos que o uso de Atividades Experimentais no Ensino de Álgebra pode contribuir significativamente para este letramento matemático dos estudantes.

6 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES APLICADAS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

As atividades foram aplicadas em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual na turma em que a autora atua como docente. Essas atividades foram elaboradas pela autora deste trabalho ou extraídas e adaptadas do livro Teláris Matemática de 7º ano do autor Luiz Roberto Dante, por trazer atividades que consideramos adequadas e relacionadas ao conceito de Atividades Experimentais e também Resolução de Problemas, sendo esta uma Tendência em Educação Matemática defendida há muitos anos pelo autor supracitado.

As atividades foram desenvolvidas com um grupo de onze alunos que estavam frequentando as aulas e aceitaram participar desta etapa da pesquisa. A maior parte da turma apresenta um ritmo de trabalho normal, embora alguns alunos tenham considerável dificuldade em relação aos demais colegas. Independente do ritmo, os alunos costumam fazer a maior parte das atividades solicitadas pela professora, que são registradas ao longo das aulas e avaliadas como participação.

O período de desenvolvimento das atividades em sala de aula aconteceu entre os dias 6 e 15 de dezembro e tivemos 6 encontros, num total de 10 períodos. A maioria das atividades foram realizadas individualmente com a intenção de levar os alunos a explorar os problemas e elaborar, inicialmente sem interferência dos colegas, estratégias para resolver as atividades propostas. Não obstante, algumas atividades foram realizadas em duplas e várias discussões e intervenções foram realizadas em grupos, com boa participação e empenho dos alunos.

Para preservar a integridade dos alunos, optou-se por utilizar os símbolos A_1, A_2, A_3, ... para identificá-los, tomando como base a ordem dos nomes dos alunos no Diário de Classe. A seguir será apresentada a descrição e análise dos encontros, assim como as atividades que foram desenvolvidas nas aulas.

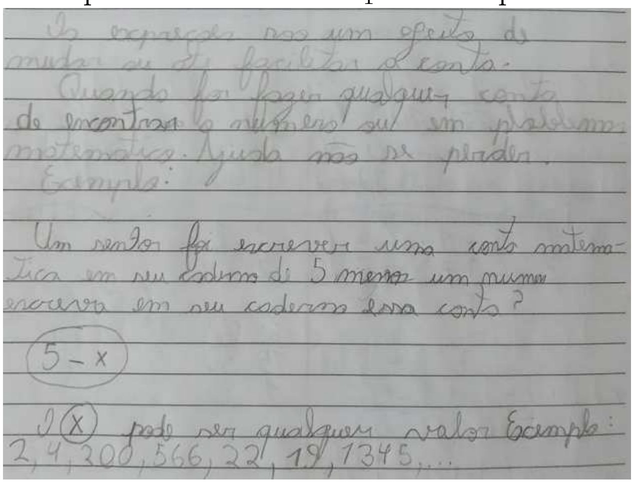
6.1 Expressões algébricas

Embora este seja o primeiro contato dos alunos com expressões algébricas, o pensamento algébrico inicial já vinha sendo trabalhado durante as aulas em momentos anteriores. Ao propor que os alunos respondam, por exemplo, "qual é a diferença do dobro de -20 com o triplo de -42", a professora questionava "O que significa o dobro de um número? E o triplo? O que a palavra diferença indica que devemos fazer?", questões que eram respondidas sem muita dificuldade com algo como "Duas vezes um número" "Três vezes um número" e "Continha de menos", respectivamente. No entanto, em nenhum momento anterior o número desconhecido foi representado por uma letra.

No primeiro encontro, realizado em três períodos no dia 06/12/2022, os alunos receberam o primeiro material impresso sobre expressões algébricas, que pode ser conferido no Anexo A. A professora solicitou que os alunos fizessem a leitura do material e, após a leitura, conversou com a turma sobre o uso das últimas letras do alfabeto (x, y, z) para representar quantidades desconhecidas se dar por convenção, sendo essa ideia proposta pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) e, mesmo que essas sejam as letras mais utilizadas, é possível utilizar outras letras ou mesmo símbolos para essa representação.

Em seguida, a professora pediu que os alunos escrevessem em seus cadernos, com suas palavras e de modo que eles entendessem, o que é uma expressão algébrica e uma variável, expondo sua compreensão sobre o material que acabaram de ler. Podemos verificar essas compreensões nas respostas a seguir.

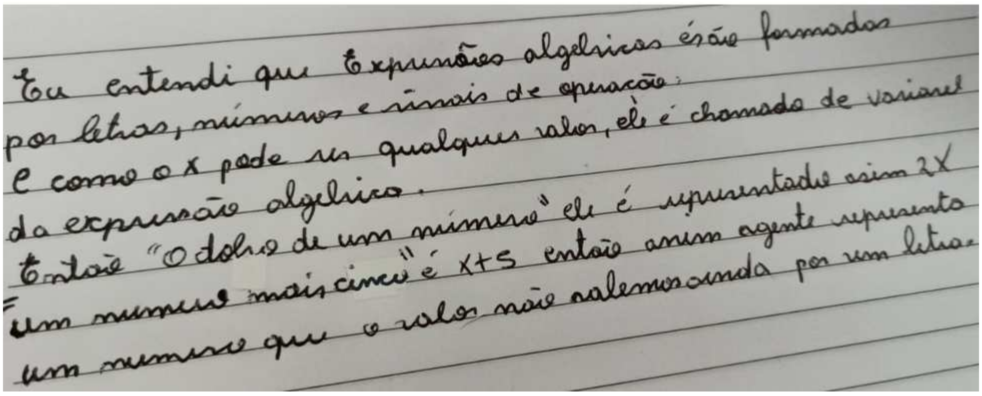
Figura 1: Compreensão da aluna A_1 sobre expressões algébricas



As expressões nos um efeito de
mudar ou até facilitar a conta.
Quando for fazer qualquer conta
de encontrar o número ou um problema
matemática. Ajuda nós se perder.
Exemplo:
Um senhor foi escrever uma conta matema-
tica em seu caderno de 5 menos um numero
escreva em seu caderno essa conta?
5 - x
O x pode ser qualquer valor Exemplo:
2, 4, 300, 566, 22, 19, 1345, ...

Fonte: A autora, 2022.

Figura 2: Compreensão da aluna A_4 sobre expressões algébricas



Eu entendi que Expressões algebricas é são formados
por letras, números e sinais de operação.
E como o x pode ser qualquer valor, ele é chamado de variavel
da expressão algebrica.
Então "O dobro de um número" ele é representado assim 2X
"um numero mais cinco" é X+5 então assim agente representa
um numero que o valor não sabemos ainda por uma letra.

Fonte: A autora, 2022.

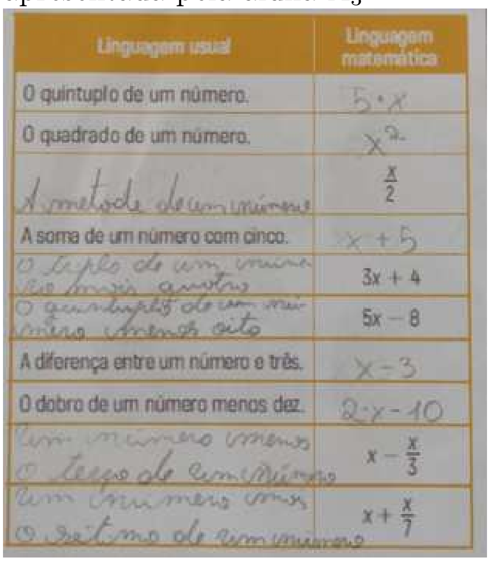
Essa atividade foi realizada satisfatoriamente pelos dez alunos presentes. Alguns responderam de forma mais clara e organizada que outros, mas, em geral, os alunos atingiram o objetivo da atividade, expondo seu entendimento sobre o material lido e, posteriormente, compartilharam suas respostas com os demais colegas e buscaram sanar dúvidas.

A professora também pediu que os alunos escrevessem em linguagem matemática outros exemplos de uso de variáveis em expressões algébricas dados em linguagem usual e buscou verificar o surgimento de possíveis dificuldades para interpretar situações que envolvem mais de uma operação, como por exemplo em “a metade de um número mais sete”.

Ao término dessa discussão, a professora entregou um conjunto de atividades sobre expressões algébricas, disponíveis no Apêndice B. Essas atividades foram continuadas no único período da aula seguinte, dia 07/12/2022, totalizando 4 períodos para a aplicação desta proposta.

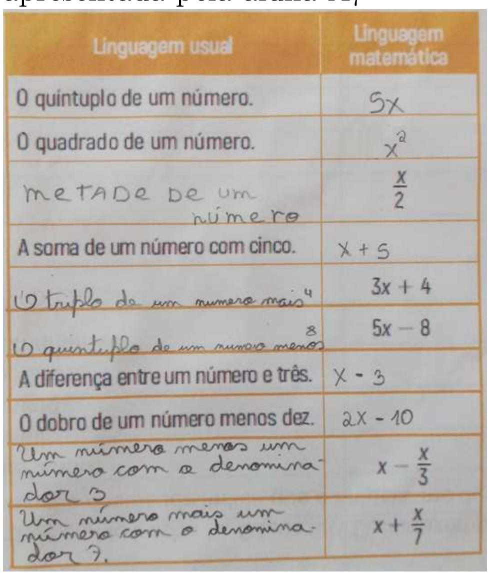
A primeira atividade consistia em preencher um quadro em que os alunos deviam representar em linguagem matemática as descrições dadas em linguagem usual ou escrever em linguagem usual as expressões algébricas fornecidas. Dos 10 alunos que realizaram a atividade, 7 deles interpretaram corretamente as expressões e completaram o quadro de forma adequada. Os demais, embora tenham apresentado maior dificuldade nos dois últimos itens, conseguiram resolver a maioria dos outros itens de forma correta.

Figura 3: Resolução da Atividade 1 apresentada pela aluna A_3



Linguagem usual	Linguagem matemática
O quíntuplo de um número.	$5 \cdot x$
O quadrado de um número.	x^2
A metade de um número	$\frac{x}{2}$
A soma de um número com cinco.	$x + 5$
O triplo de um número mais quatro	$3x + 4$
O quíntuplo de um número menos oito	$5x - 8$
A diferença entre um número e três.	$x - 3$
O dobro de um número menos dez.	$2 \cdot x - 10$
Um número menos o terço de um número	$x - \frac{x}{3}$
Um número mais o sétimo de um número	$x + \frac{x}{7}$

Figura 4: Resolução da Atividade 1 apresentada pela aluna A_7



Linguagem usual	Linguagem matemática
O quíntuplo de um número.	$5x$
O quadrado de um número.	x^2
metade de um número	$\frac{x}{2}$
A soma de um número com cinco.	$x + 5$
O triplo de um numero mais 4	$3x + 4$
O quintuplo de um numero menos 8	$5x - 8$
A diferença entre um número e três.	$x - 3$
O dobro de um número menos dez.	$2x - 10$
Um número menos um número com o denominador 3	$x - \frac{x}{3}$
Um número mais um número com o denominador 7.	$x + \frac{x}{7}$

Fonte: A autora, 2022.

A professora questionou sobre a resolução dos dois últimos itens do quadro: “Aqui quando tu diz ‘mais o sétimo de um número’, que número é esse?” e a aluna A_3 respondeu

"O mesmo que esse aqui", apontando para o 'x' na coluna da linguagem matemática e para 'um número' escrito por ela na coluna da linguagem usual. Um diálogo semelhante ocorreu com a aluna A_7 que, para o mesmo item, escreveu "um número mais um número com o denominador 7", explicando que o numerador deveria ser igual ao número tomado inicialmente. Nessa atividade, mesmo que os alunos tenham apresentado escritas diferentes, foi possível perceber que eles entenderam que a expressão $x + \frac{x}{7}$, em linguagem usual, significa um número mais a sétima parte dele. O raciocínio foi análogo no penúltimo item, $x - \frac{x}{3}$, que significa um número menos a terça parte dele.

