

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO APLICADO À MELHORIA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE
PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES SUBMETIDAS À FLEXÃO

por

ALEXANDRO PEREIRA RAMOS

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica

Rio Grande, Janeiro de 2017

ESTUDO NUMÉRICO APLICADO À MELHORIA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE
PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES SUBMETIDAS À FLEXÃO

Por

ALEXANDRO PEREIRA RAMOS

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Co-orientador : Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Liércio André Isoldi	PPGEO/FURG
Prof. Dr. Mauro de Vasconcelos Real	PPGEO/FURG
Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga	FAUrb/UFPEL
Prof. Dr. Paulo Roberto Teixeira	PPGEO/FURG
Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos	PPGEO/FURG

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 31 de Janeiro de 2017

**ESTUDO NUMÉRICO APLICADO À MELHORIA DO COMPORTAMENTO
MECÂNICO DE PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES
SUBMETIDAS À FLEXÃO**

ALEXANDRO PEREIRA RAMOS

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

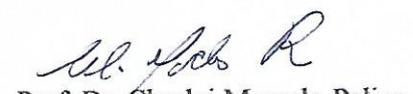
MESTRE EM ENGENHARIA OCEÂNICA

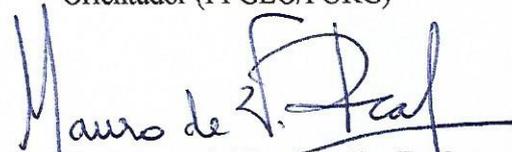
Tendo sido aprovado em sua forma final pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica.

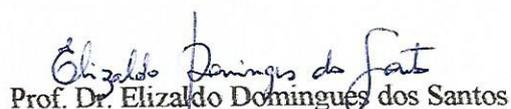

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do PPGeo

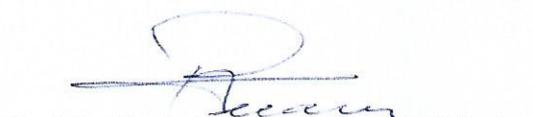
Banca examinadora:


Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Orientador (PPGeo/FURG)


Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga
Professor Externo (FAUrb/UFPel)


Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
Coorientador (PPGeo/FURG)


Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Professor Convidado (PPGeo/FURG)


Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira
Professor Convidado (PPGeo/FURG)

Dedico este trabalho à ciência, que tem a humildade de admitir que não sabe todas as respostas, mas tem a coragem de fazer todas as perguntas. Dedico também às pessoas significantes da minha vida, a minha madrinha Angela Ramos Bohm e, em especial, a minha esposa M^a. Regina da Cruz.

Alexandro Pereira Ramos

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pelo apoio financeiro;

A Universidade Federal do Rio Grande (FURG);

Ao Orientador Prof. Doutor Liércio André Isoldi pelos ensinamentos e exemplo de dedicação incansável a um propósito;

Ao Co-Orientador Prof. Doutor Mauro de Vasconcelos Real pelos ensinamentos de aplicação e utilização do Ansys em Mecânica dos Sólidos;

A todos os Professores que se empenharam em ministrar suas aulas da melhor maneira possível;

A Deus, por permitir que eu escreva mais este capítulo em minha vida.

RESUMO

RAMOS, A. P., **Estudo Numérico aplicado à melhoria do comportamento mecânico de placas finas de aço com enrijecedores submetidas à flexão**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, 2017.

Placas finas de aço são elementos estruturais amplamente empregados em engenharia e especialmente em estruturas navais e offshore. Isso se deve ao fato de que estes componentes são capazes de resistir mecanicamente aos esforços que são submetidos possuindo um peso relativamente baixo. O estudo das placas finas de aço sob flexão sempre foi um problema complexo. A quantidade de variáveis que são consideradas na resolução de problemas de engenharia envolvendo placas retangulares excede o número de equações disponíveis para a solução analítica, impossibilitando a obtenção de resultados exatos. Nesse contexto, o presente trabalho analisou numericamente o comportamento mecânico de uma placa fina de aço, quadrada, sob flexão, simplesmente apoiada nos quatro lados, inicialmente sem enrijecedores, sendo seus valores máximos de deslocamento transversal e de tensão de von Mises usados como referência. Na sequência, empregou-se o parâmetro de fração de volume dos enrijecedores (ϕ), que representa a relação entre o volume de enrijecedores e o volume total do componente estrutural placa/enrijecedores. Então, foi adotado $\phi = 0,50$ e a placa de referência (sem enrijecedores) teve o material referente à metade de sua espessura transformado em enrijecedores, sendo preservadas as medidas de comprimento e largura da placa de referência. Dessa forma, o volume de aço usado na placa sem enrijecedores foi o mesmo utilizado na placa de referência, o que permitiu avaliar a influência do número, disposição e dimensões dos enrijecedores no comportamento mecânico da placa submetida à flexão. Então, tendo como objetivo, minimizar o máximo deslocamento transversal da placa e minimizar a máxima tensão na placa, diferentes configurações de enrijecedores longitudinais e transversais, foram comparadas entre si e com a placa de referência, visando determinar qual configuração geométrica, dentre as avaliadas, conduz ao melhor comportamento mecânico. Para tanto, o grau de liberdade h_e/t_e , que relaciona a altura do enrijecedor (h_e) e sua espessura (t_e) foi considerado, além disso um modelo computacional baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), desenvolvido no software ANSYS, foi utilizado. Os resultados obtidos indicaram que é possível melhorar o desempenho mecânico, em até 600% quando a melhor configuração geométrica é comparada com a pior.

Palavras-chave: Placas, Ansys, Método dos Elementos Finitos, Simulação Numérica

ABSTRACT

RAMOS, A. P., **Numerical study applied to the improvement of the mechanical behavior of thin steel stiffened plates subjected to bending**. Dissertation (Masters in Ocean Engineering) - Graduate Program in Ocean Engineering, FURG, Rio Grande, 2017.

Thin steel plates are structural elements widely employed in engineering and especially in naval and offshore structures. This is due to these components are capable of mechanically resisting the stress that are submitted having relatively low weight. The study of thin steel plates under bending has always been a complex problem. The number of variables considered in solving engineering problems involving rectangular plates exceeds the number of equations available for the analytical solution, making it impossible to obtain accurate results. In this context, the present work numerically analyzed the mechanical behavior of simply supported square steel plates submitted to bending, initially without stiffeners. Its maximum values of transversal displacement and von Mises stress are used as reference. Then, the stiffeners volume fraction parameter (ϕ), which represents the ratio between stiffeners volume and the total volume of the structural component plate - stiffeners. To do so, $\phi = 0,50$ (without stiffeners) was adopted. Thus, the length and width dimensions of the reference plate were preserved. The steel volume used in the plate without stiffeners was the same one used in the plates with them. It allowed to evaluate the influence of the number, arrangement and dimensions of the stiffeners on the mechanical behavior of the plate submitted to the bending. Therefore, in order to minimize the maximum transverse displacement of the plate and to minimize the maximum plate tension, different configurations of longitudinal and transverse stiffeners were compared among each other and with the reference plate, aiming to establish which geometric configuration, among those evaluated, leads to the best mechanical behavior. The degree of freedom he/te , which relates the height of the stiffener (he) and its thickness (te) was applied, as well as, a computational model based on the Finite Element Method (MEF), developed in ANSYS software, was used. The results indicated that it is possible to improve the mechanical performance, up to 600% when the best geometric configuration is compared to the worst one.

Keywords: Plates, *Ansys*, Finite Element Method, Numerical Simulation

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	15
1.1. Objetivos	19
1.2. Estado da Arte	19
2. REFERENCIAL TEÓRICO	27
2.1. Teoria de Placas.....	27
2.1.1. Sistema de coordenadas e convenção de Sinais.....	30
2.1.2. Equilíbrio de um Elemento de Placa.....	32
2.1.3. Relação deformação-deslocamento de placas finas	34
2.1.4. Relação tensão-deslocamento de placas finas.....	36
2.1.5. Relação esforço solicitante-deslocamento de placas finas.....	37
2.1.6. Condições de Contorno	39
2.1.6.1. Condições de Contorno Geométricas	40
2.1.6.2. Condições de Contorno Estáticas	40
2.1.6.3. Condições de contorno mistas	42
2.1.7. Solução da equação diferencial	43
3. MODELAGEM COMPUTACIONAL	44
3.1 Solução Numérica	44
3.2 Simulação Numérica	48
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	50
4.1. Teste de Independência de Malha	50
4.2. Verificação do Modelo Computacional.....	54
4.2.1. Verificação da Placa sem Enrijecedores (placa de referência).....	54
4.2.2. Verificação da Placa com 1 Enrijecedor	56
4.2.3. Verificação da Placa com 2 enrijecedores	58
4.3. Determinação dos enrijecedores	60
4.3.1. Dimensões dos enrijecedores	62
4.4. Estudo de Caso.....	63
4.5. Resultados e discussões	64
4.5.1. Resultados numéricos das simulações	65
4.5.2. Análise dos resultados numéricos das simulações	66

4.5.3. Análise das deflexões máxima e tensão de von Mises máxima da placa P (4x4)	67
4.6. Resultados normalizados das simulações	72
4.6.1. Resultados normalizados das simulações - placa P(1x1).....	73
4.6.2. Resultados normalizados das simulações - placa P(2x2).....	74
4.6.3. Resultados normalizados das simulações - placa P(3x3).....	76
4.6.4. Resultados normalizados das simulações - placa P(4x4).....	77
4.6.5. Resultados normalizados das simulações - placa P(5x5).....	79
4.6.6. Análise dos resultados normalizados das simulações	80
5. CONCLUSÕES	85
5.1. Sugestões para trabalhos futuros	86
REFERÊNCIAS	87
APÊNDICE A - Resultados das simulações da placa P(1x1)	91
APÊNDICE B - Resultados das simulações da placa P(2x2).....	96
APÊNDICE C - Resultados das simulações da placa P(3x3).....	101
APÊNDICE D - Resultados das simulações da placa P(5x5).....	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Carregamento de placas enrijecidas sob flexão longitudinal da viga-navio	16
Figura 1.2 - Estrutura característica de um convés de navio	17
Figura 1.3 - Estrutura interna de um navio com elementos de placa	17
Figura 1.4 - Placa com enrijecedores cruzados e todas as arestas simplesmente apoiadas.....	20
Figura 1.5 - Aplicação do carregamento e posicionamento do enrijecedor	20
Figura 1.6 - Placa com um enrijecedor longitudinal	21
Figura 1.7 - Placa com dois enrijecedores longitudinais	21
Figura 1.8 - Um enrijecedor transversal paralelo a borda livre	21
Figura 1.9 - Vista lateral do modelo.....	22
Figura 1.10 - Vista Inferior do modelo.....	23
Figura 1.11 - Modelo básico do problema	23
Figura 1.12 - Placa com diferentes vinculações.....	24
Figura 1.13 - Placa com furo com todas as arestas fixadas sob carga transversal	25
Figura 1.14 - Representação das excentricidades.	25
Figura 2.1 - Emprego de placas na construção naval.....	28
Figura 2.2 - Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado	30
Figura 2.3 - Estado de tensão de um elemento infinitesimal extraído do interior da placa	31
Figura 2.4 - Esforços resultantes em um elemento de placa.....	32
Figura 2.5 - Esforços por unidade de comprimento atuante no plano médio	33
Figura 2.6 - Flexão da placa na direção X.....	35
Figura 2.7 - Estado de tensões de um elemento de placa.....	36
Figura 2.8 - Condições de contorno para placas	40
Figura 2.9 - Efeito de bordo do momento torçor em placas	41
Figura 2.10 - Esforços de canto em placas.....	42
Figura 3.1 - Discretização de um domínio.....	45
Figura 3.2 - Diferentes tipos de geometria de elementos finitos	46
Figura 3.3 - Divisão do domínio em subdomínios	47
Figura 3.4 - Elemento SOLID95	49
Figura 4.1 - Desenho da placa de P(5x5) com configuração de enrijecedor a/10.....	51
Figura 4.2 - Condições de contorno estabelecidas para o modelo	51
Figura 4.3 - Esquema prático da malha com elementos finitos para a placa de P(5x5).....	52
Figura 4.4 - Teste de Convergência - Número de Elementos x Deslocamento.....	53
Tabela 4.5 - Teste de Convergência - Numero de Elementos x Tensão de von Mises.....	53
Figura 4.6 - Teste de Convergência - Número de Elementos x Tempo de Processamento.....	53
Figura 4.7 - Placa de referência	54
Figura 4.8 - Deflexão máxima da placa de referência	55
Figura 4.9 - Tensão de von Mises máxima da placa de referência	55
Figura 4.10 - Desenho da placa com enrijecedor no meio do vão.....	56
Figura 4.11 - Deflexão máxima da placa com 1 enrijecedor	57
Figura 4.12 - Deflexão máxima da placa com 1 enrijecedor - verificação	57
Figura 4.13 - Desenho da placa com 2 enrijecedores	58
Figura 4.14 - Deflexão máxima da placa com 2 enrijecedores	58
Figura 4.15 - Deflexão máxima da placa com 21 enrijecedor - verificação	59
Figura 4.16 - Medidas da placa de referência	60
Figura 4.17 - Representação esquemática da placa P(2,2).....	61

Figura 4.18 - Deflexão máxima P(4x4) - $he=a/10$	67
Figura 4.19 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he=a/10$	68
Figura 4.20 - Deflexão máxima P(4x4) - $he=a/15$	68
Figura 4.21 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he=a/15$	69
Figura 4.22 - Deflexão máxima P(4x4) - $he=a/20$	69
Figura 4.23 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he=a/20$	70
Figura 4.24 - Deflexão máxima P(4x4) - $he=a/25$	70
Figura 4.25 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he=a/25$	71
Figura 4.26 - Deflexão máxima P(4x4) - $he=a/30$	71
Figura 4.27 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he=a/30$	72
Figura 4.28 - Deflexão máxima normalizada da placa P(1x1)	73
Figura 4.29 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(1x1)	73
Figura 4.30 - Deflexão máxima normalizada da placa P(2x2)	75
Figura 4.31 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(2x2)	75
Figura 4.32 - Deflexão máxima normalizada da placa P(3x3)	76
Figura 4.33 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(3x3)	76
Figura 4.34 - Deflexão máxima normalizada da placa P(4x4)	78
Figura 4.35 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(4x4)	78
Figura 4.36 - Deflexão máxima normalizada da placa P(5x5)	79
Figura 4.37 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(5x5)	79
Figura 4.38 - Compilação de curvas de deflexão para facilitar a identificação da melhor configuração de enrijecedores	81
Figura 4.39 - Compilação de curvas de tensão de von Mises para facilitar a identificação da melhor configuração de enrijecedores	81
Figura 4.40 - Melhores resultados (menores) normalizados de deflexão máxima das placas analisadas	82
Figura 4.41 - Piores resultados (maiores) normalizados de deflexão máxima das placas analisadas	82
Figura 4.42 - Melhores resultados (menores) normalizados de tensão máxima de von Mises das placas analisadas	83
Figura 4.43 - Piores resultados (maiores) normalizados de tensão máxima de von Mises das placas analisadas	83
Figura 4.44 - Melhor configuração dentre as avaliadas	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Tamanho do Elemento de malha	52
Tabela 4.2 Dimensões dos Enrijecedores da Placa P(1x1)	62
Tabela 4.3 Dimensões dos Enrijecedores da Placa P(2x2)	62
Tabela 4.4 Dimensões dos Enrijecedores da Placa P(3x3)	62
Tabela 4.5 Dimensões dos Enrijecedores da Placa P(4x4)	63
Tabela 4.6 Dimensões dos Enrijecedores da Placa P(5x5)	63
Tabela 4.7 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(1x1)	65
Tabela 4.8 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(2x2)	65
Tabela 4.9 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(3x3)	65
Tabela 4.10 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(4x4)	66
Tabela 4.11 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(5x5)	66
Tabela 4.12 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(1x1))	73
Tabela 4.13 - Deflexão máxima normalizada e Tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(2x2)	74
Tabela 4.14 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(3x3)	76
Tabela 4.15 – Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(4x4)	77
Tabela 4.16 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(5x5)	79

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Comprimento da placa [m]
A/b	Largura da placa [m]
h_e	Altura do enrijecedor [m]
l_e	Largura do enrijecedor [m]
D	Diâmetro do furo [m] / Rigidez à flexão da placa
e	Espessura da placa [m]
E	Módulo de elasticidade do material [Pa]
F	Vetor força
G	Módulo de elasticidade transversal [Pa]
I	Momento de inércia da área da seção transversal do elemento [m^4]
K	Matriz de rigidez
k_x	Curvatura na direção X
k_y	Curvatura na direção Y
m_x	Momento fletor por unidade de comprimento na direção X [Nm/m]
m_{xy}	Momento torçor associado aos eixos X e Y [Nm/m]
m_y	Momento fletor na direção Y [Nm/m]
m_{yx}	Momento torçor associado aos eixos Y e X [Nm/m]
N_{el}	Número de enrijecedores na direção longitudinal
N_{et}	Número de enrijecedores na direção transversal
P	Carga distribuída [N]
P_z	Força externa transversal ao plano da placa [N]
Q_x	Esforço cortante na direção X [N/m]
Q_y	Esforço cortante na direção Y [N/m]
n_x	Esforço coplanar normal na direção X [N/m]
n_{xy}	Esforço tangencial ao plano XoY [N/m]
n_y	Esforço coplanar normal na direção Y [N/m]
n_{yx}	Esforço tangencial ao plano XoY [N/m]
q_x	Esforço cortante na direção X por unidade de comprimento [N/m]
q_y	Esforço cortante na direção Y por unidade de comprimento [N/m]
S_{el}	Espaçamento longitudinal entre enrijecedores na direção X [m]

Set	Espaçamento transversal entre enrijecedores na direção Y [m]
T	Espessura de placa [m]
te	Espessura do enrijecedor [m]
u	Componente axial de deslocamento sobre o eixo X [m]
u	Vetor de incógnitas
V	Volume total da placa [m ³]
V_e	Volume de material transformado em enrijecedores [m ³]
w	Deflexão sobre o eixo Z [m]
W_N	Deflexão normalizada [m]
W_S	Deflexão simulada [m]
W_R	Deflexão referência [m]
wp	Solução particular para a equação diferencial
w_0	Curvatura inicial da placa [Rad]
ϵ_x	Deflexão axial na direção X [m]
ϵ_y	Deflexão axial na direção Y [m]
θ_x	Deflexão na direção X [m]
θ_y	Deflexão na direção Y [m]
ν	Coefficiente de Poisson
σ_x	Tensão normal na direção X [Pa]
σ_y	Tensão normal na direção Y [Pa]
σ_{vM}	Tensão de <i>von Mises</i> [Pa]
σ_{vM_N}	Tensão de <i>von Mises</i> normalizada [Pa]
σ_{vM_S}	Tensão de <i>von Mises</i> simulada [Pa]
σ_{vM_R}	Tensão de <i>von Mises</i> referência [Pa]
σ_y	Tensão de escoamento do material [Pa]
T_{xy}	Tensão de cisalhamento ao plano XoY [Pa]
τ_{xz}	Tensão de cisalhamento ao plano XoZ [Pa]
τ_{yz}	Tensão de cisalhamento ao plano YoZ [Pa]
X	Empenamento
ϕ	Fração de volume

1. INTRODUÇÃO

A busca pela melhor relação custo-benefício é indispensável para o sucesso de um projeto e, conseqüentemente, para o desenvolvimento de uma organização. Muitas vezes, existem vários outros fatores relevantes, mas a relação custo benefício é o fator que determina a viabilidade de um projeto (DE LEON, 2011). Uma etapa de suma importância de decisão em um projeto é a escolha dos parâmetros que serão avaliados durante o processo (DE LEON, 2011). É possível citar como exemplo, o desenvolvimento de um motor que polua menos ou emita um menor ruído ou mesmo uma máquina operatriz que efetue duas operações ao mesmo tempo. Nesta avaliação, não necessariamente podem indicar projetos mais baratos, porém, se o benefício trazido por eles for relevante, podem torná-los dignos de uma atenção técnica. Quando consegue-se equacionar esses parâmetros, são encontrados o ponto de equilíbrio e o caminho para o sucesso de um projeto. Por esse motivo, é prudente investir mais tempo e esforço à fase de desenvolvimento ou planejamento do que propriamente à fase de execução (DE LEON, 2011).

Outro aspecto importante que deve ser considerado na fase de desenvolvimento de um projeto é relacionado à maximização do desempenho. Nesse sentido a otimização é uma ferramenta poderosíssima que pode ser utilizada nas mais variadas áreas do conhecimento, contribuindo para que os melhores resultados possíveis para um problema em estudo sejam alcançados. Na engenharia, a aplicação de uma técnica de otimização visa obter, por exemplo, uma estrutura mais eficiente ao desempenhar a mesma função estrutural de outras, ao passo que utiliza uma quantidade menor de material (DE LEON, 2011).

Placas, são elementos utilizados em grande escala pelo setor da Indústria da construção naval e offshore, e portanto de alto impacto econômico. Tendo em vista as dificuldades econômicas que vem enfrentando este setor e o país, mais ainda se justifica investir em conhecimento destes elementos de forma a melhorar a relação custo e benefício.

Segundo Timoshenko e Gere (1961), as placas finas são componentes estruturais planos, nos quais uma de suas dimensões, referida como espessura, é muito menor quando comparada com suas outras dimensões.

As placas são componentes estruturais tridimensionais, planos e retos, nos quais sua espessura t é muito menor que seu comprimento a e que sua largura b (SZILARD, 2004). A versatilidade de tais elementos permite que além de poderem ser usados como componentes estruturais, também possam ser utilizados na formação de estruturas inteiras. Assim sendo, placas podem ter bordas livres, engastadas ou simplesmente apoiadas, sendo esta última, o objeto deste estudo.

Se a espessura é menor que um décimo do valor da dimensão da menor borda da placa, a mesma é classificada como placa fina (SZILARD, 2004).

As placas finas de aço são elementos estruturais amplamente empregados em engenharia, especialmente em estruturas navais e offshore. Isso se deve à capacidade que estes componentes estruturais possuem de resistirem mecanicamente aos carregamentos aos quais são submetidos possuindo um peso relativamente baixo. Para melhorar a resistência mecânica das placas finas, muitas vezes são incorporados enrijecedores. Esses elementos estruturais, normalmente são soldados à placa e tem como função reforçar a placa para resistir a uma determinada solicitação, como por exemplo a flexão.

Segundo Manrique (1989), as placas enrijecidas são componentes estruturais de particular uso nas estruturas navais para resistir às cargas longitudinais provenientes da flexão do navio assim como as cargas devido à pressão hidrostática e aos diferentes itens a transportar.

Já Ghavami e Khedmati (2006), indicam que um dos carregamentos mais importantes aplicados em placas enrijecidas existentes em cascos de navios é gerado pela flexão longitudinal do casco do navio, que pode ser aproximado por uma viga, como mostrado na Fig. 1.1.

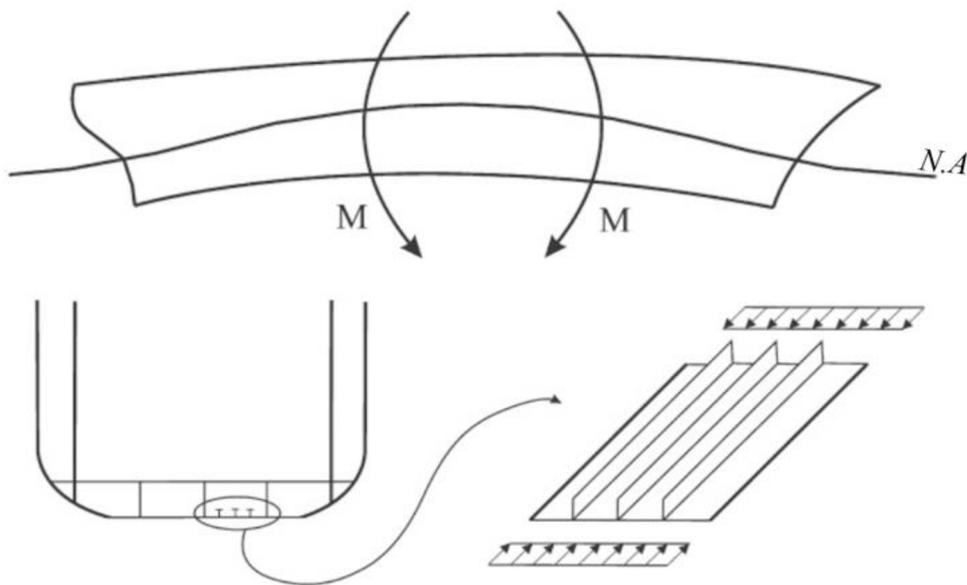


Figura 1.1 - Carregamentos de placas enrijecidas sob flexão longitudinal da viga-navio (Fonte: GHAVAMI E KHEDMATI, 2006).

De acordo com Kumar (2007), como mostra a Fig. 1.2, as placas finas limitadas por enrijecedores são parte integrante das estruturas de navios, plataformas de petróleo offshore, comportas e docas flutuantes.

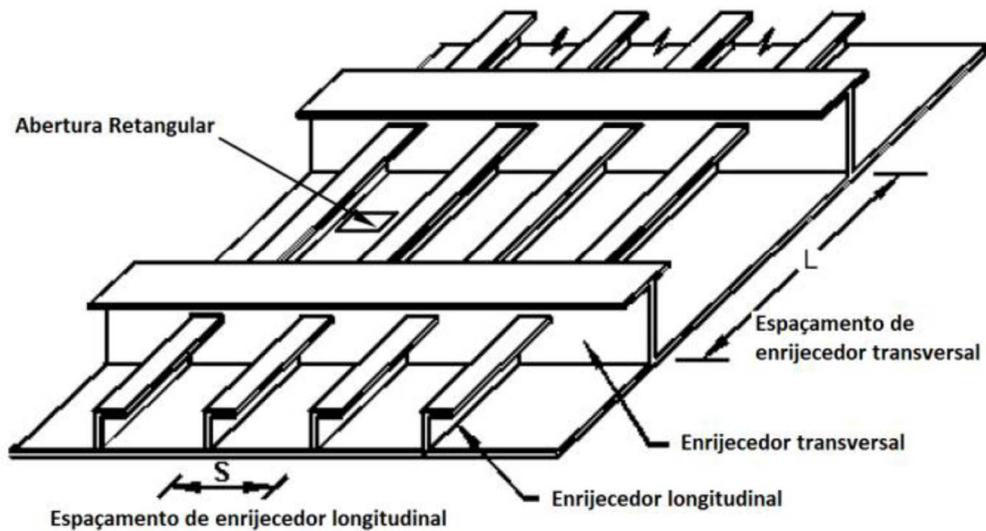


Figura 1.2 - Estrutura característica de um convés de navio (Fonte: KUMAR, 2007)

Andersen (2000), como mostra a Fig. 1.3, afirma que presença dos enrijecedores, contribuem para não só o reforço da placa com enrijecedores como para o enrijecimento total da estrutura de um navio.

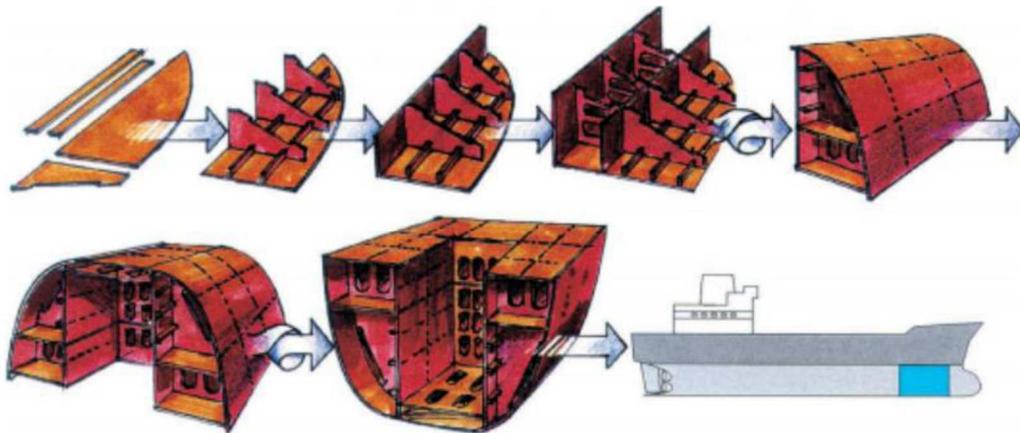


Figura 1.3 - Estrutura interna de um navio com elementos de placa (Fonte: ANDERSEN, 2000).

Já Rackow (2015), enfatiza que a utilização de enrijecedores é uma prática bastante comum, porém ainda deficiente de equações e soluções analíticas que realizem seus dimensionamentos.

Incontáveis são as aplicações em Engenharia das teorias de Placas. Mas nem sempre foi assim. Inicialmente, as aplicações eram bem restritas devido ao insuficiente conhecimento de suas propriedades e contudo a baixa previsibilidade de efeitos. A teoria de Placas é bastante complexa e

soluções analíticas existem, mas em sua grande maioria, para solicitações e geometrias bem particulares.

Com o advento do Método dos Elementos Finitos (MEF), temos a possibilidade de minimizar esta deficiência que ocorre em função natural da evolução que é buscar soluções para problemas que antes não se tinha resposta, uma vez que trata de solicitações e geometrias complexas e o método nos fornece soluções numéricas com considerável precisão para problemas onde resultados analíticos são desconhecidos ou muito complicados.

Diante deste cenário, volta-se à utilização de aplicativos computacionais de Engenharia que por sua vez, vem se apresentado como tendência irreversível em desenvolvimento e pesquisa ao passo que os computadores se tornam cada vez mais potentes, a velocidade de processamento e a capacidade de armazenamento de dados cada vez maiores, permitindo que se obtenham resultados de problemas complexos em um período de tempo cada vez menor, e isto sem esquecer os baixos valores envolvidos nas simulações numéricas, uma vez que é um processo que permite criar um modelo computacional que represente um sistema real e conduzir experimentos com este modelo com o propósito de entender seu comportamento e/ou avaliar estratégias para sua operação, o que antes só era possível com sistemas reais (PEGDEN ET AL., 1990).

Para tanto, empregou-se modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS®, que é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), os quais foram desenvolvidos e verificados, tanto para a placa sem enrijecedores como para as placas com enrijecedores.

No presente trabalho foi considerada uma placa de aço simplesmente apoiada nos quatro lados sob flexão, inicialmente sem enrijecedores, sendo seus valores máximos de deslocamento transversal e de tensão de von Mises usados como referência. Na sequência, enrijecedores foram adicionados à placa permitindo avaliar a influência do número, disposição e dimensões de enrijecedores longitudinais e transversais na placa submetida à flexão, sendo essa a única alteração feita em relação à placa sem enrijecedores. Para isso, o parâmetro fração de volume (ϕ), que é a relação entre o volume dos enrijecedores (V_e) e o volume total da placa (V), foi adotada. Cabe destacar que o volume total de aço usado na placa sem enrijecedores foi mantido nas placas com enrijecedores, ou seja, a quantidade total de aço foi preservada. Como também foram preservados o comprimento e largura da placa, a fração de volume é definida devido à redução da espessura da placa, sendo essa quantidade de aço empregada na forma de enrijecedores. Então, tendo como objetivo minimizar a deflexão (deslocamento transversal) máxima da placa, bem como minimizar a tensão máxima gerada na placa, foi considerado nesse estudo um $\phi = 0,50$.

1.1. Objetivos

Define-se como objetivo geral deste trabalho, estudar numericamente o comportamento de placas finas de aço com e sem enrijecedores submetidas à flexão, simplesmente apoiadas em todos os lados e submetidas a um carregamento distribuído uniformemente de modo a realizar uma avaliação geométrica do uso de enrijecedores, visando minimizar a deflexão (deslocamento transversal) máxima da placa, bem como minimizar a tensão máxima gerada na placa, de forma a conduzir a um desempenho superior.

Para isso, os seguintes objetivos específicos foram propostos:

- Desenvolver modelos computacionais para placas finas de aço com e sem enrijecedores submetidas à flexão;
- Verificar os modelos computacionais desenvolvidos;
- Simular numericamente o comportamento mecânico dessas placas, considerando diferentes arranjos geométricos de enrijecedores com as suas devidas variações dimensionais de modo a conduzir a um desempenho superior;
- Avaliar a influência do número de enrijecedores no comportamento mecânico da placa;
- Avaliar a influência da largura (t_e) e altura (h_e) dos enrijecedores no comportamento mecânico da placa;
- Identificar a melhor configuração geométrica dentre as avaliadas, visando minimizar a deflexão máxima e tensão máxima.

1.2. Estado da Arte

Existem vários estudos experimentais, analíticos e numéricos relacionados ao comportamento mecânico de placas finas de aço, com e sem enrijecedores, submetidas à flexão.

Este estudo de simulação computacional foi desenvolvido através do software de Elementos Finitos, ANSYS®.

Como a presente pesquisa é desenvolvida com base na modelagem computacional, a seguir é apresentada, uma breve descrição de alguns trabalhos que utilizaram uma abordagem numérica para o problema de flexão de placas.

Ramaswamy (1999), realizou uma pesquisa de otimização de placas rígidas com uma distribuição bastante densa de reforços (enrijecedores), como mostra a Fig. 1.4. A análise foi realizada através da validação de um código de elementos finitos através do método das diferenças finitas. Foi desenvolvida uma análise sobre os efeitos de algumas configurações de enrijecedores acoplados a placas de aço, buscando a alocação que proporcionaria um ganho maior em rigidez à flexão da placa, com um mínimo de material adicional. Foi verificado que os enrijecedores com

grande altura e relativa largura, apresentavam resultados melhores em ambas as configurações. Também constatou que placas enrijecidas trouxeram outros benefícios como a possibilidade de variação no uso de material, redução no custo e melhora do desempenho.

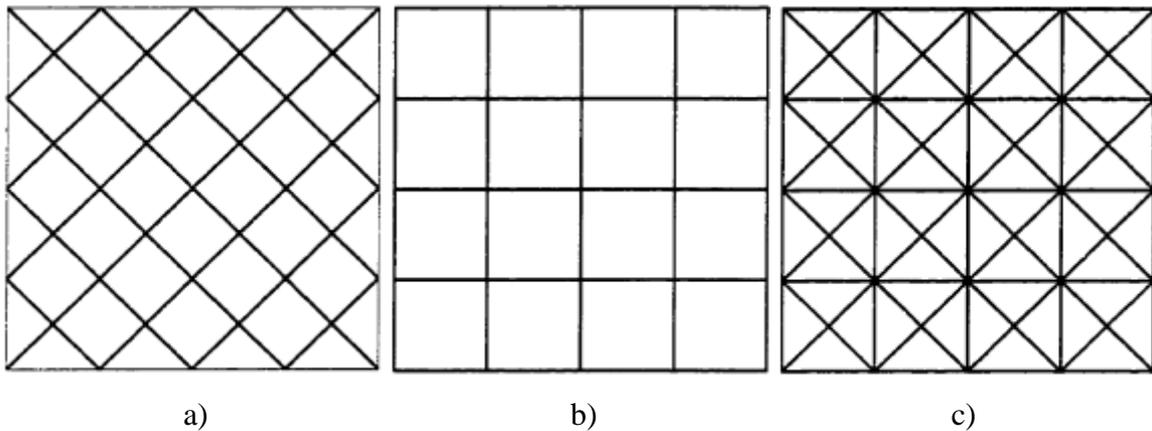


Figura 1.4 - Placa com enrijecedores cruzados e todas as arestas simplesmente apoiadas: (a) inclinados a 45° e 135° , (b) a 0° e 90° (c) a 0° , 45° , 90° e 135° (Fonte: RAMASWAMY, 1999)

Já Hasan (2007), realizou uma investigação para avaliar, através do método dos elementos finitos (MEF) e com o software *NASTRAN*, qual a configuração de localização das nervuras ou reforços (enrijecedores), para um dado carregamento, proporciona um maior aumento na rigidez da placa de formato quadrado. Em sua investigação, também foram comparados resultados de nervura tanto de um lado (Fig. 1.5a) quanto dos dois lados da placa (Fig. 1.5b).

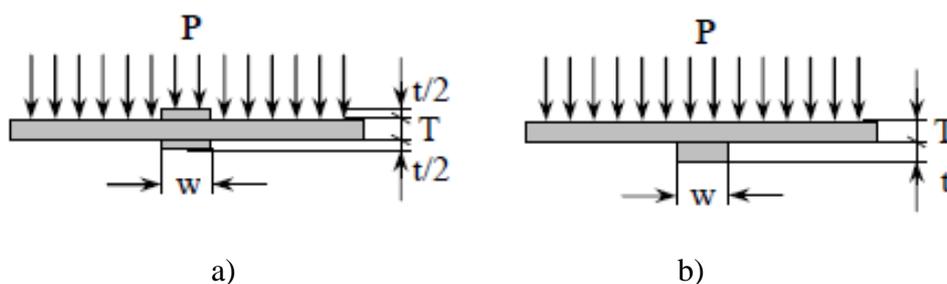


Figura 1.5 - Aplicação do carregamento e posicionamento do enrijecedor: (a) em ambos lados da placa e (b) em um lado da placa (Fonte: HASAN, 2007)

Em sua pesquisa Hasan (2007), considerou diferentes condições de vinculação para a placa com um enrijecedor longitudinal, como mostra a Fig. 1.6, dois enrijecedores longitudinais, como pode ser visto na Fig. 1.7, e de um enrijecedor transversal, como mostrado na Fig. 1.8, de modo a entender qual a configuração, dentre as avaliadas, proporciona maior rigidez.

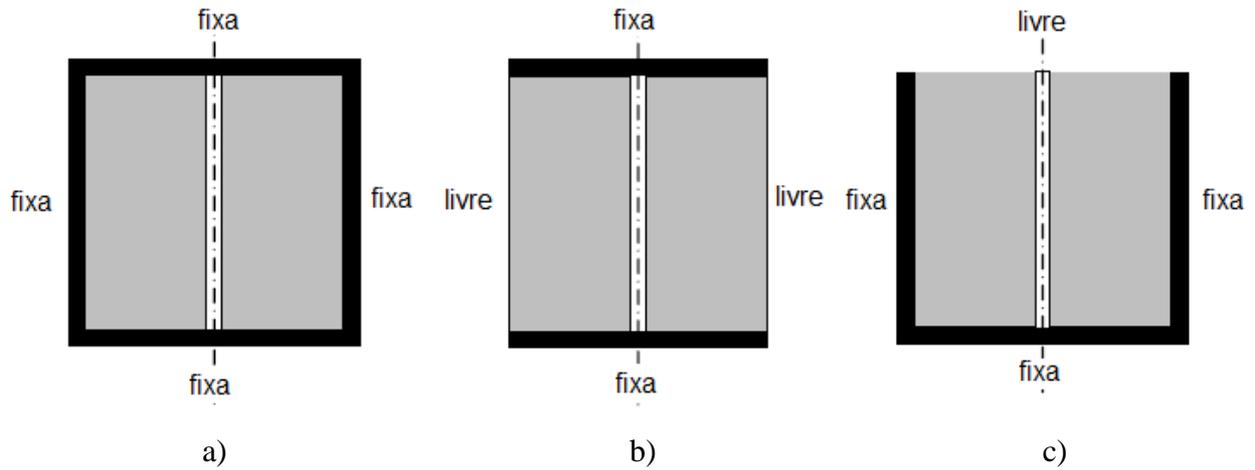


Figura 1.6 - Placa com um enrijecedor longitudinal: (a) todas as arestas fixas, (b) duas arestas fixas e as outras duas livres e (c) três arestas fixas e uma livre (Fonte: HASAN, 2007)

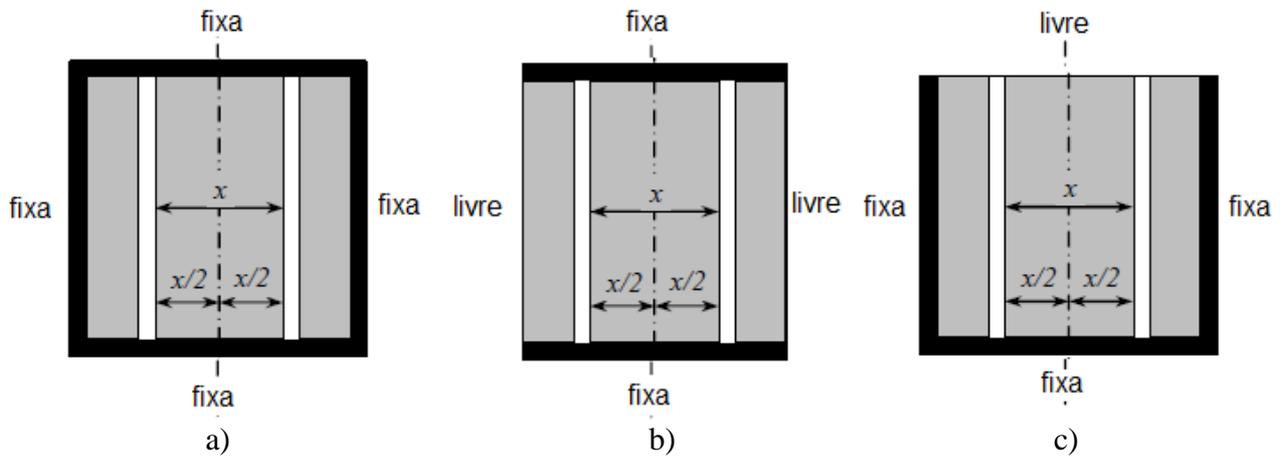


Figura 1.7 - Placa com dois enrijecedores longitudinais: (a) todas as arestas fixas, (b) duas arestas fixas e as outras duas livres e (c) três arestas fixas e uma livre (Fonte: HASAN, 2007)

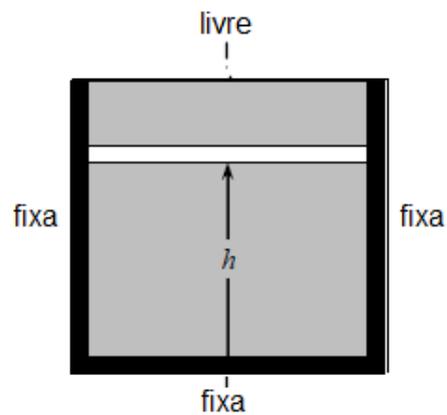


Figura 1.8 - Um enrijecedor transversal paralelo a borda livre (Fonte: HASAN, 2007)

Dentre os resultados obtidos Hasan (2007), verificou que o uso de enrijecedores em ambos os lados de uma placa induzem a menores deflexões quando comparadas com enrijecedores em um único lado. Também observou que a escolha das condições de contorno são fundamentais para o aumento da rigidez e que na condição de fixa nos quatro lados, se obteve as menores deflexões.

