

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS A PLACAS COM  
ENRIJECEDORES LONGITUDINAIS E TRANSVERSAIS COM DIFERENTES RELAÇÕES  
ALTURA/ESPESSURA

por

Carolina Martins Nogueira

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica

Rio Grande, Agosto, 2019

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS A PLACAS COM  
ENRIJECEDORES LONGITUDINAIS E TRANSVERSAIS COM DIFERENTES RELAÇÕES  
ALTURA/ESPESSURA

Por

Carolina Martins Nogueira

Engenheira Civil

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Linha de Pesquisa: Estruturas e Equipamentos Oceânicos

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Eduardo Costa Couto

UFPEL

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real

PPGEO/FURG

Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 30 de Agosto de 2019

**“SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL PARA AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO ENTRE ENRIJECEDORES NA DEFLEXÃO DE PLACAS FINAS DE AÇO QUANDO SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME”**

Carolina Martins Nogueira

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de:

***MESTRE EM ENGENHARIA OCEÂNICA***

Tendo sido aprovada em sua forma final pela Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica



Prof. Dr. Márcio André Isoldi  
Coordenador do PPGEO/FURG

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Márcio André Isoldi  
Orientador – PPGEO/FURG



Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real  
Membro Interno – PPGEO/FURG



Prof. Dr. Eduardo Costa Couto  
Membro Externo – UFPel

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Liércio André Isoldi, pela orientação, disponibilidade, apoio e paciência durante este período.

Aos membros da banca pela disponibilidade e contribuições para o trabalho

Aos meus pais, João e Ana, ao meu filho, Gabriel, ao meu namorado, Felipe, a minha irmã, Manoela e amigos pelo apoio nesta etapa.

Ao CNPq pelo apoio financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa.

## RESUMO

Placas finas de aço com enrijecedores são amplamente utilizadas em estruturas navais, na construção civil e aeronáutica. Essas placas têm como característica o seu baixo valor de espessura em relação às demais dimensões. Um parâmetro de análise fundamental é a deflexão desta placa quando sujeita a um carregamento. No caso desta pesquisa, em que se estudam placas retangulares com enrijecedores sujeitas a uma carga transversal uniformemente distribuída, o cálculo analítico é complexo e limitado a casos específicos mais simples. Assim, foi necessária a utilização de soluções numéricas para a determinação da flecha após a deformação. Essas simulações numéricas foram realizadas através do software ANSYS®, que emprega o Método dos Elementos Finitos (MEF). Os modelos numéricos utilizaram o elemento bidimensional SHELL281, de oito nós, com malha regular gerada a partir de quadriláteros. A obtenção das diferentes configurações geométricas analisadas foi determinada através do uso do Método Design Construtal, que transformou 30% do volume da placa de referência (sem enrijecedores) em enrijecedores dispostos na direção longitudinal e transversal da placa. Nesta transformação os valores de largura e comprimento da placa foram mantidos constantes. Essas diferentes configurações geométricas foram simuladas numericamente, sendo possível, então, a análise da influência dos parâmetros geométricos (número de enrijecedores na direção longitudinal e transversal, espessura do enrijecedor e relação entre a altura do enrijecedor na transversal e altura do enrijecedor na longitudinal) nas deflexões máximas e centrais da placa. Os resultados obtidos indicam que adição de enrijecedores acarreta em uma melhora no comportamento mecânico em relação à deflexão em todos os casos. Além disso, foi observado que o aumento na altura dos enrijecedores transversais é mais relevante do que dos longitudinais, conduzindo a uma maior diminuição da deflexão da placa no que tange aos deslocamentos máximo e central. A geometria otimizada resultou em uma redução de 97,92% na deflexão máxima e 98,81% na deflexão central em relação à placa de referência não enrijecida.

Palavras-chaves: Deflexão, Placas, Enrijecedores, Design Construtal e Simulação Numérica.

## ABSTRACT

Thin stiffened steel plates are widely used in naval structures, civil construction and aeronautics. These plates are characterized by their low thickness value in relation to the other dimensions. A critical analysis parameter is the deflection of this plate when subjected to loading. In the case of this research, where rectangular plates with stiffeners subjected to a uniformly distributed transverse load are studied, the analytical calculation is complex and limited to simpler specific cases. Thus, it was necessary to use numerical solutions to determine the deflection after deformation. These numerical simulations were performed using the software ANSYS, which uses the Finite Element Method (FEM). The numerical models use the bidimensional element SHELL, with quadrangular mesh element, and eight nodes. The obtainment of the different geometric configurations analyzed was determined by the Constructal Method, which transformed 30% of the reference plate volume into stiffeners arranged in the longitudinal and transverse direction of the plate. In this transformation, the plate width and length values were kept constant. These different geometrical configurations were numerically simulated, and it was then possible to analyze the influence of the geometrical parameters (number of stiffeners in the longitudinal and transverse direction, stiffener thickness and the relationship between stiffener height in transverse direction and thickness of stiffeners height in longitudinal) in the maximum and central deflections of the plate. The results indicate that the addition of stiffeners results in a mechanical improvement in all cases and that the increase in the height of the transverse stiffeners is more relevant than the longitudinal ones. In addition, an improvement in plate performance with respect to the maximum and central displacements. The optimized geometry resulted in a 97.92% reduction in maximum deflection and 98.81% in central deflection relative to the non-stiffened reference plate.