Duas alunas e um aluno não conseguiram resolver parte dessa atividade de forma satisfatória, conforme Figuras 5 e 6:

Figura 5: Resolução da Atividade 1 apresentada pela aluna A_{10}

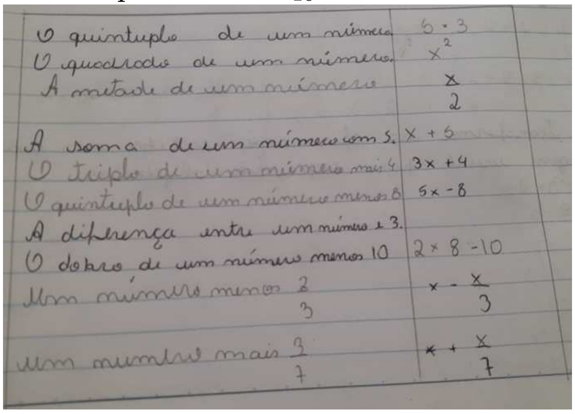
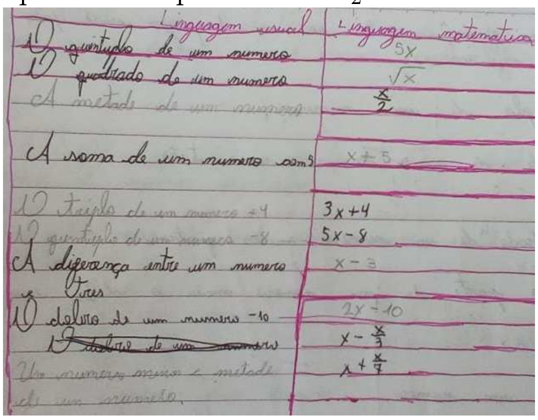


Figura 6: Resolução da Atividade 1 apresentada pela aluna A_2



Fonte: A autora, 2022.

A aluna A_{10} respondeu, para os dois últimos itens descritos acima, 'um número menos $\frac{2}{3}$' e 'um número mais $\frac{3}{7}$'. A professora questionou o porquê dos números $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{7}$ e a aluna disse que 2 (numerador da primeira fração) e 3 (numerador da segunda fração) foram os números que ela escolheu para ser o x. A professora explicou que a resolução estava no caminho, porém, a ideia da atividade não era escrever um exemplo específico supondo um valor para o x, mas escrever uma expressão que valesse para qualquer número que a gente quisesse. A aluna A_{10} também não escreveu, em linguagem matemática, 'a diferença entre um número e três' e disse ficar em dúvida se ficaria '$x - 3$' ou '$3 - x$', escrevendo corretamente após intervenção explicativa da professora.

A aluna A_2 escreveu '$\sqrt{2}$' ao invés de 'x^2' para 'o quadrado de um número'. Para $x - \frac{x}{3}$ essa aluna escreveu 'um número menos a metade de um número' e não fez o último item. Questionada pela professora sobre essa resposta, a aluna disse que ainda não tinha entendido muito bem. O aluno A_5 não conseguiu resolver o sétimo item (a diferença entre um número e três) nem os dois últimos itens sem o auxílio da professora, mas resolveu corretamente os demais itens.

De modo geral, foi possível perceber após o desenvolvimento desta primeira atividade que a maioria dos alunos conseguiu compreender e desenvolver satisfatoriamente a proposta, sendo necessário alguns questionamentos da professora para que os alunos corrigissem e assimilassem melhor os itens em que apresentaram maior dificuldade. Outra característica percebida foi a experimentação realizada pelos alunos, pois em muitos momentos realizavam testagens de valores em cada item para verificar se a sentença matemática estava correta, ação necessária neste primeiro momento para assegurar a correta resolução da atividade e contribuir para a construção do pensamento algébrico.

Na segunda atividade, os alunos deviam identificar quais são as variáveis em cada item, entendendo que as variáveis são as letras da expressão algébrica.

Figura 7: Resolução da Atividade 2 apresentada pelo aluno A_6

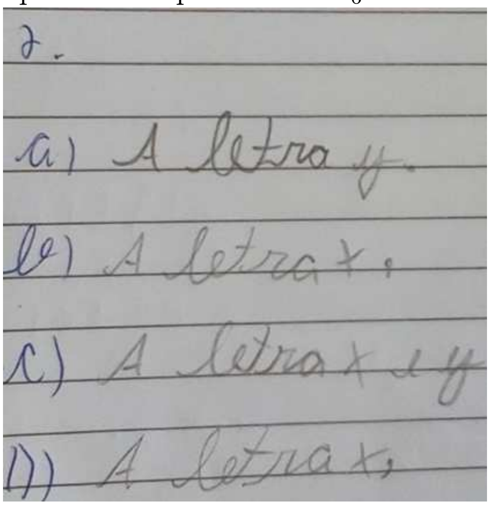
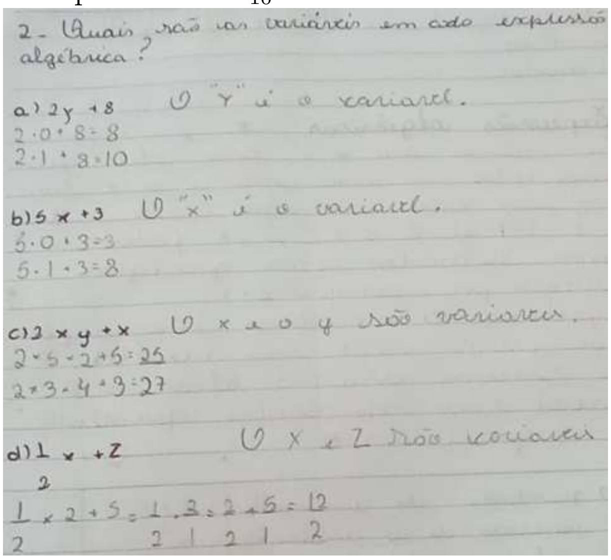


Figura 8: Resolução da Atividade 2 apresentada pela aluna A_{10}



Fonte: A autora, 2022.

Metade dos alunos identificaram as variáveis de forma direta, como o aluno A_6 em sua resolução. Esses alunos resolveram a atividade 2 dessa forma com base no material lido sobre expressões algébricas, compreendendo que as letras podem representar diferentes números e, por esta razão, são chamadas de variáveis nas expressões algébricas. O aluno A_6, ao ser questionado sobre o motivo da letra x ser a variável no item d, percebeu que, além do x, a letra z também era variável e incluiu essa letra na sua resposta.

Os outros cinco alunos resolveram a segunda atividade supondo valores para as letras que apareciam nas expressões algébricas, como pode ser visto na resolução da aluna A_{10}, e então perceberam que ela se tratava da variável procurada. Importante ressaltar que esta testagem com valores mostra que os alunos ainda se preocupam em obter um resultado numérico para a exressão, mas ainda não havia sido explorado o conceito de equação e cálculo da incógnita, que será explorado em outro momento, inclusive com a distinção entre incógnita e variável.

Na atividade 3, os alunos deviam escrever a expressão algébrica correspondente a cada escrita em linguagem usual apresentada. As escritas eram:

a) O triplo de um número.

b) A metade de um número mais 3.

c) O quadrado de um número menos 4.

d) A terça parte de um número mais o dobro desse número.

e) 5 menos um número.

f) O dobro de um número mais 7.

g) Um número dividido por 4.

Os alunos não apresentaram dificuldade para resolver essa atividade, porém mostraram escritas diferentes para o último item. Três alunos escreveram $\frac{x}{4}$, como a aluna A_9 e sete alunos escreveram $x : 4$, como a aluna A_3.

Figura 9: Resolução da Atividade 3 apresentada pela aluna A_9

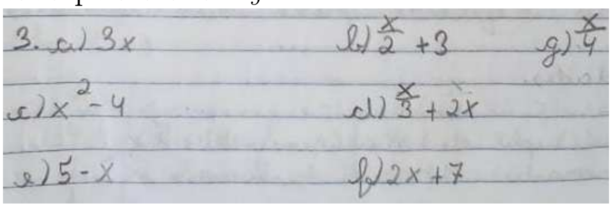
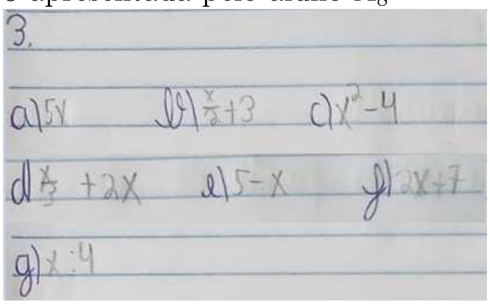


Figura 10: Resolução da Atividade 3 apresentada pelo aluno A_8



Fonte: A autora, 2022.

Essa escrita diferente não ocorreu nos itens b e d em que era pedido, respectivamente, a metade e a terça parte de um número. Os alunos podem levar um tempo para assimilar que 'um número dividido por 4' é equivalente a 'quarta parte de um número'. Com uma pequena intervenção realizada pela professora, os alunos foram levados a perceber essa equivalência. A professora solicitou que os alunos dessem um outro exemplo parecido com esse e a aluna A_1 disse que 'um número dividido por 6 é a mesma coisa que a sexta parte de um número' e outros alunos contribuíram com exemplos semelhantes e essa questão pareceu ter ficado mais clara.

A quarta atividade envolvia a escrita de uma expressão algébrica a partir de uma situação escrita em linguagem usual. O enunciado da questão era:

Mônica e o pai dela estão brincando de perguntas e respostas. As regras são as seguintes:

- quem acertar, ganha 10 pontos;

• quem errar, perde 3 pontos.

Mônica teve x acertos e y erros. Qual expressão algébrica indica os pontos obtidos por ela no total?

A aluna A_3, em sua resolução, conforme figura 11, considerou que Mônica teve 4 acertos e 3 erros e concluiu que, nessas condições, Mônica ficaria com 31 pontos. As alunas A_1, A_7 e A_9 também tentaram resolver essa atividade estipulando um valor para os acertos e erros. Embora a resposta dessas alunas funcionem para os casos específicos considerados, elas não conseguiram chegar na expressão algébrica $10x - 3y$.

Figura 11: Resolução da Atividade 4 apresentada pela aluna A_3

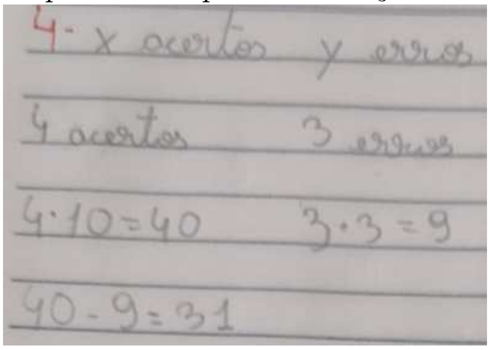
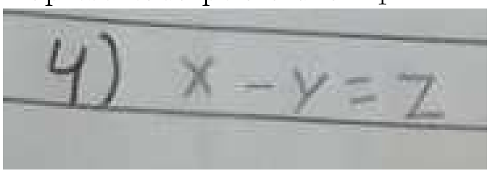


Figura 12: Resolução da Atividade 4 apresentada pela aluna A_1



Fonte: A autora, 2022.

As respostas dos demais alunos são semelhantes à apresentada pela aluna A_1. Os alunos consideraram o x como sendo o número de acertos, y como o número de erros e z como a pontuação final, não considerando as regras do jogo presentes no enunciado da atividade.

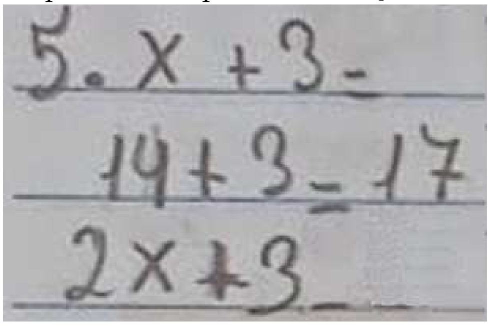
Como nenhum dos alunos conseguiu responder essa atividade de forma correta, talvez ela não deva ser aplicada como uma atividade introdutória, mas no decorrer das aulas, conforme os alunos vão se familiarizando com essas novas informações.

Na questão 5, enunciada "Qual expressão algébrica indica o número de dias em um período formado por 'x' semanas completas mais 3 dias?", os alunos perceberam que 'semanas completas' é representada por 7 por conter 7 dias, mas tiveram dificuldade para interpretar o enunciado de forma geral, conseguindo resolver apenas para casos específicos.