Em Yousif et al. (2008), como mostram as Figs. 1.9 e 1.10, foi analisada a influência da altura de um reforço (enrijecedor), na redução da tensão máxima da placa sujeita a carga de pressão. Diferentes conjuntos de reforços de placa foram testados para encontrar os efeitos da espessura do reforço e do carregamento transversalmente distribuído na avaliação da altura do reforço (enrijecedor). Foram consideradas placas quadradas engastadas a partir das quatro arestas. Foi utilizado o método dos elementos finitos, através do software ANSYS® com aplicação do elemento Shell.

Verificou-se que os resultados numéricos, obtidos pela Análise de Elementos Finitos (MEF), convergiram para resultados teóricos já conhecidos da bibliografia. A obtenção da altura ideal do reforço (enrijecedor) foi determinada, permitindo reduzir cerca de 50% o peso do reforço, que por sua vez é traduzido em estruturas mais leves, mais eficientes e de menor custo para aplicações principalmente em aeronaves e peças de navios.

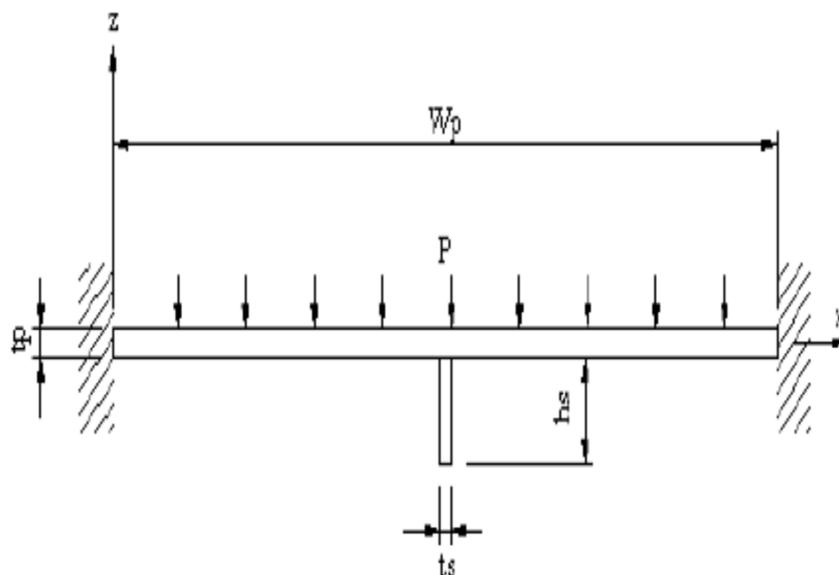


Figura 1.9 - Vista lateral do modelo (Fonte: (YOUSIF ET AL., 2008))

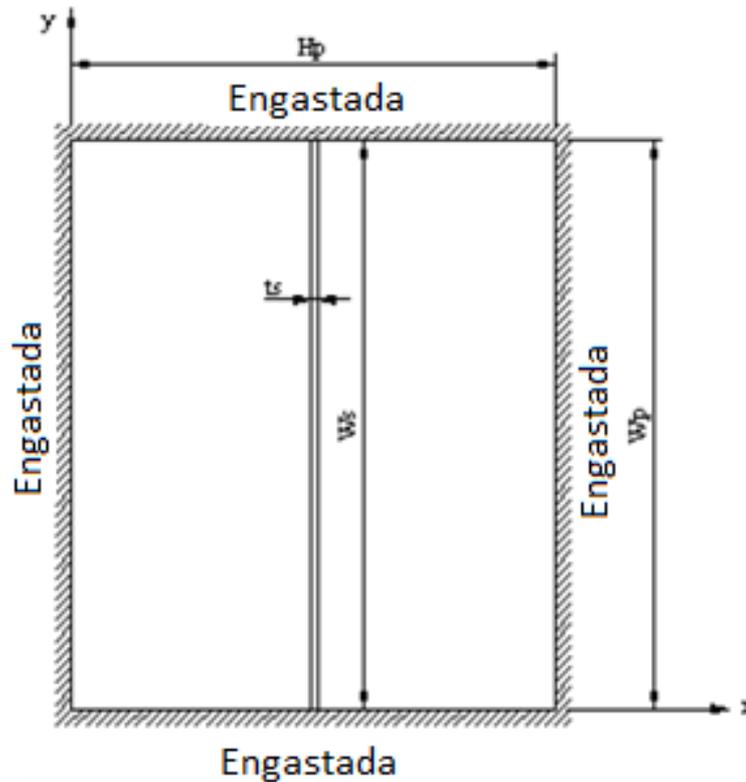


Figura 1.10 - Vista Inferior do modelo (Fonte: Adaptado de YOUSIF ET AL., 2008)

Jain (2009), empregando o método dos Elementos Finitos (MEF), através do pacote ANSYS®, avaliou a distribuição de tensões e deflexões em placas isotrópicas e ortotrópicas retangulares com furos circulares centralizados, submetidas a uma carga estática transversal provocando a flexão, conforme mostra a Fig. 1.11. Foi empregado o método dos elementos finitos. A formulação de elementos finitos foi realizada na análise através do pacote ANSYS®.

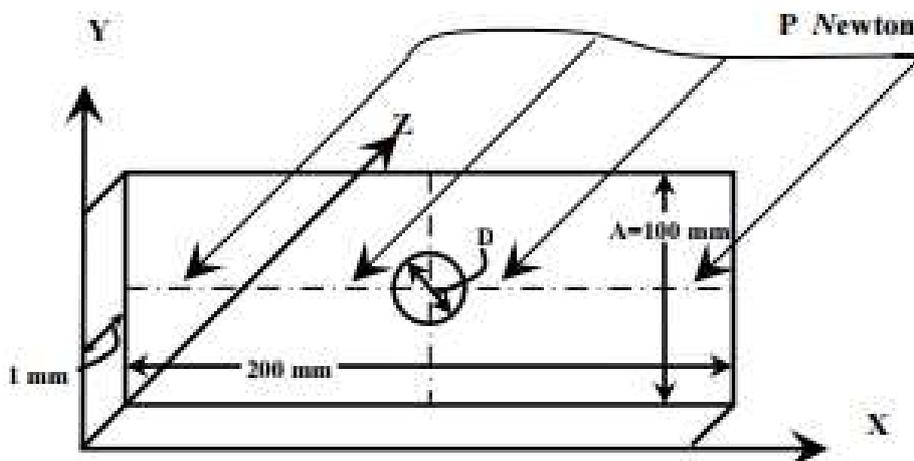


Figura 1.11 – Modelo básico do problema (Fonte: JAIN, 2009)

O objetivo foi é analisar O efeito da relação D/A (onde D é o diâmetro do furo e A é a largura da placa) em placas isotrópicas e ortotrópicas sob Carregando. A razão D/A variou entre 0,01 e 0,9. A análise foi feita para placas isotrópicas e ortotrópicas de diferentes Materiais. Nesse estudo, constatou que qualquer alteração ocorrida de forma abrupta na geometria da chapa (furos), sob carregamento, resulta em distribuição de tensões desuniforme em toda a seção transversal da placa. A deflexão transversal da placa para diferentes proporções de D/A , foi comparada com a deflexão na direção transversal na placa de referência (sem furo).

De acordo com as Fig. 1.12, as placas foram avaliadas com três condições de vinculação diferentes.

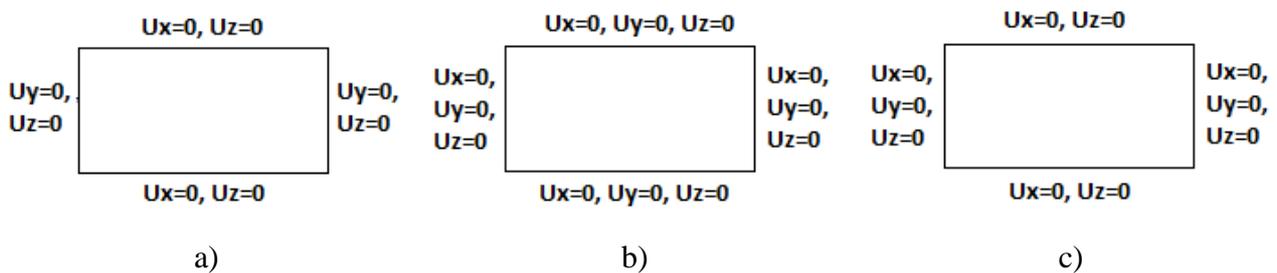


Figura 1.12 - Placa com diferentes vinculações: (a) Todas as arestas são simplesmente apoiadas, (b) Todas as arestas são engastadas e (c) duas arestas são engastadas e as outras duas são simplesmente apoiadas (Fonte: JAIN, 2009)

Foi verificado que a concentração de tensão máxima das placas (a) e (c), sempre ocorreu no limite do furo e no caso das placas (b), a concentração de tensão máxima se deu na região do engaste. Foi observado menores valores de tensão e deflexão nas placas engastadas (b). As maiores tensões foram verificadas onde a relação D/A foi maior. As placas ortotrópicas, apresentaram maiores valores de tensão e deflexão em todas as placas e condições de vinculação analisadas.

Foi estudado em Banerjee et al. (2013), o comportamento mecânico de placas de material isotrópico e ortotrópico com orifícios circulares centralizados, submetidas a carregamento estático transversal e distribuído, com o intuito de conhecer o comportamento do modelo estudado com relação as deflexões, tensões e concentração de tensões. Para tanto, a relação entre o diâmetro do furo (D) em relação a largura (A) e a relação entre a espessura (T) e a largura (A) foram avaliadas.

De acordo com as Fig. 1.13, tem-se o modelo de placa fixa analisada com dimensão (0,2 m X 0,1m) com espessura (T) com um orifício circular central de diâmetro (D) sob carga uniformemente distribuída (P) na direção transversal. A placa é fixa em todas as arestas.

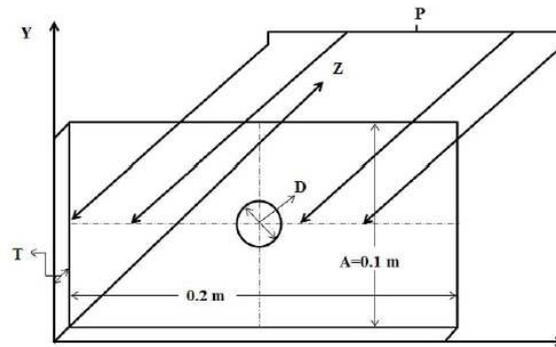


Figura 1.13 – Placa com furo com todas as arestas fixadas sob carga transversal (Fonte: Adaptado de BANERJEE ET AL., 2013)

A análise foi realizada através do método dos Elementos Finitos (MEF) com o emprego de um modelo computacional desenvolvido no software ANSYS®. O modelo utilizado foi o SOLID186, um sólido tridimensional.

Foi possível verificar que a distribuição de tensões não é uniforme em toda a seção transversal. Constatou que a influência dos parâmetros D/A e T/A , exercem um papel substancial para todas as tensões e deflexões para ambos os materiais. Verificou que as maiores tensões ocorreram nas regiões de apoio da placa e na periferia do furo.

Em Silva (2010), através do software ANSYS®, que é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), foi realizada uma análise numérica lajes nervuradas, conforme a Fig. 1.14 com dimensões usuais, considerando a influência ou não da excentricidade na placa-viga, no comportamento da estrutura.

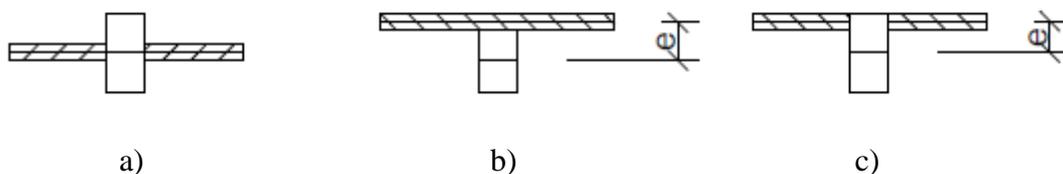


Figura 1.14 - Representação das excentricidades:

(a) Modelo concêntrico, (b) Modelo Excêntrico, o topo da viga chega ao fundo da laje e (c) Modelo Excêntrico, o topo da viga alcança o topo da laje (Fonte: SILVA, 2010)

As análises mostraram diferenças de deslocamentos e tensões nas estruturas estudadas. Todos os pavimentos foram analisados como elementos de placa e viga que representassem os modelos do trabalho. Os elementos utilizados foram de vigas tridimensionais com seis graus de

liberdade por nó (BEAM4 e BEAM44). Para representar elementos planos, foi utilizado o elemento de placa quadrada com seis graus de liberdade por nó (SHELL63).

Numa visão geral, os deslocamentos e as tensões apresentaram reduções apreciáveis em todos os casos. Com base nos dados apresentados pode-se concluir, que a desconsideração da excentricidade na ligação laje-viga em pavimentos usuais, onde as vigas são muito espaçadas, levam a resultados superestimados de deslocamentos e tensões na estrutura. Isto mostra, na análise numérica, que com esta consideração pode-se gerar redução de custos no dimensionamento das estruturas através da redução da quantidade de armadura e/ou redução das seções das peças.

Dessa forma, Silva (2010), concluiu que a excentricidade é um fator de simples implementação, que não acarreta em custo de processamento e melhora a representação do modelo estrutural analisado.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Teoria de Placas

As placas são componentes estruturais tridimensionais, composta por duas superfícies planas e retas, distanciadas entre si por uma distância designada por espessura e frequentemente identificada com a letra “ t ”. Quando esta espessura é muito pequena quando comparada as outras dimensões da placa como largura e comprimento, comumente identificada com as letras “ a ” e “ b ”, diz-se que estamos tratando de uma placa fina (SZILARD, 2004).

Para o estudo de placas sob ação de cargas de qualquer natureza, deve-se considerar o esquema estrutural, propriedades geométricas e intensidade do carregamento. Assim pode-se assegurar que o comportamento estrutural real da placa possa ser bem representado, seja através de uma modelagem que utilize o Método dos Elementos Finitos (MEF), ou através de soluções analíticas, que são provenientes da Teoria da Elasticidade.

As placas, em geral, podem ser divididas em três grupos: placas finas com pequenos deslocamentos, placas finas com grandes deslocamentos e placas espessas. As placas finas são definidas pela relação entre a espessura e a sua menor dimensão ser inferior a 1/10 (UGURAL, 1981).

As placas com grandes deslocamentos são aquelas em que os deslocamentos transversais se aproximam mais do valor da espessura da placa, mas ainda são pequenos se comparado com as demais dimensões (UGURAL, 1981). Quando a placa possui deslocamentos transversais bem menores que a sua espessura, é classificada como de pequenos deslocamentos. O fato de que esta espessura é pequena comparada com as dimensões da placa e por sua vez pequena comparada com os raios de curvatura da superfície, é o que permite reduzir o cálculo de placas e lâminas reais a elementos idealizados bidimensionais (MINDLIN, 1951; REISSNER, 1945 e UGURAL, 1981).

A teoria de placas finas não leva em conta os efeitos da deformação por cisalhamento e é conhecida também como teoria clássica de flexão de placas. Já as teorias para placas espessas levam em conta este efeito e por isso são também conhecidas como teoria de placas deformáveis por cisalhamento (CAMPO, 2012).

Placas finas de aço são componentes muito comuns na indústria naval e oceânica. São empregados, por exemplo, em conveses e no fundo de cascos de navios e em painéis e plataformas de estruturas offshore (REAL e ISOLDI, 2010).

O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa. O fato da espessura ser pequena quando comparada com as demais dimensões do sólido, permite que se introduzam simplificações na formulação dos problemas, mas são ainda as grandezas relevantes em termos de Mecânica dos Meios Contínuos que são consideradas na formulação das

teorias de Placas e Cascas. Estas grandezas são os deslocamentos, deformações e tensões (SZILARD, 2004).

As placas, tipicamente, suportam carregamentos transversais, desenvolvendo, portanto, deformações de flexão (MENDONÇA, 2005).

A estrutura global de um navio é normalmente referida como sendo uma viga caixão ou viga casco. Geralmente, isto é feito projetando a viga de casco com uma série de painéis rígidos (RIGO e RIZZUTO, 2003).

Estruturas principais de casco de navio como conveses, cascas, e anteparos são compostas de painéis rígidos, os quais incluem as placas com enrijecedores. Estes componentes estruturais devem suportar diferentes tipos de solicitações mecânicas, como as forças laterais geradas pela pressão da água (OKUMOTO ET AL., 2009).

Muitas estruturas como plataformas petrolíferas, submarinos, cascos de navios, como mostra a Fig. 2.1 bem como lajes e anteparos na construção civil e peças de maquinaria são projetadas de acordo com a teoria de flexão de placas (SZILARD, 2004).

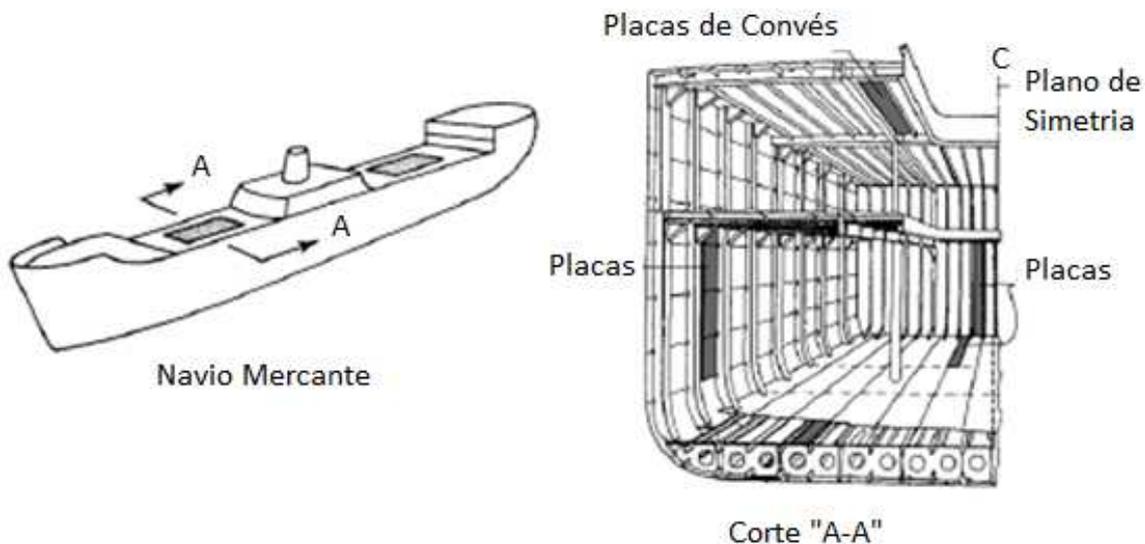


Figura 2.1 - Emprego de placas na construção naval (Fonte: SZILARD, 2004)

Na Mecânica dos Meios Contínuos é possível considerar comportamentos do material que são elásticos e comportamentos que não são elásticos. Nesta abordagem das placas e cascas considera-se que o comportamento do material é um comportamento homogêneo e elástico e conseqüentemente as relações entre tensões e deformações são regidas pela Lei de Hooke (SZILARD, 2004).

A análise desses componentes estruturais consiste na solução de uma equação diferencial que é função da deflexão, dos carregamentos aplicados e da rigidez da placa. A solução dessa equação diferencial resulta em uma expressão para a deflexão da placa. Outras grandezas como as forças e momentos devem ser determinadas a partir da deflexão (JAWAD, 1994).

Conforme Szilard (2004), o comportamento mecânico das placas planas é similar ao de grelhas formadas por vigas perpendiculares entre si. Entretanto placas são estruturas que apresentam uma maior eficácia na resistência a cargas atuantes em superfície, pois possui comportamento resistente bidimensional devido à continuidade física e capacidade de suportar elevados momentos torçores impostos à estrutura. Por este motivo, as placas são muito utilizadas para revestimento de superfícies devido às características de resistência e leveza aliadas à questão econômica.

Conforme Szilard (2004), o comportamento de placas finas de material elástico linear, no regime de pequenas deformações e de pequenos deslocamentos pode ser interpretado através de uma equação diferencial governante. A teoria de placas finas para pequenos deslocamentos possui a colaboração de Bernoulli, Lagrange, Navier, Poisson e Saint-Venant, entretanto foram as contribuições de Kirchoff e Love as mais relevantes para o desenvolvimento deste estudo.

De acordo com Szilard (2004), a teoria clássica de placas finas de Kirchoff é amplamente empregada na grande maioria das aplicações de engenharia, uma vez que produzem resultados suficientemente precisos, desconsiderando a necessidade de análise de tensões tridimensional.

Segundo Szilard (2004), a geometria da placa é caracterizada através do seu plano médio, que é o plano que secciona a espessura ao meio em cada ponto da placa. Placas retangulares, em geral, empregam um sistema de coordenadas para a descrição da geometria.

Existem três principais teorias que são amplamente aplicadas no estudo do comportamento estrutural das placas: Teoria de Kirchoff, Teoria de Mindlin e Teoria de von Kármán.

A Teoria de Kirchoff, também chamada de Teoria Clássica, admite que, na composição dos deslocamentos transversais, apenas as deformações por flexão são consideradas, e os efeitos da carga axial normal podem ser analisados separadamente (KIRCHHOFF, 1850). Esta última consideração só é aceitável se a carga axial normal atuante na placa for muito inferior que a sua força crítica compressiva de resistência. Além disto, a Teoria de Kirchoff é aplicável para placas finas com pequenos deslocamentos, onde é possível tratar o comportamento da placa como linear geométrico.

Sendo assim, a Teoria de Kirchhoff admite as seguintes hipóteses:

- O plano médio da placa permanece indeformável após a flexão.
- Seções planas normais ao plano médio da placa permanecem planas e normais após a flexão. Isto significa que as distorções no plano xz e yz (γ_{yz} , γ_{xz}) e a deformação normal ε_z são desprezadas. A deflexão das placas é então decorrente, exclusivamente, das deformações por flexão (UGURAL, 1981).
- A tensão normal na direção Z pode ser desprezada ($\sigma_z=0$).

2.1.1. Sistema de Coordenadas e convenção de sinais

A Figura 2.2 mostra os parâmetros geométricos de uma placa, o sistema de coordenadas adotado e o carregamento em sua superfície.

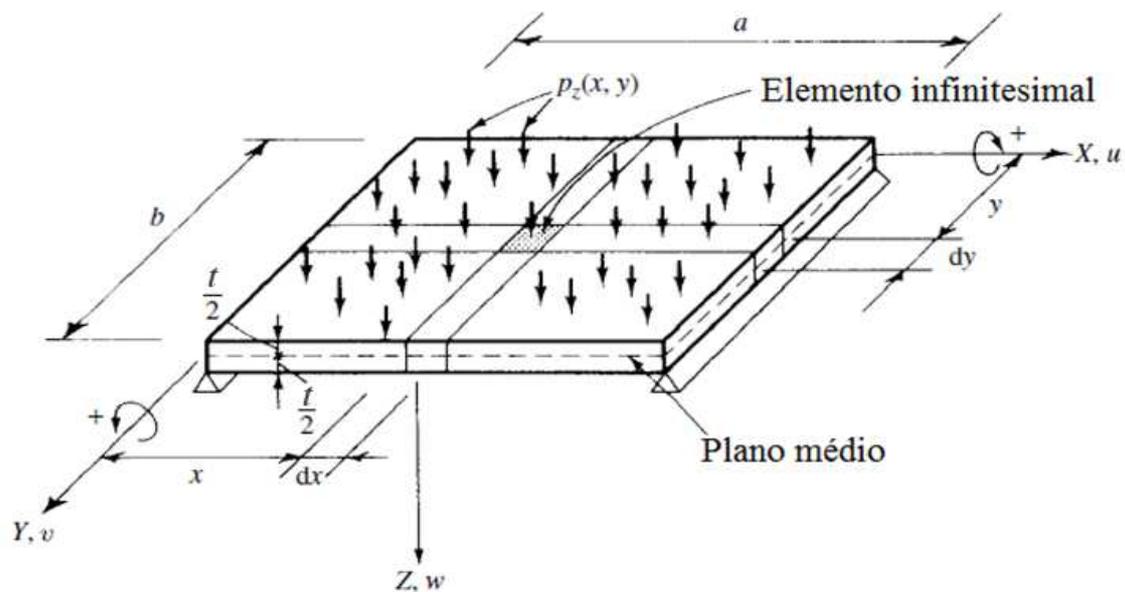


Figura 2.2 - Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado

(Fonte: Adaptado de SZILARD, 2004)

As hipóteses simplificativas consideradas para a dedução da equação diferencial governante de placas finas em termos de suas deflexões transversais $w(x, y)$ são (SZILARD, 2004):

- O material da placa é homogêneo, isotrópico e linearmente elástico;
- A placa é inicialmente reta (plana);
- O plano médio da placa não sofre deformação durante a flexão, ou seja, é livre de tensões durante a flexão;
- A menor dimensão lateral da placa é no mínimo dez vezes maior que a sua espessura t ;

- Deflexões (deslocamentos) transversais $w(x, y)$ da placa são pequenas se comparadas com sua espessura t ;
- As inclinações do plano médio da placa (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade;
- As seções planas e normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais ao plano médio após a deformação, isto é, o efeito de empenamento que as deformações por cisalhamento exercem sobre a seção transversal à placa é desprezado;
- As deformações causadas pelas forças coplanares sobre o plano médio são desprezadas, pois são muito pequenas quando comparadas com as deformações causadas por flexão;
- A tensão normal σ_z na direção transversal à placa pode ser desprezada.

Segundo Mindlin (1951) e Reissner (1945) estas hipóteses simplificativas são um conjunto de hipóteses cinemáticas sobre como se deforma uma placa sob flexão e permitem relacionar os deslocamentos com as deformações e uma vez obtidas as deformações, a aplicação rotineira das equações da elasticidade permitem encontrar as tensões, e encontrar a equação de governo que relaciona deslocamentos com as forças externas.

Estas hipóteses foram comprovadas experimentalmente e são uma extensão da Teoria Clássica de Vigas para a Teoria de Placas Finas. Na Figura 2.3 é apresentado o estado de tensão de um elemento infinitesimal extraído do interior da placa que corrobora as hipóteses descritas anteriormente (SZILARD, 2004).

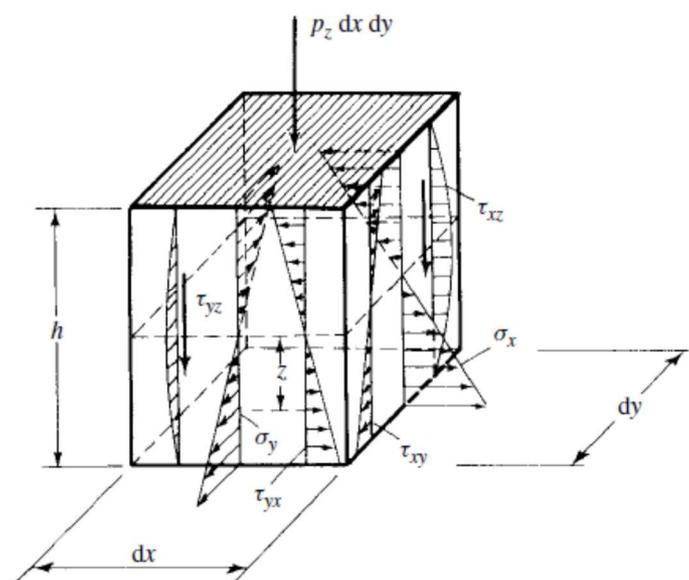


Figura 2.3 - Estado de tensão de um elemento infinitesimal extraído do interior da placa (Fonte: SZILARD, 2004)

2.1.2. Equilíbrio de um elemento de placa

A Figura 2.4 apresenta as solicitações que agem transversalmente sobre um elemento em forma de um paralelepípedo extraído do interior da placa. São atribuídos valores positivos aos esforços atuantes sobre as faces convencionadas positivas do elemento. Da mesma forma, os esforços que agem sobre as faces negativas serão considerados negativos. Quanto à notação dos esforços, o primeiro índice corresponde à direção normal do plano em que o esforço é aplicado. Já o segundo índice, indica a direção transversal ao plano do elemento que o esforço atua (SZILARD, 2004).

Uma componente de momento M_x age na face negativa de x (face esquerda), e varia de valor com relação ao eixo x até a posição da face positiva de x (face direita). Esta variação com a posição pode ser expressa pela série truncada da expansão de Taylor (UGURAL, 1981).

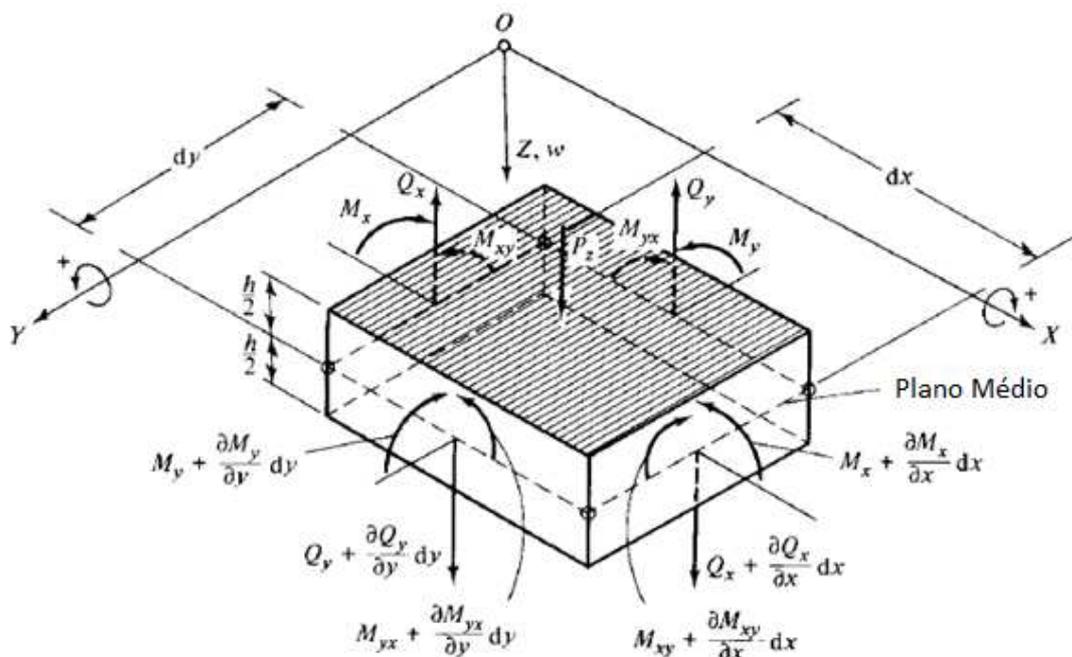


Figura 2.4 - Esforços resultantes em um elemento de placa (Fonte: Adaptado de SZILARD, 2004)

É possível comparar o comportamento mecânico de uma placa ao comportamento de uma malha de vigas perpendiculares entre si. Sendo assim, o esforço externo P_z é compensado pela ação dos esforços cortantes Q_x e Q_y e pelos momentos fletores M_x e M_y . Dessa forma, a diferença entre elementos estruturais se dá que nas placas planas, os momentos torçores M_{xy} e M_{yx} também colaboram para a resistência ao carregamento externo (SZILARD, 2004).

Na teoria de placas, os esforços solicitantes atuam no plano médio por unidade de comprimento. Para que não ocorra erro na definição de forças ao longo de um comprimento em relação aos esforços resultantes, a notação adotada para esforços por unidade de comprimento é qx ,

q_y , m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} . Na Figura 2.5 é apresentado um elemento da superfície média em equilíbrio sob a ação de uma carga distribuída p_z (SZILARD, 2004).

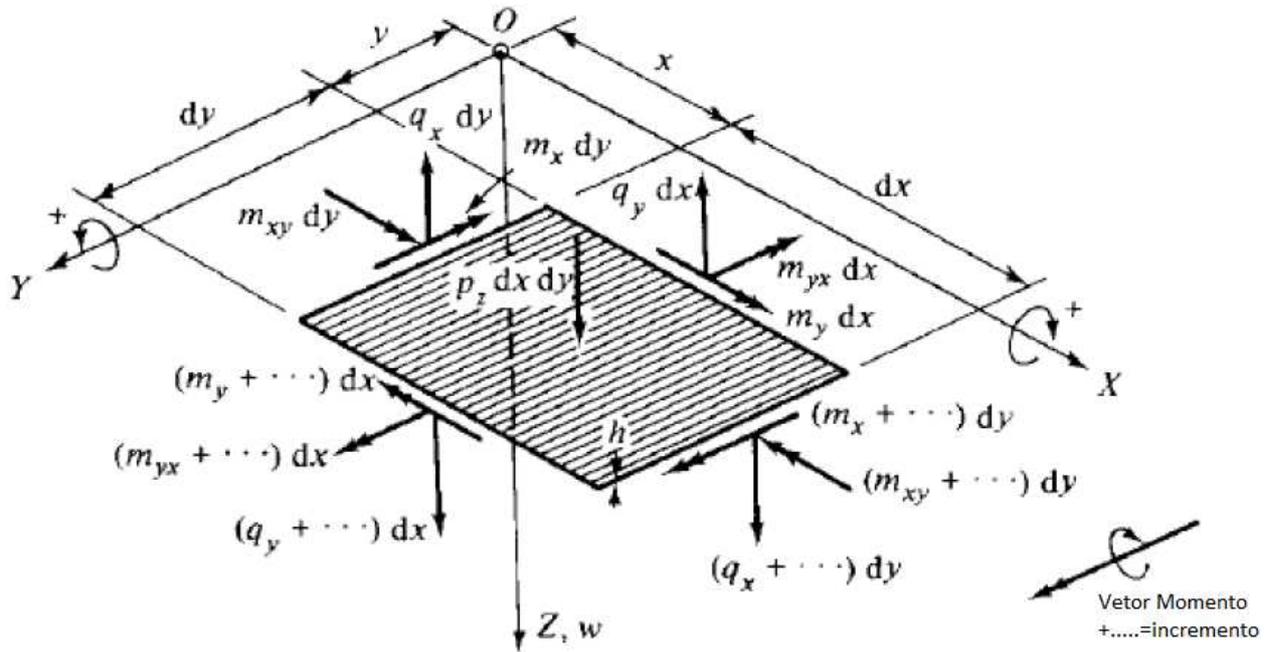


Figura 2.5 - Esforços por unidade de comprimento atuante no plano médio (Fonte: Adaptado de SZILARD, 2004)

Como o elemento de placa está submetido apenas a cargas distribuídas transversais, logo, das seis equações de equilíbrio fundamentais somente as três seguintes são empregadas (SZILARD, 2004):

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum F_z = 0 \quad (2.1)$$

O equilíbrio de momentos em torno do eixo coordenado Y, considerando que o mesmo passa pelo centro do elemento é dado por:

$$q_x + dq_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx, \quad m_y + dm_y = m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \quad (2.2)$$

$$\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - m_{yx} dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.3)$$

Expandindo-se e simplificando a Eq. (2.3) tem-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0 \quad (2.4)$$

essa forma, o esforço cortante pode ser definido dividindo a Eq. (2.4) por $d_x d_y$ e isolando q_x :

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \quad (2.5)$$

Da mesma forma, em relação ao equilíbrio de momentos em torno do eixo X, supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento, resulta:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.6)$$

O equilíbrio de momentos em torno do eixo coordenado Z:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} d_x d_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} d_x d_y + p_z d_x d_y = 0 \quad (2.7)$$

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} d_x \right) d_y - q_x d_y + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} d_y \right) d_x - q_y d_x + p_z d_x d_y = 0 \quad (2.8)$$

Expandindo e simplificando a Eq. (2.8) e, depois, dividindo o resultado por $d_x d_y$, é obtido:

$$-p_z = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad (2.9)$$

Substituindo as Eqs. (2.5) e (2.6) em (2.9), e sabendo que pela reciprocidade de tensões de cisalhamento, em que $m_{xy} = m_{yx}$, é obtida uma única equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (2.10)$$

2.1.3. Relação deformação-deslocamento de placas finas

De acordo com as hipóteses simplificativas apresentadas, a Fig. 2.6 apresenta a seção transversal de uma placa inicialmente paralela ao eixo coordenado X e posteriormente fletida (SZILARD, 2004).

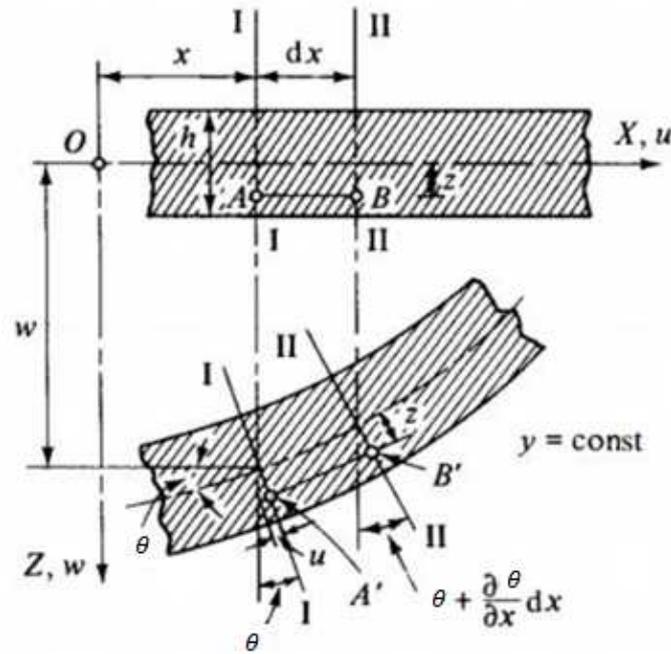


Figura 2.6 - Flexão da placa na direção X (Fonte: SZILARD, 2004)

Dessa forma, conclui-se que o deslocamento axial u evidenciado entre os pontos, $A-A'$ e $B-B'$, pode ser determinado através da expressão:

$$u = -z\theta = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.11)$$

De maneira análoga, o deslocamento axial v pode ser determinado através da expressão:

$$v = -z\theta = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq. (2.11), que determina o deslocamento axial u na relação deformação-deslocamento, obtém-se:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

De forma análoga, substituindo a Eq. (2.12), que determina a deflexão na direção do eixo y é obtida:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.14)$$

A deformação por cisalhamento no plano XY pode ser associada aos deslocamentos axiais u e v :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.15)$$

Substituindo as Eqs. (2.11) e (2.12) na Eq. (2.15)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.16)$$

As equações (2.13 a 2.16) expressam as deformações em qualquer ponto da placa.

Portanto, a curvatura da placa nas direções X e Y pode ser determinada através da equação:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

$$k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

Já o empenamento da placa pode ser determinado através da equação:

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

2.1.4. Relação tensão-deslocamento de placas finas

De acordo com as hipóteses simplificativas apresentadas, a Fig. 2.7, apresenta um estado de tensões de uma lamina de material localizada a uma distância z do plano médio da placa.

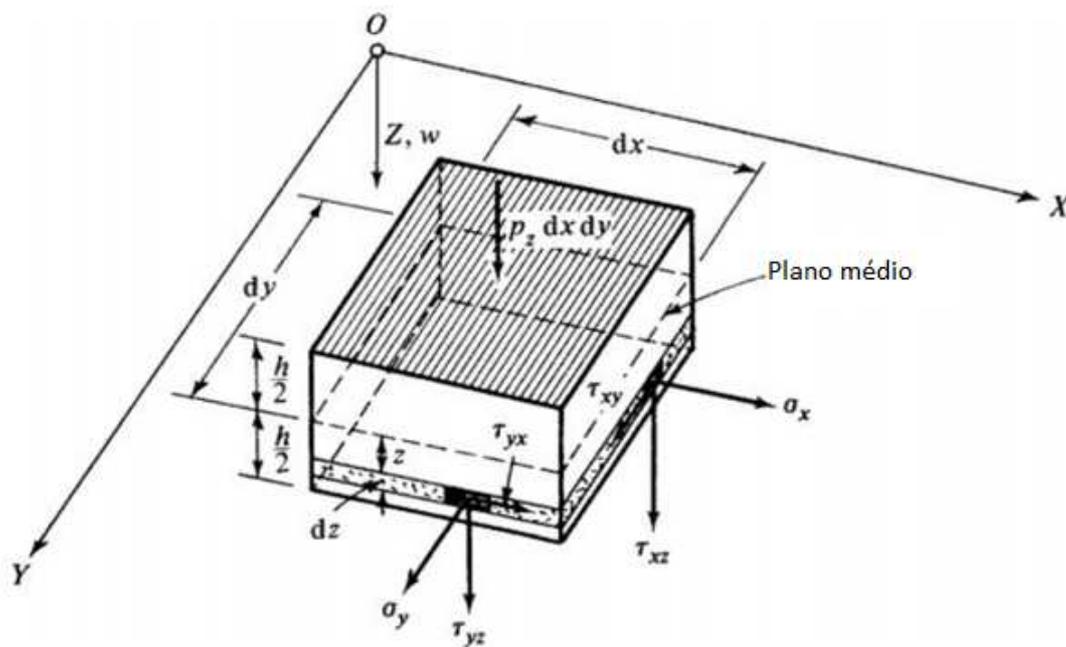


Figura 2.7 – Estado de tensões de um elemento de placa (Fonte: Adaptado de SZILARD, 2004)

As componentes de tensão situadas no plano xOy podem ser determinadas pelas deformações empregando-se a Lei de Hooke em um estado plano de tensões.