Keywords: Maximum deflection, Plates, Stiffeners, Constructal Design and Numerical Simulation.

# ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	13
1.1. Estado da Arte .....	14
1.2. Objetivos .....	15
1.2.1. Objetivo Geral.....	15
1.2.2. Objetivos Específicos.....	15
1.3. Metodologia .....	16
1.4. Organização da dissertação .....	17
2. TEORIA DAS PLACAS .....	18
2.1. Teoria de placas finas .....	19
2.2. Teoria de placas elásticas e suas equações governantes.....	25
2.3. Solução de Navier para placa retangular simplesmente apoiada .....	26
2.4. Solução alternativa para placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído – Lévy .....	27
2.5. Placas com enrijecedores .....	30
3. MODELAGEM COMPUTACIONAL .....	33
3.1. Método dos Elementos Finitos (MEF).....	33
4. 1 TEORIA CONSTRUTAL .....	36
4.1. Lei Construtal.....	36
4.2. Método Design Construtal .....	36
4.3. Método Design Construtal aplicado em placas enrijecidas .....	37
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	41
5.1. Teste de convergência de malha.....	41
5.2. Verificação do modelo computacional .....	42
5.2.1. Placa quadrada simplesmente apoiada sem enrijecedores .....	42
5.2.2. Placa retangular simplesmente apoiada sem enrijecedores.....	43
5.2.3. Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor central .....	43
5.2.4. Placa retangular simplesmente apoiada com dois enrijecedores em cruz.....	44
5.2.5. Placa retangular simplesmente apoiada com variação de altura do enrijecedor central .....	45
5.3. Aplicação do modelo.....	48
6. CONCLUSÕES .....	59
6.1. Proposta de continuidade .....	60
7. REFERÊNCIAS.....	61

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Placa retangular sujeita a carregamento transversal (Fonte: Adaptada de Szilard, 2004). .....	20
Figura 2.2 – Estado de tensões provado pelo carregamento (Fonte: Szilard, 2004). .....	20
Figura 2.3 – Esforços internos do elemento da placa (Fonte: Adaptada de Szilard, 2004). .....	21
Figura 2.4 - Esforços internos no plano média da placa (Fonte: Szilard, 2004).....	22
Figura 2.5 - Seção da placa antes e depois da deflexão (Fonte: Adaptado de Szilard, 2004).....	24
Figura 2.6 - Placa retangular simplesmente apoiada (Fonte: Bhaskar e Varadan, 2013).....	26
Figura 2.7 - Placa retangular com bordos opostos simplesmente apoiados (Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959).....	28
Figura 2.8 - Fatores numéricos para placas retangulares com carregamento uniformemente distribuído e simplesmente apoiada ( $\nu = 0,3$ ) (Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959)....	29
Figura 2.9 - Placa enrijecida (Fonte: Adaptada de Szilard, 2004). .....	30
Figura 2.10 - Rigidezes de placas ortotrópicas (Fonte: Adaptada de Ugural, 1981) .....	31
Figura 3.1 - Representação esquemática do processo de discretização espacial de um domínio por elementos finitos. (Fonte: Dias et al.,2010) .....	34
Figura 3.2 – Elemento quadrático SHELL281 (Fonte: ANSYS, 2017).....	35
Figura 4.1 - Representação da placa enrijecida na configuração P (2,3) .....	38
Figura 4.2 - Configurações geométricas obtidas pelo Método Design Construtal. ....	39
Figura 5.1 - Representação do campo de deslocamento da placa quadrada sem enrijecedor. ....	42
Figura 5.2 - Representação do campo de deslocamento da placa retangular sem enrijecedor .....	43
Figura 5.3 - Representação do campo de deslocamento da placa quadrada com um enrijecedor central.....	44
Figura 5.4 - Representação do campo de deslocamento da placa retangular com dois enrijecedor ortogonais.....	45
Figura 5.5 - Deformada placa retangular com $h_s = 0$ .....	46
Figura 5.6 - Deformada placa retangular com $h_s = 0,20$ m.....	47
Figura 5.7 - Deformada placa retangular com $h_s = 0,60$ m.....	47
Figura 5.8 - Deformada placa retangular com $h_s = 1,20$ m.....	47
Figura 5.9 - Deformada placa retangular com $h_s = 2$ m.....	48
Figura 5.10 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 2$ e $t_s =$ 6,35 mm .....	48
Figura 5.11 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 3$ e $t_s =$ 6,35 mm. ....	49
Figura 5.12 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 4$ e $t_s =$ 6,35 mm. ....	49
Figura 5.13 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 2$ e $t_s =$ 12,70 mm. ....	50
Figura 5.14 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 3$ e $t_s =$ 12,70 mm. ....	50
Figura 5.15 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 4$ e $t_s =$ 12,70 mm. ....	51
Figura 5.16 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h$ para $N_{ls} = 2$ e $t_s =$ 25,40 mm. ....	51
Figura 5.17 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 3$ e $t_s =$ 25,40 mm. ....	52
Figura 5.18 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade $h_{ts}/h_{ls}$ para $N_{ls} = 4$ e $t_s =$ 25,40 mm. ....	52
Figura 5.19 – Variação da distribuição de deslocamento para a placa P(3,3) com a) $t_s = 6,35$ mm b)	