Seis alunos tentaram responder à questão com a escrita '$x+3$', como o aluno A_6. A professora questionou como ficaria a expressão algébrica se considerarmos, por exemplo, 5 semanas e foi possível perceber que eles entenderam que o número de semanas escolhido deveria ser multiplicado por 7, "porque cada semana tem 7 dias, aí se escolher 5 (semanas), fica 35+3, que dá 38", disse esse aluno. De forma semelhante, a aluna A_9 tentou responder à questão partindo da escolha de duas semanas como exemplo, chegando em $14 + 3 = 17$. No entanto, na tentativa de escrever uma expressão algébrica para esta situação, a aluna

Figura 13: Resolução da Atividade 5 apresentada pelo aluno A_6

Figura 14: Resolução da Atividade 5 apresentada pela aluna A_9



Fonte: A autora, 2022.

escreveu $2x + 3$ ao invés de $7x + 3$, não ficando claro quem deveria ser a variável (número de semanas) e quem deveria ser o coeficiente (número de dias na semana).

A sexta atividade também visava trabalhar a escrita de expressões algébricas a partir da escrita em linguagem usual. Seu enunciado era:

Considerando que x representa um número natural, indique por meio de expressões algébricas:

a) a soma do triplo desse número com 7;

b) 40% desse número;

c) o sucessor desse número;

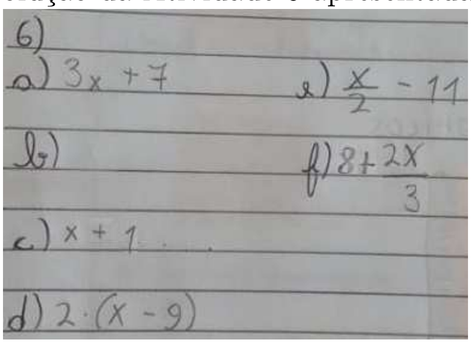
d) o dobro da diferença entre esse número e 9;

e) a metade desse número diminuída de 11;

f) a soma de 8 com $\frac{2}{3}$ desse número.

Como na atividade 2, os alunos conseguiram responder a maioria dos itens corretamente, com exceção do item b que só foi respondido após uma discussão intermediada pela professora.

Figura 15: Resolução da Atividade 6 apresentada pela aluna A_1



Fonte: A autora, 2022.

No item d, dois alunos responderam $2x - 9$, não interpretando corretamente a informação do enunciado e precisando de ajuda para concluí-lo.

Na atividade 7, ao contrário da anterior, os alunos deviam transformar cada expressão algébrica em uma escrita em linguagem usual. As expressões algébricas eram:

a) $4x + 9$

b) $\dfrac{x}{4} + 5$

c) $\dfrac{x}{3}$

d) $x^2 + 10$

e) $x^2 + 2x$

f) $\dfrac{x-1}{2}$

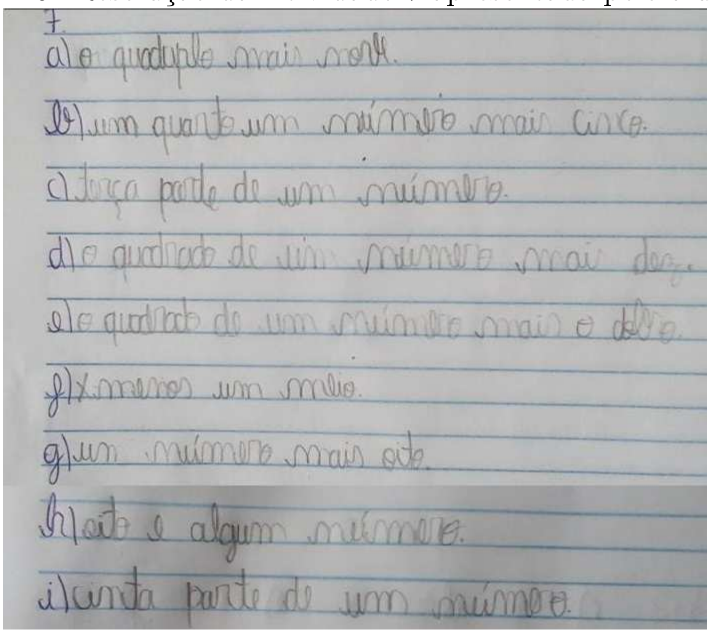
g) $x + 8$

h) $8x$

i) $\dfrac{x}{5}$

Na figura abaixo estão as escritas em linguagem usual para estas expressões algébricas apresentadas pelo aluno A_8:

Figura 16: Resolução da Atividade 7 apresentada pelo aluno A_8



Fonte: A autora, 2022.

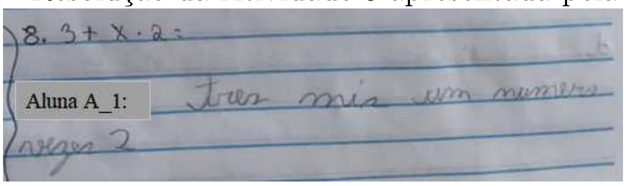
Os alunos fizeram corretamente a maioria dos itens, com exceção do item f. No primeiro item, a professora questionou o aluno A_8 sobre a sua escrita 'o quádruplo mais nove', perguntando o que seria o quádruplo e o aluno respondeu que é "quatro vezes um número". A professora perguntou qual número e o aluno, apontando para o 'x', disse: "esse aqui, que pode ser qualquer um". Neste item, apesar de não ter escrito 'o quádruplo de um número mais nove', o aluno interpretou corretamente a expressão algébrica.

O item f não foi respondido por sete alunos. Três alunos, incluindo o aluno A_8, escreveram "x menos um meio". A professora escreveu essa frase no quadro e, partindo dela, pediu que os alunos transformassem essa afirmação em uma expressão algébrica, pedindo também que alguém escrevesse a resposta no quadro para continuar a discussão.

Antes, porém, a aluna A_7 disse "acho que é melhor escrever 'um número menos um meio' porque nas outras a gente não tá escrevendo 'x"'. Os colegas concordaram com o apontamento da colega, a professora alterou essa escrita no quadro e voltamos à discussão anterior. Partindo de 'um número menos um meio', os alunos escreveram a expressão algébrica $x - \frac{1}{2}$, escrita no quadro pela aluna A_9, e perceberam que ela é diferente da expressão contida no item f. O aluno A_6 sugeriu escrever "um número menos um e tudo isso dividido por dois" e houve uma notável agitação da turma ao perceber que essa afirmação correspondia à expressão algébrica em questão. Foram necessárias várias intervenções por parte da professora e tentativas de resolução por parte dos alunos para que fosse possível chegar à escrita mais formal da expressão algébrica em questão: "a metade da diferença entre um número e um". As discussões foram produtivas e os alunos foram levados a testar hipóteses e discutir com os colegas as possíveis resoluções. Além disso, o mais importante, aqui, foi o fato de que os alunos conseguiram chegar em uma afirmação em linguagem usual, mesmo sendo rudimentar e passível de aprimoramentos, que representava a expressão algébrica do item f.

A oitava e última atividade proposta consistia em inventar uma expressão algébrica no caderno e, em seguida, dar para um colega passá-la para a linguagem usual. A aluna A_7 inventou a expressão algébrica $3 + x \cdot 2$ e a aluna A_1 passou para a linguagem usual, conforme Figura 17.

Figura 17: Resolução da Atividade 8 apresentada pela aluna A_7



Fonte: A autora, 2022.

Os demais alunos inventaram expressões algébricas relacionadas a 'algum número vezes x mais ou menos outro número', semelhantes à da colega acima e, apesar de não terem se arriscado quanto ao nível de complexidade em suas criações, cumpriram com o objetivo da atividade.

Essas atividades sobre expressões algébricas aplicadas visaram cumprir a habilidade EF07MA13 da BNCC: Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. Com a análise das atividades realizadas pelos alunos, foi possível perceber que essa habilidade foi parcialmente cumprida, uma vez que a ideia de incógnita ainda não foi abordada com os alunos e também porque os alunos ainda não conseguiram escrever os problemas em linguagem matemática de forma genérica, ficando dependentes de valores numéricos que representava um caso dentre os casos possíveis que a escrita algébrica permite descrever.

6.2 Máquinas programadas para gerar operações

O terceiro encontro foi realizado em um período no dia 12/12/2022 e nove alunos participaram dessa atividade. Os alunos receberam um material intitulado ‘Máquinas programadas para gerar operações’, disponível no Apêndice C, que foram apresentadas para desenvolver o conceito de função de forma intuitiva.

A primeira máquina estava programada para dobrar o número de entrada e adicionar 3 ao resultado e, a segunda máquina, para triplicar o quadrado do número de entrada.

Figura 18: Máquinas programadas para gerar operações

1ª máquina

E	Operação	S
0	$2 \times 0 + 3$	3
1	$2 \times 1 + 3$	5
−2	$2 \times (-2) + 3$	−1
5	$2 \times 5 + 3$	13
−1	$2 \times (-1) + 3$	1
20	$2 \times 20 + 3$	43
n	$2 \times n + 3$	$2n + 3$

2ª máquina

E	Operação	S
0	3×0^2	0
1	3×1^2	3
2	3×2^2	12
−1	$3 \times (-1)^2$	3
3	3×3^2	27
−2	$3 \times (-2)^2$	12
x	$3 \times x^2$	$3x^2$

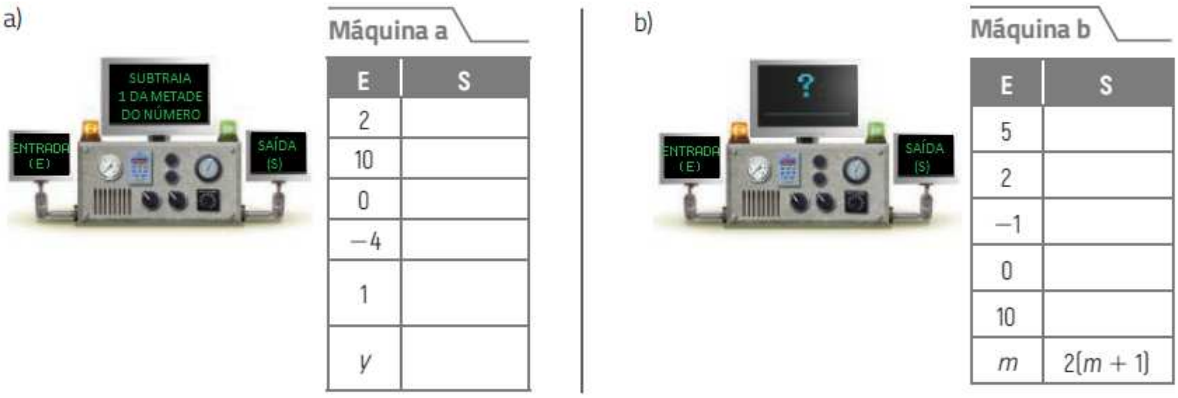
Fonte: Dante, 2018.

Em ambos os casos, a professora explicou como as máquinas funcionavam e, utilizando o quadro, perguntou para os alunos quais operações estavam sendo efetuadas e quais números saíam em cada caso, de acordo com o número de entrada e com a máquina. Na sequência, a professora destacou que o número de saída depende do número de entrada que fica no lugar da letra na expressão algébrica, em outras palavras, os números de saída são dados em função dos números de entrada. Além disso, a professora observou que cada número de entrada na máquina fornece um único número correspondente na saída.

O mesmo material contava com duas atividades, chamadas de 9 e 10 para continuar a sequência das atividades anteriores. A atividade 9 trazia duas outras máquinas programadas para gerar operações e os alunos deviam completá-las com os números faltantes.

A máquina do item a estava programada para subtrair 1 da metade do número e acompanhava alguns números de entrada, cabendo aos alunos realizar as operações necessárias e descobrir os números de saída correspondentes, como fez a aluna A_3 na

Figura 19: Máquinas programadas para gerar operações da Atividade 9



Fonte: Dante, 2018.

figura 20. No item b, um ponto de interrogação aparecia no lugar da programação da máquina e os alunos deviam apresentar a mensagem que descreve tal programação, com base na informação de que, quando o número de entrada é m, o número de saída é $2(m+1)$. Na figura 21 está a resolução apresentada pela aluna A_1.