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (2.20)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (2.21)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad (2.22)$$

Onde E é o módulo de Young ou módulo de elasticidade, G é o módulo de elasticidade transversal ou módulo transversal e ν é o coeficiente de Poisson.

De acordo com as hipóteses simplificativas apresentadas anteriormente, não é possível determinar as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} através da Lei de Hooke, sendo portanto desprezadas. Este fato não é um impeditivo para aplicação da Teoria de Placas Finas na solução de problemas mas, representa uma inconsistência conceitual do estudo.

Substituindo a Eq. (2.13) e Eq. (2.14) na Eq. (2.20), tem-se a tensão normal na direção x :

$$\sigma_x = -\frac{E_Z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (2.23)$$

Da mesma forma, substituindo a Eq. (2.13) e Eq. (2.14) na Eq. (2.21), tem-se a tensão normal na direção y :

$$\sigma_y = -\frac{E_Z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (2.24)$$

De forma análoga, substituindo a Eq. (2.15) na Eq. (2.22), tem-se a tensão de cisalhamento no plano x - y :

$$\tau_{xy} = -\frac{E_Z}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (2.25)$$

Logo, pela simetria do tensor das tensões, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

2.1.5. Relação esforço solicitante-deslocamento de placas finas

Na Teoria de Placas Finas, os momentos fletores m_x e m_y , são os momentos fletores por unidade de comprimento em relação, respectivamente às direções x e y , são definidos da mesma maneira que na Teoria de Vigas, ou seja, a partir da integração do produto das tensões normais ao longo da espessura da placa pela distância z até o plano médio.

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z d_z \quad (2.26)$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z d_z \quad (2.27)$$

Da mesma forma, os momentos fletores m_{xy} e m_{yx} , na Teoria de Placas Finas, são definidos a partir da integração do produto das tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} pela distância até o plano médio.

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z d_z \quad (2.28)$$

$$m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z d_z \quad (2.29)$$

Logo, pela simetria do tensor das tensões, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e portanto $m_{xy} = m_{yx}$.

Substituindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.26) e a Eq.(2.24) na Eq. (2.27) e integrando ao longo da espessura da placa, tem-se as relações esforço solicitante-deslocamento para placas finas:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D(k_x + \nu k_y) \quad (2.30)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D(k_y + \nu k_x) \quad (2.31)$$

Da mesma forma, substituindo a Eq. (2.25) nas Eqs. (2.28 e 2.29), e integrando ao longo da espessura da placa, tem-se as relações esforço solicitante-deslocamento para placas finas:

$$m_{xy} = -(1 - \nu)D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -(1 - \nu)D_{\chi} \quad (2.32)$$

Sendo D a rigidez à flexão da placa fina e relacionando a rigidez à flexão com a rigidez de uma viga com largura unitária, que por sua vez, é determinada por EI , conclui-se que a placa apresenta uma rigidez maior devido ao efeito do coeficiente de Poisson (ν).

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.33)$$

Substituindo as Eqs. (2.30), (2.31) e (2.32) na Eq. (2.10), determina-se a equação diferencial para a resolução da deflexão w da placa fina, com material elástico, no regime de pequenos deslocamentos e sob carregamento transversal:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (2.34)$$

A resolução da Eq. (2.34) passa pela determinação da função $w(x, y)$ que satisfaça as condições de contorno do problema e represente a situação em que a placa fina está submetida a um carregamento transversal.

Aplicando o operador Laplaciano (operador diferencial de segunda ordem) e desconsiderando a última parcela (z):

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.35)$$

Reescrevendo a Eq. (2.34):

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p_z \quad (2.36)$$

Os esforços cortantes podem ser definidos em função do deslocamento transversal w . Com base nesta condição, a expressão é determinada substituindo as Eqs. (2.30), (2.31) e (2.32) nas Eqs. (2.5) e (2.6):

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2.37)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2.38)$$

2.1.6. Condições de Contorno

A solução exata para placas finas sob carregamento transversal, além de satisfazer a equação diferencial, tem que obedecer às condições de contorno que regem o problema. Como a equação é parcial de quarta ordem, em cada direção de todos os bordos, há duas condições de contorno a serem satisfeitas. Estas condições podem ser no âmbito do deslocamento, em que são conhecidas como condições de contorno geométricas, ou dos esforços internos, que são as condições de contorno estáticas, ou também na combinação destas. Na Figura 2.8 são apresentadas as principais condições de contorno para placas.

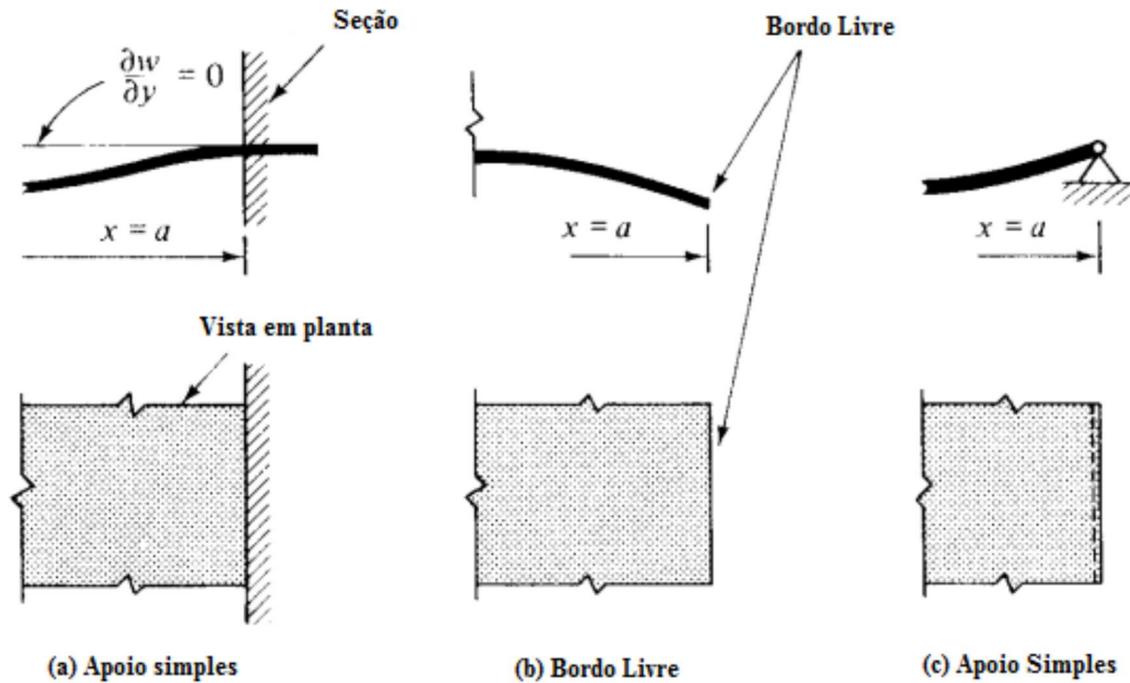


Figura 2.8 – Condições de contorno para placas (Szilard, 2004).

2.1.6.1. Condições de Contorno Geométricas

A condição de contorno geométrica pode ser imposta em um bordo da placa ao se fixar o valor do deslocamento transversal ou da inclinação da placa na direção normal ao bordo. No caso de uma placa em que todos os seus bordos estão perfeitamente engastados, por exemplo, as condições de contorno seriam:

$$w = 0; \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2.39)$$

$$w = 0; \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (2.40)$$

2.1.6.2. Condições de Contorno Estáticas

Para a placa em que um dos seus bordos está completamente livre para se deslocar, as condições de contorno serão estáticas, pois o esforço cortante e o momento fletor neste bordo são nulos, visto que este não está carregado. Estas condições de contornos são descritas assim:

$$v_x = m_x = 0, \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2.41)$$

$$v_y = m_y = 0, \quad \text{em } y = 0 \text{ e } x = b \quad (2.42)$$

Como foi visto anteriormente, a placa possui esforços solicitantes de esforço cortante, momento fletor e momento torçor (Fig. 2.9). Logo, quando um bordo está completamente livre, ele

deve atender a três condições de contorno, uma para cada esforço solicitante. Porém, Kirchhoff transformou o efeito do momento torçor nos bordos em um esforço cortante adicional. Assim, os tipos de esforços solicitantes passam de três para dois.

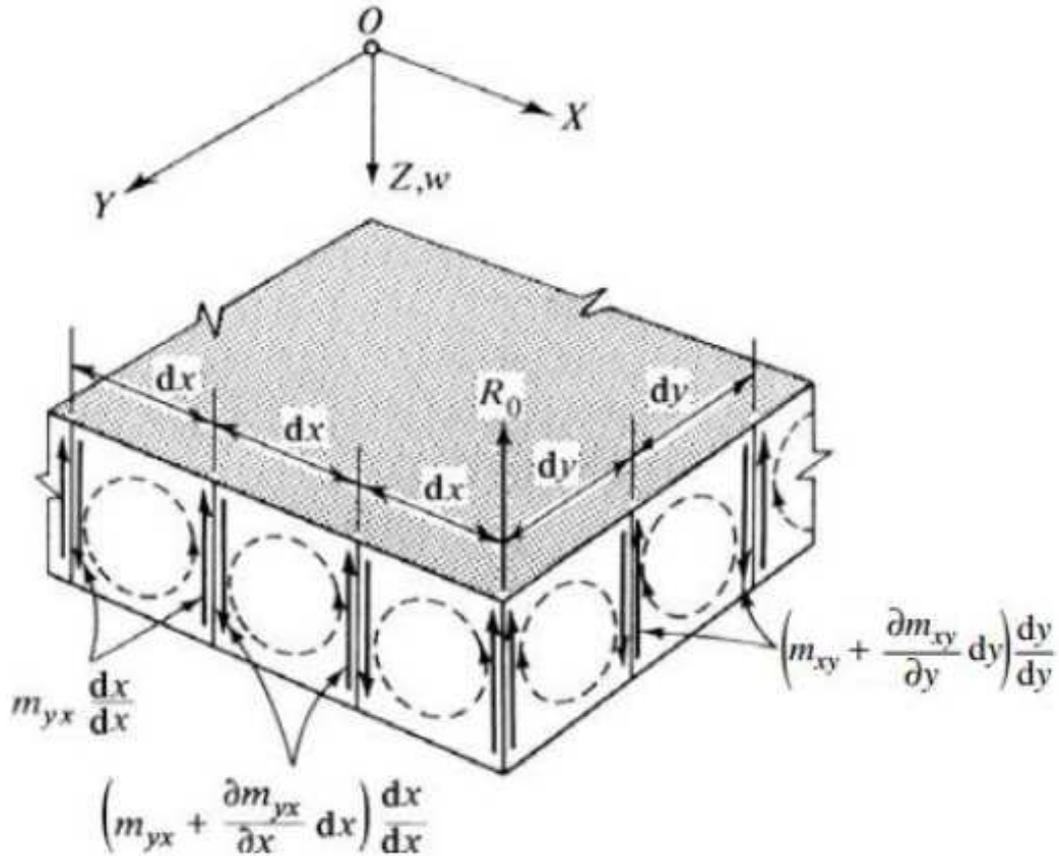


Figura 2.9 – Efeito de bordo do momento torçor em placas (Szilard, 2004).

Desta forma, nos bordos da placa haverá uma parcela adicional de esforço cortante. Para os bordos em que a sua direção normal sejam os eixos X ou Y , este efeito pode ser descrito pelas equações.

$$v_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (2.43)$$

$$v_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \quad (2.44)$$

Logo, as condições de contorno em bordo livre reduzem-se de três para duas e são dadas por:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a \quad (2.45)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = b \quad (2.46)$$

Conforme a Fig. 2.10, para o caso de placas simplesmente apoiadas, nos cantos os esforços cortantes adicionais gerados pelo momento torçor se somam, e não se cancelam, e por isso criam uma força resultante de canto R_0 , que tende a levantar os cantos. A força R_0 é definida por:

$$R_0 = 2mxy = -2(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.47)$$

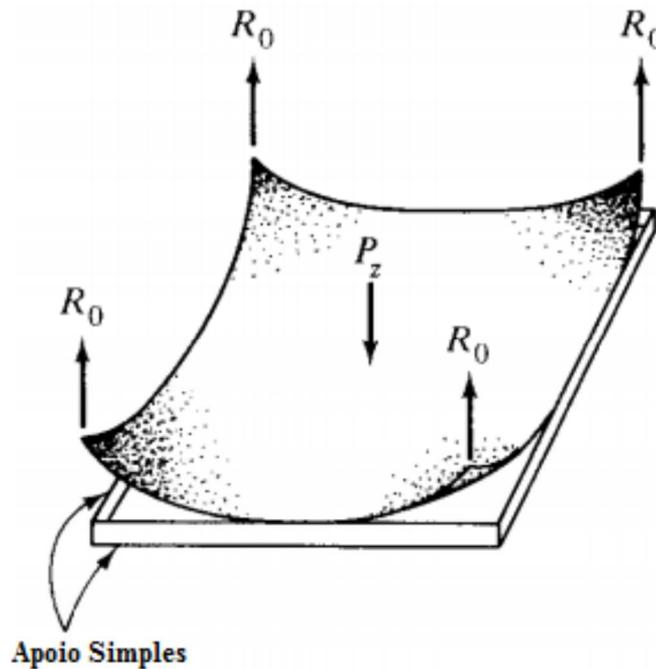


Figura 2.10 – Esforços de canto em placas (Szilard, 2004).

2.1.6.3. Condições de contorno mistas

Placas em que um bordo é simplesmente apoiado e simultaneamente as condições de deslocamento transversal e momento fletor na direção normal aos bordos nulos, quando se encontra descarregada, é um exemplo em que as condições mistas de contorno devem ser aplicadas. Estas condições são determinadas pelas equações:

$$w = 0; m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a \quad (2.48)$$

$$w = 0; m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = b \quad (2.49)$$

2.1.7. Solução da equação diferencial

A solução da equação diferencial é uma função $w(x,y)$ que satisfaça a Eq. (2.28) e as condições de contorno. Entretanto, esse tipo de solução só é possível para situações em que o carregamento e as condições de contorno são muito simples.

De acordo com a linearidade da Eq. (2.28), a solução pode ser determinada por meio da sobreposição de soluções, onde uma é homogênea $w_h(x,y)$, na qual satisfaz as condições de contorno ao longo dos bordos da placa, e a outra particular $w_p(x,y)$, que atenda o equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa. Logo, a solução geral é dada por:

$$w(x,y) = w_h(x,y) + w_p(x,y) \quad (2.50)$$

Outra forma de solução foi desenvolvida por Navier, em que a função $w(x,y)$ e o carregamento transversal $p_z(x,y)$ são representados por séries de Fourier, em que os coeficientes são definidos de tal forma que atendam as condições de contorno e garantam o equilíbrio do carregamento aplicado.

Lévy também apresentou a sua solução, que aplica séries simples de Fourier, entretanto só pode ser empregada em placas com pelo menos dois bordos paralelos e simplesmente apoiada. A solução de Lévy apresenta mais rapidamente a convergência da solução do que a solução de Navier. No entanto, quando o problema conta com geometria, condições de contorno e carregamento mais complexos, é indicado o emprego de métodos numéricos de solução como o Método dos Elementos Finitos.

A bibliografia clássica sobre Teoria de Placas tais como Timoshenko e Woinowsky–Krieger (1959) e Szilard (2004), apresenta as soluções em forma de tabelas para problemas de engenharia de maior interesse prático.

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL

Muitos problemas da engenharia estrutural são governados por equações diferenciais, como é o caso das placas finas. A solução dessas equações fornecem resultado com grande precisão para alguns tipos de problemas. Entretanto, essas soluções analíticas somente são possíveis para problemas envolvendo geometrias, carregamentos e condições de contorno simples. Para problemas mais complexos e conseqüentemente ainda sem solução analítica, a modelagem computacional pode ser aplicada para obter uma solução aproximada (BLAUWENDRAAD, 2010).

A simulação numérica é um processo de projetar um modelo computacional de um sistema real e conduzir experimentos com este modelo com o propósito de entender seu comportamento e/ou avaliar estratégias para sua operação (PEGDEN,1990).

A simulação numérica consiste em uma técnica que avalia o comportamento de um determinado sistema por meio de modelos computacionais, que reproduzem na totalidade ou em parte as propriedades e comportamentos do sistema, permitindo assim sua manipulação e estudo detalhado (KARDESTUNDER e NORRIE, 1987; ZIENKIEWICZ, 1971).

A utilização de modelos numéricos para a solução de problemas complexos de engenharia é hoje uma realidade, devido ao desenvolvimento de potentes computadores com grande capacidade de armazenamento de dados (MALISKA,2004).

A modelagem computacional permite estudar fenômenos físicos por meio de uma abordagem que envolve engenharia, matemática e ciências computacionais. O fenômeno físico a ser estudado é representado pelo sistema de equações parciais diferenciais (tradução do problema de engenharia para a matemática). O sistema de equações é aproximado através de um método de discretização. Por fim, os resultados da simulação são comparados com o fenômeno físico em estudo (DELVLOO, 2005).

3.1. Solução Numérica

Com a evolução da ciência, vem sendo muito utilizado métodos numéricos para obtenção de soluções aproximadas para problemas de engenharia. Ao se analisar painéis enrijecidos sob esforços mecânicos, o uso de métodos numéricos é imprescindível, pois a solução analítica é praticamente impossível por meio das equações diferenciais regidas pela teoria da elasticidade (MANRIQUE, 1989).

Com o objetivo de avaliar numericamente a ação de uma carga, uniformemente distribuída, no comportamento das tensões e das deflexões em uma placa fina, ou seja, placas em que a relação dos lados (comprimento e largura) são iguais ou superiores a 10 vezes a sua espessura, faz-se necessário para o problema em questão, a representação por um sistema de equações diferenciais

parciais que, através de um método de discretização, possam ser resolvidas numericamente. Um método de discretização bastante empregado na análise numérica de estruturas é o Método dos Elementos Finitos (MEF) (BLAUWENDRAAD, 2010).

De acordo com Madenci e Guven (2006), o MEF foi desenvolvido em 1956 e é uma técnica computacional empregada em soluções aproximadas e que com o desenvolvimento da computação, vem sendo aplicado cada vez mais em inúmeros problemas de engenharia.

O MEF consiste num método de análise numérica para obtenção de soluções aproximadas de equações matemáticas que descrevem fenômenos físicos em uma grande variedade de problemas de engenharia (COSTA, 2010).

No campo da análise estrutural, o MEF é usualmente adotado em sua formulação de deslocamento. Desta forma, a estrutura é dividida num certo número de pequenas regiões, os chamados elementos finitos. Estes elementos são assumidos como interconectados por um número determinado de pontos nodais localizados em seus limites (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1989; BATHE, 1996).

Um conjunto de funções de interpolação é utilizado para definir exclusivamente o estado de deslocamento dentro de cada elemento, em termos de deslocamentos de seus nós. O estado de “deformação” dentro do elemento é definido através das relações deformação-deslocamento. O estado de tensão ao longo do elemento é determinado pela lei de tensão-deformação do material (REAL e ISOLDI, 2010).

De acordo com a Fig. 3.1, pode-se dizer que a ideia central do MEF é a decomposição do domínio de integração em um número finito de subdomínios (elementos finitos) transformando o meio contínuo em discreto onde o comportamento do campo possa ser aproximado por um polinômio de grau baixo. Este polinômio é escrito em função de valores do campo nos vértices (nós) destes elementos e estes valores (incógnitas do problema discreto) são determinados através da minimização de um funcional associado à equação diferencial (COOK ET AL., 1989).

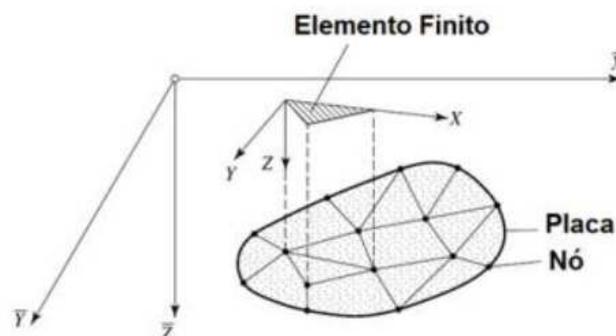


Figura 3.1 - Discretização de um domínio (Fonte: Adaptado de SZILARD.,2004)

Para a análise estrutural, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente empregado para a resolução de problemas das diversas áreas da engenharia. O avanço tecnológico na área computacional facilitou e aperfeiçoou a utilização dessa técnica, pois um dos entraves na sua aplicação estava relacionado à dificuldade da resolução de grandes matrizes, o que foi eliminado pelo uso de equipamentos computacionais mais potentes, inclusive de uso doméstico (ISOLDI, 2008).

Conforme a Figura 3.2, para cada tipo de geometria e natureza física do problema, o domínio pode ser discretizado por elementos finitos distintos, tais como linhas, áreas ou de volume (MADENCI e GUVEN, 2006).

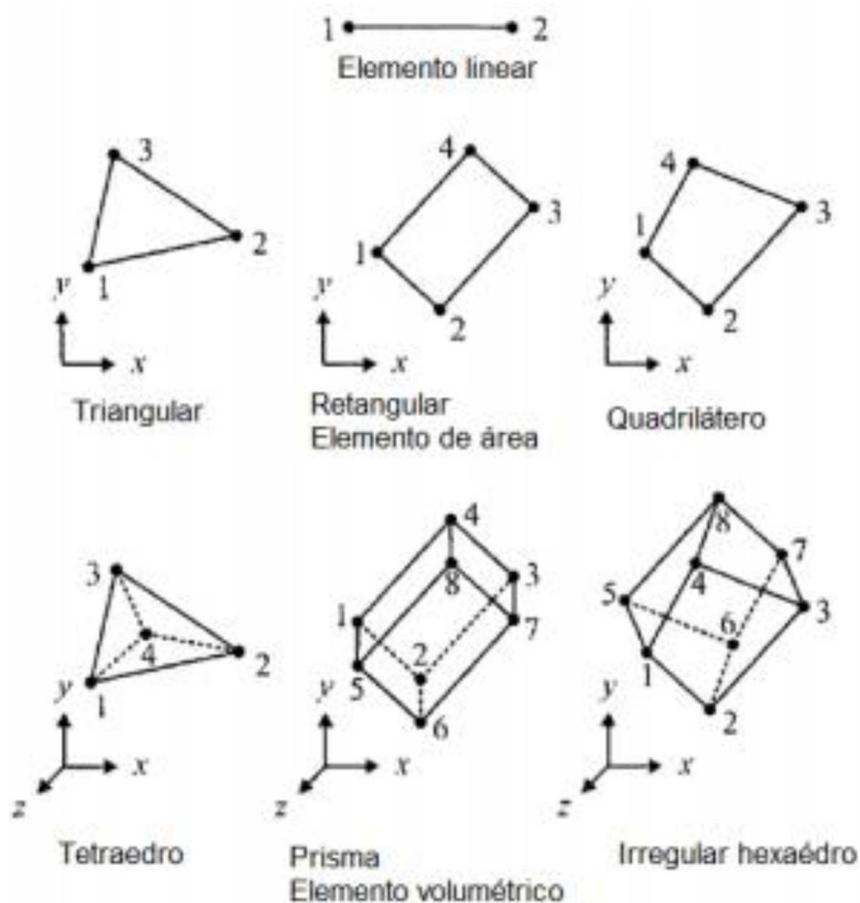


Figura 3.2 - Diferentes tipos de Geometria de elementos finitos (Fonte: Adaptado de MADENCI e GUVEN, 2006)

Cada elemento é identificado por um número e é determinado por uma sequência específica de números que é denominada conectividade. O número de elemento é definido pelas características de convergência dos elementos selecionados.

No chamado modelo de deslocamentos do MEF, arbitra-se o campo de deslocamentos nodais e, como consequência, a interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes é substituída pela interação de forças nodais entre elementos. Dessa maneira, o equilíbrio infinitesimal que é considerado no modelo matemático de meio contínuo é substituído pelo equilíbrio de cada elemento finito isoladamente, trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas de equilíbrio do elemento como um todo (ISOLDI, 2008).

Graus de liberdade são variáveis nodais atribuídas a um elemento. São nos nós, conforme pode ser observado na Fig. 3.3, que existem graus de liberdade e as ações do problema físico ocorrem. Conforme Madenci e Guven (2006), os graus de liberdade (DOF - *Degree of Freedom*) de um nó, são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento (SZILARD, 2004; RAO, 2004; MADENCI e GUVEN, 2006).

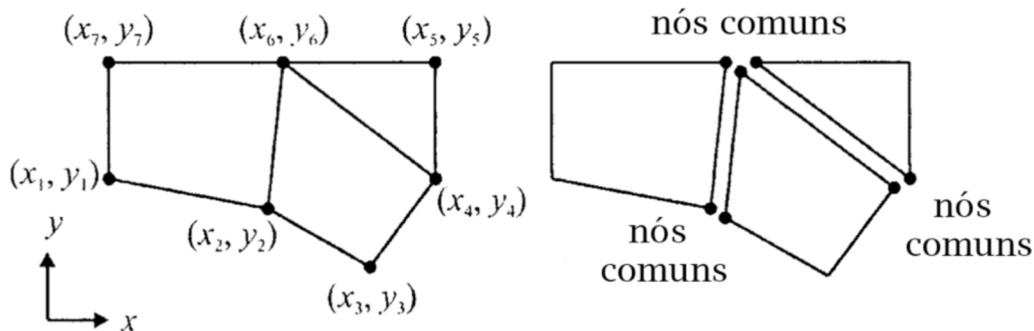


Figura 3.3 - Divisão do domínio em subdomínios (Fonte: MADANCI e GUVEN, 2006)

A determinação dos deslocamentos nodais se dá por um conjunto de equações algébricas de equilíbrio, formando um sistema de equações equivalente à malha utilizada. A solução do sistema pode ser obtida aplicando-se as condições de contorno externas do problema.

Madenci e Guven (2006) apresentam as principais etapas requeridas à utilização do MEF:

- Discretização do domínio em um número finito de subdomínios, ou elementos;
- Determinação de funções interpoladoras;
- Desenvolvimento de uma matriz de elementos para o subdomínio;
- Montagem das matrizes de elementos para cada subdomínio, a fim de se obter a matriz global para todo o domínio;
- Imposição das condições de contorno;
- Solução das equações;
- Cálculos adicionais, se necessário.

A partir das equações algébricas de equilíbrio escritas para cada elemento, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio da malha de elementos. Esse sistema global, após a introdução das condições de vinculação ao meio exterior, permite a determinação da solução em termos dos deslocamentos nodais (ASSAN, 2003; SORIANO, 2003).

Szilard, (2004), as funções conhecidas como de interpolação são determinadas em termos de valores de variáveis de campo em pontos específicos (nós). Em geral, os nós estão situados ao longo dos limites do elemento de forma que o conecta com elementos adjacentes (SZILARD, 2004).

A fundamentação do MEF, segundo Costa (2010), conta com três etapas distintas: sua concepção matemática, aplicações e análise física e sua utilização na engenharia. A formulação do MEF requer a existência de uma equação integral, de modo que seja possível substituir a integral sobre um domínio complexo (de volume V) por um somatório de integrais de subdomínios de geometria simples (de volume V_i).

$$\int_V f dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dV \quad (3.1)$$

onde:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (3.2)$$

Se for possível calcular todas as integrais dos subdomínios V_i , basta efetuar o somatório correspondente ao segundo membro da Eq. (3.1) para se obter a integral estendida a todo o domínio. Cada subdomínio (V_i) corresponde a um elemento finito de geometria simples (segmento de reta, triângulo, quadrilátero, tetraedro, paralelepípedo) (COSTA, 2010).

3.2. Simulação Numérica

No presente estudo, foi utilizado em todas as simulações numéricas o elemento finito do tipo SOLID95 (Fig. 3.4), do software ANSYS®. O elemento finito SOLID95 pode assumir formas alternativas sem tanta perda de precisão (MOAVENI, 1999). O SOLID95 tem deslocamentos compatíveis com as formas, tornado-se adequado para a modelagem de placas e cascas finas. o elemento é definido por 20 nós, tendo três graus de liberdade por nó, correspondendo aos deslocamentos nas três direções definidas de deslocamento. As deformações têm um comportamento linear dentro do elemento o que permite uma representação mais precisa do campo de deformações. O elemento SOLID95 possui capacidade de plasticidade, rigidez a tensão, grandes deflexões e deformações.

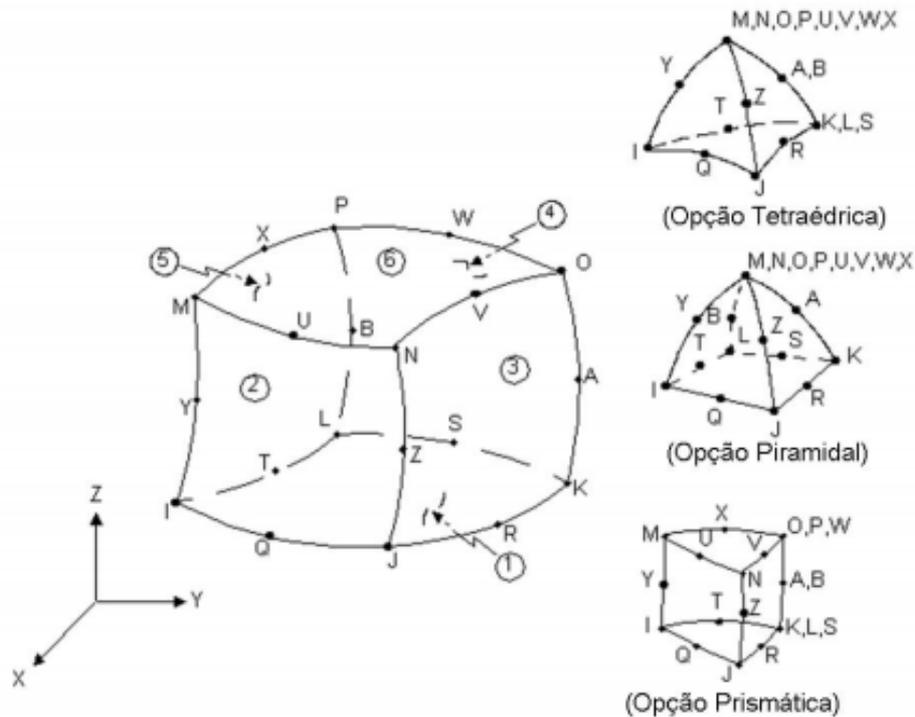


Figura 3.4 - Elemento SOLID95 (Fonte: Adaptado de ANSYS®, 2005)

A simulação numérica é realizada em três etapas principais segundo (VERSTEEG e MALALASEKERA,1995 ; TANNEHILL ET AL., 1997):

Pré-processamento: Nesta etapa é definida a geometria do domínio computacional, é escolhido o tipo do elemento finito, são determinadas as constantes (propriedades do material), o domínio é dividido em um número finito de subdomínios (geração da malha), características simplificadoras são aplicadas à geometria, as propriedades dos materiais são aplicadas ao modelo, as condições de contorno são determinadas e as cargas atuantes são inseridas;

Processamento: Nesta etapa efetivamente ocorre a simulação numérica, a solução das equações diferenciais (cálculos) e, portanto, terá um tempo de processamento demandado principalmente em função da malha definida durante o pré-processamento e do tipo de análise que está sendo feita. Assim, as atividades desta etapa são realizadas na seguinte ordem:

- Integração das equações de conservação em cada um dos subdomínios definidos;
- Discretização, onde as equações integrais resultantes do problema são convertidas em um sistema de equações algébricas;
- Solução das equações algébricas.

Pós-processamento: Nesta etapa, é feita a leitura e análise dos resultados obtidos na etapa de processamento.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresenta-se, inicialmente, o teste de independência de malha para definir o tamanho do elemento finito a ser usado na verificação da placa sem enrijecedores (placa de referência) e no estudo de caso, objeto de avaliação neste trabalho. Já a verificação do modelo, ocorre em duas etapas. Primeiramente, compara-se o resultado analítico com o numérico obtido na simulação da placa de referência. Posteriormente, é realizada a verificação do modelo computacional para a placa com enrijecedores com base em dois casos apresentados por Silva (2010), em sua dissertação de mestrado. Para tanto, são comparados os resultados numéricos. Por último, são apresentados e discutidos os resultados do estudo de caso desenvolvido neste trabalho.

Devido a vários fatores que são afetados pelas características que possuem cada modelo de um elemento finito, a sua escolha acarreta em uma necessidade de avaliação do tamanho do elemento de malha, de modo a se obter uma convergência de valores baseando-se nos tamanhos dos elementos analisados.

4.1. Teste de independência de malha

Para a determinação do refinamento adequado para a malha de elementos finitos a ser empregada nas simulações numérica, foi necessário a realização de um teste de convergência de malha. Para a determinação do refinamento da malha, adotou-se a primeira configuração da placa com enrijecedores P(5x5) e $a/10$, ou seja, a placa que possui cinco enrijecedores horizontais e cinco transversais bem como uma altura de enrijecedor que é um décimo da medida de qualquer um dos lados da placa, uma vez que a mesma é quadrada. Essa configuração foi escolhida por apresentar a menor espessura de enrijecedor (te) dentre o conjunto de cinco configurações com as devidas variações de medidas dos enrijecedores das placas avaliadas.

Dessa forma, foi possível fazer uma avaliação da malha mais refinada em benefício da estabilização dos resultados obtidos, quando avaliados os critérios de escolha quanto ao deslocamento transversal, a tensão de von Mises e o tempo de processamento. Assim, foi possível identificar a chamada malha independente, que é a malha que possui uma dimensão refinada o suficiente para não interferir, significativamente, na magnitude da solução numérica encontrada.

Conforme a Fig. 4.1, a placa quadrada com enrijecedores P(5x5), ou seja, com cinco enrijecedores longitudinais e cinco enrijecedores transversais, ou seja, $Nel = Net = 5$, possui as características do aço estrutural A-36, que segundo Jaward (1994), possui Módulo de Elasticidade $E = 210$ GPa, Tensão de escoamento $\sigma_e = 250$ MPa e Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A placa possui dimensões de comprimento $a = 1414$ mm, largura $b = 1414$ mm, ou seja, $a = b = 1414$ mm e espessura $e = 10$ mm. Já os enrijecedores possuem altura $he = 141,4$ mm e espessura $te = 10$ mm. O

enrijecedores estão igualmente espaçados tanto longitudinalmente (Set) como transversalmente (Set). Dessa forma $Set = Set = 235,6\text{mm}$.

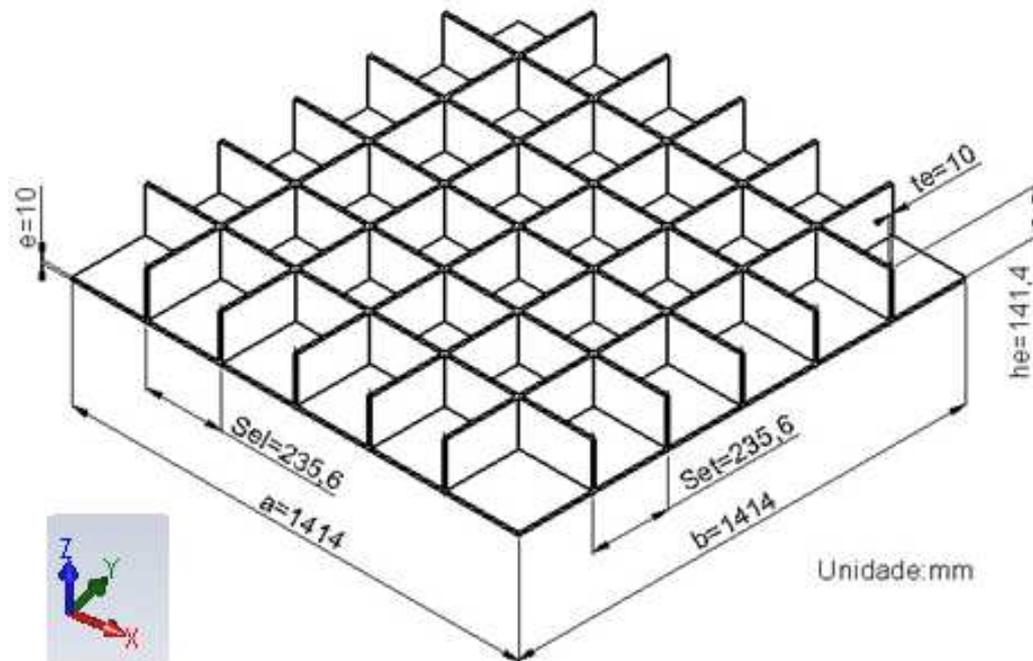


Figura 4.1 – Desenho da placa de P(5x5) com configuração de enrijecedor $a/10$

(Fonte: SOLID WORKS®, 2016)

A Figura 4.2, traz a condições de contorno estabelecidas para o modelo. Para a análise da placa, considerou-se uma carga distribuída $q = 10\text{ kPa}$, aplicada transversalmente em toda a superfície vermelha da placa e na direção negativa de Z .

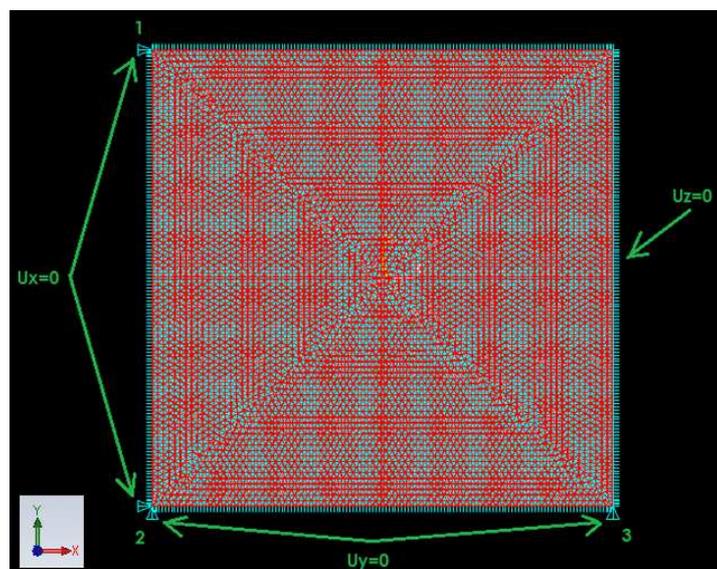


Figura 4.2 - Condições de contorno estabelecidas para o modelo (Fonte: ANSYS®, 2012)

Já a Fig. 4.3, representa a placa discretizada com malhas de aresta igual a $l = 20\text{mm}$, regulares e geradas com elementos finitos tridimensionais quadráticos. Fez-se o refinamento das malhas variando o tamanho dos elementos finitos, considerando as seguintes dimensões de aresta $l = 10; 20; 30; 40$ e 50 mm .

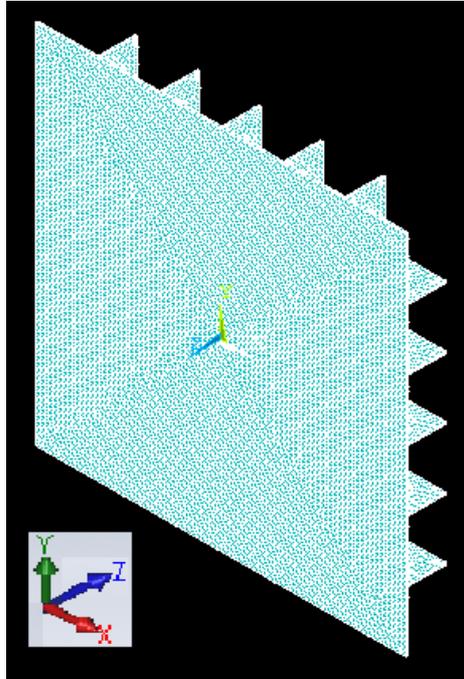


Figura 4.3 - Esquema prático da malha com elementos finitos para a placa de P(5x5) com elementos finitos de $l = 20\text{ mm}$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

A tensão de von Mises e a deflexão da placa P(5x5) - $a/10$ foi determinada para cada uma das malhas consideradas. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Tab. 4.1. Já nas Figs. 4.4, 4.5 e 4.6, possível avaliar a convergência causada pelo refinamento do tamanho dos elementos finitos.