$t_s = 12,70$ mm e c) $t_s = 25,40$ mm .....	55
Figura 5.20 – Comparação entre a placa de referência e a placa enrijecida P(2,3). .....	57
Figura 5.21 – Comparação entre a placa enrijecida P(2,3) com $t_s = 6,35$ mm e a placa P(4,4) com $t_s = 25,40$ mm. ....	58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1. Teste de independência de malha. ....	41
Tabela A.1. Resultados numéricos para a placa $P(N_{ts}, N_{ts})$ com $t_s = 6,35$ mm.....	64
Tabela A.2. Resultados numéricos para a placa $P(N_{ts}, N_{ts})$ com $t_s = 12,70$ mm.....	66
Tabela A.3. Resultados numéricos para a placa $P(N_{ts}, N_{ts})$ com $t_s = 25,40$ mm.....	68

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Algarismos Romanos

$a$	Comprimento da placa [m]
$b$	Largura [m]
$B$	Rigidez à torção efetiva da placa [N.m]
$D$	Rigidez à flexão da placa [N.m]
$D_x$	Rigidez à flexão da placa na direção $x$ [N.m]
$D_y$	Rigidez à flexão da placa na direção $y$ [N.m]
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) [Pa]
$G$	Módulo de elasticidade transversal [Pa]
$h$	Espessura da placa [m]
$h_{ls}$	Altura do enrijecedor longitudinal [m]
$h_{ts}$	Altura do enrijecedor transversal [m]
$M_x$	Momento fletor em $x$ [N.m]
$m_x$	Momento fletor por unidade de comprimento em $x$ [N.m/m]
$M_y$	Momento fletor em $y$ [N.m]
$m_y$	Momento fletor por unidade de comprimento em $y$ [N.m/m]
$M_{xy}$	Momento de torção que atua no plano ortogonal ao eixo $x$ [N.m]
$m_{xy}$	Momento de torção distribuído que atua no plano ortogonal ao eixo $x$ [N.m/m]
$M_{yx}$	Momento de torção que atua no plano ortogonal ao eixo $y$ [N.m]
$m_{xy}$	Momento de torção distribuído que atua no plano ortogonal ao eixo $y$ [N.m/m]
$N_{ls}$	Número de enrijecedores longitudinais [un.]
$N_{ts}$	Número de enrijecedores transversais [un.]
$p_z$	Carregamento distribuído aplicada à placa na direção $z$ [N/m <sup>2</sup> ]
$Q_x$	Força de cisalhamento transversal em $x$ [N]
$q_x$	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em $x$ [N/m]

$Q_y$	Força de cisalhamento transversal em $y$ [N]
$q_y$	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em $y$ [N/m]
$t$	Espessura da placa [m]
$t_s$	Espessura do enrijecedor [m]
$V_s$	Volume de material dos enrijecedores [m <sup>3</sup> ]
$V_r$	Volume total da placa de referência [m <sup>3</sup> ]
$w$	Componente de deslocamento na direção $z$ [m]
$x$	Direção $x$ do sistema cartesiano
$y$	Direção $y$ do sistema cartesiano
$z$	Direção $z$ do sistema cartesiano