Figura 20: Resolução do item a da Atividade 9 apresentada pela aluna A_3

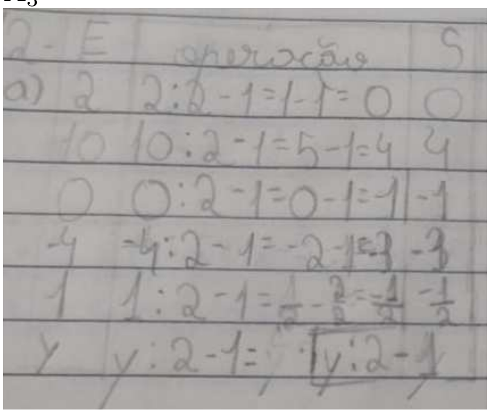
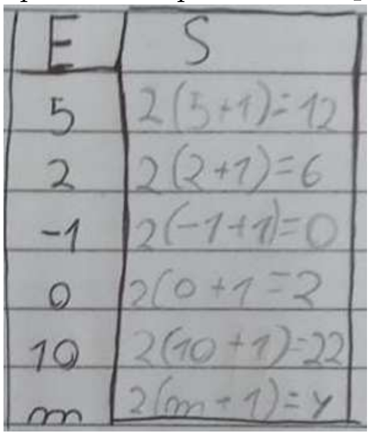


Figura 21: Resolução do item b da Atividade 9 apresentada pela aluna A_1

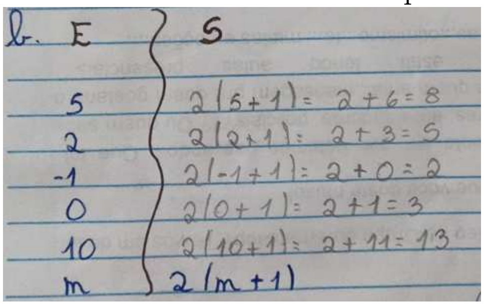


Fonte: A autora, 2022.

Para a apresentação da programação da máquina do item b, a professora precisou fazer várias intervenções para, juntamente com os alunos, chegar na mensagem "O dobro da soma de um número com um". A mensagem inicial proposta pelos alunos foi "o dobro de um número mais um", porém, assim que a professora escreveu essa frase no quadro e perguntou como ela ficaria em linguagem matemática, a aluna A_7 lembrando da discussão do item f da atividade 7, alertou que essa frase não corresponde à expressão algébrica $2(x+1)$ de que estávamos partindo: "se for escrever com x vai ficar dois vezes x mais um, sem os parênteses". Com essa colocação, a próxima mensagem sugerida foi "o dobro, abre parênteses, de um número mais um e fecha os parênteses" e, embora funcione, a professora continuou conduzindo uma discussão que levasse os alunos a uma expressão mais clara e precisa.

Os alunos precisaram de ajuda para realizar as operações corretamente pois, devido a erros cometidos ao realizar os cálculos necessários, acabavam chegando em valores errados na saída da máquina. A aluna A_7, por exemplo, em sua tentativa de resolução para o item a, iniciou resolvendo a operação no interior de parênteses e, após obter esse resultado, somou-o com o número 2 ao invés de multiplicar. Após a intervenção da professora, a aluna percebeu seu erro e fez as alterações necessárias para a resolução correta da questão.

Figura 22: Resolução do item a da Atividade 9 apresentada pela aluna A_7



Fonte: A autora, 2022.

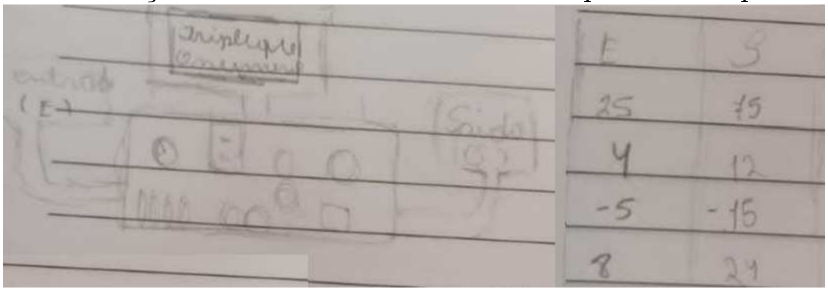
Mesmo com várias intervenções realizadas pela professora, alguns alunos seguiam cometendo erros ao realizar os cálculos de multiplicação e adição com números inteiros, chegando em valores erradas na saída da máquina. Embora seja uma atividade com baixo grau de dificuldade, o desempenho dos alunos em Álgebra acaba sendo diretamente afetado quando estes não compreendem de maneira satisfatória os conceitos e operações anteriormente vistos com números inteiros. Outros alunos, porém, cometeram erros por descuido e falta de atenção e perceberam seus erros e como solucioná-los assim que questionados sobre a resolução.

Na atividade 10 os alunos deviam inventar a programação de uma máquina, apresentar alguns valores para a entrada e escrever os números e as expressões algébricas da saída. A aluna A_4 inventou a operação ´triplique o número’ para a sua máquina, conforme Figura 23.

Outros colegas inventaram programações para a máquina com dizeres como ´o quádruplo de um número mais quatro’, ´subtrair seis de um número’, ´somar um número com a metade do número’. Novamente, não houveram muitas variações nos tipos de expressões inventadas e no nível de dificuldade escolhido.

O intuito dessas atividades foi trabalhar a descoberta dos números resultantes das expressões algébricas que saem das máquinas programadas e elas também buscaram cumprir a habilidade EF07MA13 da BNCC: Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia

Figura 23: Resolução do item a da Atividade 10 apresentada pela aluna A_4



Fonte: A autora, 2022.

de incógnita. Pode-se perceber que os alunos entenderam que para cada valor de entrada na máquina era gerado um valor de saída correspondente, assimilando um pouco melhor o conceito de variável, embora não tenha sido comentado nesta atividade os conceitos de variável independente, variável dependente e função.

6.3 Sequências e expressões algébricas

O quarto encontro foi realizado em três períodos no dia 13/12/2022 e dez alunos participaram das atividades. No dia seguinte, as atividades foram continuadas no período de Matemática, totalizando quatro períodos para essa proposta.

Esta aula foi inicialmente desenvolvida com a professora expondo alguns exemplos de sequências e conceituando-a logo a seguir. Foram explorados exemplos de sequências numéricas e explicado que para identificar um termo de uma sequência, é convencional utilizar a letra a acompanhada do índice do termo, mas pode-se utilizar qualquer letra minúscula do alfabeto para esta identificação. Também foram expostos alguns exemplos de sequências numéricas finitas e outras infinitas.

Para iniciar a exploração de uma sequência numéria através de uma representação algébrica, a professora escreveu os cinco primeiros termos da sequência dos números naturais não nulos seguido de reticências e da letra n e, logo abaixo, a sequência dos cinco primeiros números naturais pares, também seguido de reticências, questionando os estudantes sobre uma possível relação entre as duas sequências e como escrever algebricamente esta relação. Sem demora os alunos perceberam que a expressão algébrica $2n$ funcionaria como a regra geral da sequência dos números pares, dando indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da necessidade de resolução deste problema.

Retomando a discussão sobre a identificação dos termos de uma sequência, a professora observou que, quando $n = 1$ fica determinado o primeiro termo da sequência, chamado de a_1; quando $n = 2$, o segundo termo, a_2, fica determinado; quando $n = 3$, o terceiro termo a_3 é obtido e assim sucessivamente.

Logo após a professora e os alunos exploraram a a sequência dos números quadrados perfeitos a partir da sequência dos números naturais não nulos acompanhados da sua representação geométrica. Semelhante ao desenvolvimento do exemplo da sequência dos números pares, os alunos conseguiram identificar quase que imediatamente que a fórmula geral para um quadrado perfeito de um número n era dado pela expressão n^2.

O último exemplo proposto foi construir uma sequência partindo da fórmula do termo geral e construir a sequência dada por $2n+1$ para $n = 1, 2, 3, ...$ No quadro, juntamente com os alunos, a professora escreveu os procedimentos realizados para encontrar os números que compõem a sequência pedida, como segue:

- Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 \;\Rightarrow a_1 = 2 + 1 \;\Rightarrow a_1 = 3$.
- Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 \;\Rightarrow a_2 = 4 + 1 \;\Rightarrow a_2 = 5$.
- Para $n = 3$, temos: $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 \;\Rightarrow a_3 = 6 + 1 \;\Rightarrow a_3 = 7$.
- Para $n = 4$, temos: $a_4 = 2 \cdot 4 + 1 \;\Rightarrow a_4 = 8 + 1 \;\Rightarrow a_4 = 9$ e assim sucessivamente.

Assim, a sequência construída é $(3, 5, 7, 9, ...)$. A professora destacou que não é preciso determinar muitos termos, apenas uma quantidade suficiente que permita descobrir o padrão da sequência.

Ao término dessa discussão, a professora disse que o estudo das sequências numéricas está sendo ampliado utilizando expressões algébricas para representar e relacionar os seus temos. Nesse momento, os alunos receberam um material impresso sobre sequências e expressões algébricas (Apêndice D) contendo a teoria e os exemplos discutidos e realizaram a leitura do mesmo.

Junto com o material teórico, os alunos receberam uma lista contendo atividades sobre sequências e expressões algébricas, disponível no Apêndice E. A atividade 11 trazia uma tabela que os alunos deviam completar com os termos da sequência relacionados à sequência dos números naturais não nulos.

Figura 24: Tabela com sequências numéricas da Atividade 11

a) Sequências

Número natural não nulo	1	2	3	4	...	n	...
Quíntuplo do número	5	10			...		...

b) Sequências

Número natural não nulo	1	2	3	4	...	n	...
Dobro do número menos 1					...		...

Fonte: Dante, 2018.

Seis alunos, como A_8 e A_9, resolveram corretamente esta atividade e quatro alunos resolveram parcialmente, completando os primeiros termos da sequência, mas não conseguindo determinar corretamente a fórmula do termo geral em ambos os itens, como o aluno A_6.

Figura 25: Resolução do item a da Atividade 11 apresentada pelo aluno A_8

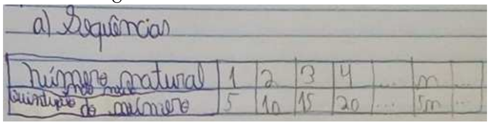


Figura 26: Resolução do item b da Atividade 11 apresentada pela aluna A_9

Fonte: A autora, 2022.

Figura 27: Resolução da Atividade 11 apresentada pelo aluno A_6

Fonte: A autora, 2022.

Na atividade seguinte os alunos deviam observar as figuras formadas por triângulos de palitos e completar a tabela (item a) com o número de palitos necessário para formar os triângulos, além de determinar a fórmula do termo geral e responder os itens b e c.

Figura 28: Figuras formadas por triângulos de palitos e tabela da Atividade 12

Figuras com palitos

Número de triângulos	1	2	3	4	5	...	n
Número de palitos	3						

Fonte: Dante, 2018.

Os alunos apresentaram mais dificuldade para resolver essa atividade. Seis deles responderam corretamente o item a, enquanto os outros 4 acertaram parcialmente, pois não conseguiram determinar a fórmula do termo geral de forma correta.

Figura 29: Resolução do item a da Atividade 12 apresentada pela aluna A_7

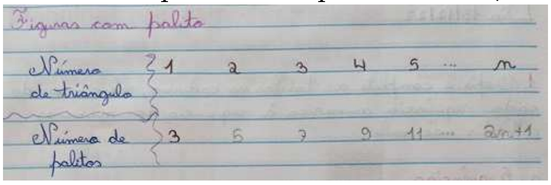
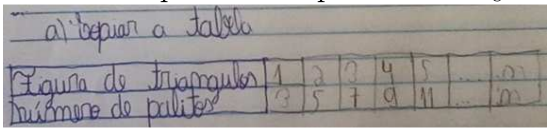


Figura 30: Resolução do item a da Atividade 12 apresentada pelo aluno A_8

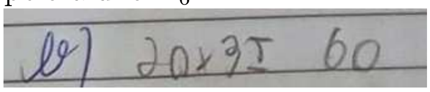


Fonte: A autora, 2022.

No item b desta atividade, observando que o número de palitos é dado em função do número de triângulos que se quer formar na figura, os alunos deviam determinar quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos. Apenas três alunas responderam corretamente este item e a professora precisou perguntar como elas haviam resolvido, pois a resposta não estava acompanhada de desenvolvimento. As alunas partiram da lei de formação da sequência, substituíram o n em $2n + 1$ por 20 e calcularam o resultado mentalmente, chegando em 41 palitos.