Tabela 4.1 - Tamanho do Elemento de Malha

Tamanho do Elemento (m)	Número de Elementos	σ_M (Pa)	w (m)
0,010	302799	$6,96 \times 10^6$	$4,72 \times 10^{-5}$
0,020	82417	$6,45 \times 10^6$	$4,71 \times 10^{-5}$
0,030	36532	$6,00 \times 10^6$	$4,69 \times 10^{-5}$
0,040	22023	$5,98 \times 10^6$	$4,68 \times 10^{-5}$
0,050	15630	$5,86 \times 10^6$	$4,68 \times 10^{-5}$

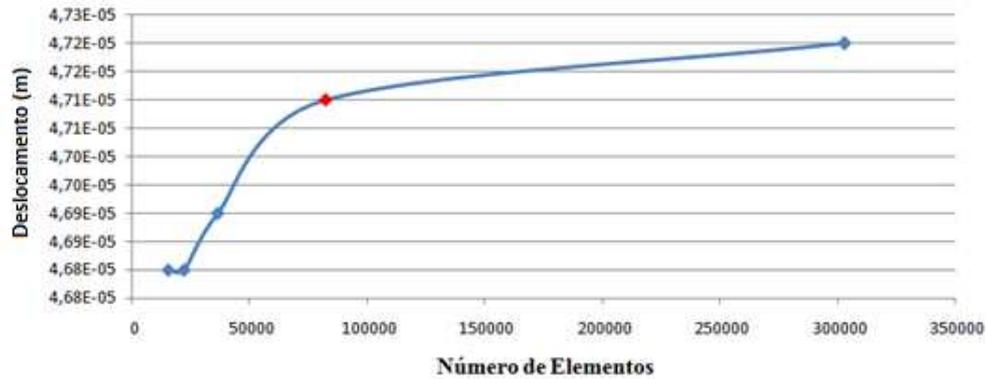


Figura 4.4 - Teste de Convergência - Número de Elementos x Deslocamento

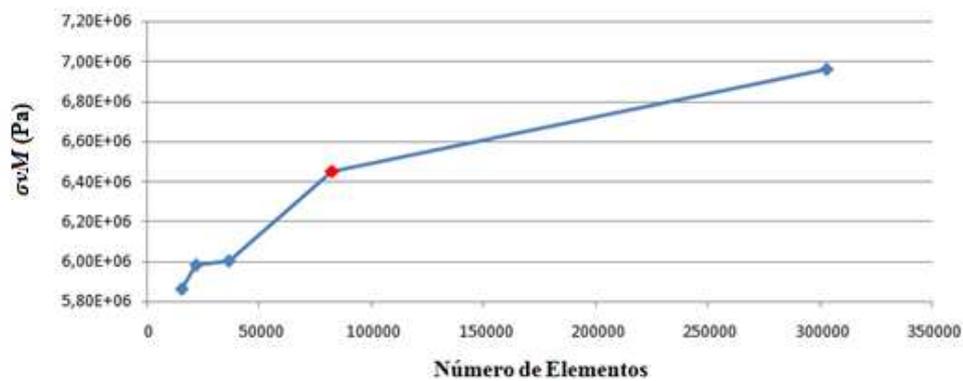


Figura 4.5 - Teste de Convergência - Numero de Elementos x Tensão de von Mises

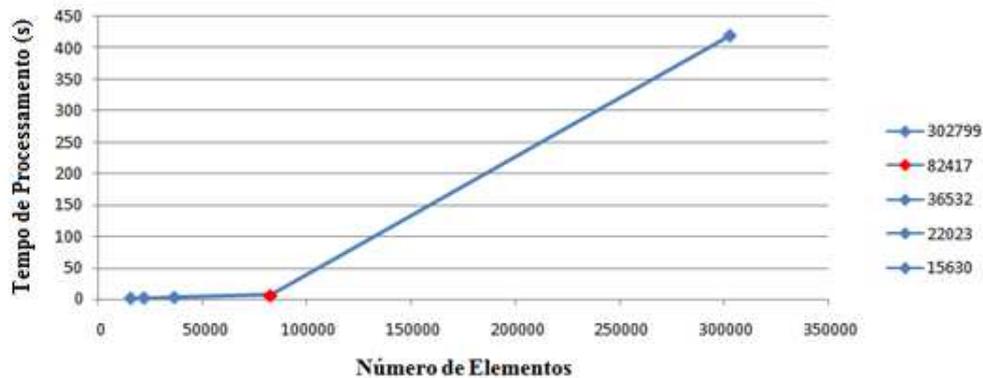


Figura 4.6 - Teste de Convergência - Número de Elementos x Tempo de Processamento

Diante do observado nos gráficos das Figs. 4.4, 4.5 e 4.6, é possível verificar que a malha com elementos de 20mm, possui uma tendência de estabilização em relação à malha gerada com elementos de 10mm. A malha com elementos de 10 mm, obteve um tempo de processamento de aproximadamente 7 horas enquanto que a malha de 20 mm, 6 minutos. De posse desses dados, adotou-se o elemento finito de 20 mm.

4.2. Verificação do Modelo Computacional

Testes de validação e verificação, segundo Azar (2012), são inevitáveis em qualquer processo de modelagem computacional. A sua realização é necessária para que se tenha confiança de que o modelo empregado está adequado à sua aplicação. Para tanto, o modelo deve ser uma boa representação do sistema em avaliação.

Para a verificação, utilizou-se a malha regular formada pelo modelo computacional tridimensional SOLID95 de 20mm de lado do ANSYS®. A verificação ocorreu de duas formas, porém, em ambas foram consideradas as mesmas condições de contorno definidas na Fig. 4.2. Inicialmente, simulou-se a placa simplesmente apoiada nos quatro lados e sem enrijecedores. Utilizou-se a malha definida no teste convergência e o resultado foi comparado com a solução analítica. Posteriormente, modelou-se a mesma geometria simulada por Silva (2010), em sua dissertação de mestrado, porém, empregando a malha definida no teste de convergência e o elemento finito SOLID95, permitindo assim a comparação e a qualificação dos resultados obtidos com este modelo.

4.2.1. Verificação da Placa sem Enrijecedores (placa de referência)

A Figura 4.7 representa a placa sem enrijecedores ou placa de referência com as devidas condições de contorno. A malha regular empregada foi a definida no teste de convergência. Foi aplicada uma carga distribuída $q = 10$ kPa, transversalmente em toda a superfície da placa na direção negativa de Z. O resultado obtido na simulação numérica foi comparado com a solução analítica.

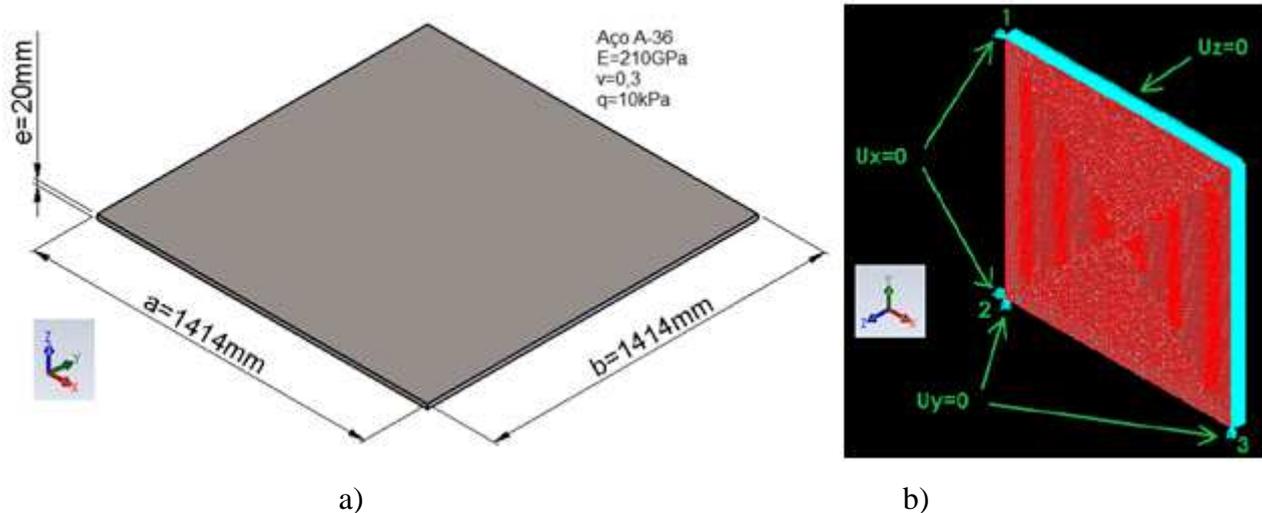


Figura 4.7 - Placa de referência (a) dimensões da placa, (b) condições de contorno

(Fonte: SOLID WORKS®, 2016; ANSYS®, 2012)

A solução numérica para determinação da deflexão máxima da placa, foi obtida discretizando o domínio computacional com uma malha regular formada pelo elemento cúbico SOLID95 de 20 mm de lado. O resultado numérico obtido na simulação, foi de $w = 1,066$ mm, conforme observa-se na Fig. 4.8.

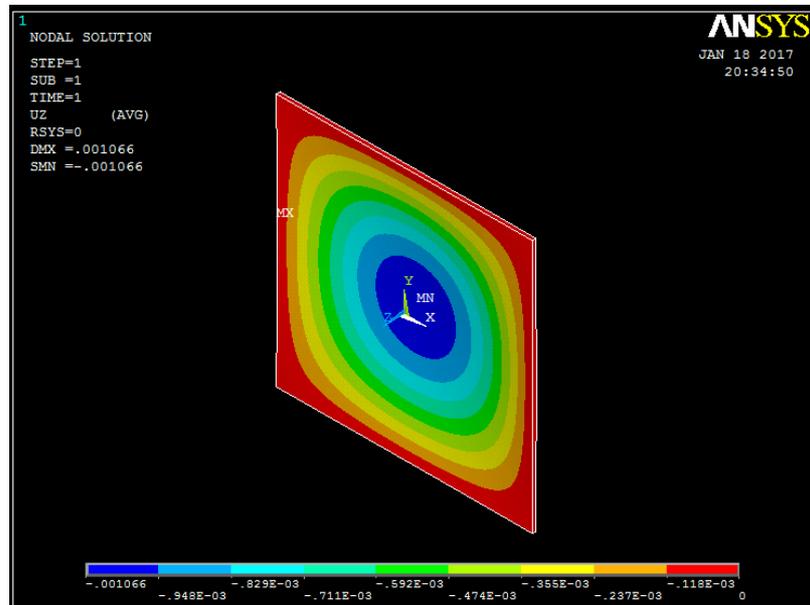


Figura 4.8 - Deflexão máxima da placa de referência (Fonte: ANSYS®, 2012)

A solução numérica para determinação da tensão de von Mises da placa foi obtida de forma análoga a determinação da deflexão máxima. O resultado numérico obtido na simulação, foi de $\sigma_M = 1,68 \times 10^7$ Pa, conforme observa-se na Fig. 4.9.

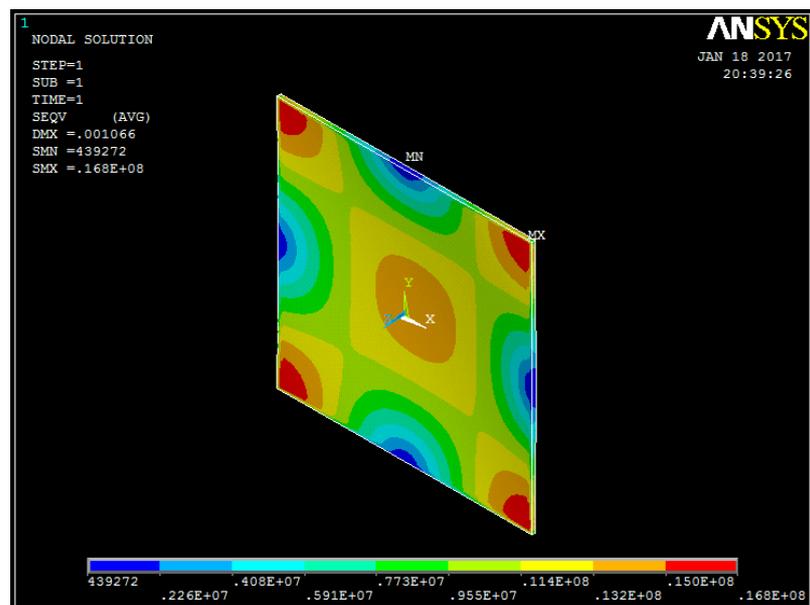


Figura 4.9 - Tensão de von Mises máxima da placa de referência (Fonte: ANSYS®, 2012)

Para a solução analítica da deflexão máxima, considerou-se como condição de contorno as indicadas na Fig.4.5. Assim, para uma placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados a deflexão máxima é dada por (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959):

$$w = 0,00406 \frac{qa^4}{D} \quad (4.1)$$

onde D é a rigidez flexural da placa definida pela Eq. (2.33).

Através da Eq. (4.1) foi encontrada uma deflexão máxima de $w = 1,055$ mm.

Comparando a solução numérica com a analítica, encontrou-se uma diferença de 1,04 %.

4.2.2. Verificação da Placa com 1 Enrijecedor

Para a verificação da placa com 1 enrijecedor em seu domínio, foi adotado o exemplo usado por Silva (2010) em sua dissertação de mestrado. O modelo consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada em todos os lados com um enrijecedor, conforme mostrado na Fig. 4.10.

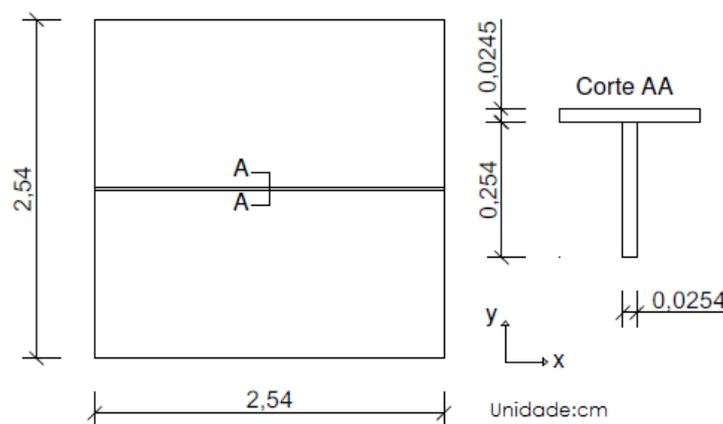


Figura 4.10 - Desenho da placa com enrijecedor no meio do vão (Fonte: Adaptado de SILVA, 2010)

O material da placa analisada sob flexão tem suas propriedades mecânicas definidas em Silva (2010), e são: módulo de elasticidade: $E = 11721,09$ kN/cm² e coeficiente de Poisson: $\nu = 0,3$. Para a análise da placa, considerou-se uma carga distribuída $q = 0,000689$ kN/cm², aplicada transversalmente em toda a superfície lisa da placa na direção positiva de Z .

A solução numérica da placa com 1 enrijecedor de Silva (2010), foi obtida discretizando o domínio computacional com uma malha regular de 10x10 elementos, formada pelo elemento SHELL63 para a casca e os elementos lineares com deslocamentos tridimensionais BEAM4 e BEAM44 para o enrijecedor. O resultado numérico obtido por Silva (2010) na simulação foi de $w = 0,00035$ cm, conforme observa-se na Fig. 4.11. Este valor de deslocamento foi encontrado, com o

auxílio do assistente do software ANSYS® (2012), que permite fazer a avaliação de deslocamentos em um ponto específico da placa, neste caso, localizado em seu centro.

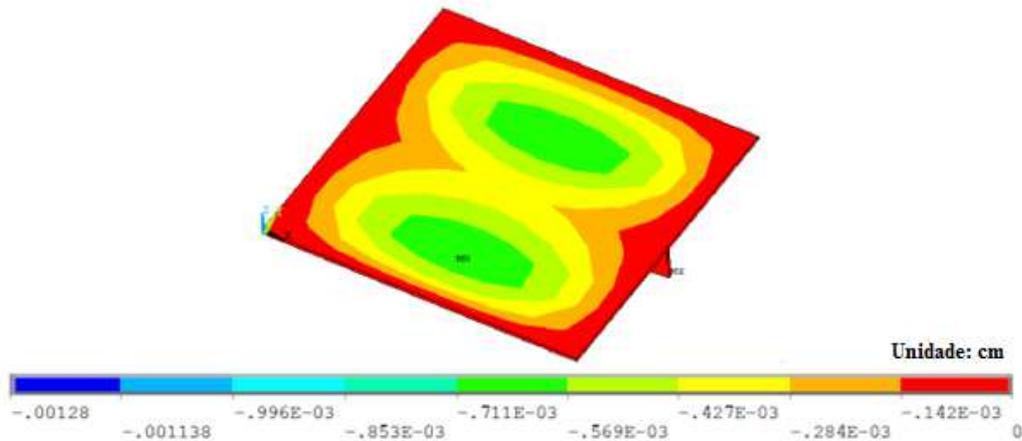


Figura 4.11 - Deflexão máxima da placa com 1 enrijecedor (Fonte: Adaptado de SILVA, 2010)

Já solução numérica da placa com 1 enrijecedor deste trabalho, foi obtida discretizando o domínio computacional com uma malha regular de 0,000245mm de lado formada pelo elemento cúbico SOLID95 em toda a placa. O resultado numérico obtido na simulação, foi de $w=0,000375$ cm, conforme observa-se na Fig. 4.12. Da mesma forma, este valor de deslocamento foi encontrado, com o auxílio do assistente do software ANSYS® (2012), que permite fazer a avaliação de deflexões em um ponto específico da placa, neste caso, localizado em seu centro.

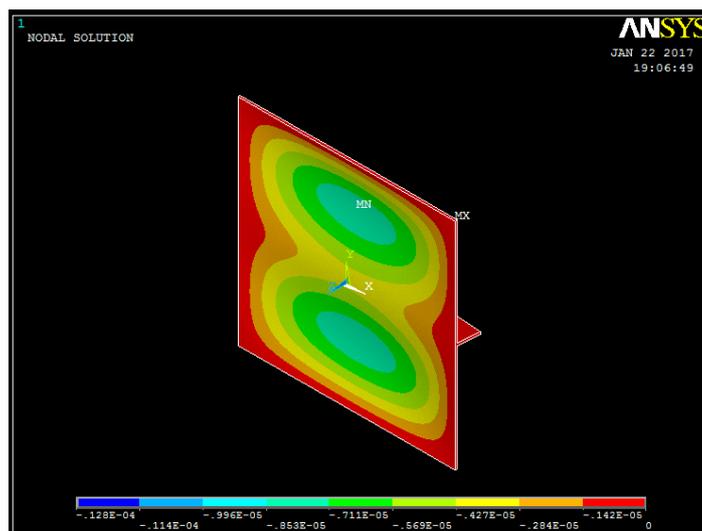


Figura 4.12 - Deflexão máxima da placa com 1 enrijecedor - verificação (Fonte: ANSYS®, 2012)

Comparando as soluções numéricas das Figs. 4.8 e 4.9, para a placa com 1 enrijecedor, encontra-se uma diferença de 7 %.

4.2.3. Verificação da Placa com 2 enrijecedores

Para a verificação da placa com 2 enrijecedores (cruzados) em seu domínio, também foi adotado o exemplo usado por Silva (2010). O modelo consiste em uma placa retangular simplesmente apoiada em todos os lados com dois enrijecedores cruzados, conforme mostrado na Fig. 4.13.

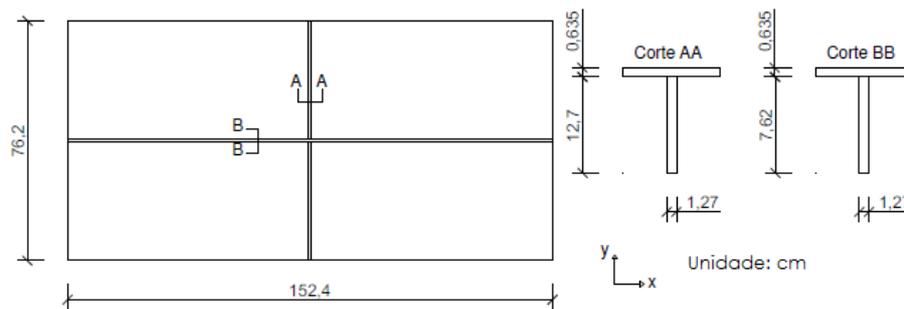


Figura 4.13 - Desenho da placa com 2 enrijecedores (Fonte: Adaptado de SILVA, 2010)

O material da placa analisada sob flexão tem suas propriedades mecânicas definidas de acordo com Silva (2010), e são: módulo de elasticidade: $E = 20.684,27 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson: $\nu = 0,3$. Para a análise da placa, considerou-se uma carga distribuída $q = 0,006895 \text{ kN/cm}^2$, aplicada transversalmente em toda a superfície lisa da placa na direção positiva de Z.

A solução numérica da placa com 2 enrijecedores (cruzados) de Silva (2010), foi obtida discretizando o domínio computacional com uma malha regular de 40×20 elementos, formada pelo elemento SHELL63 para a casca e os elementos lineares com deslocamentos tridimensionais BEAM4 e BEAM44 para o enrijecedor. O resultado numérico obtido na simulação, foi de $w = 0,02183 \text{ cm}$, conforme observa-se na Fig. 4.14. Este valor de deslocamento foi encontrado, com o auxílio do assistente do software ANSYS® (2012), que permite fazer a verificação de deformações em um ponto específico da placa, neste caso, localizado em seu centro.

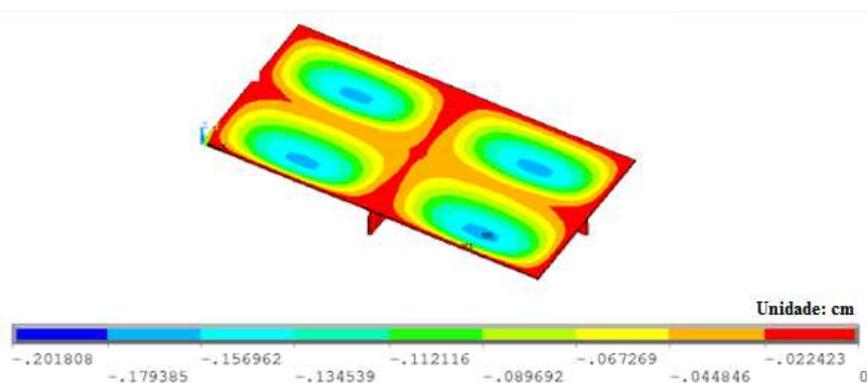


Figura 4.14 - Deflexão máxima da placa com 2 enrijecedores (Fonte: Adaptado de SILVA, 2010)

Já solução numérica da placa com 2 enrijecedores (cruzados) deste trabalho, foi obtida discretizando o domínio computacional com uma malha regular de 10 mm formada pelo elemento cúbico SOLID95 em toda a placa. O resultado numérico obtido na simulação foi de $w = 0,0271$ cm, conforme observa-se na Fig. 4.15. Da mesma forma, este valor de deslocamento foi encontrado, com o auxílio do assistente do software ANSYS® (2012), que permite fazer a verificação de deformações em um ponto específico da placa, neste caso, localizado em seu centro

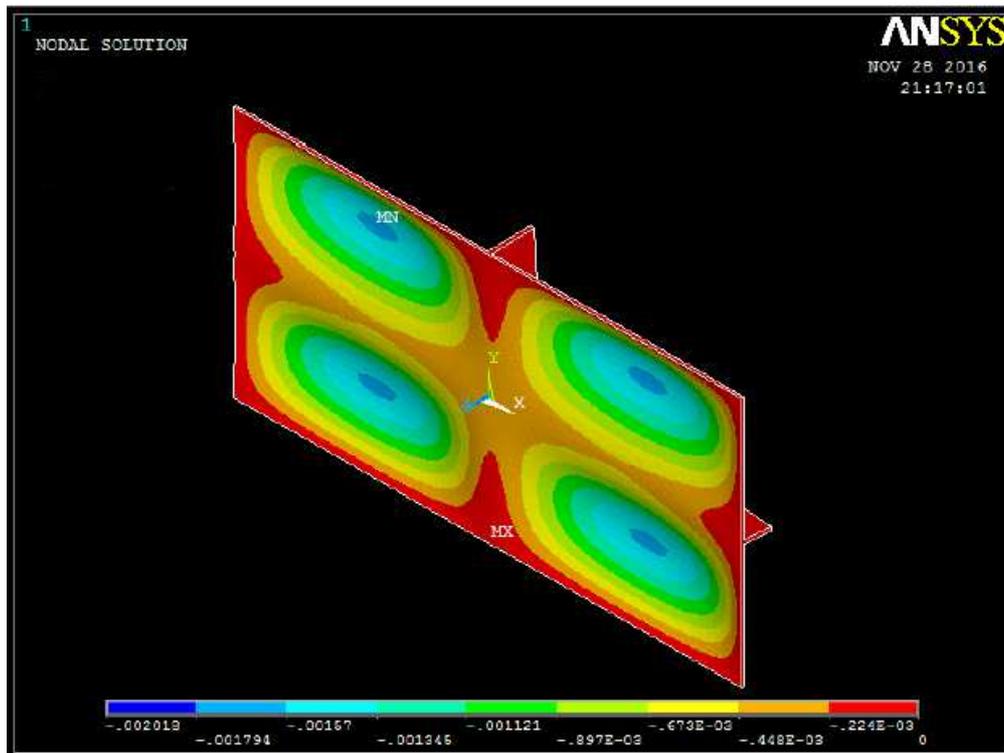


Figura 4.15 - Deflexão máxima da placa com 2 enrijecedores - verificação (Fonte: ANSYS®, 2012)

Comparando as soluções numéricas para a placa com enrijecedores cruzados, encontra-se uma diferença de 24 %.

Considerando que a diferença encontrada entre a solução numérica e a analítica da placa sem enrijecedores foi de 1,04 %, para a comparação numérica para 1 enrijecedor foi de 7 % e para a comparação numérica para 2 enrijecedores cruzados foi de 24 %, admiti-se o modelo computacional SOLID95, como verificado para a flexão de placas com e sem enrijecedores, uma vez que o modelo SOLID95 apresenta, teoricamente, uma precisão maior do que os modelos utilizados SHELL63, BEAM4 e BEAM44 por Silva (2010).

4.3. Determinação dos enrijecedores

As simulações numéricas, objetos deste estudo, foram realizadas com placas com diferentes arranjos de enrijecedores. Para as simulações, foi mantido constante o volume total de material da placa com enrijecedores em relação a placa de referência (sem enrijecedores).

Para tanto, o parâmetro de fração de volume dos enrijecedores (ϕ), que representa a relação entre o volume de enrijecedores (V_e) e o volume total do componente estrutural placa/enrijecedores (V). A fração de volume dos enrijecedores utilizada nas simulações foi de $\phi = 0,50$, ou seja, metade do volume inicial ($V = 0,04 \text{ m}^3$) da placa de referência (sem enrijecedores) foi transformada em enrijecedores ($V_e = 0,02 \text{ m}^3$), conforme Fig. 4.16, de modo a permitir a avaliação do quanto com a mesma quantidade de material e uma configuração geométrica diferente, é possível conduzir a um desempenho mecânico superior no que refere-se as funções objetivos que são minimizar a deflexão máxima e a tensão máxima de von Mises.

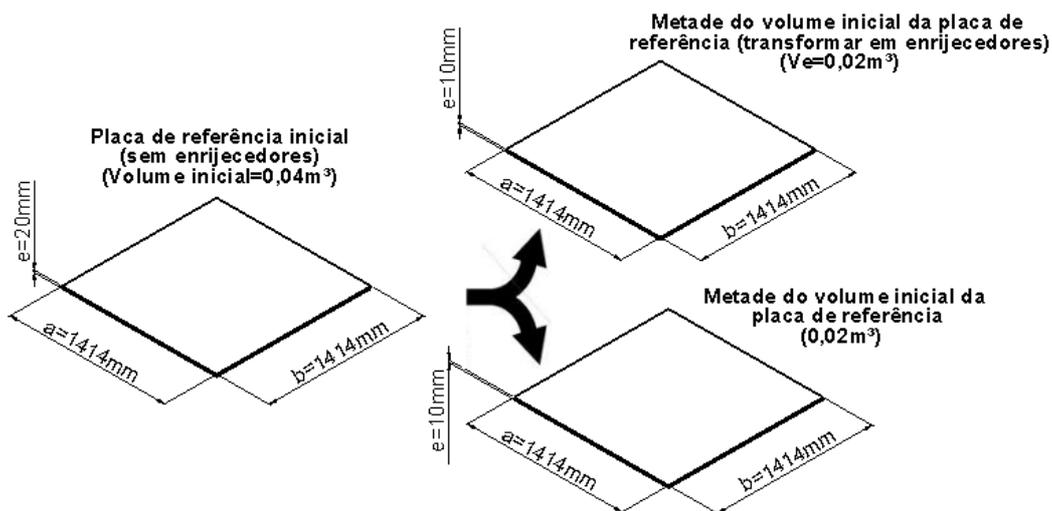


Figura 4.16 - Medidas da placa de referência (Fonte: SOLID WORKS®, 2016)

Assim, foram preservadas as medidas de comprimento e largura da placa de referência. Logo, o volume de aço usado na placa sem enrijecedores, foi o mesmo utilizado nas placas com enrijecedores.

Também foram avaliadas diferentes relações de enrijecedores com o objetivo de entender a influência da relação he/te , que relaciona a altura do enrijecedor (he) e sua espessura (te), no comportamento mecânico sob flexão das diferentes configurações geométricas propostas. Para a variação de he/te , utilizou-se o critério estudado por Rebelo (2003), em que para o aço, ocorrem as menores deflexões para a viga, quando os valores de he , encontram-se entre $1/15$ e $1/25$ da distância entre os pontos de apoio de uma viga. Visando ampliar a avaliação, da relação he/te , adotou-se as seguintes relações de altura de enrijecedor: $he = a/10$, $he = a/15$, $he = a/20$, $he = a/25$ e $he = a/30$.

As variáveis Nel (número de enrijecedores longitudinais), Net (número de enrijecedores transversais), Sel (distância entre enrijecedores longitudinais) e Set (distância entre enrijecedores transversais), foram definidas para este trabalho com base em uma distribuição pariforme, ou seja, $Nel = Net$ e $Sel = Set$. Para tanto, avaliou-se 5 conjuntos de configurações de enrijecedores, partindo de $Nel = Net = 1$ até a $Nel = Net = 5$.

A Figura 4.17 representa esquematicamente todos os parâmetros da placa enrijecida P(2,2), onde $Nel = 2$ e $Net = 2$. Analogamente estende-se para as configurações P(1x1), P(3x3), P(4x4) e P(5x5).

Já o espaçamento entre enrijecedores nas direções longitudinal (Sel) e transversal (Set) são definidos respectivamente para todas configurações por:

$$Sel = \frac{a}{Nel + 1} \quad (4.2)$$

$$Set = \frac{b}{Net + 1} \quad (4.3)$$

Por sua vez, a espessura do enrijecedor (te), tanto nas direções longitudinal quanto transversal, respectivamente, para a configuração P(1x1) com $he = a/10$, é definida por:

$$t_{e\left(\frac{a}{10}\right)} = \frac{Ve}{he\left(\frac{a}{10}\right) a (Nel + 1)} \quad (4.4)$$

De forma análoga, define-se a espessura do enrijecedor (te), tanto na direção longitudinal quanto transversal, respectivamente, para as demais configurações e subconfigurações de P(1x1), P(2x2), P(3x3), P(4x4) e P(5x5).

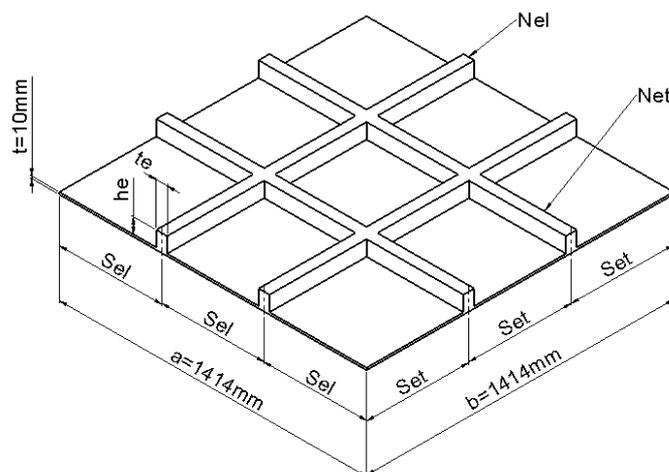


Figura 4.17 – Representação esquemática da placa P(2,2) (Fonte: SOLID WORKS®, 2016)

4.3.1. Dimensões dos enrijecedores

Com base nas configurações de placas P(1x1), P(2x2), P(3x3), P(4x4) e P(5x5) abordadas neste estudo, as variáveis como fração de volume, variação de quantidade e altura dos enrijecedores, são fundamentais para a determinação da espessura dos mesmos, uma vez que o volume destinado à sua constituição é constante. As Tabelas 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, trazem todas as informações dimensionais sobre a seção transversal dos enrijecedores. Dessa forma, é possível simular as placas com seus respectivos enrijecedores, permitindo a análise da influência da altura (he), espessura (te) e da relação (he/te) no comportamento mecânicos de placas finas reforçadas com enrijecedores.

Tabela 4.2 - Dimensões dos enrijecedores da placa P(1x1)

he	he (mm)	te (mm)	he/te
$a/10$	141,4	50	2,83
$a/15$	94,27	75	1,26
$a/20$	70,7	100	0,71
$a/25$	56,56	125	0,45
$a/30$	47,13	150	0,31

Tabela 4.3 - Dimensões dos enrijecedores da placa P(2x2)

he	he (mm)	te (mm)	he/te
$a/10$	141,4	25	5,66
$a/15$	94,27	37,5	2,51
$a/20$	70,7	50	1,41
$a/25$	56,56	62,5	0,90
$a/30$	47,13	75	0,63

Tabela 4.4 - Dimensões dos enrijecedores da placa P(3x3)

he	he (mm)	te (mm)	he/te
$a/10$	141,4	16,67	8,48
$a/15$	94,27	25	3,77
$a/20$	70,7	33,33	2,12
$a/25$	56,56	41,67	1,36
$a/30$	47,13	50	0,94

Tabela 4.5 - Dimensões dos enrijecedores da placa P(4x4)

he	he (mm)	te (mm)	he/te
$a/10$	141,4	12,50	11,31
$a/15$	94,27	18,75	5,03
$a/20$	70,7	25	2,83
$a/25$	56,56	31,25	1,81
$a/30$	47,13	37,5	1,26

Tabela 4.6 - Dimensões dos enrijecedores da placa P(5x5)

he	he (mm)	te (mm)	he/te
$a/10$	141,4	10	14,14
$a/15$	94,27	15	6,28
$a/20$	70,7	20	3,54
$a/25$	56,56	25	2,26
$a/30$	47,13	30	1,571

4.4. Estudo de caso

No presente estudo, as simulações numéricas foram realizadas em placas com diferentes arranjos de enrijecedores, distribuídos uniformemente, conforme Fig. 4.17. Foi mantido constante o volume total de material em relação a placa sem enrijecedores tomada como referência. A fração de volume dos enrijecedores foi de $\phi = 0,50$, ou seja, conforme Fig. 4.16, metade do volume inicial ($V = 0,04\text{m}^3$) da placa de referência (sem enrijecedores) foi transformada em enrijecedores ($V_e = 0,02\text{m}^3$), com o intuito de avaliar o quanto é possível conduzir a um desempenho mecânico superior no que tange a minimização da deflexão e da tensão de von Mises.

Diferentes relações de enrijecedores foram avaliadas buscando entender ainda a influência da relação he/te , que relaciona a altura do enrijecedor (he) e sua espessura (te), no comportamento mecânico sob flexão das diferentes configurações geométricas propostas. Logo, este trabalho tem a a função multiobjetivo de minimizar a deflexão máxima e a tensão máxima de von Mises da placa.

As variáveis Nel (número de enrijecedores longitudinais), Net (número de enrijecedores transversais), Sel (distância entre enrijecedores longitudinais) e Set (distância entre enrijecedores transversais), foram definidas para este trabalho com base em uma distribuição pariforme, ou seja, $Nel = Net$ e $Sel = Set$, haja vista a condição de que a placa em sua largura a e comprimento b ter a mesma medida, ou seja, $a = b = 1,414$ m.

Para a variação de he/te , esta foi definida segundo o critério estudado por Rebelo (2003) em que para o aço, ocorrem as menores deflexões para a viga, quando os valores de he encontram-se entre $1/15$ e $1/25$ da distância entre os pontos de apoio desta viga. Visando ampliar a avaliação da relação he/te , adotou-se as seguintes relações de altura de enrijecedor: $he = a/10$, $he = a/15$, $he = a/20$, $he = a/25$ e $he = a/30$.

Foram estudadas numericamente cinco configurações para os enrijecedores com as suas devidas relações sugeridas. As identificações das configurações foram feitas de acordo com o seguinte formato: Placa ($Nel \times Net$). Portanto, foram estudadas as placas: P(1×1), P(2×2), P(3×3), P(4×4) e P(5×5), sendo a variação da relação he/te , conforme indicado para a combinação P(4x4) na Fig. 4.1. Já as condições de contorno, são as mesmas indicadas na Fig. 4.2. Para os demais casos, ocorre de forma análoga.

4.5. Resultados e discussões

A análise dos resultados foi feita com base na deflexão máxima e na tensão de von Mises máxima ocorrida na placa de referência (sem enrijecedores), onde compara-se os resultados obtidos quando submete-se esta placa de aço estrutural A-36, que segundo Jaward (1994), possui módulo de elasticidade $E=210$ GPa, tensão de escoamento $\sigma_e = 250$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, há uma carga uniformemente distribuída de $q = 10$ kPa com dimensões e condições de contorno conforme indicadas na Fig. 4.7.

A solução numérica da deflexão máxima da placa de referência, obtida na simulação, foi de $w = 1,066$ mm, conforme observa-se na Fig. 4.8. Já a solução numérica para a tensão de von Mises, foi de $\sigma_v M = 1,68 \times 10^7$ Pa, conforme observa-se na Fig. 4.9. Com base nos resultados obtidos da placa de referência, os mesmos servirão de comparativos diante dos resultados obtidos nas simulações das placas com enrijecedores, conforme Tabs. 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 para a avaliação do comportamento mecânico no que tange as deflexões máximas e tensões de von Mises máxima das placas diante dos respectivos arranjos geométricos de enrijecedores.

Já as imagens extraídas do ANSYS® (2012), referente as simulações de cada arranjo geométrico de placa com suas devidas variações de enrijecedores, P(1x1), P(2x2), P(3x3) e P(5x5), tiveram suas imagens alocadas, devido ao comportamento similar, respectivamente nos Apêndices: A (Fig. A1 a A10), B (Fig. B1 a B10), C (Fig. C1 a C10) e D (Fig. D1 a D10). A configuração P(4x4) foi a escolhida para ter seus resultados numéricos das simulações comentados.

4.5.1. Resultados numéricos das simulações

Os resultados numéricos obtidos para todas as simulações de placas com enrijecedores, objeto deste estudo, para a deflexão máxima e a tensão de von Mises máxima, podem ser observadas nas Tabs. 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11

Tabela 4.7 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(1x1)

<i>he</i>	Relação <i>he/te</i>	<i>w</i> (m)	$\sigma_v M$ (Pa)
<i>a/10</i>	2,83	$2,70 \times 10^{-4}$	$1,64 \times 10^7$
<i>a/15</i>	1,26	$2,67 \times 10^{-4}$	$1,46 \times 10^7$
<i>a/20</i>	0,71	$2,69 \times 10^{-4}$	$1,46 \times 10^7$
<i>a/25</i>	0,45	$2,77 \times 10^{-4}$	$1,90 \times 10^7$
<i>a/30</i>	0,31	$2,93 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^7$

Tabela 4.8 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(2x2)

<i>he</i>	Relação <i>he/te</i>	<i>w</i> (m)	$\sigma_v M$ (Pa)
<i>a/10</i>	5,66	$6,77 \times 10^{-5}$	$7,12 \times 10^6$
<i>a/15</i>	2,51	$1,05 \times 10^{-4}$	$9,37 \times 10^6$
<i>a/20</i>	1,41	$1,50 \times 10^{-4}$	$1,41 \times 10^7$
<i>a/25</i>	0,90	$1,99 \times 10^{-4}$	$1,90 \times 10^7$
<i>a/30</i>	0,63	$2,61 \times 10^{-4}$	$2,77 \times 10^7$

Tabela 4.9 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(3x3)

<i>he</i>	Relação <i>he/te</i>	<i>w</i> (m)	$\sigma_v M$ (Pa)
<i>a/10</i>	8,48	$4,70 \times 10^{-5}$	$5,66 \times 10^6$
<i>a/15</i>	3,77	$8,78 \times 10^{-5}$	$9,92 \times 10^6$
<i>a/20</i>	2,12	$1,40 \times 10^{-4}$	$1,34 \times 10^7$
<i>a/25</i>	1,36	$1,93 \times 10^{-4}$	$1,73 \times 10^7$
<i>a/30</i>	0,94	$2,59 \times 10^{-4}$	$2,16 \times 10^7$

Tabela 4.10 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(4x4)

he	Relação he/te	w (m)	σ_M (Pa)
$a/10$	11,31	$4,80 \times 10^{-5}$	$5,38 \times 10^6$
$a/15$	5,03	$9,45 \times 10^{-5}$	$8,85 \times 10^6$
$a/20$	2,83	$1,49 \times 10^{-4}$	$1,26 \times 10^7$
$a/25$	1,81	$2,10 \times 10^{-4}$	$1,61 \times 10^7$
$a/30$	1,26	$2,70 \times 10^{-4}$	$2,00 \times 10^7$

Tabela 4.11 - Deflexão Máxima e Tensão de von Mises da simulação da placa P(5x5)

he	Relação he/te	w (m)	σ_M (Pa)
$a/10$	14,14	$4,71 \times 10^{-5}$	$6,45 \times 10^6$
$a/15$	6,28	$9,50 \times 10^{-5}$	$9,23 \times 10^6$
$a/20$	3,54	$1,51 \times 10^{-4}$	$1,22 \times 10^7$
$a/25$	2,26	$2,13 \times 10^{-4}$	$1,64 \times 10^7$
$a/30$	1,571	$2,85 \times 10^{-4}$	$1,95 \times 10^7$

4.5.2. Análise dos resultados numéricos das simulações

Com base na análise das Tabs. 4.7 a 4.11, nas Figs. 4.18 a 4.27 e Figs. A1 a A10, B1 a B10, C1 a C10 e D1 a D10 do Apêndice A, é possível afirmar que a presença de enrijecedores melhorou em todos os casos o comportamento mecânico das placas nas condições em que foram analisadas quando comparadas com a placa de referência (sem enrijecedores). Pode-se afirmar que em todos os casos, a deflexão máxima e a tensão de von Mises máxima, foi reduzida quando comparadas à placa de referência (sem enrijecedores).

Duas condições analisadas da configuração de placa P(1x1), onde $he/te = 1,26$ e $he/te = 0,71$, corroboram com Rebelo (2003), que afirma que as menores deflexões para o enrijecedor (he), devem ocorrer quando os valores de sua altura, situam-se entre 1/15 e 1/25 da distância entre os pontos de apoio.