Figura 31: Resolução do item b da Atividade 12 apresentada pela aluna A_{10}

Figura 32: Resolução do item b da Atividade 12 apresentada pelo aluno A_6



Fonte: A autora, 2022.

A aluna A_{10} desenhou 20 triângulos formados por palitos, porém, desenhou cada triângulo individualmente, não acompanhando a sequência da figura modelo e desconsiderando que os novos triângulos possuem um lado em comum com o triângulo anterior. O aluno A_6, assim como os demais colegas, também não interpretou corretamente a atividade e apenas apresentou $20 \cdot 3 = 60$ como tentativa de solução, considerando que cada um dos 20 triângulos possuem três lados e desconsiderando as demais informações contidas na questão.

O item c perguntava quantos palitos são necessários para formar 77 triângulos. As três alunas que responderam corretamente o item anterior, também o fizeram neste. Novamente, partindo da lei de formação da sequência, essas alunas substituíram o n em $2n + 1$ por 77, efetuaram a multiplicação $77 \cdot 2$, obtendo 154 e adicionaram 1 a este resultado, chegando em 155 palitos. Os demais alunos, como no item anterior, não interpretaram corretamente o enunciado e, como tentativa de solução, apenas multiplicaram o número de triângulos, 77, por 3. Com a explicação e questionamentos feitos, os alunos não aparentaram continuar com tanta dificuldade e alguns dos erros podem ter ocorrido por falta de atenção na leitura da questão e descuido no momento da resolução.

Figura 33: Resolução do item c da Atividade 12 apresentado pela aluna A_3

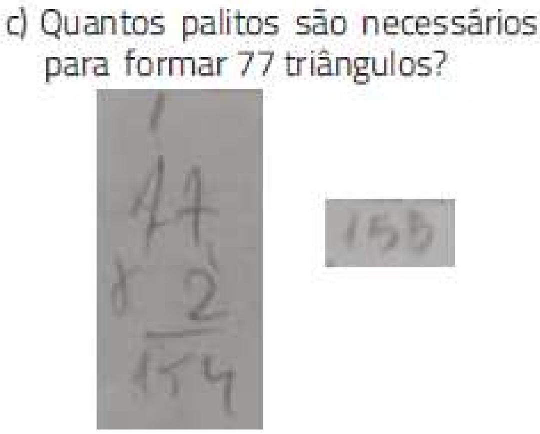
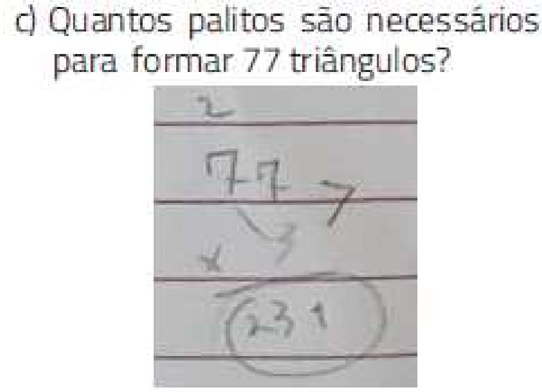


Figura 34: Resolução do item c da Atividade 12 apresentado pela aluna A_2



Fonte: A autora, 2022.

Na atividade seguinte, os alunos deviam construir a sequência infinita cujo termo geral a_n é dado pela fórmula do termo geral $a_n = 3n+2$, para $n = 1, 2, 3, ...$. Essa atividade foi melhor recebida pelos alunos, tendo oito deles respondido corretamente, ainda que não tenham representado a sequência utilizando a notação apropriada $(5, 8, 11, 14, 17, ..)$ e tenham construído apenas os três primeiros termos dessa sequência, para $n = 1, 2, 3, ...$, como fez a aluna A_9 na Figura 35.

Figura 35: Resolução da Atividade 13 apresentada pela aluna A_9

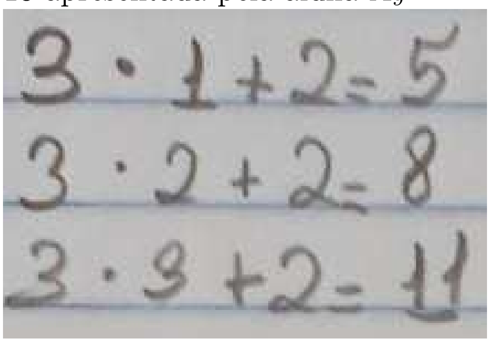
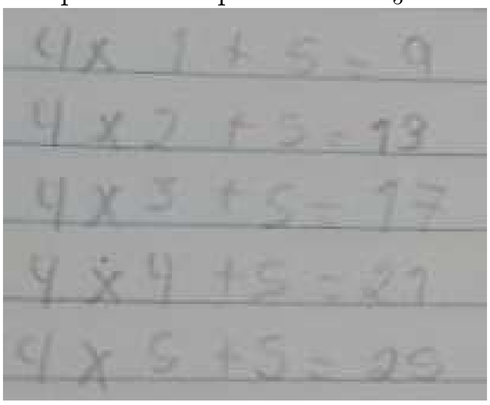


Figura 36: Resolução da Atividade 14 apresentada pelo aluno A_5



Fonte: A autora, 2022.

A atividade 14 pedia que os alunos inventassem uma fórmula do termo geral de uma sequência e a construíssem para $n = 1, 2, 3, 4, 5...$. O aluno A_5, conforme Figura 36, inventou a sequência dos cinco primeiros termos dada por $a_n = 4n + 5$, embora não tenha escrito a fórmula do termo geral, nem utilizado a notação apropriada para representar a sequência $(9, 13, 17, 21, 25, ...)$. Assim como nas propostas anteriores em que os alunos deviam inventar uma questão, eles não foram muito criativos e optaram por criar questões "mais fáceis", ainda não se sentindo seguros para arriscar em suas resoluções.

Estas atividades tinham como objetivo trabalhar a construção de sequências a partir da fórmula do termo geral delas e buscaram cumprir a habilidade EF07MA15 da BNCC: Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. Apesar de nem todos os alunos apresentarem um bom desempenho na resolução das atividades propostas, pode-se perceber que esta habilidade, em geral, foi cumprida, visto que a maioria dos alunos conseguiu fazer a associação dos valores a serem obtidos em uma sequência numérica com a sequência dos números naturais, produzindo uma representação geral em função de n para a obtenção dos valores das sequências estudadas. Vale ressaltar que a simples resposta de que a sequência dos números pares é dada por $2n$ e a sequência do quadrados perfeitos por n^2, para todo número natural n, mostram a capacidade dos alunos em abstrair e genaralizar, o que pode ser considerado como uma construção do pensamento algébrico por parte dos estudantes. Ademais, a maior parte dos alunos esboçou corretamente as fórmulas gerais das sequências partindo dos valores numéricos da mesma e os alunos que cometeram algum erro, tanto no cálculo de um termo de uma sequência como na construção da lei para o termo geral, conseguiram entender, após intervenção da professora com questionamentos e explicações baseadas em outros exemplos de sequência, onde tinham errado e corrigindo tal erro, assimilando um pouco melhor o porquê de se usar letras para representar um valor desconhecido e que pode variar dependendo do contexto.

6.4 Adivinhação de número pensado

O quinto encontro foi realizado em um período no dia 15/12/2022 e nove alunos participaram das atividades. Estas atividades foram planejadas para dois períodos de aula, no entanto, devido à atividades internas da escola, as atividades foram aplicadas em um período. Dos nove alunos participantes presentes, duas alunas participaram das atividades pela primeira vez, já que haviam faltado nas demais aulas.

A professora entregou um material (Apêndice F) contendo quatro atividades envolvendo adivinhações de números para que os alunos resolvessem. Como o tempo de aplicação foi reduzido pela metade, a professora não conseguiu abordar as equações polinomiais do 1º grau contidas no material e os alunos resolveram apenas com exemplos numéricos.

A décima quinta atividade, seguindo a ordem das anteriores, consistia na seguinte situação: Ana e Bia foram a um restaurante. Na hora de pagar a conta, elas decidiram dividi-la assim: Ana pagaria o dobro do que Bia pagasse. O valor da conta foi de R$ 36,00. Quanto cada uma deveria pagar?

A professora disponibilizou um tempo para que os alunos levantassem hipóteses e discutissem sobre a questão proposta. Após essa discussão, os alunos foram convidados a expor suas respostas.

Figura 37: Resolução da Atividade 15 apresentada pela aluna A_1

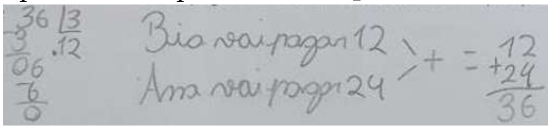
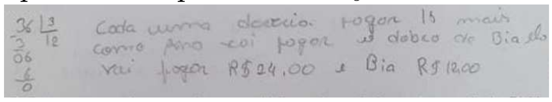


Figura 38: Resolução da Atividade 15 apresentada pela aluna A_9



Fonte: A autora, 2022.

Os alunos não apresentaram dificuldades para resolver esta questão e, rapidamente dividiram 36 por 3, ou seja, o valor da conta pelo total de partes que esta deve ser dividida para cumprir com o enunciado e, em posse desse valor, fizeram as distribuições de acordo com o combinado entre Ana e Bia: Bia deve pagar 12 reais e Ana o dobro desse valor, 24 reais.

Para indicar que Ana vai pagar o dobro do que Bia pagasse e que juntas elas pagarão 36 reais, escrevemos $2x + x = 36$, que é um exemplo de equação. A professora conversou com os alunos sobre essa situação do pagamento no restaurante e mostrou que tem-se dois valores em função da mesma letra e, como estão representados pela mesma letra, o valor dela é o mesmo, como eles acertadamente chegaram em 12 reais. Ainda, no caso de Ana, a letra aparece multiplicada por 2 e então ela pagou o dobro do valor pago por Bia.

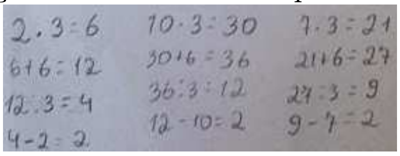
A professora também comentou que ainda não é necessário somar $2x$ e x para resolver a equação, já que ela pode ser resolvida como os alunos a fizeram, por tentativa e erro ou por algum outro método conveniente, mas que utilizar processos algébricos para resolver problemas pode facilitar bastante as resoluções de questões em que os valores a ser encontrados não sejam tão "amigáveis"e pequenos como o do exemplo dado ou para facilitar o desenvolvimento de cálculos mais complexos e permitir modelar e resolver situações em que a a sentença ou equação matemática seja mais extensa e composta por muitas operações matemáticas.

Após essa discussão, os alunos partiram para as questões que envolvem adivinhação de números, cuja resolução genérica envolve equação polinomial do 1º grau. A professora disse que as questões também funcionam para números “grandes” mas, para facilitar, observou que seria mais fácil que os alunos escolhessem números não tão altos para iniciar as adivinhações.

A atividade 16, primeira a envolver adivinhação, era enunciada assim: Pense em um número qualquer e multiplique ele por 3. Some 6 ao resultado. Divida o resultado por 3. Por último, subtraia o número pensado. Não importa o número pensado, magicamente o resultado será sempre 2.

Novamente, todos os alunos conseguiram resolver, numericamente, esta questão e alguns alunos fizeram mais de uma testagem para verificar se a "coincidência" se mantinha, como a aluna A_{11}.

Figura 39: Resolução da Atividade 16 apresentada pela aluna A_{11}



Fonte: A autora, 2022.

A palavra 'magicamente' no enunciado pode ser explicada algebricamente ao seguir todos os passos para um número natural x qualquer e sempre obter 2 como resultado final.

- Pense em um número qualquer: x
- e multiplique ele por 3: $3x$
- Some 6 ao resultado: $3x + 6$
- Divida o resultado por 3: $\dfrac{3x+6}{3} = x + 2$
- Por último, subtraia o número pensado: $x + 2 - x = 2$

A questão 17 foi resolvida corretamente por sete alunos e dois alunos cometeram erros durante as operações necessárias para a resolução e não conseguiram concluir a atividade sem auxílio da professora. O enunciado da questão era: Pense em um número natural. Multiplique por 5. Some 6. Multiplique por 4. Some 9. Multiplique por 5. Qual o resultado? Com a resposta dos alunos, a professora, magicamente, adivinhará o número inicialmente pensado. Vamos testar?