É possível observar uma certa disparidade na configuração de placa P(1x1), onde a relação $he/te = 1,26$ e $he/te = 0,71$, pois ao contrário do que ocorreu em todas as demais configurações de placas analisadas, sempre, com a redução da relação he/te , ocorreu um aumento da deflexão máxima e da tensão de von Mises máxima. Neste caso, ocorreu uma certa estabilidade dos valores para esta configuração, o que corrobora com Rebelo (2003).

Para todas as demais configurações de placas analisadas, ocorreu exatamente o esperado, ou seja, à medida que a relação he/te aumenta, diminui a deflexão máxima e a tensão de von Mises máxima, ao passo que o inverso é verdadeiro.

Já o critério estabelecido por Rebelo (2003), que afirma que os menores valores de deflexão ocorrem, quando os valores de altura de uma viga situa-se entre $1/15$ e $1/25$ da distância entre seus pontos de apoio, foi possível observar que sua afirmativa também pôde ser verificada na configuração de placa P(1x1) onde $he/te = 1,26$ e $he/te = 0,71$. Já para as demais configurações de placa analisada, verificou-se que à medida que a he/te aumenta, diminuem a deflexão máxima e a tensão de von Mises máxima e vice-versa.

4.5.3. Análise das deflexões máxima e tensão de von Mises máxima da placa P (4x4)

Nas Figuras 4.18 e 4.19 e Tab. 4.10, é possível verificar que a deflexão máxima da placa com enrijecedores P(4x4), $he = a/10$ e $he/te = 11,31$, quando comparada com a deflexão máxima da placa de referência (sem enrijecedores), é em torno de 22 vezes menor. Já a tensão de von Mises máxima, é em torno de 3,1 vezes menor, o que evidencia a vantagem em utilizar enrijecedores.

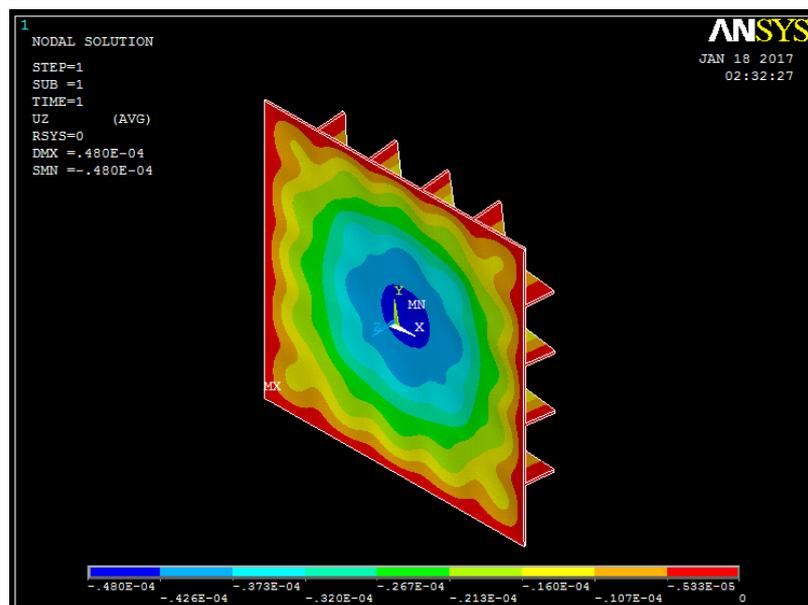


Figura 4.18 - Deflexão máxima P(4x4) - $he = a/10$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

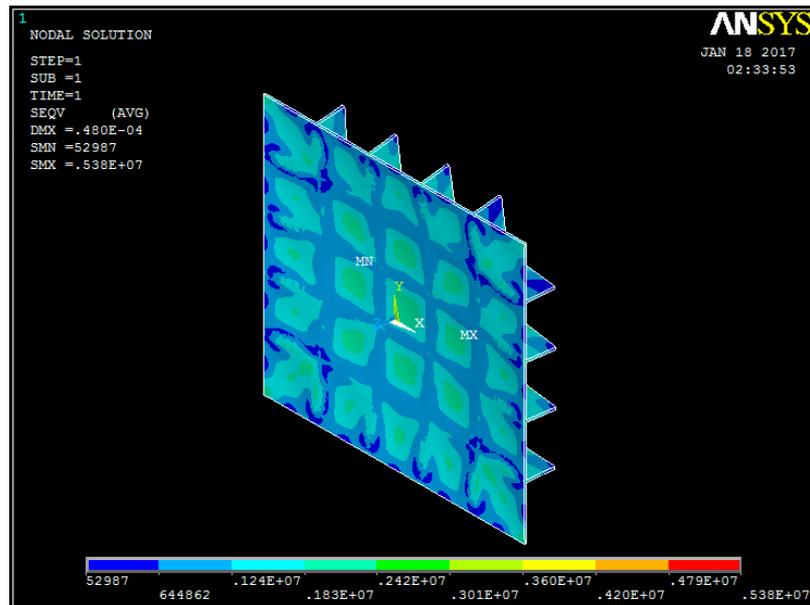


Figura 4.19 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he = a/10$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

Nas Figuras 4.20 e 4.21 e Tab. 4.10, é possível verificar que a deflexão máxima da placa com enrijecedores P(4x4), $he = a/15$ e $he/te = 5,03$, quando comparada com a deflexão máxima da placa de referência (sem enrijecedores), é em torno de 11,2 vezes menor. Já a tensão de von Mises máxima, é em torno de 1,89 vezes menor. Percebe-se que ao reduzir a relação he/te em torno de 120% comparado a $he = a/10$, aumentou-se em 96% a deflexão máxima enquanto que a tensão de von Mises aumentou 65%. Esta condição induz que seja vantajoso utilizar enrijecedores com uma maior relação he/te para menores deflexões e tensões.

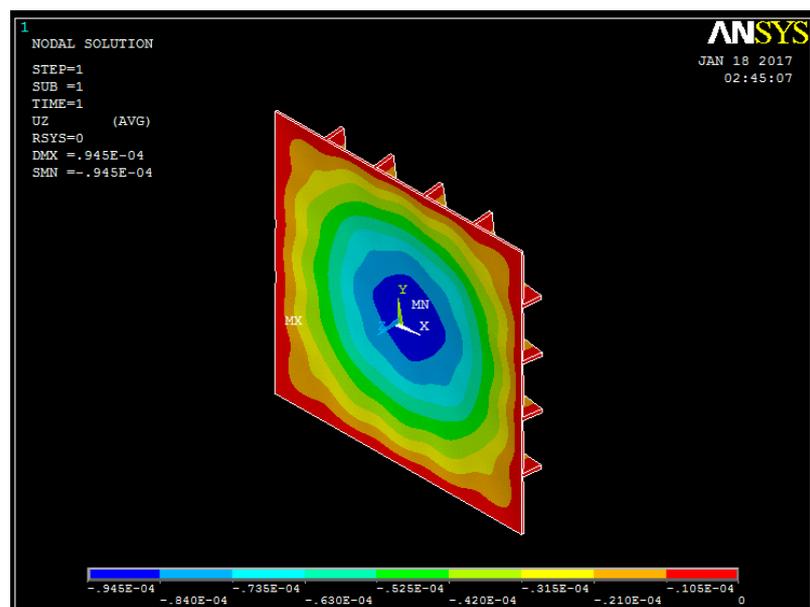


Figura 4.20 - Deflexão máxima P(4x4) - $he = a/15$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

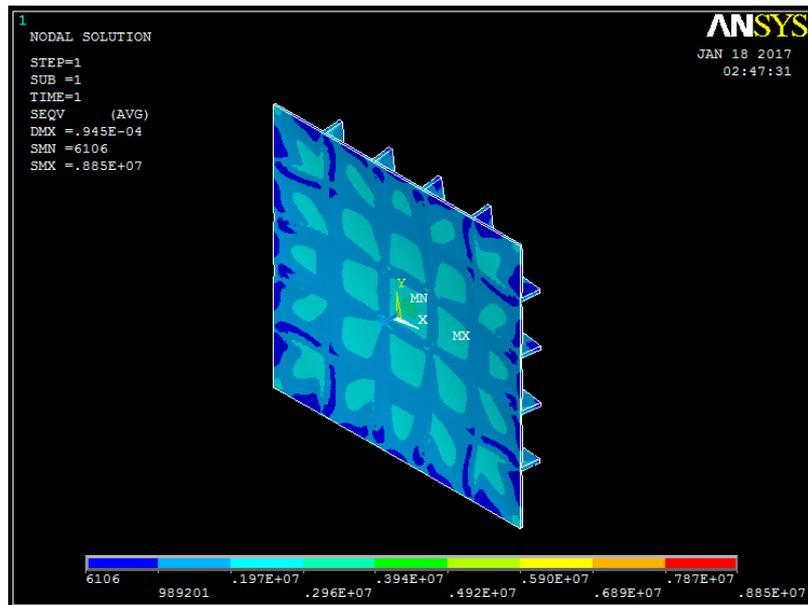


Figura 4.21 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he = a/15$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

Nas Figuras 4.22 e 4.23 e Tab. 4.10, é possível notar que a deflexão máxima da placa com enrijecedores P(4x4), $he = a/20$ e $he/te = 2,83$, quando comparada com a deflexão máxima da placa de referência (sem enrijecedores), é em torno de 7,15 vezes menor. Já a tensão de von Mises máxima, na mesma condição, é em torno de 1,39 vezes menor. Percebe-se novamente que ao reduzir a relação he/te em 77% comparado a $he = a/15$, aumentou-se a deflexão máxima em 57% enquanto que a tensão de von Mises aumentou 42%. Esta condição induz que seja vantajoso utilizar enrijecedores com uma maior relação he/te para menores deflexões.

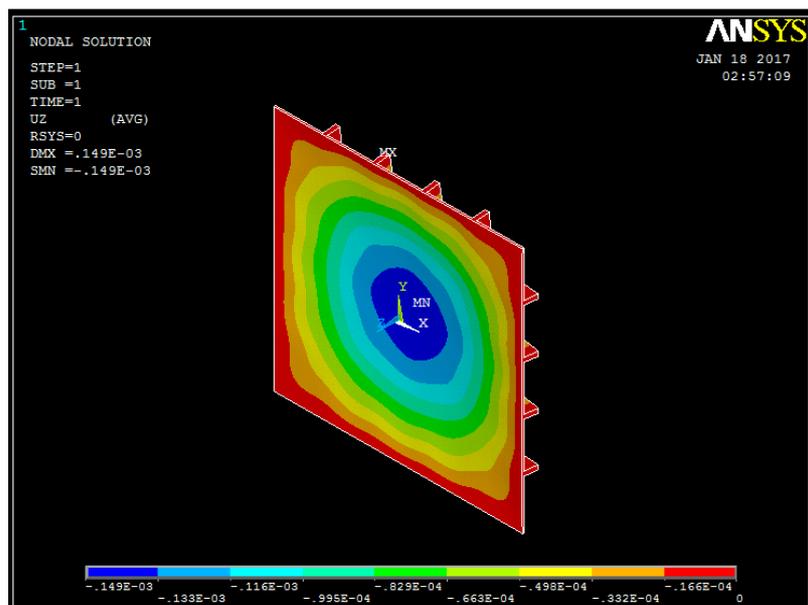


Figura 4.22 - Deflexão máxima P(4x4) - $he = a/20$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

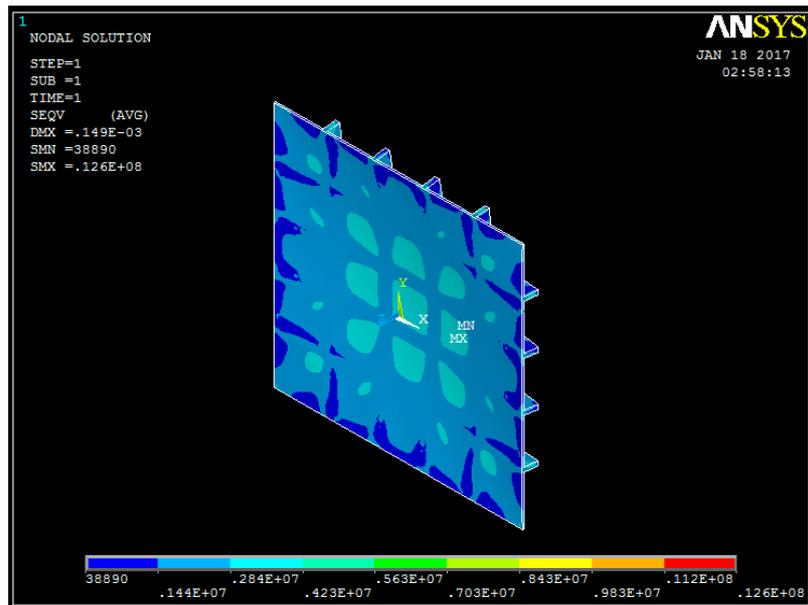


Figura 4.23 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he=a/20$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

Nas Figuras 4.24 e 4.25 e Tab. 4.10, é possível verificar que a deflexão máxima da placa com enrijecedores P(4x4), $he = a/25$ e $he/te = 1,81$, quando comparada com a deflexão máxima da placa de referência (sem enrijecedores), é em torno de 5 vezes menor. Já a tensão de von Mises máxima, na mesma condição, é em torno de 4% menor. Percebe-se novamente que ao reduzir a relação he/te em 65% comparado a $he=a/20$, aumentou-se a deflexão máxima em 41% enquanto que a tensão de von Mises aumentou 28%. Corroborando com Rebelo (2003), que afirma que as menores deflexões máximas ocorram quando $he = a/20$.

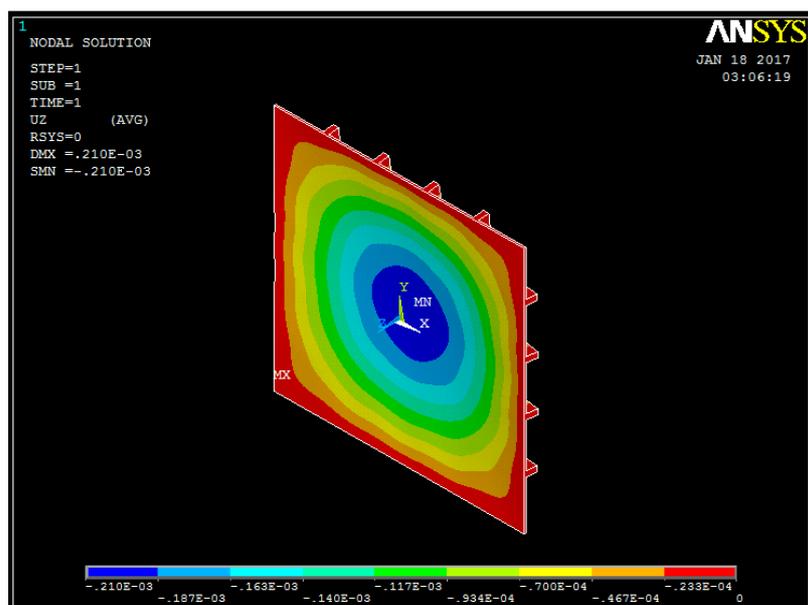


Figura 4.24 - Deflexão máxima P(4x4) - $he = a/25$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

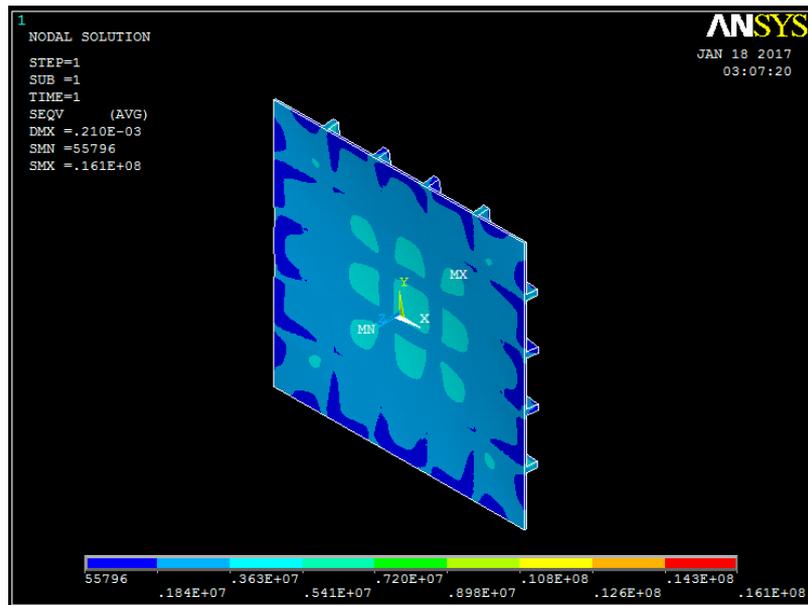


Figura 4.25 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he = a/25$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

A Nas Figuras 4.26 e 4.27 e Tab. 4.10, é possível verificar que a deflexão máxima da placa com enrijecedores P(4x4), $he = a/30$ e $he/te = 1,26$, quando comparada com a deflexão máxima da placa de referência (sem enrijecedores), é em torno de 4 vezes menor. Já a tensão de von Mises máxima, na mesma condição, é em torno de 18% maior. Percebe-se novamente que ao reduzir a relação he/te em 43% comparado a $he = a/25$, aumentou-se a deflexão máxima em 28% enquanto que a tensão de von Mises aumentou de 24%. Corroborar com Rebelo (2003), que afirma que as menores deflexões máximas ocorram quando $he = a/20$.

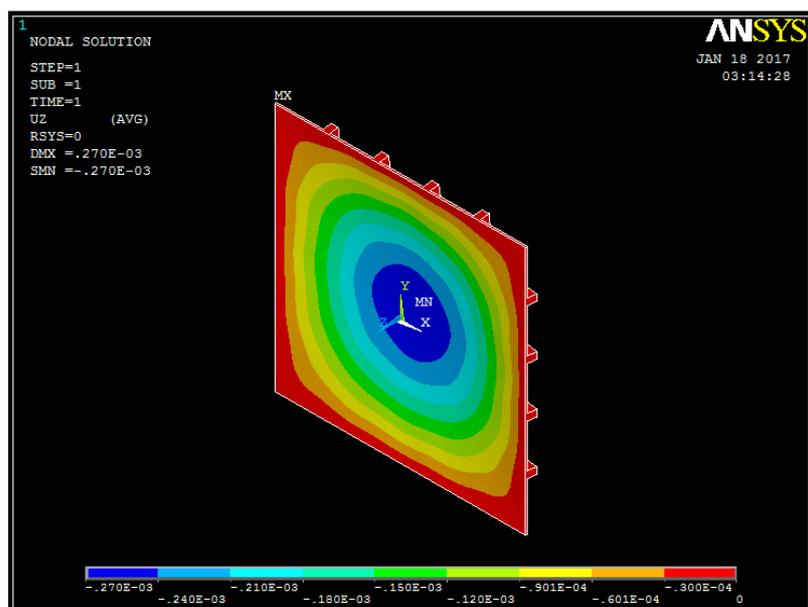


Figura 4.26 - Deflexão máxima P(4x4) - $he = a/30$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

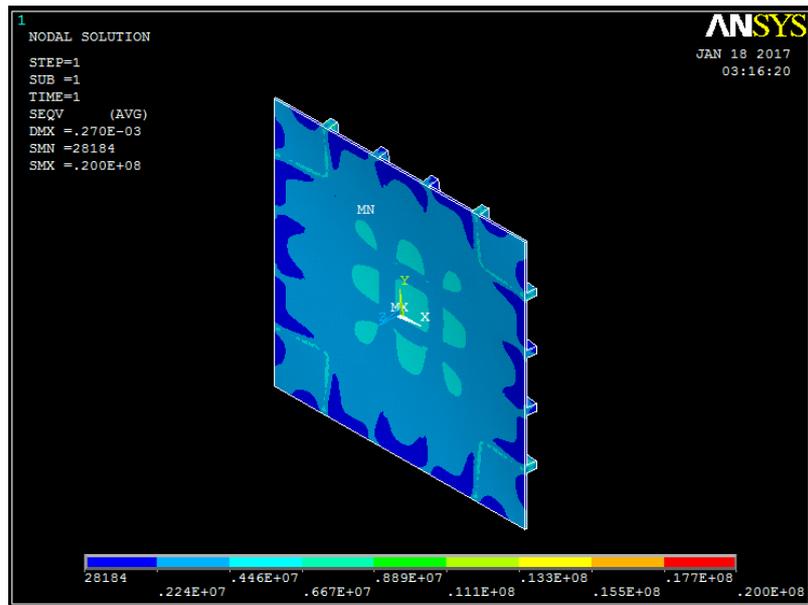


Figura 4.27 - Tensão de von Mises máxima P(4x4) - $he = a/30$ (Fonte: ANSYS®, 2012)

X

4.6. Resultados normalizados das simulações

A deflexão máxima normalizada (W_N), expressa através de um quociente adimensional a relação entre a máxima deflexão da placa com enrijecedores (W_S) e a máxima deflexão da placa de referência (sem enrijecedores) (W_R). Quanto mais próximo este quociente for de um, menor é a influência exercida por este enrijecedor. De forma análoga, a tensão de von Mises normalizada ($\sigma v M_N$) é um quociente adimensional entre a tensão de von Mises ($\sigma v M_S$) e a máxima tensão de von Mises de referência ($\sigma v M_R$).

$$W_N = \frac{W_S}{W_R} \quad (4.5)$$

$$\sigma v M_N = \frac{\sigma v M_S}{\sigma v M_R} \quad (4.6)$$

4.6.1. Resultados normalizados das simulações - placa P(1x1)

A deflexão máxima normalizada e a tensão de von Mises máxima normalizada, obtidas da simulação da placa com enrijecedores P(1x1), estão apresentadas na Tab. 4.12 e nas Fig. 4.28 e 4.29.

Tabela 4.12 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(1x1)

he	Relação he/te	wN ($\times 10^{-3}$)	σvMN
$a/10$	2,83	0,253	0,98
$a/15$	1,26	0,250	0,87
$a/20$	0,71	0,252	0,87
$a/25$	0,45	0,260	1,13
$a/30$	0,31	0,275	1,36

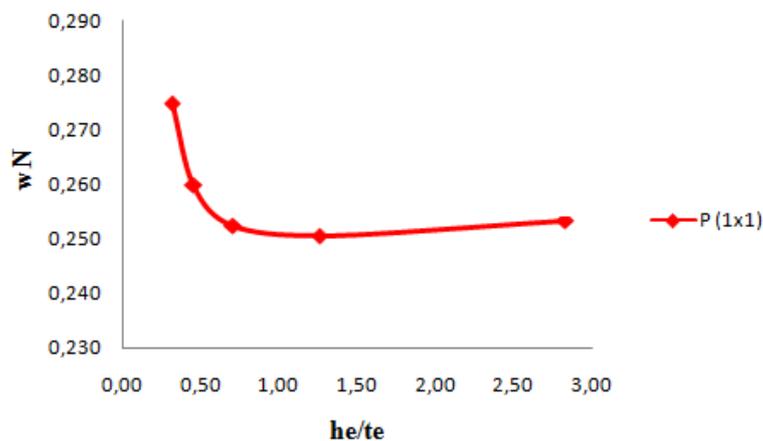


Figura 4.28 - Deflexão máxima normalizada da placa P(1x1) (Fonte: O AUTOR)

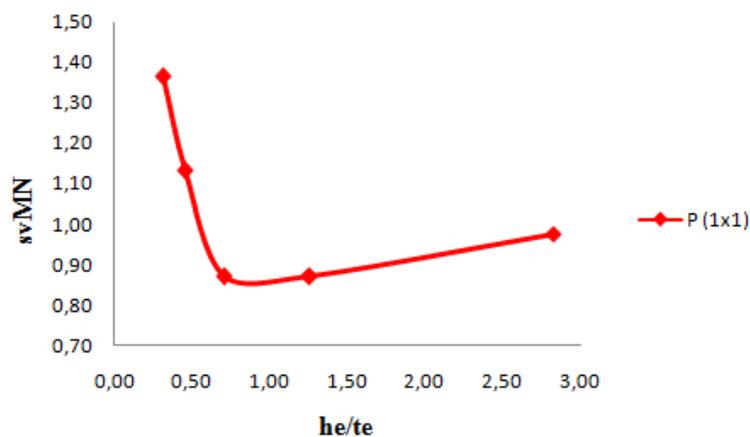


Figura 4.29 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(1x1) (Fonte: O AUTOR)

A partir dos dados da Tab. 4.12 e as Figs. 4.28 e 4.29, pode-se deduzir que a melhor configuração para a placa com enrijecedores P(1x1), ou seja, onde se tem a menor deflexão e a menor tensão de von Mises é a que apresenta a relação $he/te = 1,26$. Já a configuração pior, é a que apresenta a maior deflexão máxima normalizada e a maior tensão de von Mises máxima normalizada, sendo que esta relação $he/te = 0,31$.

Observa-se nas Figs. 4.28 e 4.29 uma certa disparidade quando a relação $he/te = 1,26$ e $he/te = 0,71$, pois ao contrário do que se espera, ao passo que a relação he/te diminui, também diminui a deflexão máxima e da tensão de von Mises máxima. Neste caso, ocorreu uma certa estabilidade dos valores, que corrobora com Rebelo (2003) que afirma que a menores deflexões ocorram entre 1/15 e 1/25 da distância entre seus pontos de apoio.

Também é observada nas Figs. 4.28 e 4.29 uma tendência para valores da relação he/te muito baixos, da placa ter um comportamento semelhante a placa de referência (sem enrijecedores) com valores altos de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima.

4.6.2. Resultados normalizados das simulações - placa P(2x2)

A deflexão máxima normalizada e a tensão de von Mises máxima normalizada, obtidas da simulação da placa com enrijecedores P(2x2), estão apresentadas na Tab. 4.13 e nas Fig. 4.30 e 4.31.

Tabela 4.13 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(2x2)

he	Relação he/te	wN ($\times 10^{-3}$)	σ_{vMN}
$a/10$	5,66	0,064	0,42
$a/15$	2,51	0,098	0,56
$a/20$	1,41	0,141	0,84
$a/25$	0,90	0,187	1,13
$a/30$	0,63	0,245	1,65

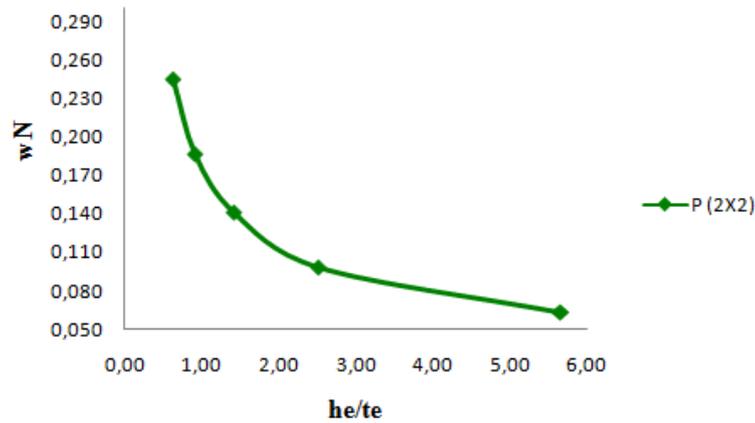


Figura 4.30 - Deflexão máxima normalizada da placa P(2×2) (Fonte: O AUTOR)

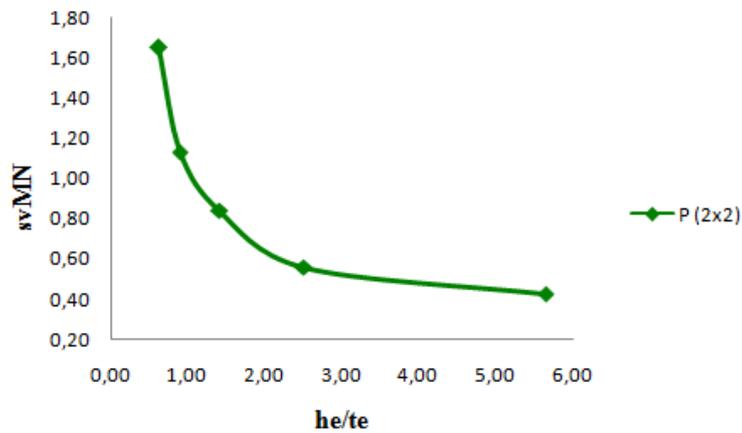


Figura 4.31 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(2×2) (Fonte: O AUTOR)

A partir dos dados da Tab. 4.13 e as Figs. 4.30 e 4.31, pode-se deduzir que a melhor configuração para a placa com enrijecedores P(2x2), ou seja, onde se tem a menor deflexão e a menor tensão de von Mises é a que apresenta a relação $he/te = 5,66$. Já a configuração pior, é a que apresenta a maior deflexão máxima normalizada e a maior tensão de von Mises máxima normalizada, sendo que esta relação $he/te = 0,63$.

É observada nas Figs. 4.30 e 4.31 uma tendência para valores da relação he/te , quando baixos, a placa ter um comportamento semelhante a placa de referência (sem enrijecedores), ou seja, valores maiores de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima. Já para valores altos, verifica-se uma tendência para valores baixos de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima.

Portanto, nota-se nas Figs. 4.30 e 4.31 que ocorre bem o pressentido, ou seja, à medida que a relação he/te diminui, aumenta a deflexão máxima e da tensão de von Mises máxima e vice-versa.

4.6.3. Resultados normalizados das simulações - placa P(3x3)

A deflexão máxima normalizada e a tensão de von Mises máxima normalizada, obtidas da simulação da placa com enrijecedores P(3x3), estão apresentadas na Tab. 4.14 e nas Fig. 4.32 e 4.33.

Tabela 4.14 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(3x3)

he	Relação he/te	wN ($\times 10^{-3}$)	σvMN
$a/10$	8,48	0,044	0,34
$a/15$	3,77	0,082	0,59
$a/20$	2,12	0,131	0,80
$a/25$	1,36	0,181	1,03
$a/30$	0,94	0,243	1,29

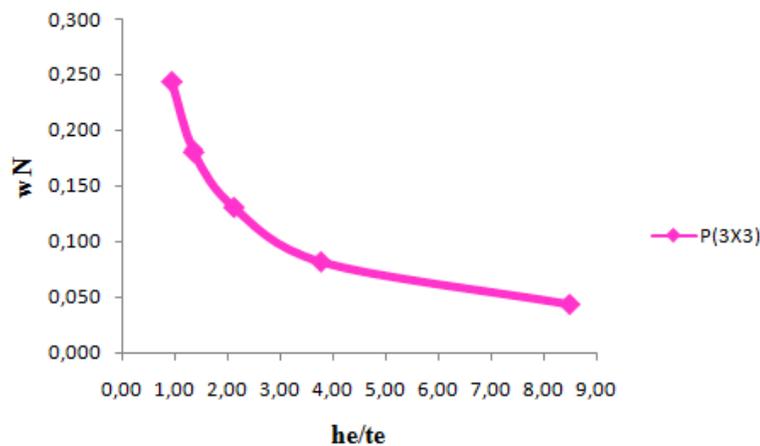


Figura 4.32 - Deflexão máxima normalizada da placa P(3x3) (Fonte: O AUTOR)

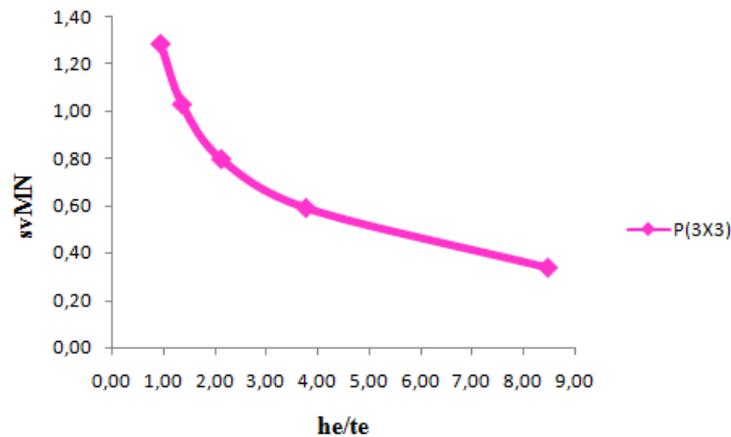


Figura 4.33 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(3x3) (Fonte: O AUTOR)

A partir dos dados da Tab. 4.14 e as Figs. 4.32 e 4.33, pode-se deduzir que a melhor configuração para a placa com enrijecedores P(3x3), ou seja, onde se tem a menor deflexão e a menor tensão de von Mises é a que apresenta a relação $he/te = 8,48$. Já a configuração pior, é a que apresenta a maior deflexão máxima normalizada e a maior tensão de von Mises máxima normalizada, sendo que esta relação $he/te = 0,94$.

É observada nas Figs. 4.32 e 4.33 uma tendência para valores da relação he/te , quando baixos, a placa ter um comportamento semelhante a placa de referência (sem enrijecedores), ou seja, valores maiores de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima. Já para valores altos, verifica-se uma tendência para valores baixos de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima.

Em vista disso, observa-se nas Figs. 4.32 e 4.33 que ocorre justamente o pronunciado, ou seja, à medida que a relação he/te diminui, aumenta a deflexão máxima e a tensão de von Mises máxima e vice-versa.

4.6.4. Resultados normalizados das simulações – placa P(4x4)

A deflexão máxima normalizada e a tensão de von Mises máxima normalizada, obtidas da simulação da placa com enrijecedores P(4x4), estão apresentadas na Tab. 4.15 e nas Fig. 4.34 e 4.35.

Tabela 4.15 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(4x4)

he	Relação he/te	$wN (x10^{-3})$	σ_{vMN}
$a/10$	11,31	0,045	0,32
$a/15$	5,03	0,089	0,53
$a/20$	2,83	0,140	0,75
$a/25$	1,81	0,197	0,96
$a/30$	1,26	0,253	1,19

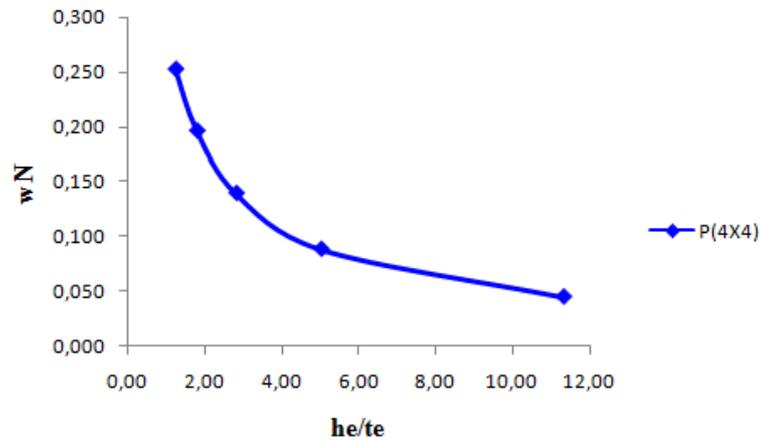


Figura 4.34 - Deflexão máxima normalizada da placa P(4×4) (Fonte: O AUTOR)

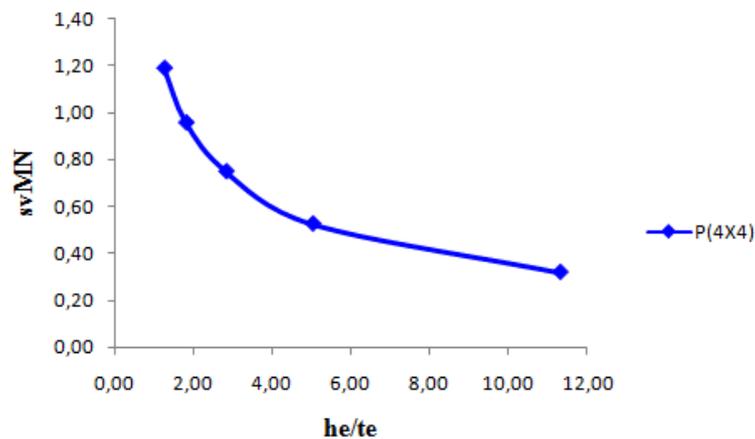


Figura 4.35 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(4×4) (Fonte: O AUTOR)

A partir dos dados da Tab. 4.15 e as Figs. 4.34 e 4.35, pode-se deduzir que a melhor configuração para a placa com enrijecedores P(4x4), ou seja, onde se tem a menor deflexão e a menor tensão de von Mises é a que apresenta a relação $he/te = 11,31$. Já a configuração pior, é a que apresenta a maior deflexão máxima normalizada e a maior tensão de von Mises máxima normalizada, sendo que esta relação $he/te = 1,26$.

É observada nas Figs. 4.34 e 4.35 uma tendência para valores da relação he/te , quando baixos, a placa ter um comportamento semelhante a placa de referência (sem enrijecedores), ou seja, valores maiores de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima. Já para valores altos, verifica-se uma tendência para valores baixos de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima.

Deste modo, repara-se nas Figs. 4.34 e 4.35 que ocorre propriamente o conjecturado, ou seja, à medida que a relação he/te diminui, aumenta a deflexão máxima e da tensão de von Mises máxima e vice-versa.

4.6.5. Resultados normalizados das simulações - placa P(5x5)

A deflexão máxima normalizada e a tensão de von Mises máxima normalizada, obtidas da simulação da placa com enrijecedores P(5x5), estão apresentadas na Tab. 4.16 e nas Fig. 4.36 e 4.37.

Tabela 4.16 - Deflexão máxima normalizada e tensão de von Mises máxima normalizada da simulação da placa P(5x5)

he	Relação he/te	wN ($\times 10^{-3}$)	σ_{vMN}
$a/10$	14,14	0,044	0,38
$a/15$	6,28	0,089	0,55
$a/20$	3,54	0,142	0,73
$a/25$	2,26	0,200	0,98
$a/30$	1,571	0,267	1,16

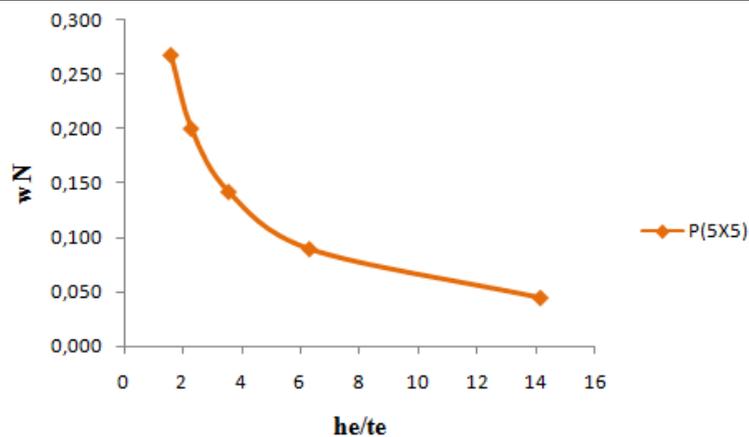


Figura 4.36 - Deflexão máxima normalizada da placa P(5x5) (Fonte: O AUTOR)

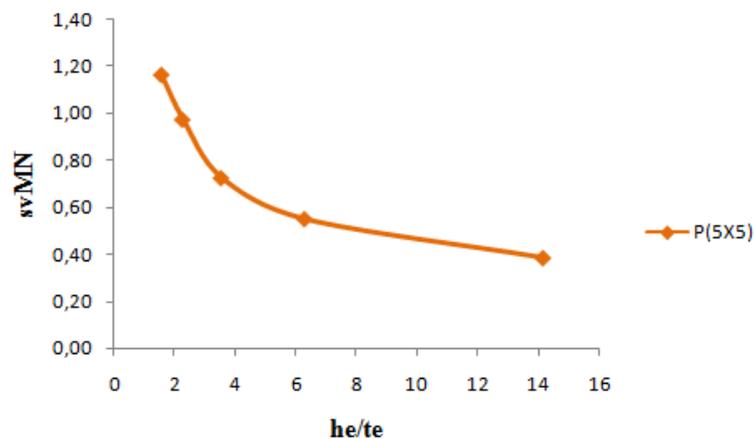


Figura 4.37 - Tensão de von Mises máxima normalizada da placa P(5x5) (Fonte: O AUTOR)

A partir dos dados da Tab. 4.16 e as Figs. 4.36 e 4.37, pode-se deduzir que a melhor configuração para a placa com enrijecedores P(5x5), ou seja, onde se tem a menor deflexão e a menor tensão de von Mises é a que apresenta a relação $he/te = 14,14$. Já a configuração pior, é a que apresenta a maior deflexão máxima normalizada e a maior tensão de von Mises máxima normalizada, sendo que esta relação $he/te = 1,571$.

É observada nas Figs. 4.36 e 4.37 uma tendência para valores da relação he/te , quando baixos, a placa ter um comportamento semelhante a placa de referência (sem enrijecedores), ou seja, valores maiores de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima. Já para valores altos, verifica-se uma tendência para valores baixos de deflexão máxima tensão de von Mises *máxima*.

Assim sendo, constata-se nas Figs. 4.36 e 4.37 que ocorre precisamente o expectável, ou seja, à medida que a relação he/te diminui, aumenta a deflexão máxima e da tensão de von Mises máxima e vice-versa.

4.6.6. Análise dos resultados normalizados das simulações

A partir dos resultados ilustrados nas Tabs. 4.12 a 4.16 e nas Figs. 4.28 a 4.37, é possível afirmar que todas as configurações geométricas propostas de placas com enrijecedores conduzem a uma redução na deflexão máxima, bem como a uma redução na tensão máxima em relação à placa sem enrijecedores para determinados arranjos he/te ;

Além disso, na Tab. 4.12 e nas Figs. 4.28 e 4.29 é possível observar que o aumento da razão he/te para a aplicação P(1x1) não ocorreu de forma semelhante aos demais casos onde com o aumento da relação he/te , sempre reduzia a deflexão e a tensão de von Mises, o que não ocorreu.