Ao fazer uma observação sobre escolher números não muito "grandes" para fazer as adivinhações, a professora não percebeu que essa condição podia levar os alunos a escolher números muito "pequenos", como fez o aluno A_6 em sua resolução, que pode ser conferida na Figura 40. No entanto, mesmo pequeno, o número 1 cumpre com a premissa do enunciado e funciona para resolver a adivinhação como qualquer outro número natural, apenas tornando os cálculos mais fáceis. Após adivinhar o número pensando por este aluno, a professora sugeriu que ele fizesse o teste novamente e, dessa vez, escolhesse um número maior, com dois ou três algarismos. O aluno refez a questão, corretamente, partindo do número 34, mas não testou com um número de três algarismos.

A aluna A_2, conforme Figura 41, errou o último cálculo, ao fazer a multiplicação do número 233 por 5. Ao falar que o resultado era 365, a professora disse que o número pensando foi o 2, mas a aluna negou. Como esse procedimento sempre funciona, a professora imaginou que houvesse algo errado na resolução desta aluna, o que foi verificado ao olhar o último cálculo. A aluna errou no último passo da última multiplicação, cometendo um descuido ao usar o algoritmo prático da multiplicação, esquecendo de efetuar

Figura 40: Resolução da Atividade 17 apresentada pelo aluno A_6

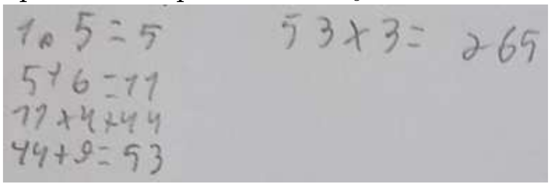
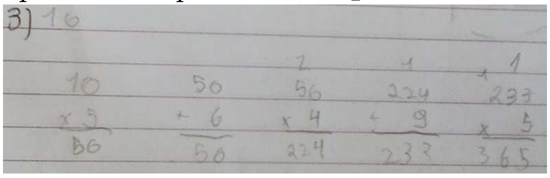


Figura 41: Resolução da Atividade 17 apresentada pela aluna A_2



Fonte: A autora, 2022.

a multiplicação do segundo fator pela centena do primeiro fator antes de somar com o dígito da centena proveniente da multiplicação imediatamente anterior.

A adivinhação do número pensado com a informação do resultado pode ser explicada algebricamente da seguinte maneira:

- Pense em um número natural: x
- Multiplique por 5: $5x$
- Some 6: $5x + 6$
- Multiplique por 4: $(5x + 6) \cdot 4 = 20x + 24$
- Some 9: $20x + 24 + 9 = 20x + 33$
- Multiplique por 5: $(20x + 33) \cdot 5 = 100x + 165$

• Qual o resultado? Como o resultado sempre será um múltiplo de 100 somado com 165, a professora consegue adivinhar o número que os alunos pensaram ao subtrair 165 do resultado final (que será dito pelos alunos), e em seguida dividindo o resultado por 100 para obter o valor do número x pensado pelo aluno, aplicando mentalmente a resolução da equação através das operações inversas, ou lei do cancelamento em uma equação, que neste caso poderia ser escrita como $N = 100x + 165$, em que N é o resultado obtido pelos estudantes após as cinco operações realizadas a partir do número x pensado.

A última atividade contava com um título convidativo: Descubro sua idade enquanto você pensa em pizza. O enunciado seguia: Considerando o ano atual de 2022, faça as seguintes contas: Pense no número de vezes por semana que você sente vontade de comer pizza (tente pensar em mais de uma vez, mas menos de dez). Multiplique esse número por 2. Some 5. Multiplique o resultado por 50. Se você já fez aniversário este ano, some 1772 e, se ainda não fez, some 1771. Subtraia o número de quatro dígitos do ano que você nasceu. Você deve ter obtido um número de três algarismos. O primeiro dígito desse resultado é o número de vezes que você pensou em comer pizza na semana e os dois últimos dígitos representam a sua idade.

Duas alunas não resolveram corretamente essa atividade por descuido durante os processos para efetuar as operações necessárias. Os outros sete alunos resolveram de forma correta. A aluna A_7, por exemplo, resolveu os cálculos necessários de forma correta e chegou em um número de três algarismos que cumpria o que era prometido na "mágica", em que o dígito da centena representava o número de vezes que ela pensou em comer pizza na semana e os dígitos da dezena e unidade representava a sua idade, conforme figura 42. A aluna A_9 se confundiu no passo em que deveria somar 1772 (por já ter feito aniversário em 2022) ao resultado obtido anteriormente, 850. A aluna calculou a diferença entre esses números, figura 43, e não conseguiu continuar sem a ajuda da professora. Após a intervenção, a aluna conseguiu concluir a atividade.

Figura 42: Resolução da Atividade 18 apresentada pela aluna A_7

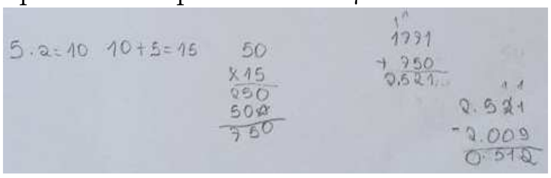
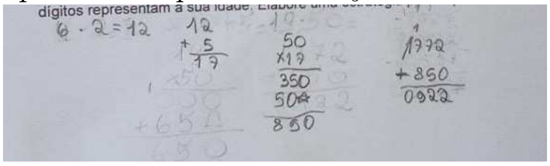


Figura 43: Resolução da Atividade 18 apresentada pela aluna A_9



Fonte: A autora, 2022.

Os alunos ficaram notavelmente impressionados com essa atividade e alguns disseram achar que a professora poderia estar usando algum truque por saber que a idade deles é 12 ou 13 anos. A professora respondeu que saber a idade de alguns alunos não é o truque desta questão e sugeriu que os alunos fizessem a atividade com o ano de nascimento dos seus irmãos, pais, mães, avós. Os resultados continuarão dando certo e os alunos podem fazer essa atividade/ brincadeira com essas pessoas.

A explicação deste "truque" também pode ser entendida algebricamente ao seguir todos os passos dados:

- Pense no número de vezes por semana que você sente vontade de comer pizza: x
- Multiplique esse número por 2: $2x$
- Some 5: $2x + 5$
- Multiplique o resultado por 50: $(2x + 5) \cdot 50 = 100x + 250$
- Se você já fez aniversário este ano, some 1772: $100x + 250 + 1772 = 100x + 2022$

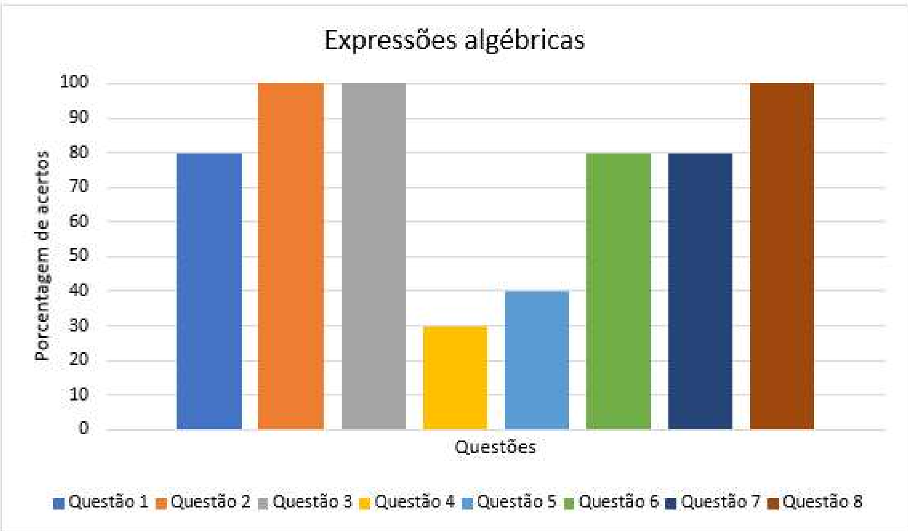
  e, se ainda não fez, some 1771: $100x + 250 + 1771 = 100x + 2021$

Subtraia o número de quatro dígitos do ano que você nasceu: é fácil perceber que ao efetuar 2022 ou 2021 menos o ano de seu nascimento, o resultado será a sua idade, que pode ser representada genericamente pelo número de dois dígitos x_1x_0. Como este número x_1x_0 está sendo somado a um múltiplo de 100 ($100x$), o número N de três algarismos encontrado ao final da operações pode ser descrito como $N = xx_1x_0$, em que a sua idade estará representada nos algarismos das dezenas e das unidades, x_1 e x_0, respectivamente, e o algarismo das centenas (x) representa o número de vezes que você pensou em comer pizza na semana.

Apesar do pouco tempo disponível para desenvolver as atividades de adivinhação de número pensado e principalmente, de explorar as expressões algébricas e equações geradas a partir do problema proposto, como por exemplo na atividade 16 e 17, pode-se perceber que este tipo de atividade possibilita ao aluno desenvolver algumas habilidades descritas na BNCC, tais como: (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos (as três adivinhações de números pensados apresentam algoritmo de resolução idênticos); (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita (relação de N em função dos valores x); (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. Esta última habilidade é definida pela BNCC como uma habilidade a ser desenvolvida no 8º ano do ensino fundamental, mas que pode ser desenvolvida nesta atividade tranquilamente através dos cálculos envolvendo a substituição do x por valores numéricos nas expressões encontradas em cada problema.

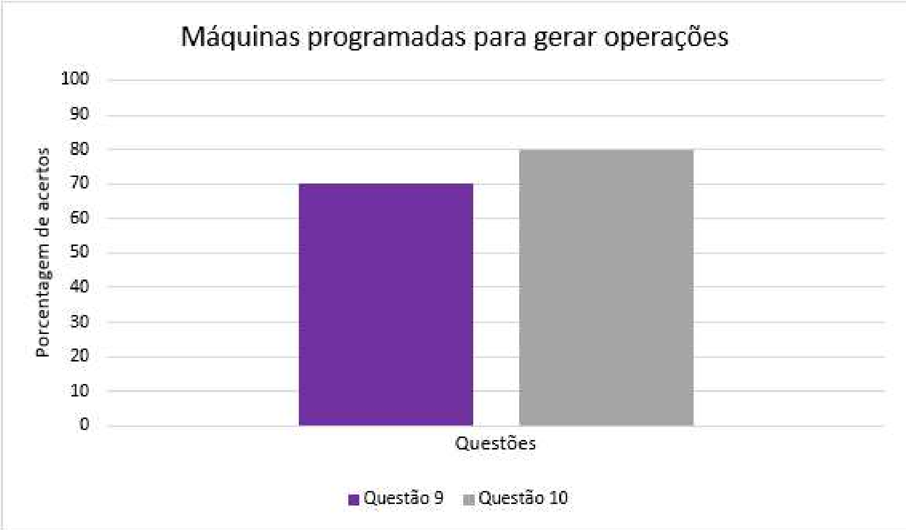
Por fim, para realizar uma análise quantitativa sobre o desempenho dos alunos em relação às atividades experimentais propostas, iremos expor a seguir alguns gráficos que evidenciam que o quantitativo de acertos obtidos pelos alunos participantes desta ação foi realmente satisfatório. Vale frisar que para gerar os gráficos de algumas questões que apresentavam mais de um item (a, b, c,...), o cálculo considerado para encontrar a porcentagem de acerto da questão foi a razão entre a soma de todos os acertos dos alunos em todos os itens da questão pelo produto do número de alunos participantes pelo número de itens da questão.

Figura 44: Desempenho dos alunos nas atividades sobre Expressões algébricas



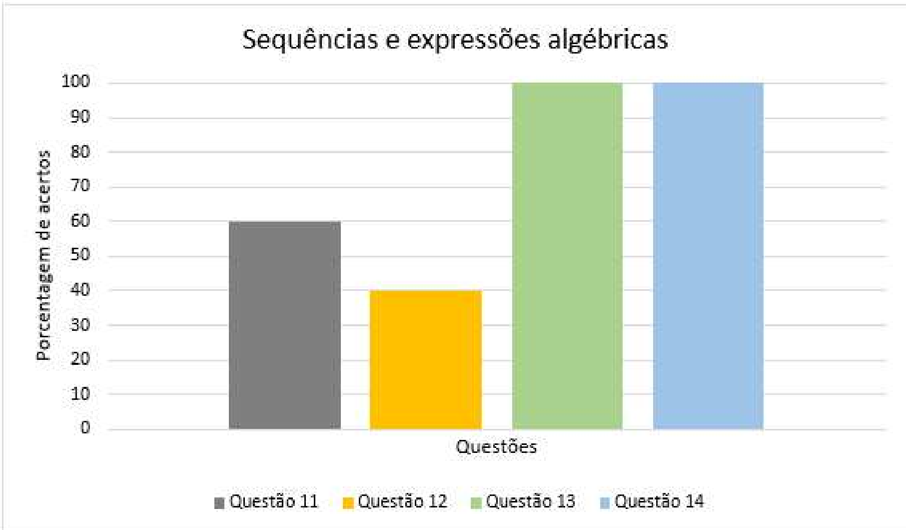
Fonte: A autora, 2022.