Já nas Tabs. 4.13 a 4.16 e nas Figs 4.30 a 4.37 fica evidente que tanto a deflexão como a tensão diminuem sensivelmente seus valores para a aplicação P(2x2), P(3x3), P(4x4) e P(5x5) à medida que a relação he/te aumenta.

Na Fig. 4.38, os resultados apresentados nas Figs. 4.28, 4.30, 4.32, 4.34 e 4.36 tiveram suas curvas de deflexão compilados para que se possa identificar facilmente qual a melhor configuração de enrijecedores.

Observada nas Figs. 4.38 e 4.39, com exceção da configuração P(1x1) que a tendência para valores da relação he/te , quando baixos, a placa ter um comportamento semelhante a placa de referência (sem enrijecedores), ou seja, valores maiores de deflexão máxima e tensão de von Mises máxima. Já para valores altos da relação he/te , verifica-se uma tendência para valores baixos de deflexão máxima tensão de von Mises *máxima*.

Portanto, identifica-se nas Figs. 4.38 e 4.39, com exceção da configuração P(1x1) que ocorre rigorosamente o esperado, ou seja, à medida que a relação h_e/t_e diminui, aumenta a deflexão máxima e da tensão de von Mises máxima e vice-versa.

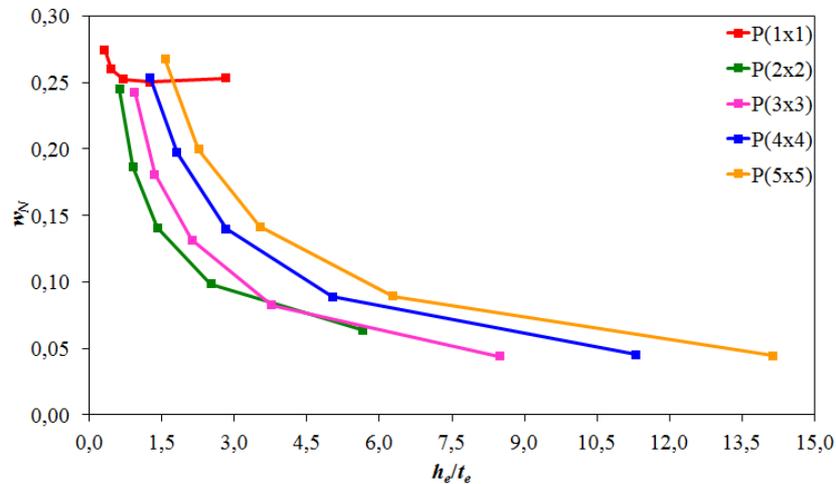


Figura 4.38 - Compilação de curvas de deflexão para facilitar a identificação da melhor configuração de enrijecedores (Fonte: O AUTOR)

Na Fig. 4.39, os resultados apresentados nas Figs. 4.29, 4.31, 4.33, 4.35 e 4.37, tiveram suas curvas de tensão de von Mises compilados para que se possa identificar facilmente qual a melhor configuração de enrijecedores

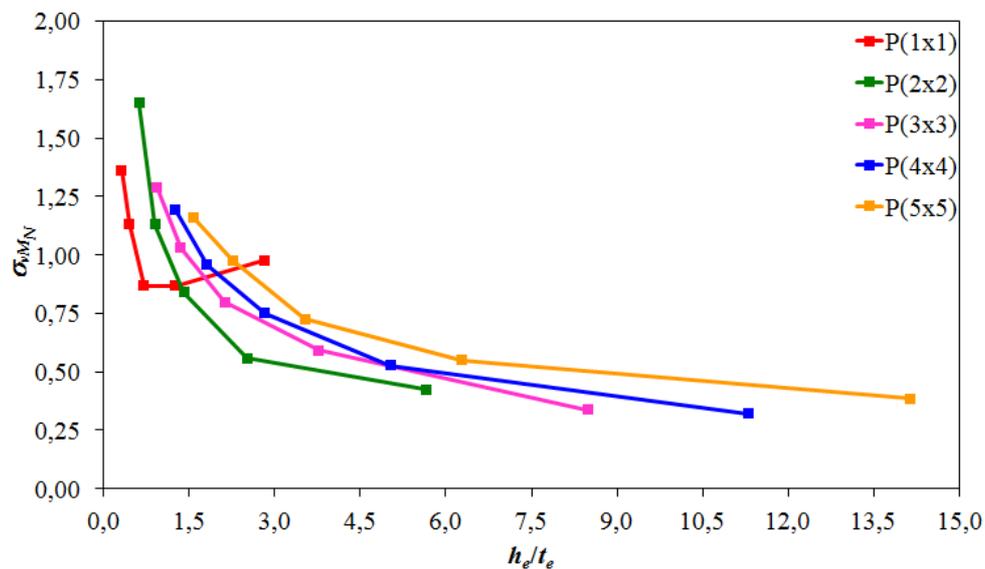


Figura 4.39 - Compilação de curvas de tensão de von Mises para facilitar a identificação da melhor configuração de enrijecedores (Fonte: O AUTOR)

Na Fig. 4.40 os resultados apresentados nas Figs. 4.28, 4.30, 4.32, 4.34 e 4.36, tiveram seus melhores resultados (menores) das deflexões máximas normalizadas compiladas, permitindo

identificar facilmente que existe uma estabilização de resultados considerando os casos P(3x3), P(4x4) e P(5x5).

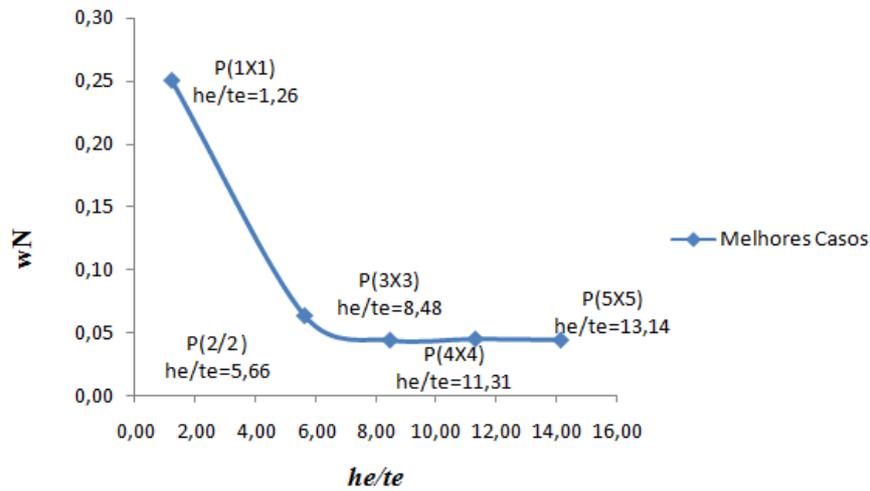


Figura 4.40 - Melhores resultados (menores) normalizados de deflexão máxima das placas analisadas (Fonte: O AUTOR)

Na Fig. 4.41 os resultados apresentados nas Figs. 4.28, 4.30, 4.32, 4.34 e 4.36, tiveram seus piores resultados (maiores) das deflexões máximas normalizadas compiladas, permitindo identificar facilmente que a configuração de enrijecedores com o respectivo grau de relação he/te , que apresenta o pior resultado é o P(1x1).

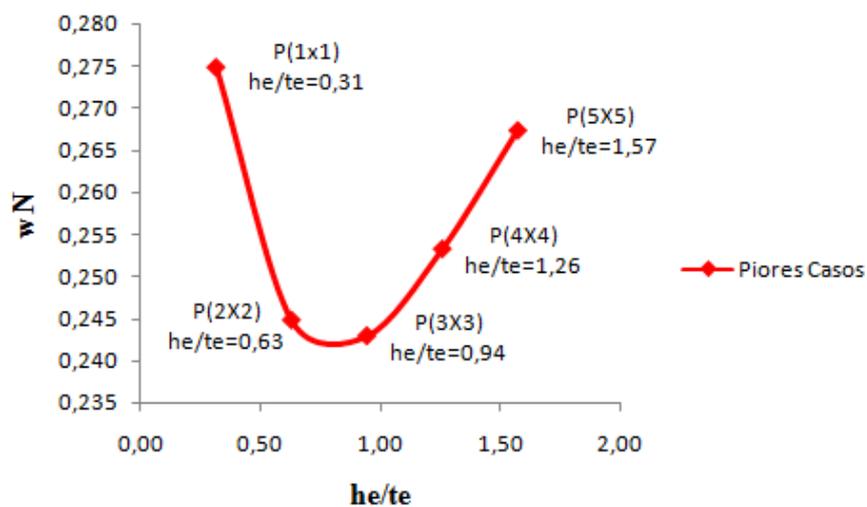


Figura 4.41 - Piores resultados (maiores) normalizados de deflexão máxima das placas analisadas (Fonte: O AUTOR)

Na Fig. 4.42 os resultados apresentados nas Figs. 4.29, 4.31, 4.33, 4.35 e 4.37, tiveram seus melhores resultados (menores) das tensões de von Mises máximas normalizadas compilados, permitindo identificar facilmente que a configuração de enrijecedores com o respectivo grau de relação he/te , que apresenta o melhor resultado é o P(4x4).

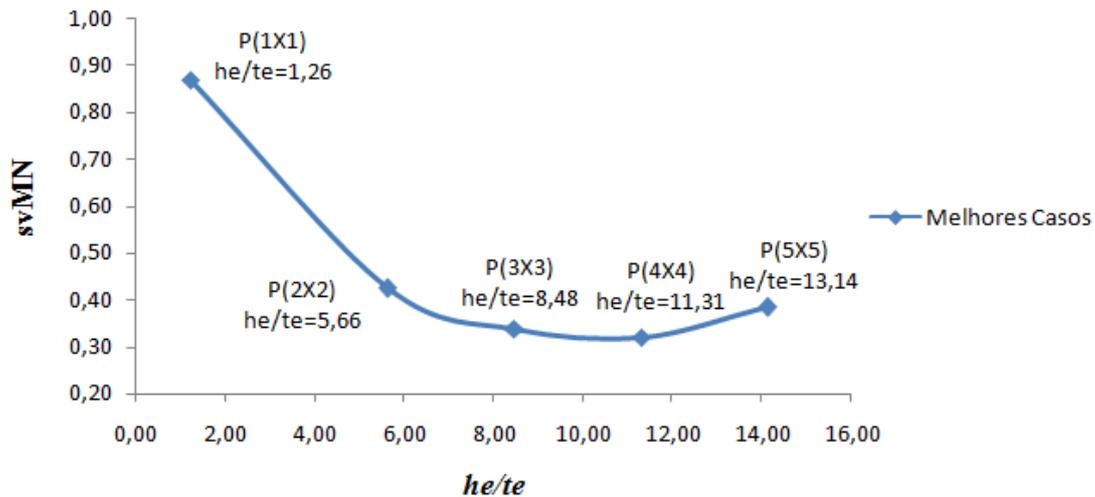


Figura 4.42 - Melhores resultados (menores) normalizados de tensão máxima de von Mises das placas analisadas (Fonte: O AUTOR)

Na Fig. 4.43 os resultados apresentados nas Figs. 4.29, 4.31, 4.33, 4.35 e 4.37, tiveram seus piores resultados (maiores) das tensões de von Mises máximas normalizadas compilados, permitindo identificar facilmente que a configuração de enrijecedores com o respectivo grau de liberdade de he/te , que apresenta o pior resultado é o P(2x2).

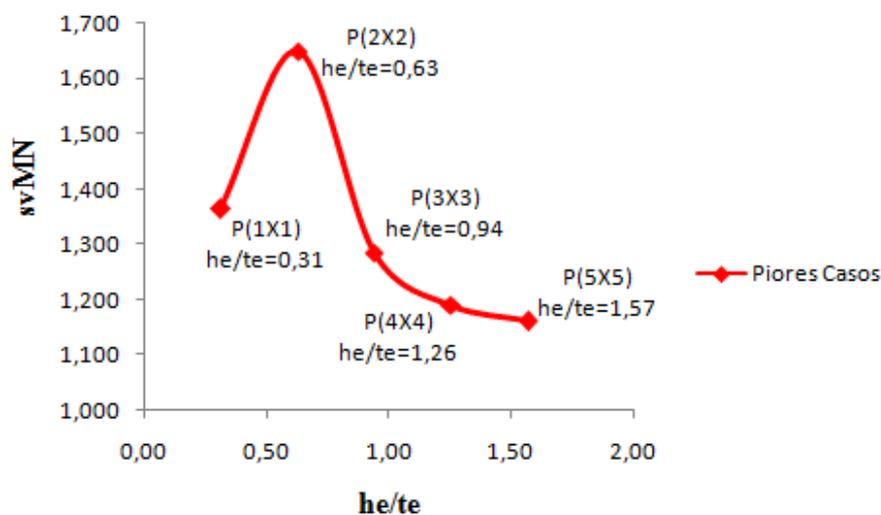


Figura 4.43 - Piores resultados (maiores) normalizados de tensão máxima de von Mises das placas analisadas (Fonte: O AUTOR)

Na Fig. 4.44 os resultados apresentados nas Figs. 4.40 e 4.42, foram compilados de modo a permitir identificar que entre todas as configurações avaliadas, existe a que melhor atende a função multiobjetivo de minimizar o máximo deslocamento transversal da placa e minimizar a máxima tensão da placa.

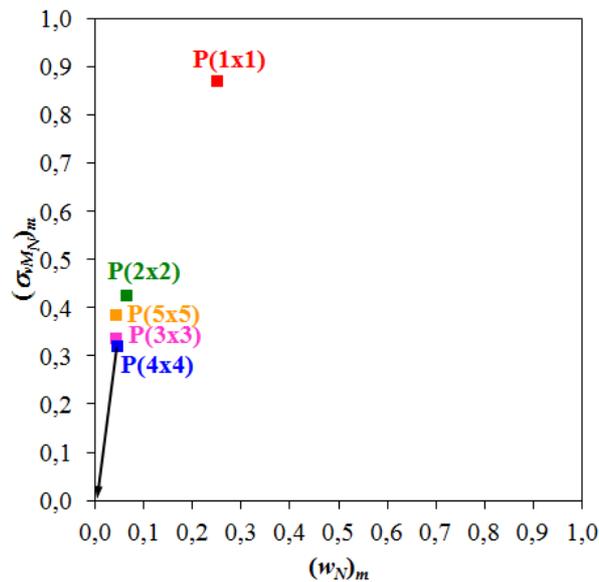


Figura 4.44 - Melhor configuração dentre as avaliadas (Fonte: O AUTOR)

Logo, observando as Figs. 4.44, 4.40 e 4.42 que, em relação à minimização da deflexão máxima, a placa com enrijecedores que possui o melhor comportamento mecânico foi a P(4x4) com $he/te = 11,31$, ou seja, com essa configuração de enrijecedores, foi possível obter os menores resultados conjugados (deflexão x tensão) para os valores de deslocamentos transversais e de tensão de von Mises entre todos os casos avaliados. Além disso, se forem comparados o melhor caso entre todos os analisados, que é a placa P(3x3) com $he/te = 8,48$ com o pior caso entre todas que é a placa P(1x1) com $he/te = 0,31$, uma melhora de aproximadamente 623% foi obtida. Portanto, comparando a placa P(4x4) com $he/te = 11,31$, que foi adotada, com o pior caso P(1x1) com $he/te = 0,31$, houve uma melhora de aproximadamente 550%.

Portanto, observando as Figs. 4.44, 4.40 e 4.42 que, em relação à minimização da tensão máxima, a placa com enrijecedores que possui o melhor comportamento mecânico foi a P(4x4) com $he/te = 11,31$, ou seja, com essa configuração de enrijecedores, foi possível obter os menores resultados conjugados (deflexão x tensão) para os valores de deslocamentos transversais e de tensão de von Mises entre os casos avaliados. Dessa forma, se forem comparados o melhor caso entre todos os analisados, que neste caso foi a própria placa P(4x4) com $he/te = 11,31$ com o pior caso entre todas que é a placa P(2x2) com $he/te = 0,63$, houve uma melhora de aproximadamente 623%.

5. CONCLUSÕES

O conhecimento do comportamento estrutural de placas finas de aço, frequentemente empregados em engenharia e especialmente em estruturas navais e offshore, é essencial para um dimensionamento que garanta a integridade estrutural dos elementos e, conseqüentemente, da estrutura como um todo.

O estudo das placas finas de aço sob flexão sempre foi um problema complexo. O comportamento mecânico de placas finas de aço submetidas à flexão, quadradas, simplesmente apoiadas nos quatro lados, com enrijecedores longitudinais e transversais foi numericamente estudado, tendo como referência uma placa sem enrijecedores. Havia uma função multiobjetivo de minimizar o máximo deslocamento transversal da placa e minimizar a máxima tensão na placa. Em todos os casos estudados o volume total de aço da placa foi mantido constante, assim como seu comprimento e sua largura. Nas placas com enrijecedores o parâmetro fração de volume dos enrijecedores ϕ , foi usado para definir o volume de aço empregado nos enrijecedores e, conseqüentemente, o volume de aço a ser usado na placa.

Nesse trabalho foi adotado $\phi = 0,50$, ou seja, a placa de referência teve metade de sua espessura transformada em enrijecedores. A quantidade, a disposição e as dimensões dos enrijecedores foram definidas. A análise teve como objetivos minimizar as deflexões e tensões máximas nas placas. Modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS®, que é baseado no MEF, foram verificados e empregados na simulação numérica dos casos propostos.

Os resultados indicaram que é possível melhorar consideravelmente o comportamento mecânico de placas sob flexão, empregando enrijecedores. Esse fato não apresenta nenhuma novidade, uma vez que o uso de enrijecedores é amplamente empregado. Entretanto, a análise numérica em placas finas com enrijecedores mantendo o volume de material constante, acredita-se ser inédita para o estudo de placas com enrijecedores sob flexão onde os resultados foram compilados de modo a qualificar dentre os melhores resultados avaliados, qual a configuração induz aos melhores resultados para a função multiobjetivo de minimizar o máximo deslocamento transversal da placa e minimizar a máxima tensão na placa.

Observou-se que a minimização dos deslocamentos transversais e das tensões, acontecem em função do arranjo geométrico dos enrijecedores, que neste estudo baseou-se na variação da relação he/te . Observou-se que em função do arranjo geométrico, pode-se melhorar o desempenho até algo em torno de 600%. Essa avaliação foi possível quando a

deflexão máxima e a tensão máxima foram obtidas para a melhor geometria dentre as avaliadas quando ela foi comparada com a pior geometria.

Este trabalho se propôs a estudar, para as placas consideradas nas análises, as deflexões máximas e as tensões de von Mises máximas da estrutura, com uma abordagem computacional.

Apesar da análise que foi executada, neste trabalho, representar apenas uma dentre tantas possibilidades de problemas que podem ser enfrentadas em engenharia, no que tange à flexão de placas com enrijecedores, envolvendo a questão de minimizar as deflexões máximas e as tensões envolvidas, esse trabalho corroborou com Rebelo (2003) que, em seu estudo, concluiu que os menores valores de deflexão ocorrem quando os valores de altura de uma viga situa-se entre $1/15$ e $1/25$ da distância entre seus pontos de apoio. Pode-se constatar que realmente isso ocorreu quando se analisou o comportamento na configuração de placa P(1x1).

Também constatou-se que para a configurações de placa P(2x2), P(3x3), P(4x4) e P(5x5) analisadas, ocorreu exatamente o que esperava-se, ou seja, à medida que a relação h_e/t_e aumenta, diminui a deflexão máxima e a tensão de von Mises máxima, ao passo que o inverso é verdadeiro.

A modelagem computacional, diante dos resultados obtidos, mostrou-se de fundamental importância para a análise do comportamento de placa finas enrijecidas submetidas à flexão.

5.1. Sugestão para trabalhos futuros

Com base nos resultados obtidos com o presente trabalho, sugere-se futuras pesquisas no campo estrutural com o intuito de desenvolver mais a simulação na análise estrutural, principalmente no estudo de placas finas enrijecidas sob flexão.

- Introduzir o método *Constructal Design*;
- Analisar combinações diferentes de enrijecedores P(N_{el} , N_{et});
- Expandir a análise para um maior número enrijecedores N_{el} e $N_{et} > 5$;
- Analisar combinações de enrijecedores com geometrias diferentes;
- Analisar a influência de outras condições de vinculação para a placa em flexão; como engastada, bi-apoiada, etc;
- Considerar o uso de outros tipos de elementos finitos.

REFERÊNCIAS:

- ANDERSEN, F. L. **Residual Stresses and Deformations in Steel Structures**. Technical University of Denmark - Department of Naval Architecture and Offshore Engineering, Phd Thesis. 2000
- ANSYS®. **Modeling and Meshing Guide** (Release 10). Southpoint Inc. 2005.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. Ed. Unicamp, Campinas, 2003.
- AZAR, A. T. **Modeling and Control of Dialysis Systems: Volume 2: Biofeedback Systems and Soft Computing Techniques of Dialysis**. Springer, New York, 2013.
- BANERJEE, M., JAIN, N.K., SANYAL, S. **Stress concentration in isotropic & orthotropic composite plates with centre circular hole subjected to transverse static loading**. *International Journal of Mechanical and Industrial Engineering (IJMIE)*, Volume 3, Issue 1, pp. 109-113. 2013.
- BLAUWENDRAAD, J. **Plates and FEM - Surprises and Pitfalls**. Springer, New York. 2010.
- COOK, RD., MALKUS, D.S., E PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element**. Terceira Edição, John Wiley & Sons. 1989.
- CORREIA, A.L.G., SILVEIRA, T., SILVA, C.C.C., ROCHA, L.A.O., REAL, M.V., DOS SANTOS, E.D., ISOLDI, L.A. **Constructal Design Aplicado a Placas com Furos Elípticos sob Flambagem**. *Vetor*, Vol. 23, pp. 18–31. 2013.
- COSTA, C. T. F. **Introdução aos Métodos Numéricos**. Universidade Federal do Ceara (Campos Cariri). 2010.
- DE LEON, D.M. **Otimização Estrutural de Placas Laminadas Sujeitas a Efeitos Aeroelásticos**. Universidade federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. 2011.
- DEVLOO, P. R. B. **Simulação Numérica**. *Revista Multiciência*. 2005.
- E. REISSNER, **The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates**,. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A68-77. 1945.
- HASAN, M.M. **Optimum design of stiffened square plates for longitudinal and square ribs**. *Al-Khwarizmi Engineering Journal*, Vol.3. Department of Mechanical Engineering. College of Engineering University of Anbar. 2007.
- HELBIG, D., DA SILVA, C. C. C., REAL, M. DE V., VAZ, J., ROCHA, L. A. O., DOS SANTOS, E. D., ISOLDI, L. A. **Análise Numérica do Comportamento Mecânico sob Flexão de Placas Finas de Material Compósito Laminado Reforçado por Fibras**. *Vetor*, Vol. 23, pp. 5–15. 2013.

ISOLDI, L. A. **Análise Estática e Dinâmica de Estruturas Delgadas de Materiais Compostos Laminados incluindo Materiais Piezelétricos.** Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 197p. 2008.

JAIN, N. K. **Analysis of Stress Concentration and Deflection in Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates with Central Circular Hole under Transverse Static Loading.** vol. 36. 2009.

JAWARD, M. H., **Theory and Design of Plate and Shell Structures.** Springer. 1994.

KARDESTUNDER, H., NORRIE, D. H. **Finite Element Handbook.** McGraw-Hill, 1987.

KIRCHHOFF, G., (1850). **Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe.** *Crelles J.*, v.40, p.51-88.

KUMAR, M. S.. **Ultimate Strength of Square Plate With Rectangular Opening Under Axial Compression.** Journal of Naval Architecture and Marine Engineering. 2007.

MADENCI, E., GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®.** Ed. Springer, 2006.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 453 p., 2004.

MANRIQUE, L. J. C., 1989. **Colapso de painéis planos enrijecidos.** Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MCGREGOR, D. **O lado humano da empresa.** Tradução Margarida Maria C. Oliveira. São Paulo: Martins Fontes. 1980.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche.** Manole. 2005.

MINDLIN, R.D. (1951). **Influence of rotary inertia and shear on flexural motions isotropic, elastic plates.** ASME Journal of Applied Mechanic. 18:31-38.

MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Application With ANSYS.** Pretice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999, 527 pp., 2003.

OKUMOTO, Y., TAKEDA, Y., MANO, M., OKADA, T. **Design of Ship Hull Structures - A Practical Guide for Engineers.** Vol. 1, pp. 253–267. 2009.

OLIVEIRA, C. T. **Expansão do transporte marítimo mundial.** Revista portos e navios. maio 2010, ano 52, ed. 592, p. 64 - 65. Rio de Janeiro: Editora QuebraMar Ltda, 2010.

PEGDEN, C. D., SHANNON, R. E., SADOWSKI, R. P. **Introduction to simulation using SIMAN.** McGraw-Hill, NY. 2 ed., 1990.

PINK, D.H. **Motivação 3.0: os novos fatores motivacionais que buscam tanto a realização pessoal quanto profissional.** Tradução de Bruno Alexander. Rio de Janeiro: Elsevier. 2010.

RACKOW, P. B., 2015. **Análise numérica não-linear de painéis com enrijecedores sob flambagem**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.

RAMASWAMY, R. S. B. **Optimal Design of Stiffened Plates**. Degree of Master of Applied Science. Canadá. 1999.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 4th ed. Elsevier, Miami, 2004.

REAL, M.V., ISOLDI, L.A. **Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes**. in Southern Conference on Computational Modeling, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, pp. 69-73. 2010.

REAL, M.V., ISOLDI, L.A. 2010. **Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes**. In **Southern Conference on Computational Modeling**, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, pp. 69-73.

REBELLO, Y. C. P. **A concepção estrutural e a arquitetura**. São Paulo: Ziguarte, 2003.

REIS, A. H. E., GAMA, C. **Sand size versus beachface slope – an explanation based on the Constructal Law**. *Geomorphology*. v. 114, p. 276-283. 2010.

REISSNER, E. (1945). **The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates**. *J. Appl. Mech.*, v.12, p.69-77.

RIBAS, R. **A motivação empreendedora e as teorias clássicas da motivação**. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/article/view/7781/>. 2013.

R. D. MINDLIN, **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates**. *ASME Journal of Applied Mechanics*, V. 18 pp. 31–38. 1951.

RIGO, P., RIZZUTO, E. **Analysis and Design Of Ship Structures**. *Ship Design and Construction*, Vol. 1, pp. 18-1–18-76. 2003.

SENTANO, B. S. 2014. **Estudo Comparativo do Comportamento de Placas com Furos Circulares, Quadrangulares e Losangulares, sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais e Oceânicas**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.

SILVA, H. B. S. **Análise Numérica da Influência da Excentricidade na Ligação Placa-Viga em Pavimentos Usuais de Edifícios**. USP. 2010.

SZILARD, R. **Theories and application of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**. Wiley. 2004.

SORIANO, H. L. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. edusp. 2003.

TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A., PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**, 2. Ed., Taylor & Francis, Estados Unidos, 792 P. 1997.

- TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw – Hill, New York, 1961.
- TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. 2^a ed. USA: McGraw-Hill. 1959.
- TURNER, M., CLOUGH, R., MARTIN, H., TOPP, L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences** **23**, 805-823, 1956.
- UGURAL, A.C. **Stresses in Plates and Shells**. McGraw – Hill, Michigan University, Nova York, 1981.
- VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**, Longman, Malasia, 257 p. 1995.
- von Kármán, T. **Festigkeitsproblem im Maschinenbau**. *Encyk. D. Math. Wiss.* **IV**, 311–385 (1910)
- YOUSIF, M. V.; NAIEF N.K.M.; HAMAD, Y.M. **Optimum Height of Plate Stiffener under Pressure Effect**. University of Baghdad, AL-Khwarizmi College of Engineering. 2008.
- ZIENKIEWICZ, O.C. **The Finite Element Method**. McGraw- Hill, London, 1967.
- ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite Element Method in Engineering Science**. 2^a ed. McGraw-Hill, London, 1971.
- ZIENKIEWICZ, O.C.,TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**. 4th ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

**APÊNDICE A – Resultados das simulações da placa P(1x1)
(Fonte: ANSYS®, 2012)**

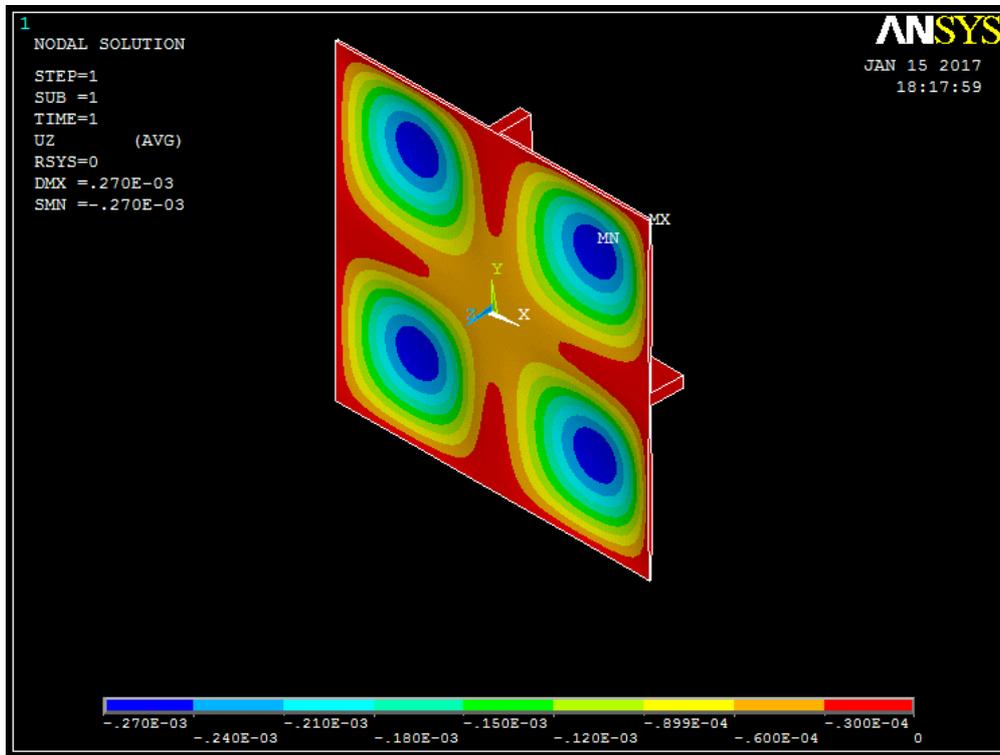


Figura A.1 - Deflexão máxima da combinação P(1x1) - $he = a/10$

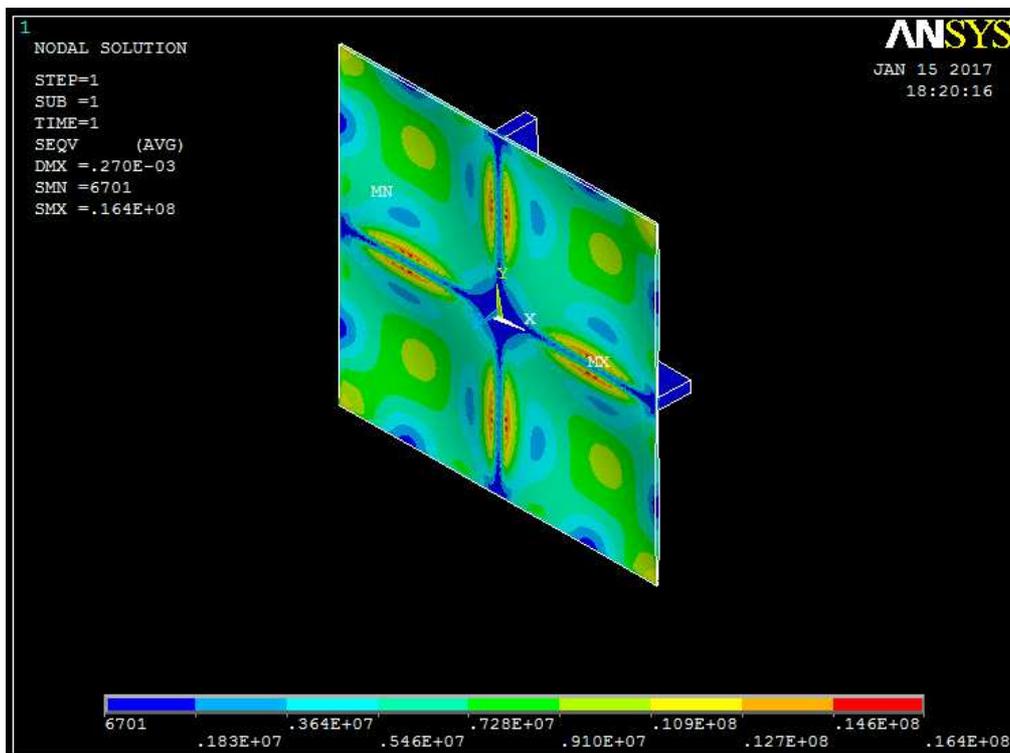


Figura A.2 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(1x1) - $he = a/10$

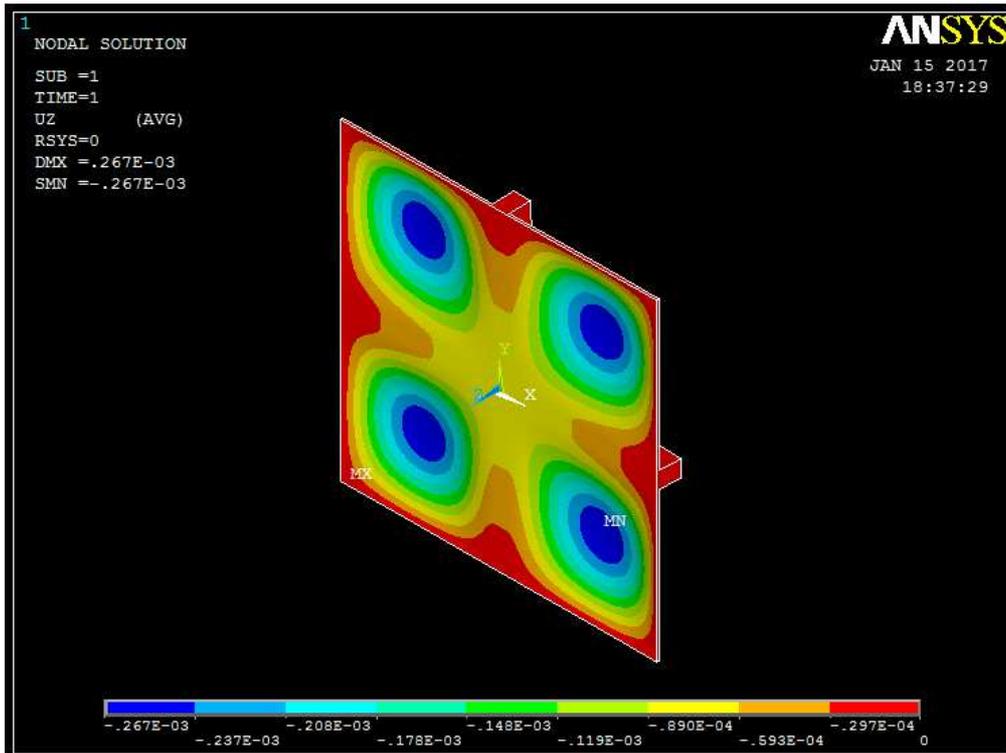


Figura A.3 - Deflexão máxima da combinação P(1x1) - $he = a/15$

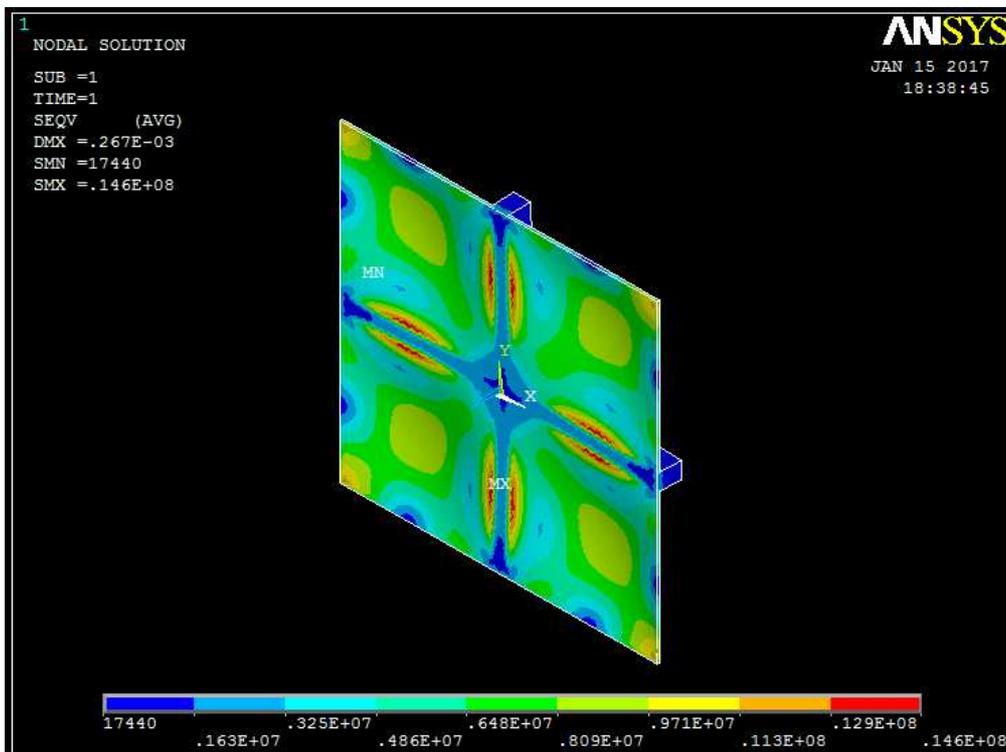


Figura A.4 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(1x1) - $he = a/15$

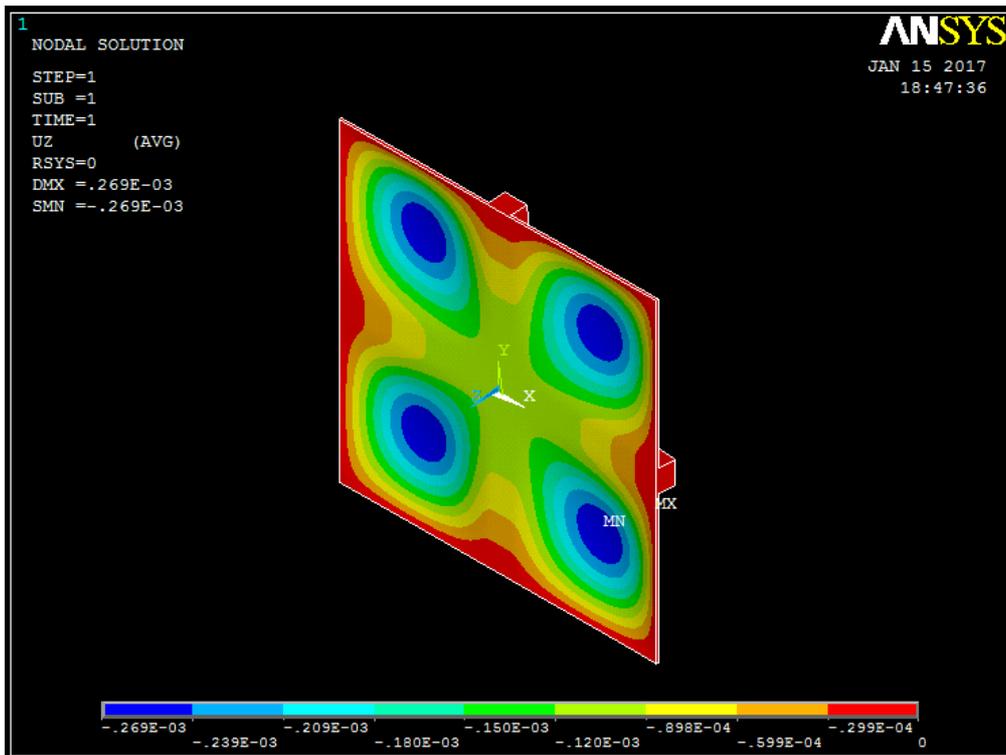


Figura A.5 - Deflexão máxima da combinação P(1x1) - $he = a/20$

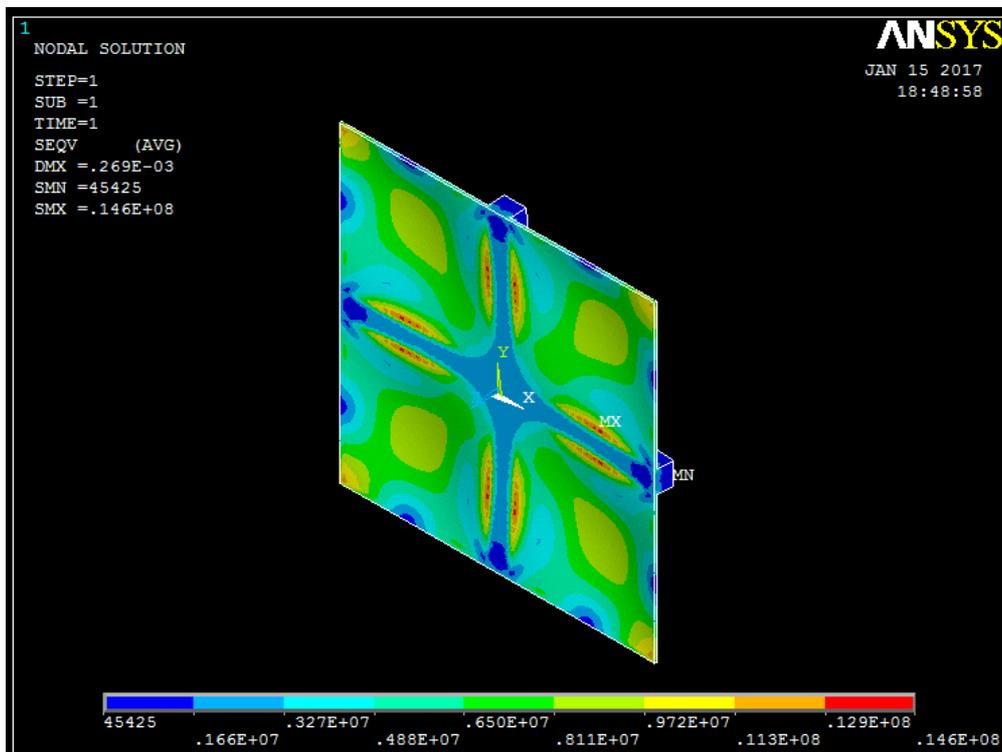


Figura A.6 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(1x1) - $he = a/20$

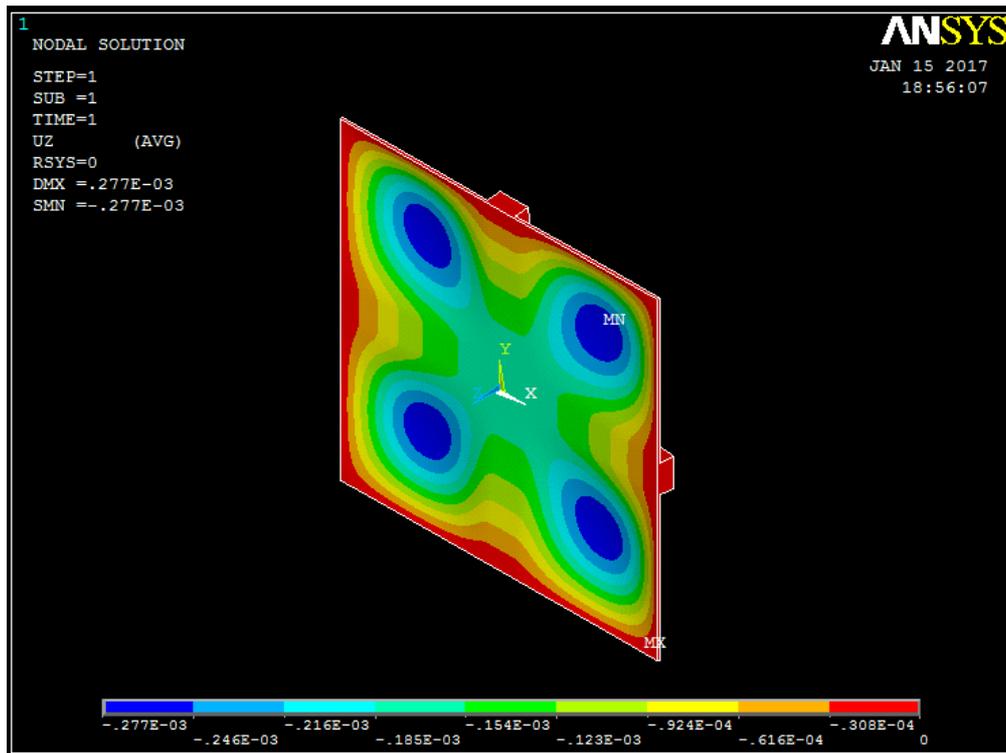


Figura A.7 - Deflexão máxima da combinação P(1x1) - $he = a/25$

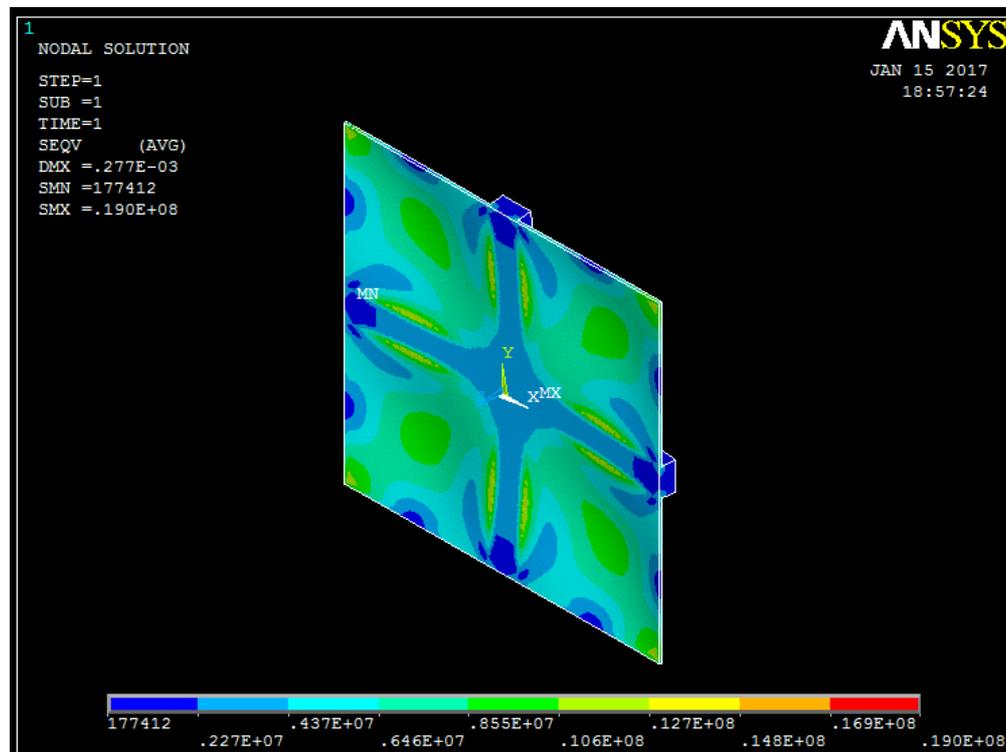


Figura A.8 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(1x1) - $he = a/25$

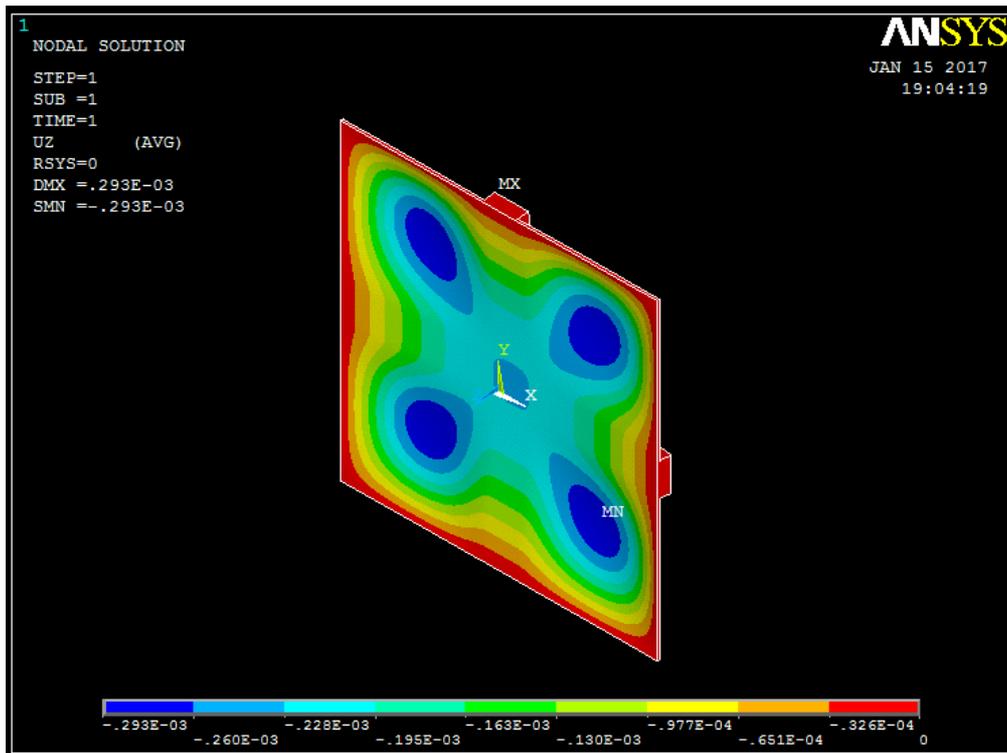


Figura A.9 - Deflexão máxima da combinação P(1x1) - $he = a/30$

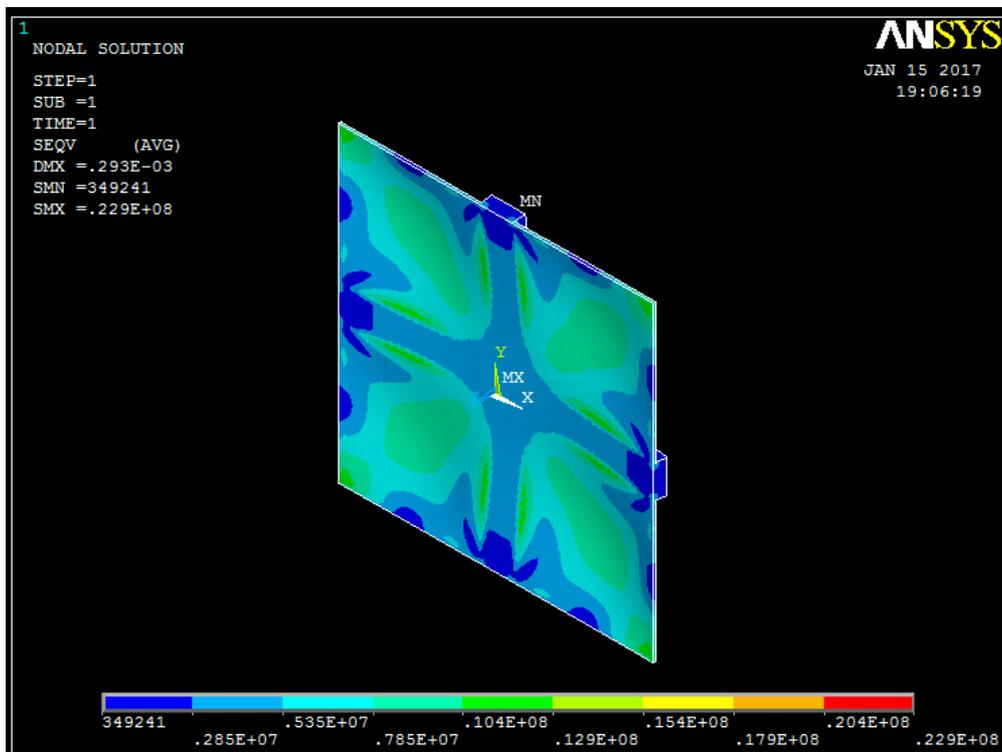


Figura A.10 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(1x1) - $he = a/30$

**APÊNDICE B – Resultados das simulações da placa P(2x2)
(Fonte: ANSYS®, 2012)**

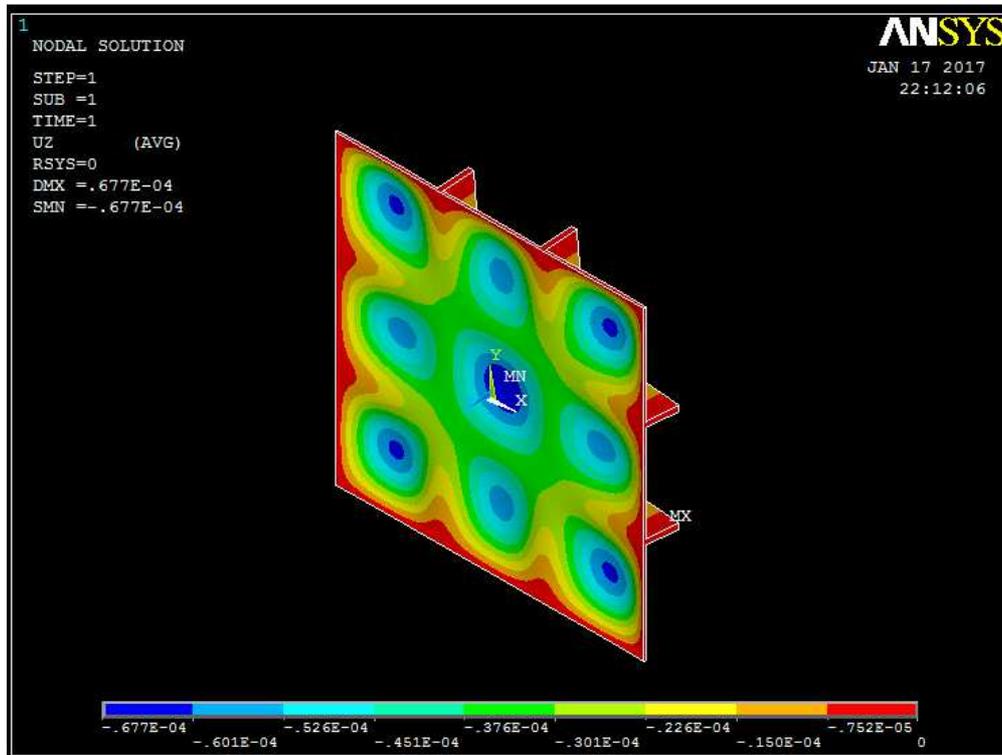


Figura B.1 - Deflexão máxima da combinação P(2x2) - $he = a/10$

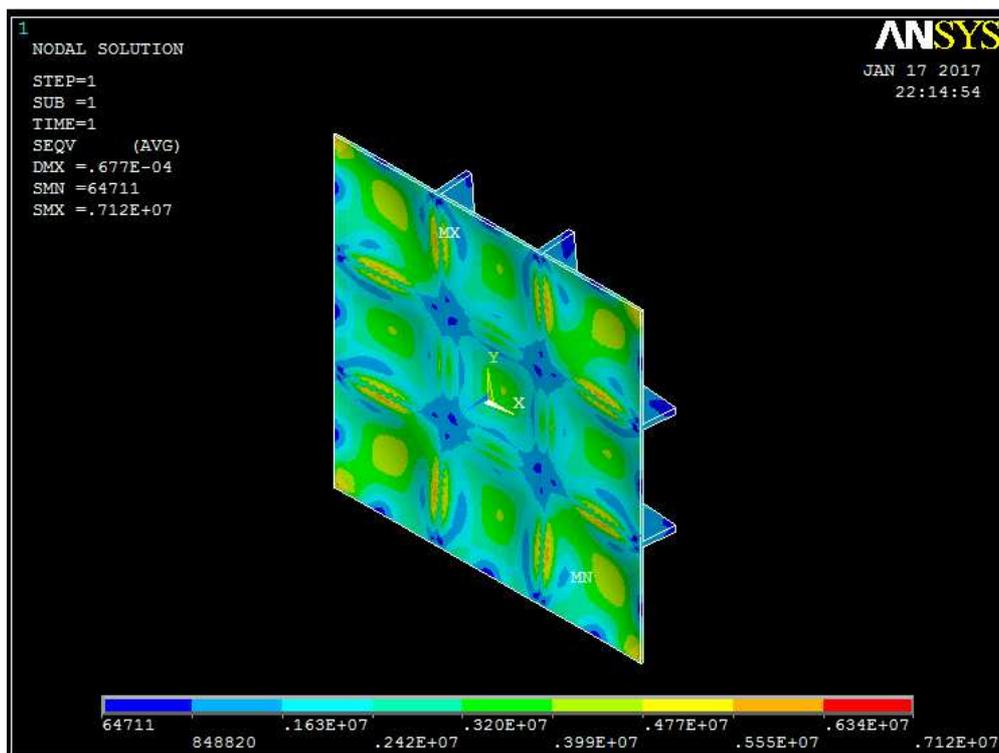


Figura B.2 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(2x2) - $he = a/10$

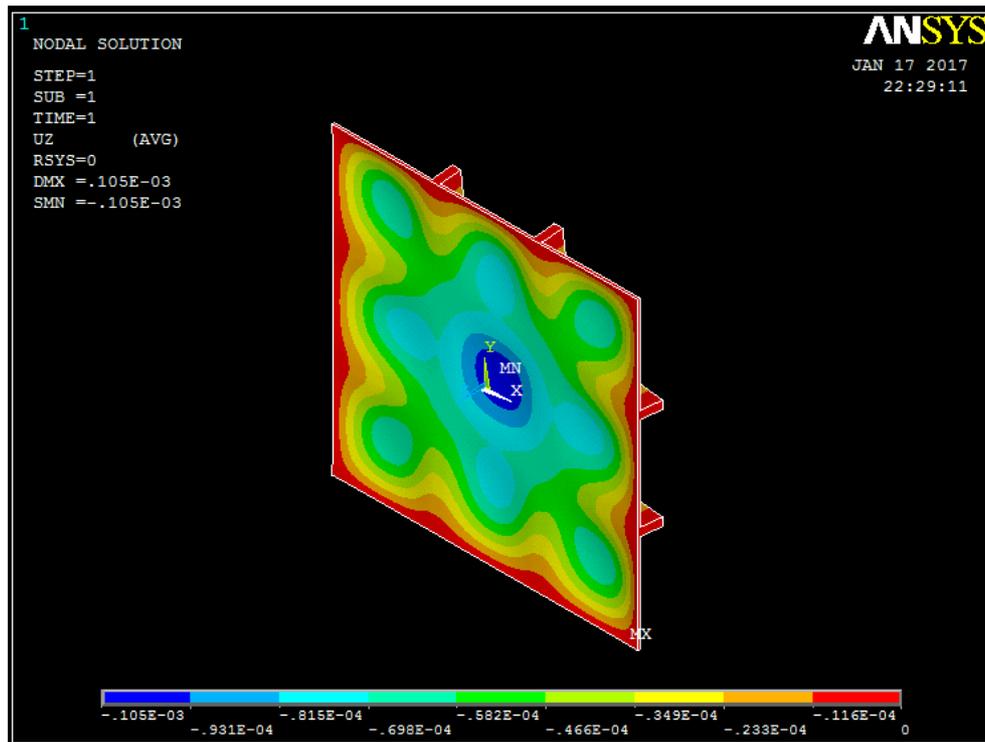


Figura B.3 - Deflexão máxima da combinação P(2x2) - $he = a/15$

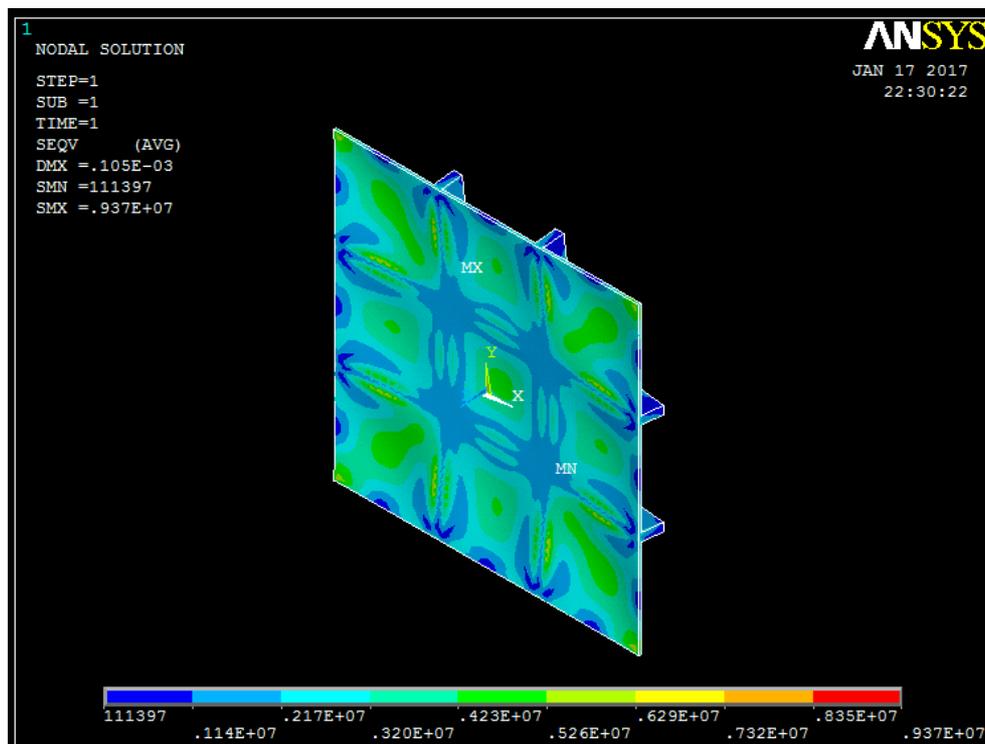


Figura B.4 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(2x2) - $he = a/15$

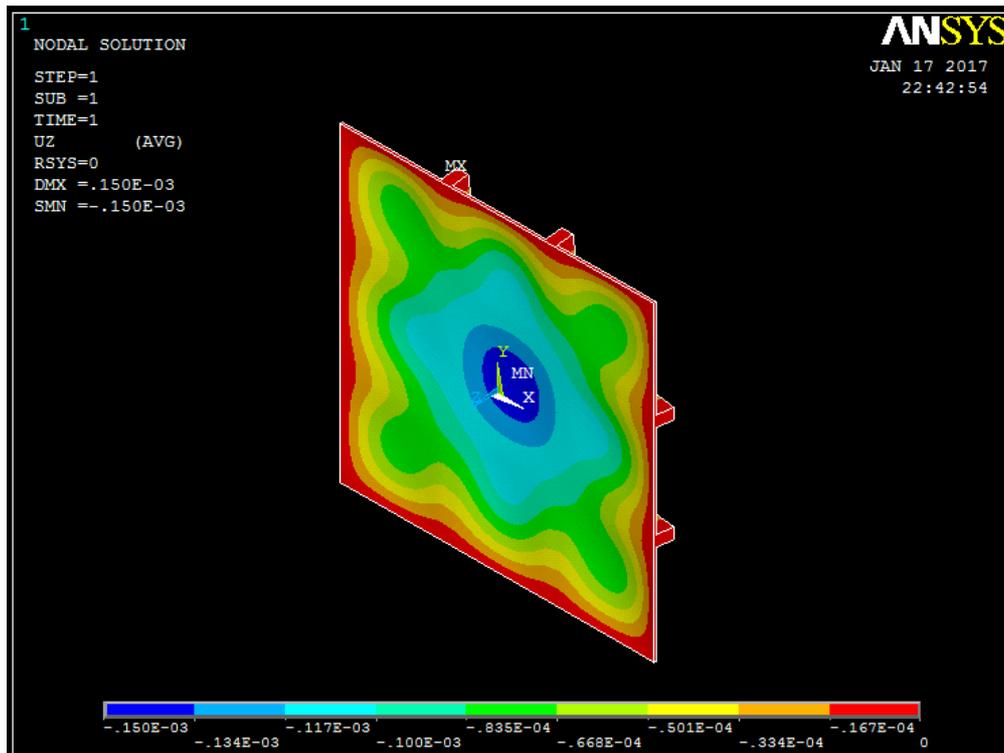


Figura B.5 - Deflexão máxima da combinação P(2x2) - $he = a/20$

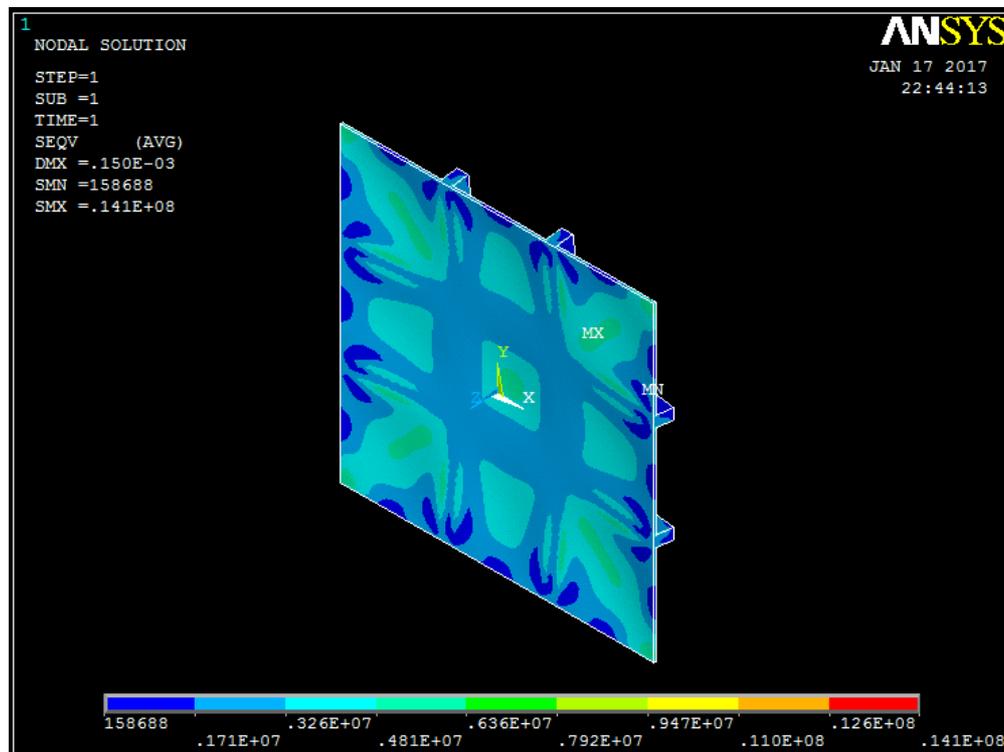


Figura B.6 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(2x2) - $he = a/20$

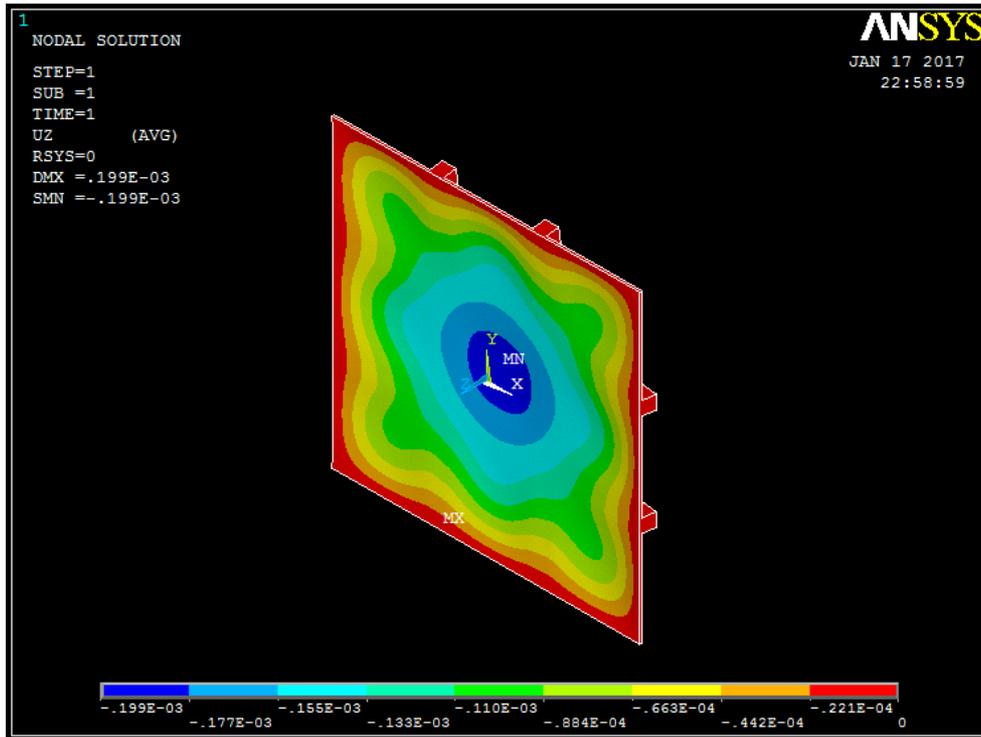


Figura B.7 - Deflexão máxima da combinação P(2x2) - $he = a/25$

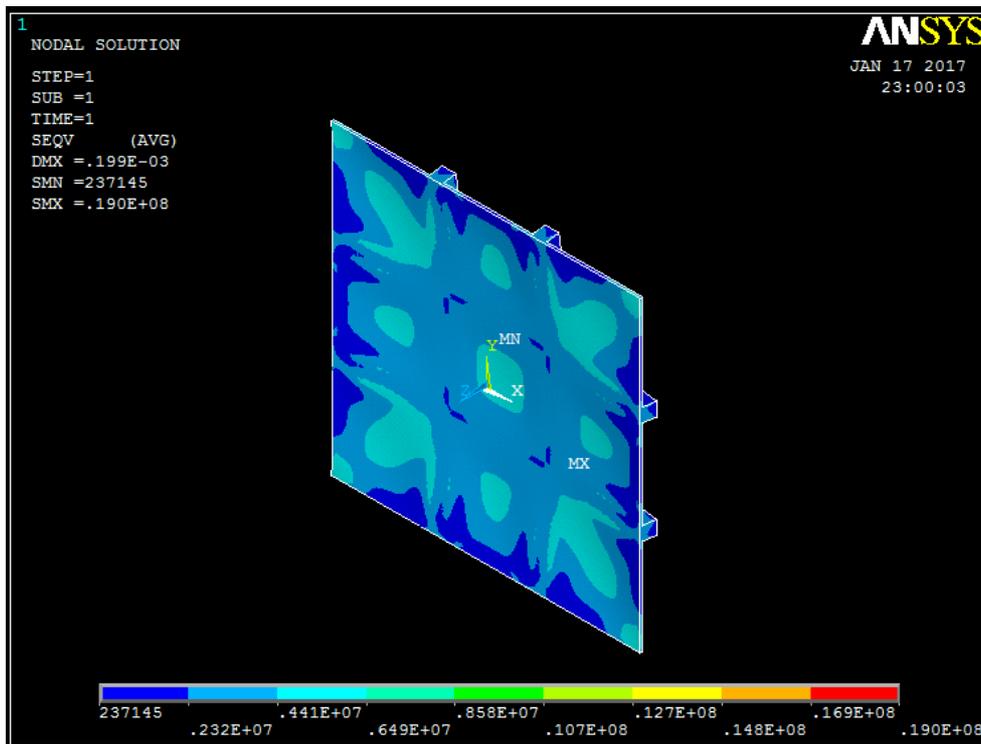


Figura B.8 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(2x2) - $he = a/25$

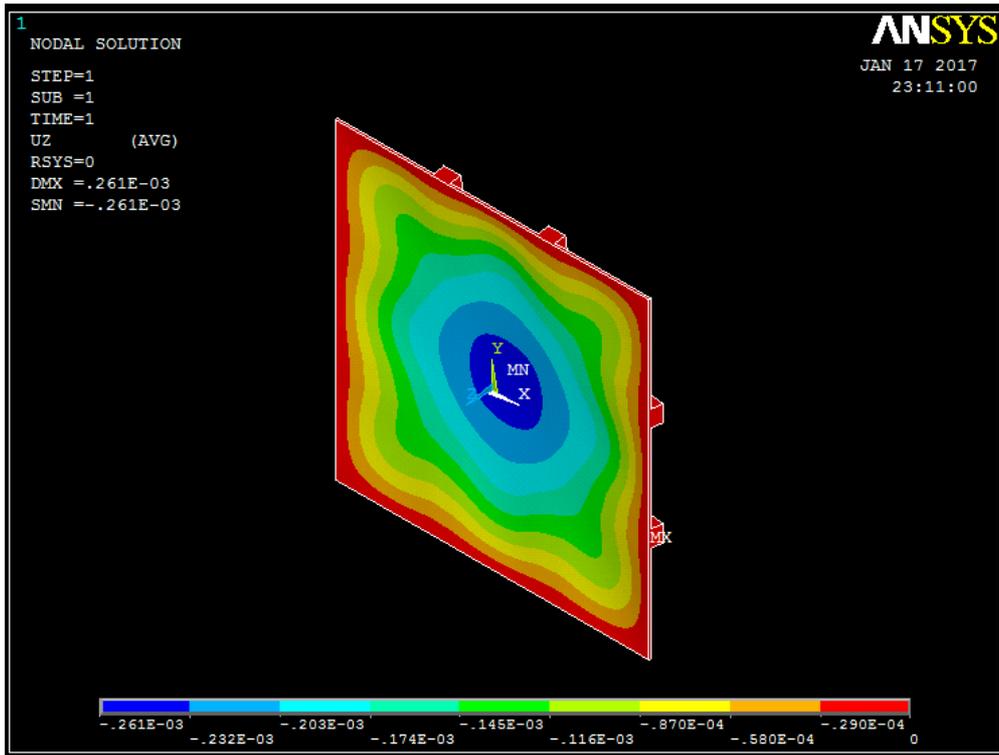


Figura B.9 - Deflexão máxima da combinação P(2x2) - $he = a/30$

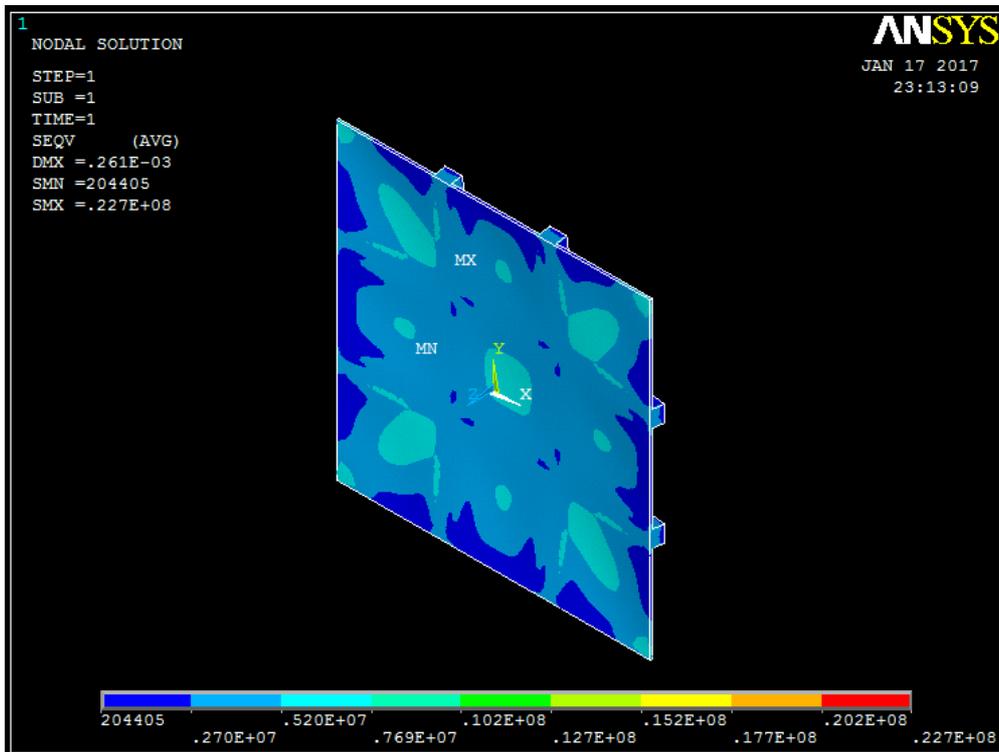


Figura B.10 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(2x2) - $he = a/30$

**APÊNDICE C – Resultados das simulações da placa P(3x3)
(Fonte: ANSYS®, 2012)**

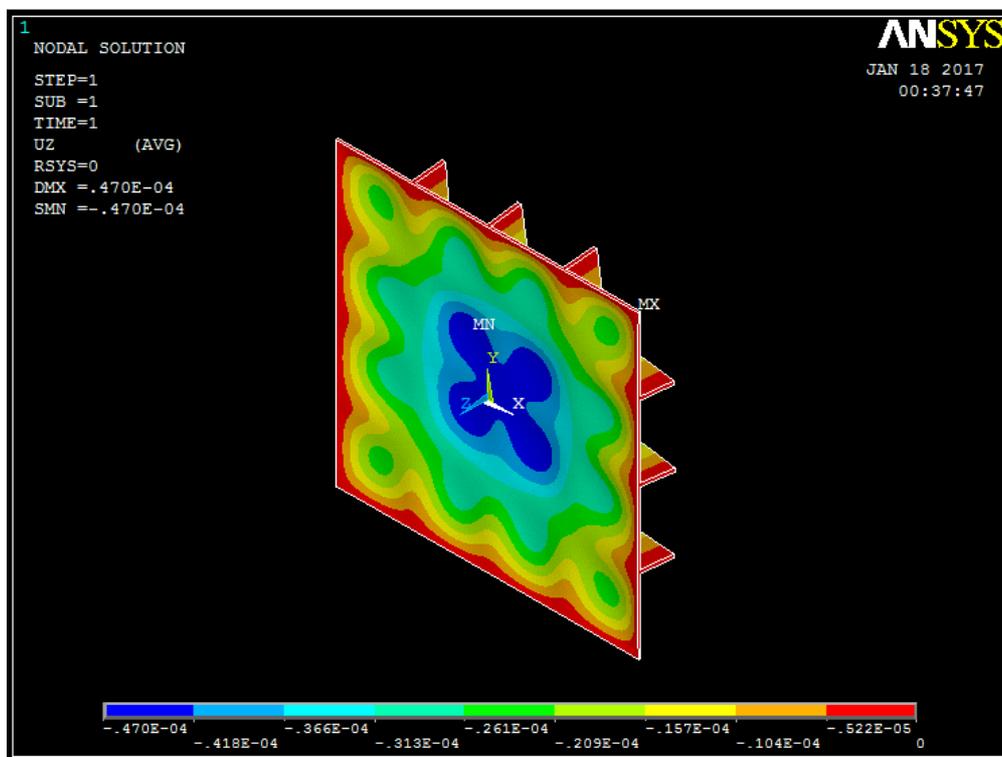


Figura C.1 - Deflexão máxima da combinação P(3x3) - $he = a/10$

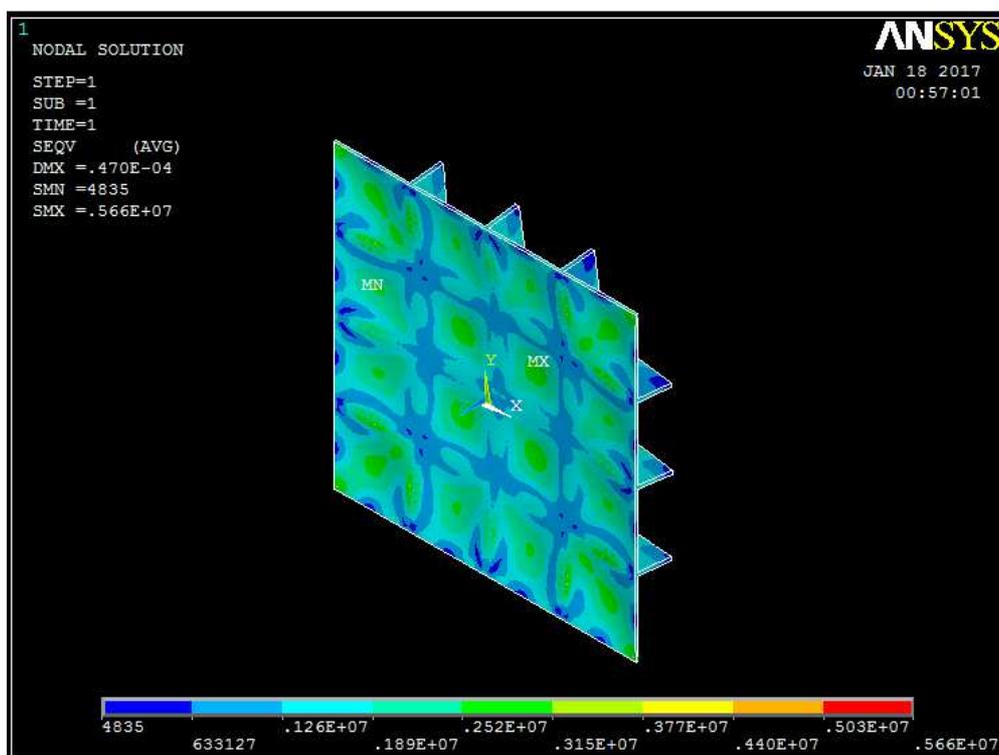


Figura C.2 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(3x3) - $he = a/10$