Figura 45: Desempenho dos alunos nas atividades sobre Máquinas programadas para gerar operações



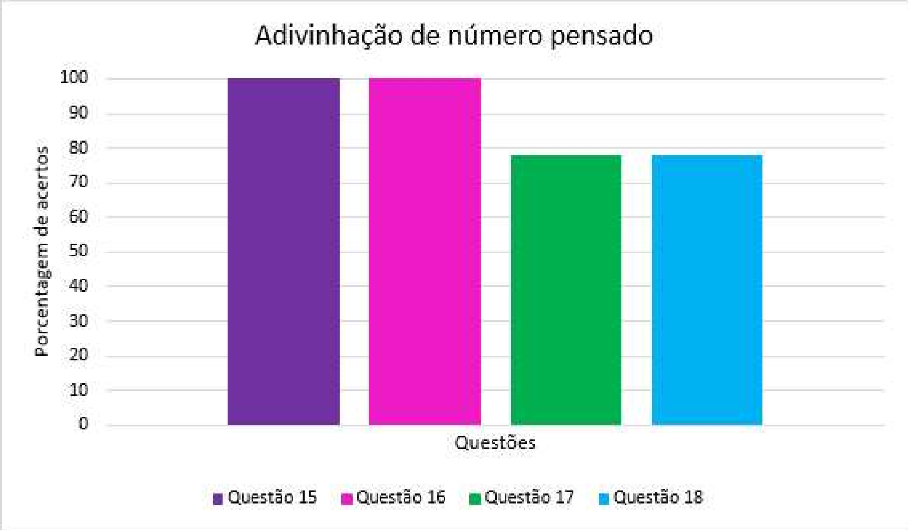
Fonte: A autora, 2022.

Figura 46: Desempenho dos alunos nas atividades sobre Sequências e expressões algébricas



Fonte: A autora, 2022.

Figura 47: Desempenho dos alunos nas atividades sobre Adivinhação de número pensado



Fonte: A autora, 2022.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se encara um desafio de propor e desenvolver atividades educacionais utilizando novas metodologias de ensino, o professor, mesmo tendo se preparado muito para a prática através de uma formação teórica consistente e treinamento constante que a prática docente proporciona, volta a ser um aprendiz, um sujeito que busca novas descobertas e que não aceita o comodismo como justificativa para o desenvolvimento da sua profissão. Conforme esta pesquisa foi sendo delimitada e desenvolvida, as leituras realizadas para atingir uma compreensão um pouco maior das possibilidades de ensino e tendências em educação Matemática produziam inquietações na autora deste trabalho que geravam uma tempestade se sentimentos e pensamentos que iam desde o desespero de considerar que nada está se encaixando nas teorias estudadas até a euforia de perceber em alguns momentos que o trabalho que estava sendo desenvolvido era promissor e impactante. Passado este misto de sentimentos, percebe-se que os pontos mais importantes na trajetória completa de uma pesquisa acadêmica envolvendo ensino e aprendizagem, e de modo geral, a educação Matemática, são a bagagem teórica, a evolução intelectual e a melhoria considerável no desenvolvimento das atividades de atuação docente.

Na busca por encontrar nas Tendências em Educação Matemática uma base metodológica para desenvolver atividades de ensino de Matemática que efetivamente produzem uma aprendizagem satisfatória nos estudantes, passamos pelo estudo envolvendo o uso de História da Matemática para introduzir e explorar conteúdos de Matemática, pelo uso de Tecnologias digitais para dinamizar as atividades em aula e prender a atenção dos estudantes da era dos dispositivos móveis e da internet, e também compreendemos um pouco melhor como utilizar a Resolução de Problemas como metodologia que desafia os estudantes a se superarem a cada novo problema proposto. Por fim, encontramos em Lorenzato (2010) e Sá (2020) uma nova forma de ensinar Matemática que, em um primeiro momento parece não ser aplicável a maioria dos conteúdos de Matemática da Educação Básica, mas que à medida que vamos nos aprofundando dos conceitos e na metodologia completa, percebemos o grande potencial que ela têm para permitir aos estudantes assumirem o papel de protagonista e serem os gestores da sua própria apendizagem. Esta tendência conhecida como Atividades Experimentais, alinha-se fortemente ao que é desenvolvido na Resolução de Problemas e considera o aluno como um sujeito ativo que produz o seu próprio conhecimento.

Ao identificarmos, elaborarmos e aplicarmos atividades experimentais para promover o ensino e a aprendizagem de Álgebra no ensino fundamental séries finais, fomos percebendo que a testagem, a experimentação e a aprendizagem através dos erros e acertos poderia auxiliar os estudantes a desenvolverem o pensamento algébrico a apropriarem-se dos conceitos de Álgebra, desde tópicos bem básicos como a substituição de valores numéricos em uma sentença algébrica, até a conceituação e diferenciação entre variável e incógnita e os conceitos de função e de equação. Neste sentido, foi necessário a mudança de postura da professora pesquisadora, deixando de lado um pouco das concepções mais tradicionais de aula expositiva e com resolução de exercícios, e assumindo um papel de professor mediador e orientador, permitindo aos estudante realizar as investigações necessárias até chegar nas suas próprias conclusões e sua própria maneira de resolver as atividades e problemas propostos.

Com base na pesquisa desenvolvida com uma turma de alunos de 7º ano do ensino fundamental de uma escola do Litoral Norte gaúcho, na qual foram aplicadas uma sequência de atividades experimentais em dez períodos de aula de 50 minutos cada, pode-se perceber ao final da atividade e através da análise dos resultados obtidos, que o uso de atividades experimentais possibilita uma aprendizagem eficaz sobre os conceitos de Álgebra por parte dos estudantes. Foi possível verificar também que, através da testagem de valores nos problemas envolvendo valores desconhecidos e sequências numéricas, os alunos foram produzindo aos poucos generalizações e escrita Matemática consistentes para cada problema proposto, permitindo-nos concluir que houve uma evolução na capacidade de abstrair e interpretar problemas, corroborando com o que os pesquisadores já referenciados neste trabalho inicialmente conceituam como pensamento algébrico.

Logicamente, a afirmação de que a aplicação de atividades experimentais contribuiu para a assimilação dos conceitos iniciais de Álgebra e resolução de problemas através de abstração e generalização por parte dos estudantes não se baseia exclusivamente na análise do quantitativo de acertos das questões e problemas propostos, que foram resultados bem expressivos, mas sim, considerando todo o processo de desenvolvimento das atividades em sala de aula, em que foi possível perceber a construção de conhecimentos sobre expressões algébricas e resolução de problemas envolvendo o cálculo de valores desconhecidos e a internalização dos conceitos iniciais de Álgebra nos estudantes que se empenharam em resolver as atividades propostas. É interessante ver os alunos fazendo descobertas por conta própria sobre o assunto estudado, como por exemplo a identificação de regularidades envolvendo sequências numéricas (atividades 11 e 12) e assimilação, mesmo que de forma implícita, do conceito de função (atividades 9 e 10). Outro momento satisfatório na aplicação das atividades experimentais foi durante o desenvolvimento das atividades 16, 17 e 18, que envolviam a adivinhação de números pensados e da idade dos estudantes atarvés de uma sistematização algébrica para realizar a adivinhação. Mesmo com a escassez de tempo para finalizar a atividade com uma conceituação um pouco mais avançada sobre a construção e manipulação de equações polinomiais do 1º grau, foi possível perceber que este tipo de atividade intriga o aluno, trazendo uma inquietação saudável que faz o estudante pensar e se questionar como é possível que a professora descobriu o número pensado, motivando-o a participar da atividade tentando entender os mecanismos de resolução do problema, participação esta que em muitos momentos não acontece no desenvolvimento das aulas sobre os assuntos a serem estudados.

Por fim, levando em consideração os pontos positivos e negativos da atividade experimental aplicada na turma de 7º ano, e também a análise das pesquisas recentes desenvolvidas sobre metodologias e experiências didáticas para o ensino de ágebra e desenvolvimento do pensamento algébrico, alinhado ao estudo das Tendências em Educação Matemática atuais, fica evidente que as pesquisas nesta área devem ser incentivadas e realizadas continuamente, buscando aprimorar a formação dos professores e possibilitar a aplicação de propostas de ensino que sejam eficazes em atingir o objetivo principal de toda atividade de ensino, que é aprendizagem satisfatória do estudante.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. **Desenvolvimento do pensamento algébrico**: proposição de um modelo para os problemas de partilha. Zetetiké, Campinas, SP, v.26, n. 3, p. 546-568, 2018.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, Ano XXXIII, n.55, p.133-154, jul./dez. 2009.

ARAÚJO, A. I. S. de. **Ensino-aprendizagem de Álgebra através da resolução e exploração de problemas**. Dissertação. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; BASSANEZI, R. C. Modelação Matemática: Uma Alternativa para o Ensino – Aprendizagem, de Matemática em Cursos Regulares. In: **Boletim Informativo do Departamento de Matemática**, Blumenau-SC, n. 33, p.1-5, 1995.

BOMFIM, F. S. **História da Matemática e Cinema**: o caso da criptografia na introdução do ensino de Álgebra. 2017. Dissertação. Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2017.

BONDIA, J. L. **Notas sobre a experiência e o saber de experiência**. Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, n. 19, p. 20-28, Abril/2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Introdução. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, M. A.; FARIAS, L. M. S. **A educação algébrica e a resolução de problemas numéricos no 6º. ano do ensino fundamental**: prelúdio ao pensamento algébrico. Educação, Matemática e Pesquisa, v.21, n.3, p. 143-166, São Paulo, 2019.

COUTINHO, D. M. **Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica**. Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v. 24, n. 38, p. 97-126, Abril/2011.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo: Editora Ática, 1999.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática, 7° ano. 3 ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática** – o elo entre as tradições e a modernidade. 5. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

DIAS, L. S. **Introdução da Álgebra**: desenvolvimento do pensamento algébrico no 6° ano do ensino fundamental. Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2019.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação & Sociedade**. Campinas, v. 23, n. 79, p. 257-272, Agosto/2002.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FÜHR, L. **Um olhar para a introdução à escrita simbólica no ensino à luz da história da Matemática**. Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa?** 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

KUCINSKAS, R. **Introdução ao estudo da Álgebra para alunos do ensino fundamental**. Dissertação. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LINS, R. C.; GIMENES, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4 ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MACCALI, L. **Atividades investigativas para o ensino da Álgebra em turmas de 7° ano e 9° ano do ensino fundamental**. Dissertação. Centro Universitário Univates, Lajeado, 2017.

MARQUES, Bianca Medeiros. **A mobilização do pensamento algébrico através da resolução de problemas enxadrísticos**. Dissertação. Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

MATSUDA, F. F. S. **Um ensino de equação de 1º grau com uma incógnita via resolução de problemas**. Dissertação. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação Matemática**. Tese. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista Zetetiké**, UNICAMP, v. 5, n. 8, p. 73-89, 1997.

NACARATO, A. M.; COSTÓDIO, I. A. **O Desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) Matemática. Brasília : Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

NÓVOA, A. **O regresso dos professores**. Comunicação apresentada na "Conference on Teacher Professional Development for the Quality and Equity of Lifelong Learning". Portugal, 2007. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/687.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. **Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais**. Estudos Avançados, [S. l.], v. 32, n. 94, p. 119-135, 2018. DOI: 10.1590/s0103-40142018.3294.0010. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/eav/art Acesso em: 16 jan. 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**.Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, H., SEGURADO, I. **Histórias de investigações Matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

REIS, A. S. de. **A colaboração da História da Álgebra para análise e compreensão de problemas matemáticos**: Uma proposta para o ensino de equação polinomial do primeiro grau. Dissertação. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. 1 ed. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2015.