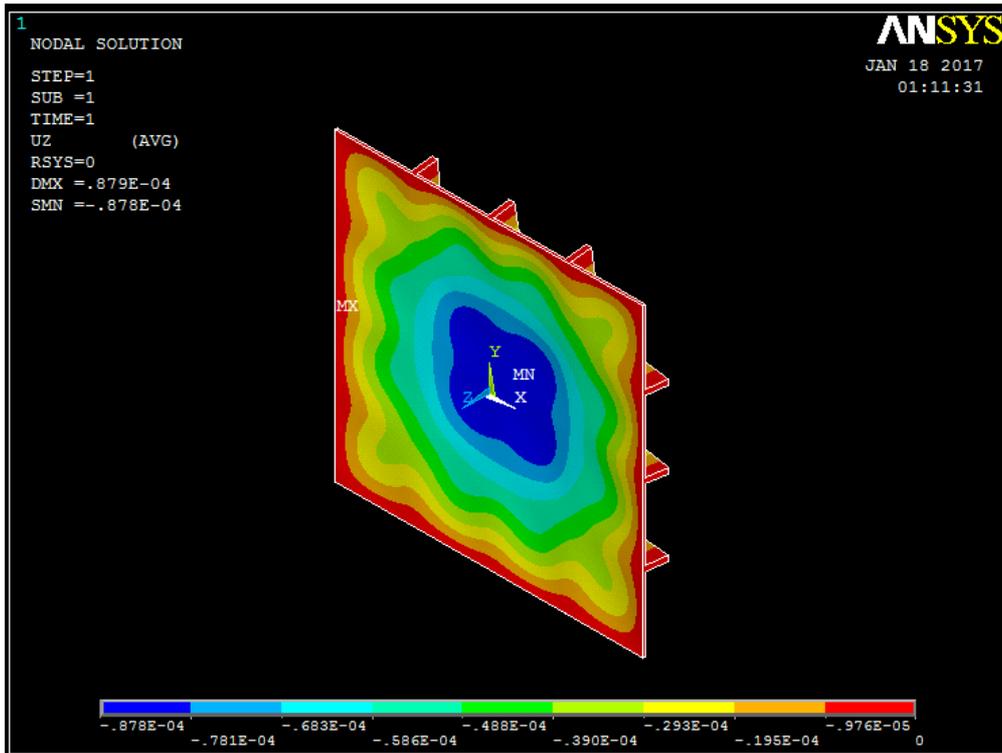


Figura C.3 - Deflexão máxima da combinação P(3x3) - $he = a/15$

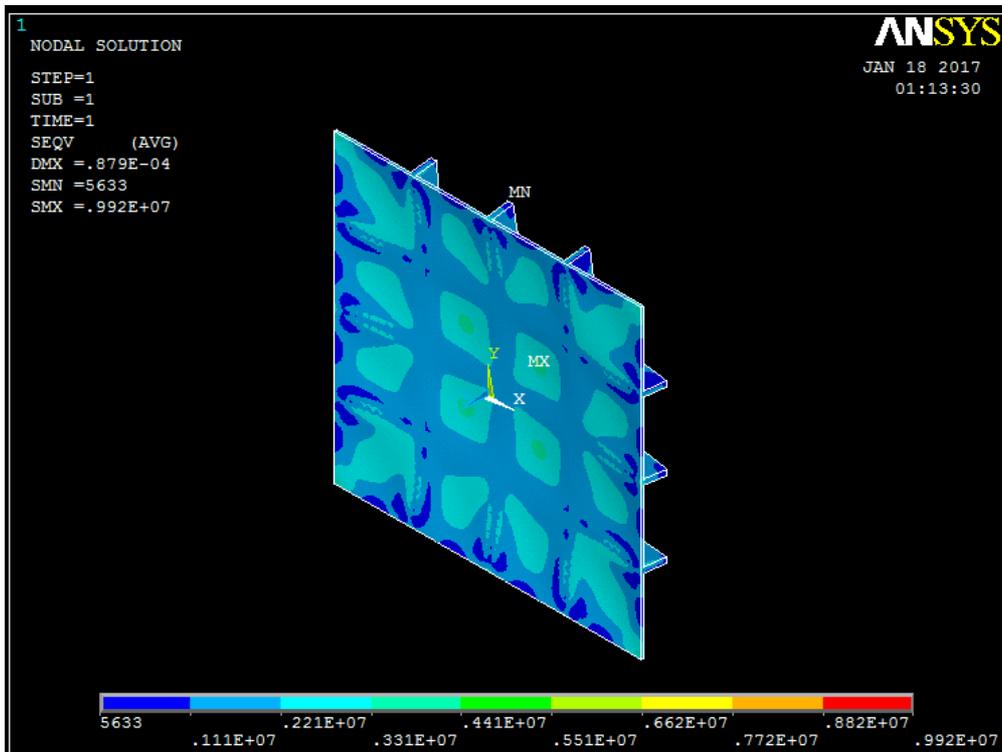


Figura C.4 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(3x3) - $he = a/15$

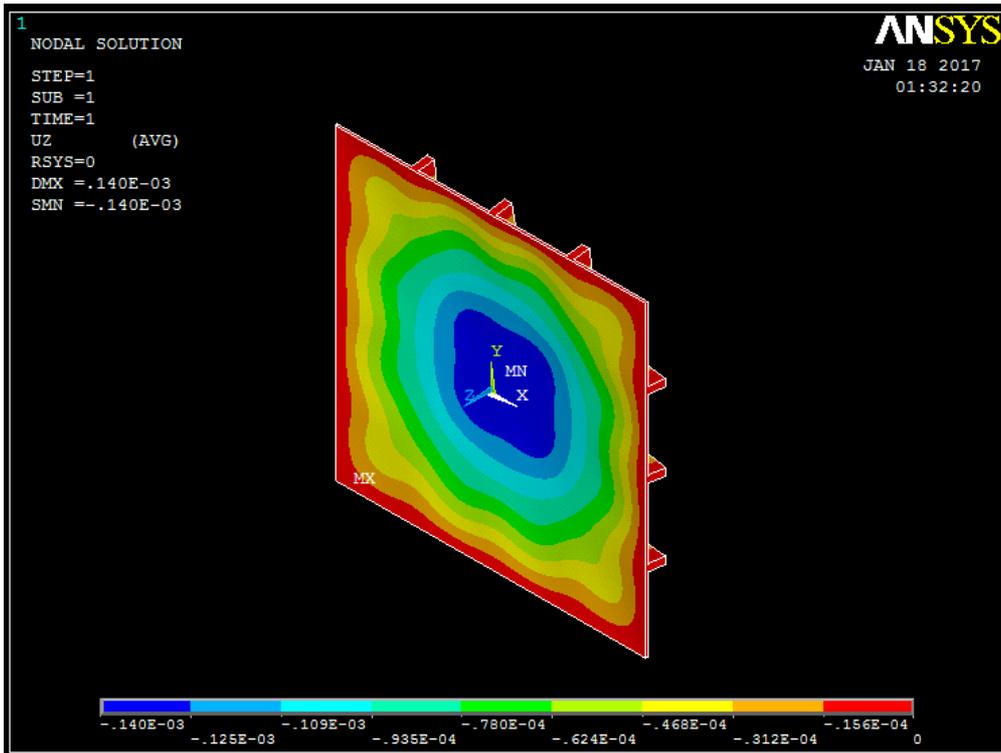


Figura C.5 - Deflexão máxima da combinação P(3x3) - $he = a/20$

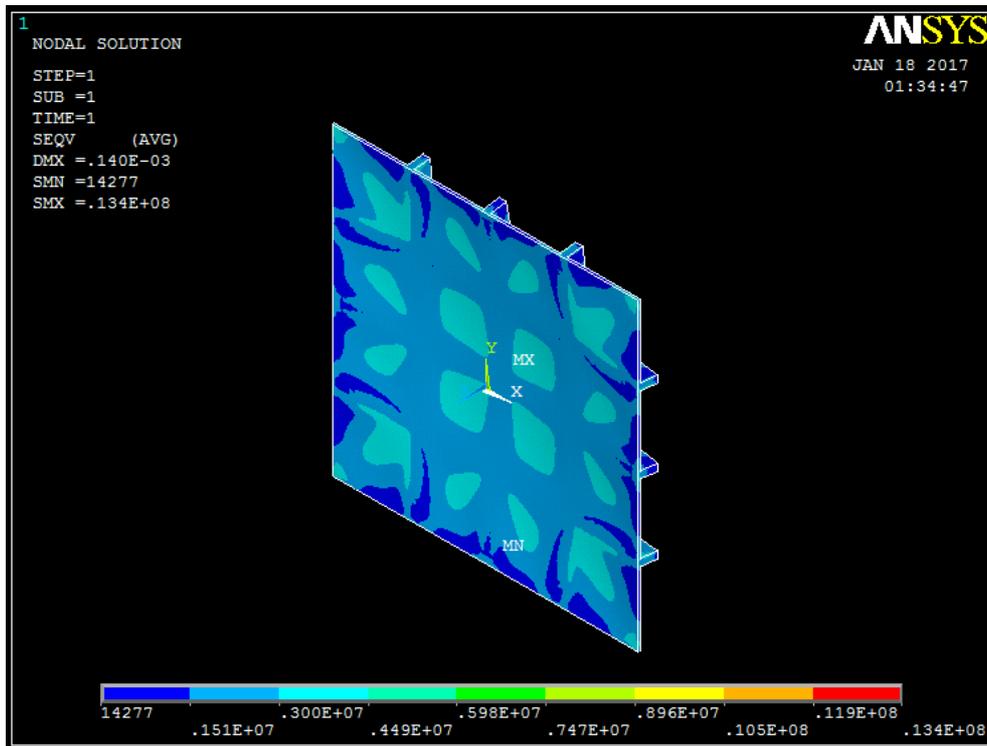


Figura C.6 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(3x3) - $he = a/20$

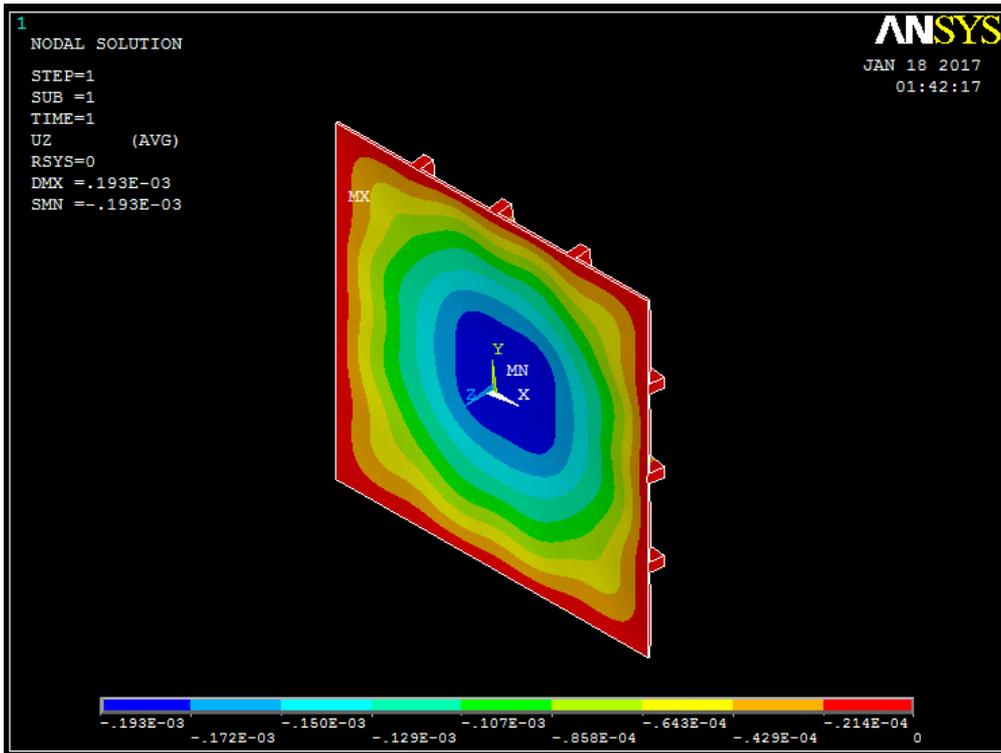


Figura C.7 - Deflexão máxima da combinação P(3x3) - $he = a/25$

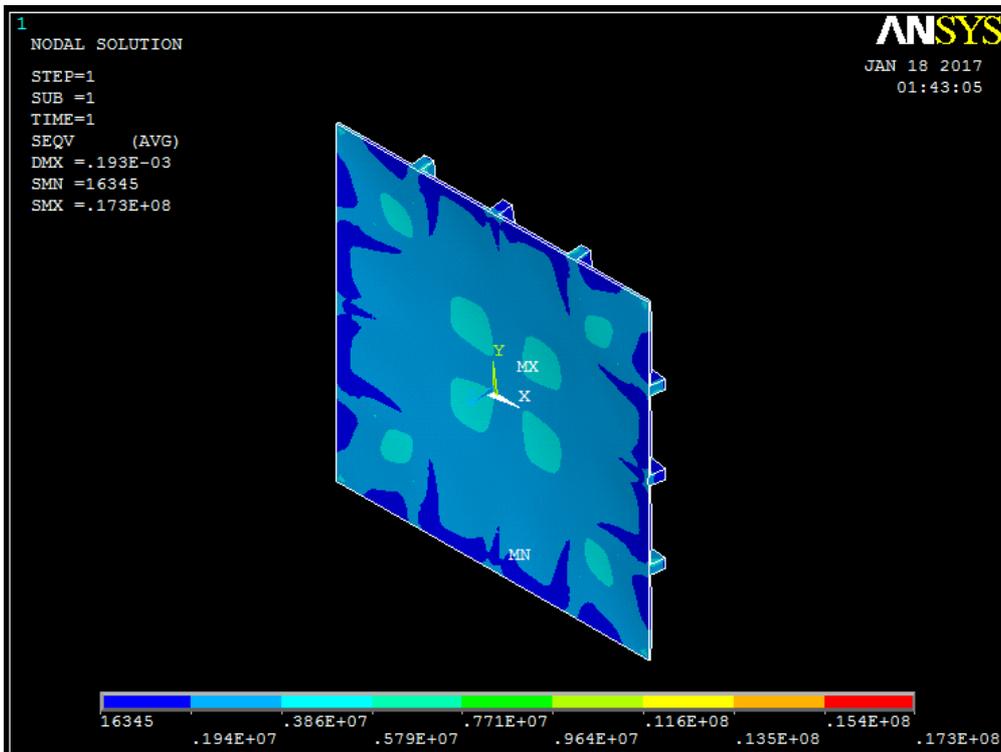


Figura C.8 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(3x3) - $he = a/25$

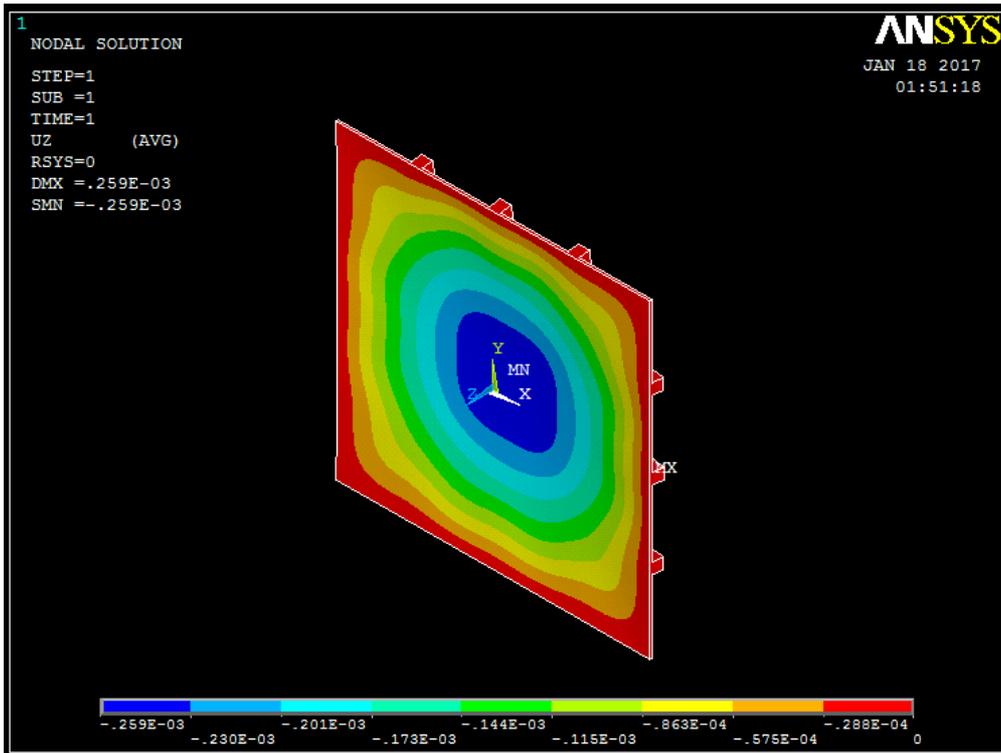


Figura C.9 - Deflexão máxima da combinação P(3x3) - $he = a/30$

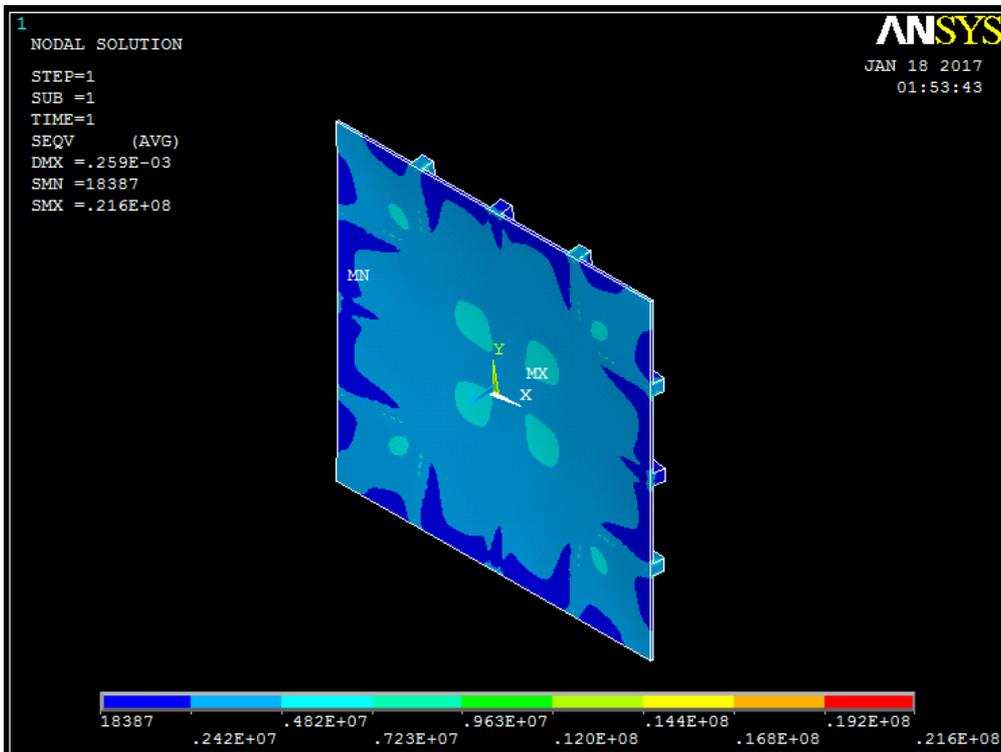


Figura C.10 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(3x3) - $he = a/30$

APÊNDICE D – Resultados das simulações da placa P(5x5) (Fonte: ANSYS®, 2012)

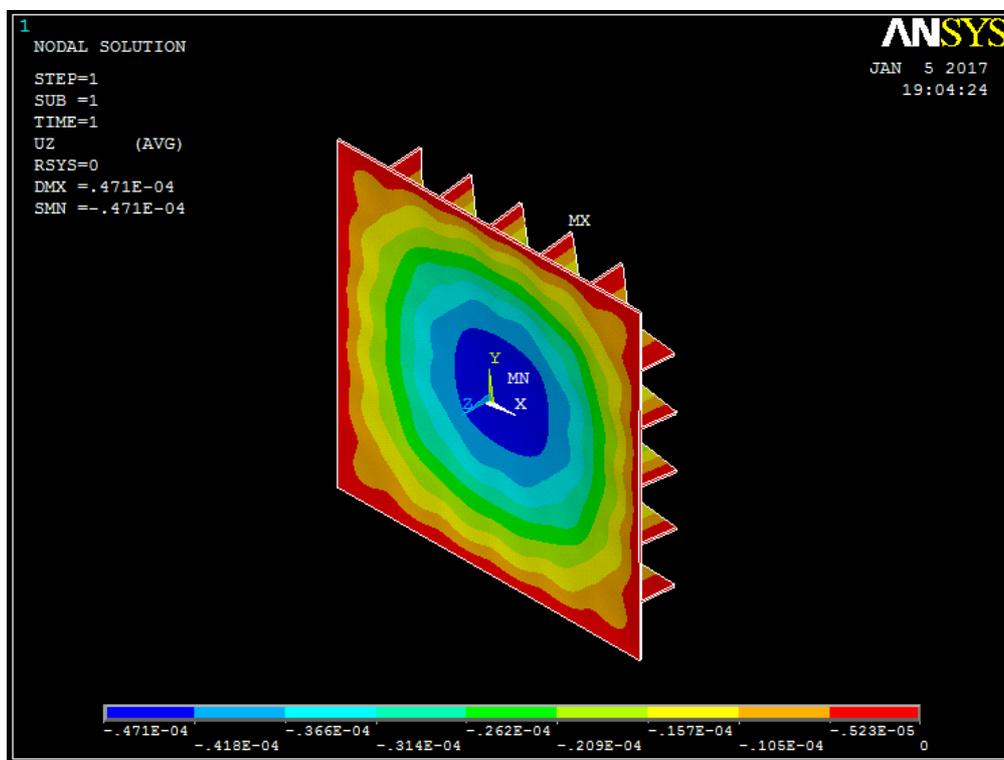


Figura D.1 - Deflexão máxima da combinação P(5x5) - $he = a/10$

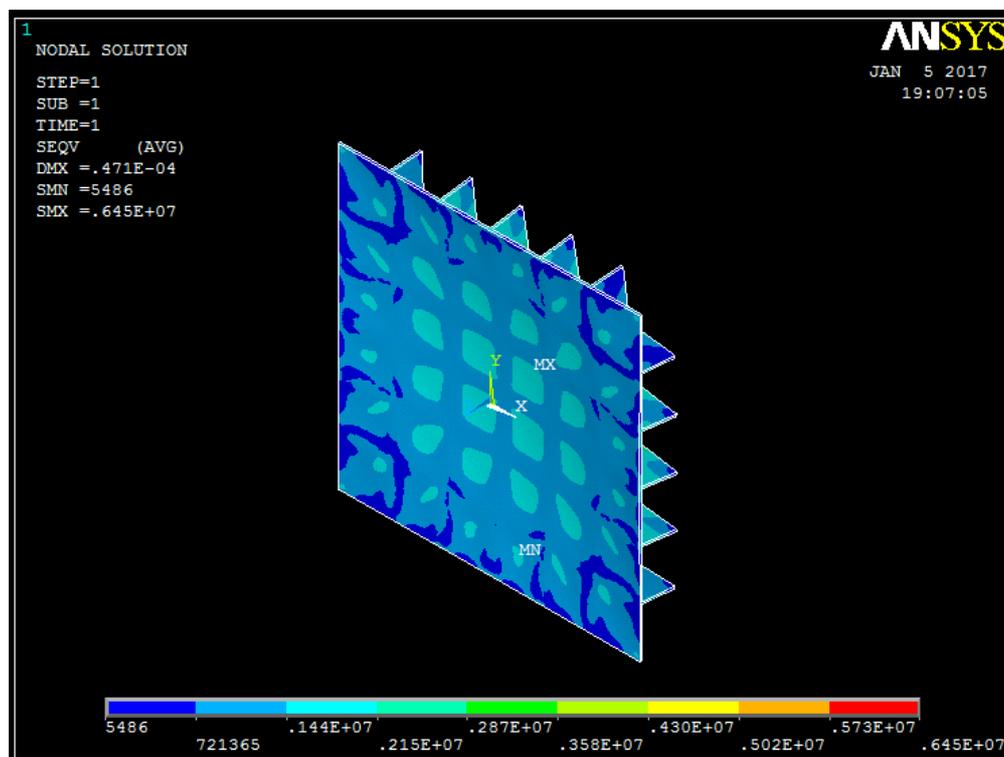


Figura D.2 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(5x5) - $he = a/10$

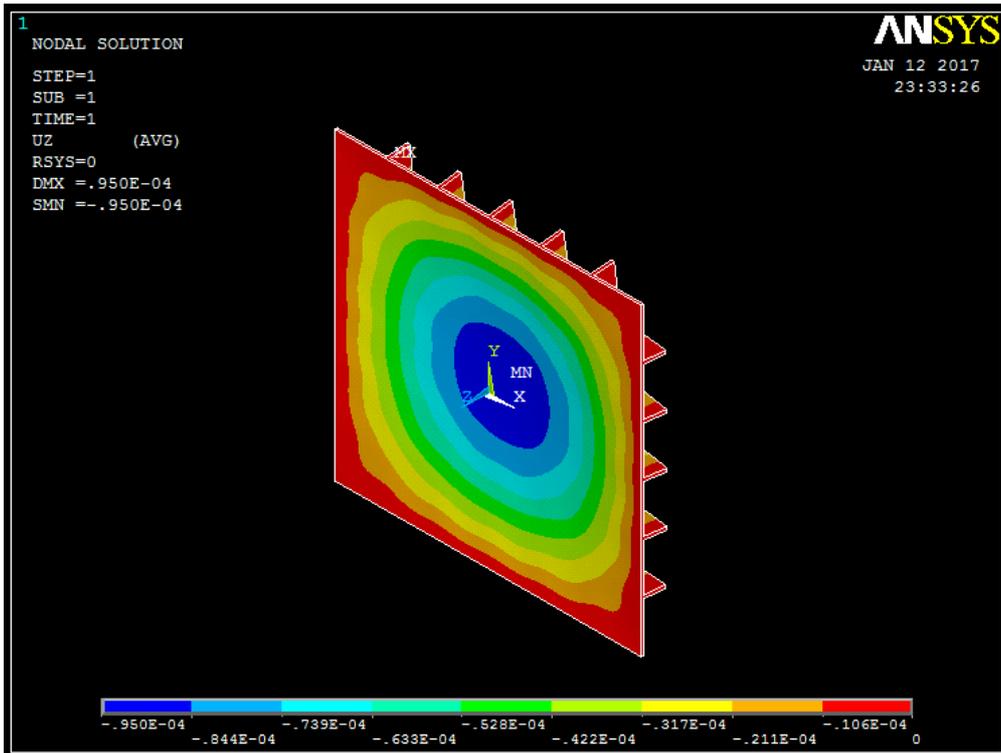


Figura D.3 - Deflexão máxima da combinação P(5x5) - $he = a/15$

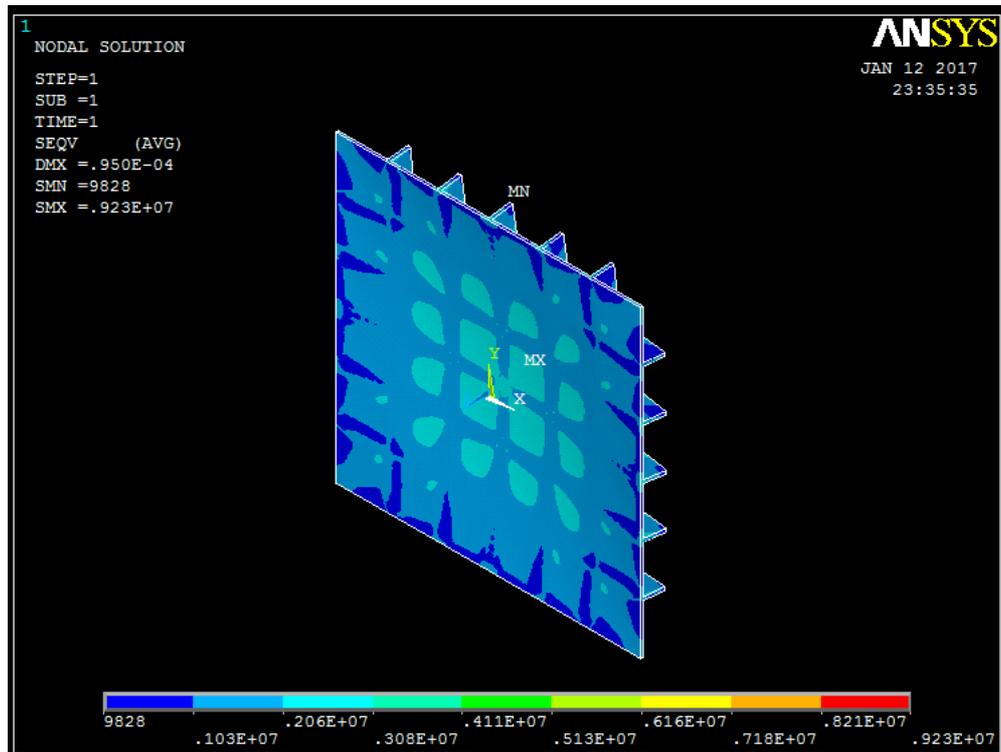


Figura D.4 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(5x5) - $he = a/15$

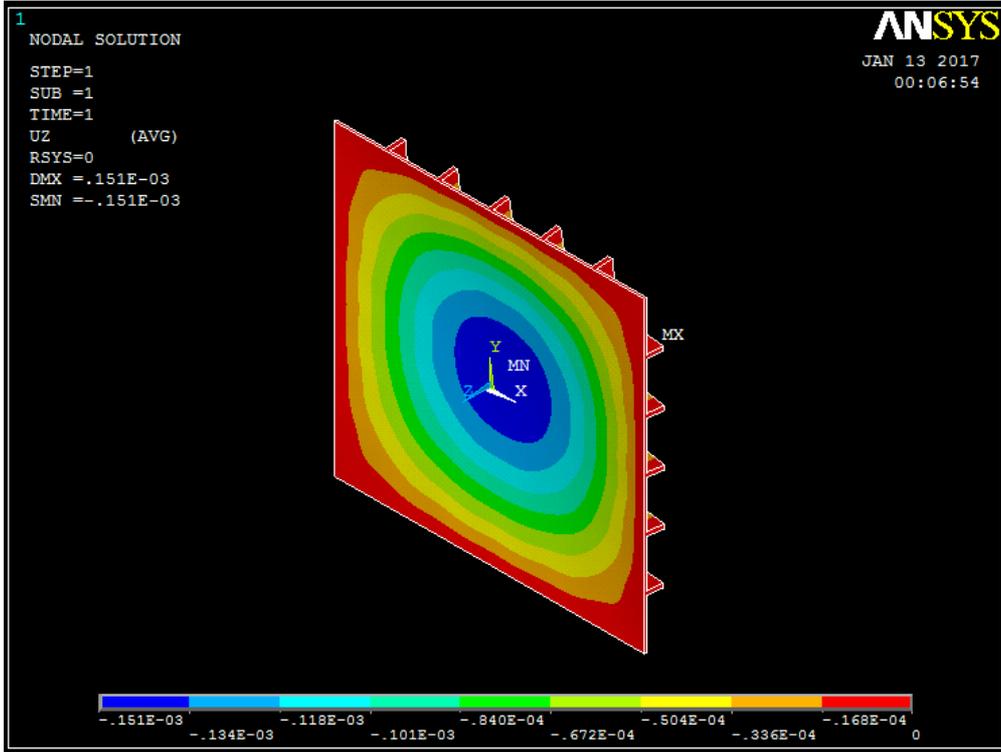


Figura D.5 - Deflexão máxima da combinação P(5x5) - $he = a/20$

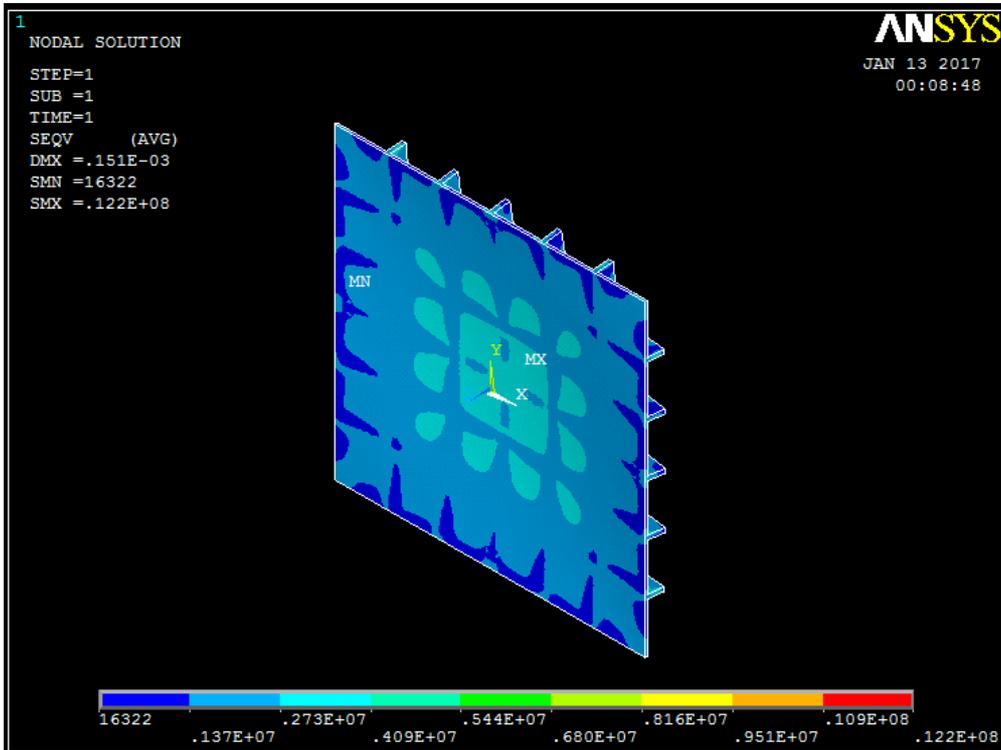


Figura D.6 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(5x5) - $he = a/20$

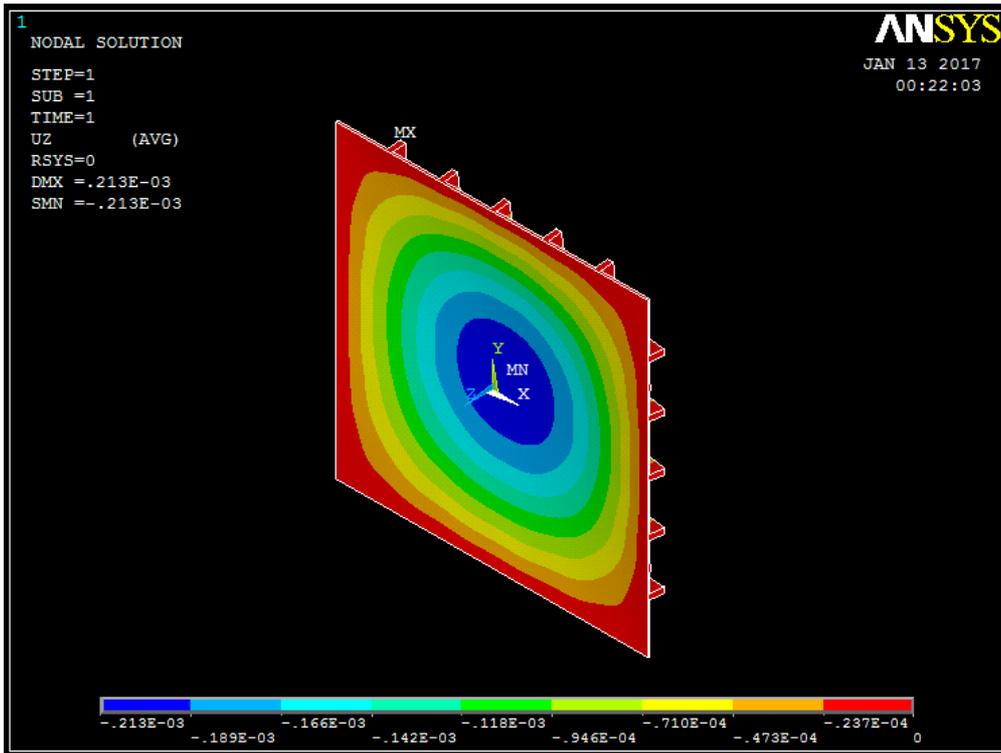


Figura D.7 - Deflexão máxima da combinação P(5x5) - $he = a/25$

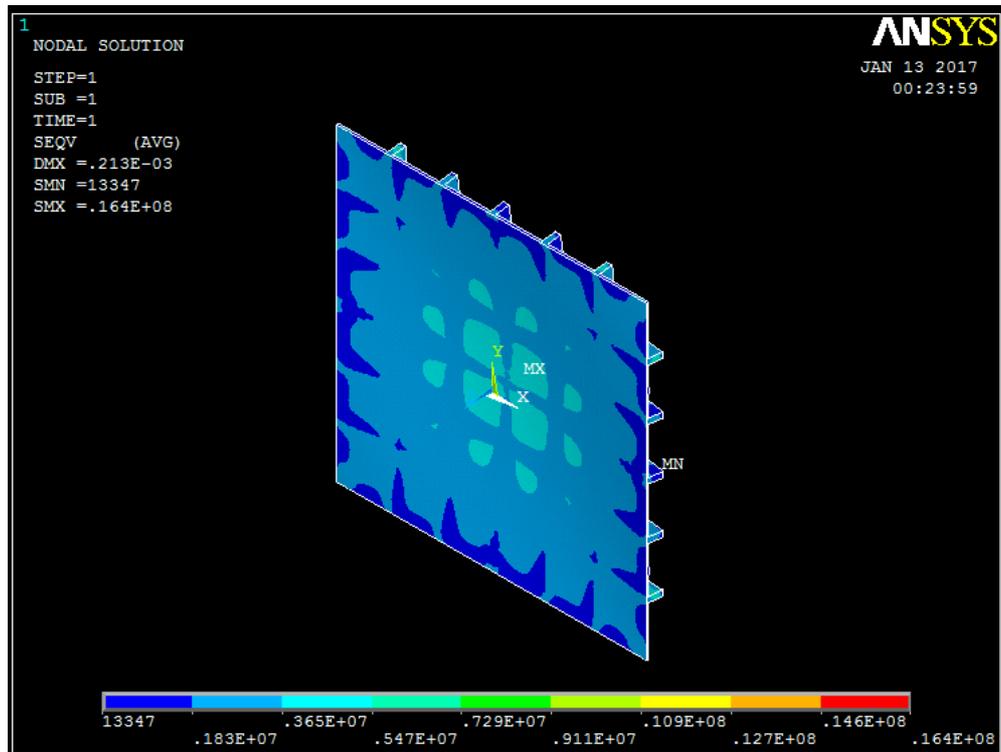


Figura D.8 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(5x5) - $he = a/25$

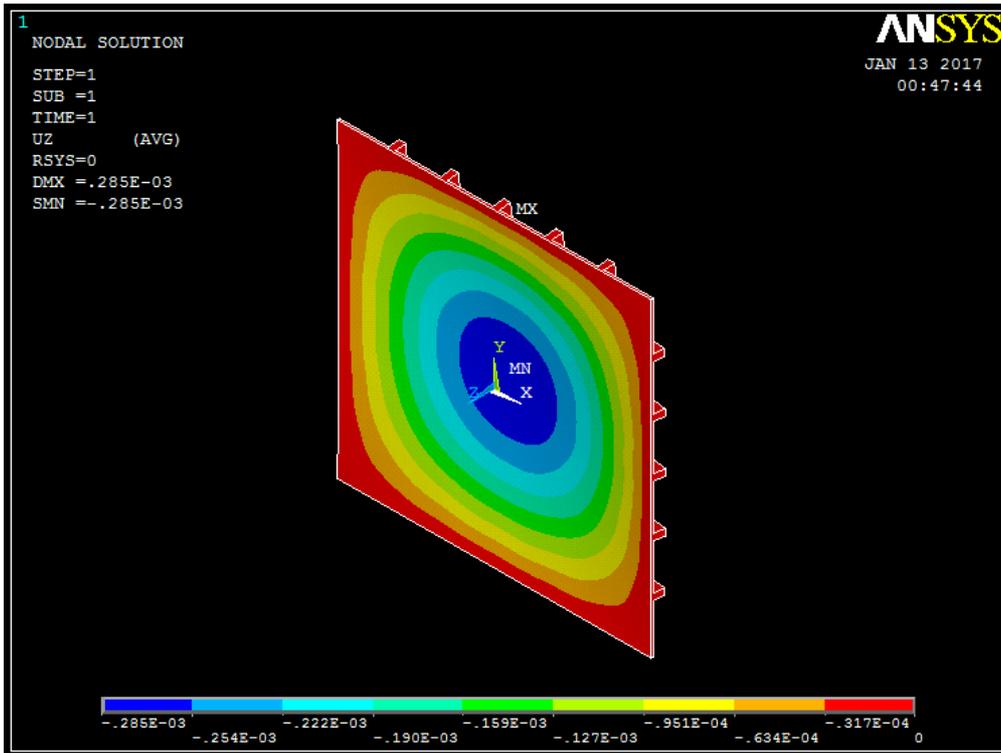


Figura D.9 - Deflexão máxima da combinação P(5x5) - $he = a/30$

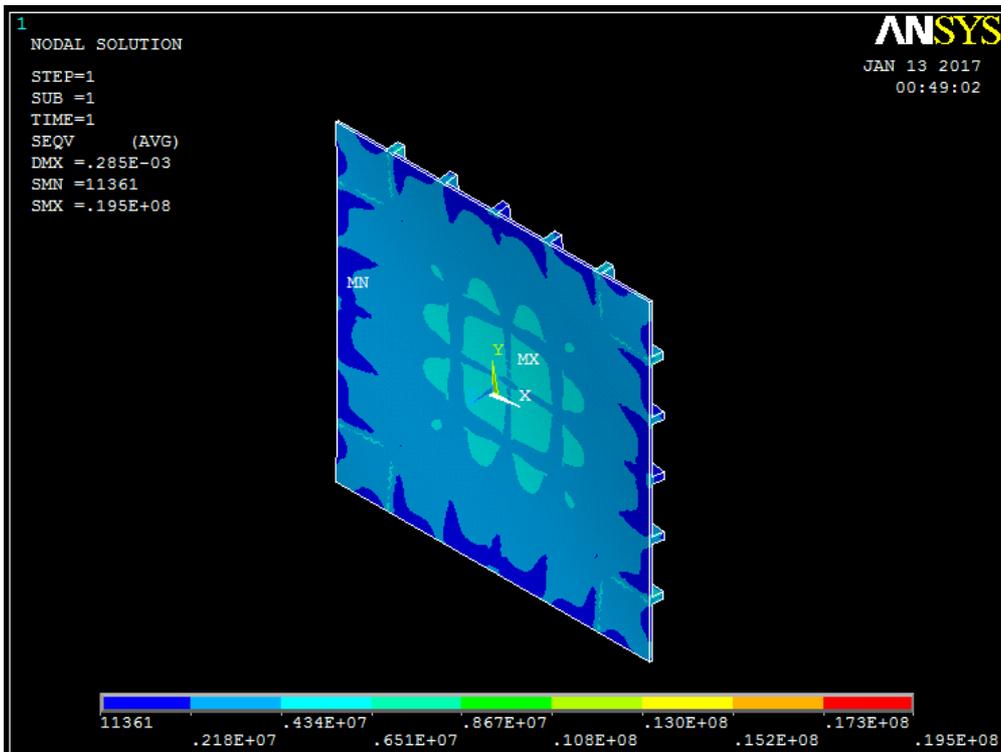


Figura D.10 - Tensão de von Mises máxima da combinação P(5x5) - $he = a/30$