RIBOLDI, S. M. O. **A linguagem de programação Scratch e o ensino de funções**: uma possibilidade. Mestrado. Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2019.

ROCHA, H. R. **Uso de jogos e materiais concretos no ensino e expressões algébri-**

cas e equações do 1º e 2º grau no ensino fundamental. Dissertação. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

ROQUE, T. Desmascarando a equação. A história no ensino de que Matemática? **Revista Brasileira de História da Ciência**, vol.7, n.2, p. 167-185. Rio de Janeiro: SBHC, 2014.

SÁ, P. F. **As atividades experimentais no ensino de Matemática**. REMATEC, ano 15, n. 35, p. 143-162, 2020.

SANTOS, L. S. **Uma abordagem histórica e metodológica dos métodos de resolução de equação do 2º grau desenvolvidos por Al-Khwarizmi**. Dissertação. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23 ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. rev. atual. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001.

SILVA, J. A. **Resolução de Problemas e representações múltiplas no ensino de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas**. Mestrado. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SILVA, L. E. **Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas**: o caso do Algeblocks. Dissertação. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

SILVA, R. R. C. **Ensino e aprendizagem de expressões algébricas através da exploração, resolução e proposição de problemas**. Mestrado. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2020.

SILVA, S. L. **Problemas matemáticos com cálculos algébricos**: da resolução à formulação no 8° ano do ensino fundamental. Dissertação. Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2019.

USISKIN, Z. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org). **As ideias da Álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 21, n. 73, p. 209-244, Dezembro/2000.

APÊNDICES

Apêndice A - Expressões algébricas

Podemos representar matematicamente algumas expressões dadas em linguagem usual. Observe.

Linguagem usual	Linguagem matemática
O dobro de cinco	$2 \cdot 5$
O triplo de oito	$3 \cdot 8$
Quatro mais seis	$4 + 6$
Nove menos dois	$9 - 2$

Também podemos representar um número cujo valor ainda não conhecemos por uma letra qualquer. Por exemplo, a frase "o triplo de um número" pode ser representada, em linguagem matemática, por $3x$.

$3x$ significa $3 \cdot x$, ou seja, 3 vezes x.

Expressões como essas são chamadas de **expressões algébricas**.
Elas são formadas por números, letras e sinais de operações.

Nesse exemplo, x pode assumir qualquer valor, como $4;\ 23;\ 0;\ \frac{1}{5};\ 20;\ -1\frac{1}{3};\ 0,5$. E, como x representa diferentes números, ele é chamado de **variável** da expressão algébrica.

Nesse momento, trabalharemos apenas com variáveis representando números racionais.

Observe outros exemplos de uso de variáveis em expressões algébricas.

Linguagem usual	Linguagem matemática
O dobro de um número	$2x$
A metade de um número	$\frac{x}{2}$
Um número mais cinco	$x + 5$
O triplo de um número menos seis	$3x - 6$
A soma de dois números	$x + y$

Você sabia?

Geralmente usamos as últimas letras do alfabeto (x, y, z) para representar quantidades desconhecidas. Essa ideia foi proposta pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), na primeira metade do século XVII.

Retrato de René Descartes. c. 1649. Frans Hals. Óleo sobre tela, 77,5 cm × 68,5 cm.

Apêndice B - Atividades sobre expressões algébricas

1) Complete o quadro a seguir.

Linguagem usual	Linguagem matemática
O quíntuplo de um número	
O quadrado de um número	
	$\frac{x}{2}$
A soma de um número com cinco	
	$3x + 4$
	$5x - 8$
A diferença entre um número e três	
O dobro de um número menos dez	
	$x - \frac{x}{3}$
	$x + \frac{x}{7}$

2) Quais são as variáveis em cada expressão algébrica?

a) $2y + 8$ **b)** $5x + 3$ **c)** $2xy + x$ **d)** $\frac{1}{2}x + z$

3) Transforme as afirmações escritas em linguagem usual para expressões algébricas

a) O triplo de um número

b) A metade de um número mais 3

c) O quadrado de um número menos 4

d) A terça parte de um número mais o dobro desse número

e) 5 menos um número

f) O dobro de um número mais 7

g) Um número dividido por 4

4) Monica e o pai dela estão brincando de perguntas e respostas. As regras são as seguintes:

- quem acertar, ganha 10 pontos;
- quem errar, perde 3 pontos.

Monica teve x acertos e y erros. Qual expressão algébrica indica os pontos obtidos por ela no total?

5) Qual expressão algébrica indica o número de dias em um período formado por x semanas completas mais 3 dias?

6) Considere que n representa um número natural. Indique por meio de expressões algébricas:

a) a soma do triplo desse número com 7

b) 40% desse número

c) o dobro da diferença entre esse número e 9

d) o sucessor desse número

e) a metade desse número diminuída de 11

f) a soma de 8 com $\frac{2}{3}$ desse número

7) Transforme cada expressão algébrica em uma afirmação escrita em linguagem usual.

a) $4x + 9$

b) $\frac{x}{4} + 5$

c) $\frac{x}{3}$

d) $x^2 + 10$

e) $x^2 + 2x$

f) $\frac{x-1}{2}$

g) $x + 8$

h) $8x$

i) $\frac{x}{5}$

8) Invente uma expressão algébrica, registre-a no caderno e dê para um colega passá-la para a linguagem usual.

Apêndice C - Máquinas programadas para gerar operações

Julia e Pedro, para recordar o que aprenderam na aula de Matemática, imaginaram duas máquinas. A primeira máquina está programada para dobrar o número de entrada e, em seguida, adicionar 3 ao resultado. A segunda máquina está programada para triplicar o quadrado do número de entrada.

1ª máquina

E	Operação	S
0	$2 \times 0 + 3$	3
1	$2 \times 1 + 3$	5
−2	$2 \times (-2) + 3$	−1
5	$2 \times 5 + 3$	13
−1	$2 \times (-1) + 3$	1
20	$2 \times 20 + 3$	43
n	$2 \times n + 3$	$2n + 3$

2ª máquina

E	Operação	S
0	3×0^2	0
1	3×1^2	3
2	3×2^2	12
−1	$3 \times (-1)^2$	3
3	3×3^2	27
−2	$3 \times (-2)^2$	12
x	$3 \times x^2$	$3x^2$

Observe que a cada número de entrada na máquina tem um único número correspondente de saída. Dizemos que o número de saída é dado em função do número de entrada.

Atividades

9) Observe as máquinas programadas em cada item e complete-as com os números que faltam. No item b, escreva também a mensagem que deve aparecer na máquina, conforme a linguagem matemática do último item da tabela.

a)

Máquina a

E	S
2	
10	
0	
−4	
1	
y	

b)

Máquina b

E	S
5	
2	
−1	
0	
10	
m	$2(m + 1)$

10) Invente uma máquina que gera operações e escreva no caderno a expressão algébrica correspondente.

Apêndice D - Sequências e expressões algébricas

Vamos estudar sobre sequências numéricas e usar expressões algébricas para representar os termos delas.

Fórmula do termo geral de uma sequência

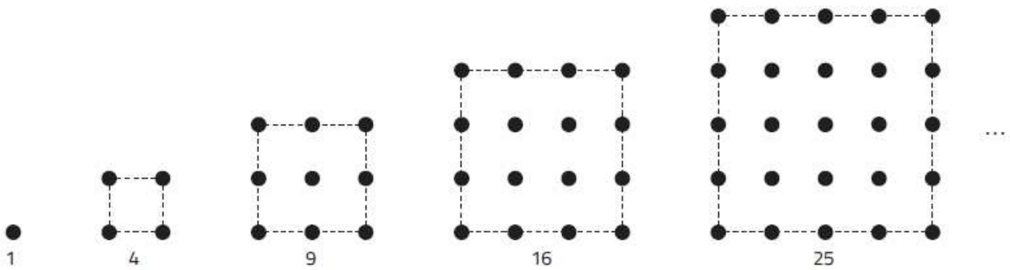
Observe este exemplo.

Quando generalizamos para qualquer número natural não nulo n, o número natural par correspondente é dado pela **expressão algébrica** $2n$, em que a variável n varia de acordo com os números naturais não nulos.

Escrevendo a sequência dos números naturais pares não nulos $(2, 4, 6, ..., 2n, ...)$, podemos obter qualquer termo a_n dessa sequência pela fórmula $a_n = 2n$, para $n = 1, 2, 3, ...$

Note que para $n = 1, 2, 3, ...$, ficam determinados os termos $a_1, a_2, a_3, ...$, respectivamente.

Veja outro exemplo: a sequência dos números quadrados perfeitos a partir da sequência dos números naturais não nulos.



Sequências

Número natural não nulo	1	2	3	4	5	...	n	...
Número quadrado perfeito	1	4	9	16	25	...	n^2	...

Neste caso, para qualquer número natural não nulo n, o número quadrado perfeito correspondente é dado pela expressão algébrica n^2.

Assim, escrevendo a sequência dos números quadrados perfeitos $(1, 4, 9, ..., n^2, ...)$, podemos obter a fórmula do termo geral como $a_n = n^2$, para $n = 1, 2, 3, ...$

Agora, vamos construir uma sequência conhecendo a fórmula do termo geral. Por exemplo, a sequência dada por $a_n = 2n + 1$ para $n = 1, 2, 3, ...$

- Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
- Para $n = 2$, temos: $a_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
- Para $n = 3$, temos: $a_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- Para $n = 4$, temos: $a_1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

$\vdots$

Logo, a sequência construída é $(3, 5, 7, 9, ...)$.

Apêndice E - Atividades sobre sequências e expressões algébricas

11) Complete as tabelas abaixo, relacionando cada sequência numérica à sequência dos números naturais não nulos.

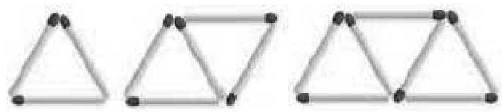
a) Sequências

Número natural não nulo	1	2	3	4	...	n	...
Quíntuplo do número	5	10			...		...

b) Sequências

Número natural não nulo	1	2	3	4	...	n	...
Dobro do número menos 1					...		...

12) Observe as figuras formadas por triângulos de palitos.



a) Complete a tabela com o número de palitos necessário para formar os triângulos.

Figuras com palitos

Número de triangulos	1	2	3	4	5	...	n
Número de palitos	3						

b) Observando que o número de palitos é dado em função do número de triângulos que se quer formar na figura, quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos?

c) Quantos palitos são necessários para formar 77 triângulos?

13) Construa a sequência infinita cujo termo geral a_n é dado pela fórmula $a_n = 3n + 2$ para $n = 1, 2, 3, ...$

14) Invente a fórmula do termo geral de uma sequência numérica e a construa para $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$).

Apêndice F - Atividades sobre adivinhação de número pensado

Imagine as seguintes situações e tente resolvê-las utilizando os conhecimentos matemáticos que você possui.

15) Ana e Bia foram a um restaurante. Na hora de pagar a conta, elas decidiram dividi-la assim: Ana pagaria o dobro do que Bia pagasse. O valor da conta foi de R$ 36,00. Quanto cada uma deveria pagar?

16) Pense em um número qualquer e multiplique ele por 3. Some 6 ao resultado. Divida o resultado por 3. Por último, subtraia o número pensado. Não importa o número pensado, magicamente o resultado será sempre 2.

17) Pense em um número natural. Multiplique por 5. Some 6. Multiplique por 4. Some 9. Multiplique por 5. Qual o resultado? Com a resposta dos alunos, a professora, magicamente, adivinhará o número inicialmente pensado. Vamos testar?

18) Descobrindo sua idade enquanto você pensa em pizza.

Considerando o ano atual de 2022, faça os seguintes cálculos:

Pense no número de vezes por semana que você sente vontade de comer pizza (tente pensar em mais de uma vez, mas menos de dez). Multiplique esse número por 2. Some 5. Multiplique o resultado por 50. Se você já fez aniversário este ano, some 1772 e, se ainda não fez, some 1771. Subtraia os quatro dígitos do ano que você nasceu. Você deve ter obtido um número de três dígitos. O primeiro dígito desse resultado é o número de vezes que você pensou em comer pizza na semana e os dois últimos dígitos representam a sua idade. Elabore uma estratégia para explicar este resultado.