### **Símbolos Gregos**

$\alpha$	Fator numérico em função da relação $b/a$
$\phi$	Fração volumétrica
$\varepsilon_x$	Deformação normal na direção do eixo $x$
$\varepsilon_y$	Deformação normal na direção do eixo $y$
$\sigma_x$	Tensão normal na direção do eixo $x$ [Pa]
$\sigma_y$	Tensão normal na direção do eixo $y$ [Pa]
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\tau_{xy}$	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo $x$ na direção $y$ [Pa]
$\tau_{yx}$	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo $y$ na direção $x$ [Pa]
$\gamma_{xy}$	Deformação por cisalhamento

# 1. INTRODUÇÃO

Da década de 50 até o início dos anos 80 a indústria naval brasileira passou por uma fase conhecida como estruturação/desenvolvimento e auge, chegando a apresentar o segundo maior parque naval em volume de processamento de aço do mundo, contudo ocorreu no fim deste período um processo de crise e decadência do setor (JESUS, 2013).

No início dos anos 90, devido aos programas de concessão das rodovias e ferrovias somado aos arrendamentos portuários, a lei do petróleo (lei 9.478/97) e o programa Navega Brasil teve-se uma grande melhora na realidade do setor Naval, que anteriormente apresentava altas deficiências (PASIN, 2002)

Segundo Jesus (2013), a construção naval brasileira pode ser entendida como um conjunto formado pelos estaleiros navais de grande e médio porte, sendo os estaleiros encarregados da construção e montagem de embarcações (navios, plataformas, etc.).

A estrutura básica de um navio é constituída do esqueleto e do forro exterior (chapeamento). As peças estruturais podem ser divididas de acordo com a resistência aos esforços que são submetidas, na direção longitudinal (vigas longitudinais), transversal (vigas transversais) e/ou locais. O chapeamento exterior tem como principal função a estanqueidade, mas também contribui na resistência do casco aos esforços longitudinais (GHAVAMI E KHEDMATI, 2006).

De acordo com Szilard (2004) as placas (chapas) são estruturas planas, bidimensionais, apresentando uma de suas dimensões, denominada espessura, muito menor que as demais. Podem ser delimitadas por linhas retas ou curvas. São exemplos de estruturas de placas: os cascos de um navio, o convés e sua superestrutura, além de compor parte dos maquinários e outros dispositivos.

De acordo com Lima (2016) essas chapas apresentam espessura fina e conseqüentemente baixa resistência à flexão, por exemplo, quando comparadas a vigas de maior altura. Por esse motivo, são aplicadas vigas esbeltas com a finalidade de fornecer maior rigidez a estas chapas e, conseqüentemente, melhorar a resistência à flexão. Essas vigas são, em geral, dispostas na direção longitudinal e/ou transversal das placas.

O presente trabalho é situado no campo da análise linear elástica com material homogêneo e isotrópico tendo como finalidade a análise numérica de placas com enrijecedores sujeitas à flexão devido a um carregamento transversal uniformemente distribuído, aliando para isto Método Design Construtal para avaliar a influência dos parâmetros geométricos na deflexão máxima e central da placa devido ao carregamento, obtendo-se assim a melhor distribuição de massa do conjunto placa/enrijecedor.

## 1.1. Estado da Arte

Estudos sobre a deflexão em placas metálicas vêm sendo desenvolvidos por diversos autores. Rossow e Ibrahimkhail (1978) realizaram um estudo onde o Método das Restrições é aplicado na análise estática de elementos finitos em placas enrijecidas concêntricas e excêntricas, sendo a solução computacional executada, respectivamente, nos softwares STRUDL e NASTRAN. Os resultados numéricos demonstraram que elementos de alta ordem produzem bons resultados, apresentando menos elementos e menos graus de liberdade do que o necessário ao usar elementos de baixa ordem.

Banai e Pedatzur (2006), por exemplo, utilizaram o Método dos Elementos Finitos (MEF), baseados no modelo de placa ortotrópica e modelo de grelha, para estimar a deflexão máxima nas placas quando submetidas a carregamento transversal uniforme. Em outro estudo, Liu e Wang (2012) analisaram numericamente os efeitos do reforço com enrijecedores em placas retangulares, descrevendo qual a altura, número e arranjo ideal dos enrijecedores que fornecem o melhor efeito de fortalecimento. Na mesma linha de pesquisa, Sapountzakis e Katsikadelis (2000) apresentam a solução para placas reforçadas com vigas, por meio da metodologia que isola as vigas da placa, considerando assim as forças e deformações na interface de união entre os elementos. Essa abordagem permite o cálculo dos esforços de cisalhamento nas regiões de união entre placa e enrijecedor. Nesse caso as soluções das equações diferenciais foram realizadas pelo Método da Equação Análoga (AEM). Silva (2010), por meio do software ANSYS® com elementos finitos do tipo SHELL63 e BEAM44 realizou a análise numérica de pavimentos com dimensões usuais onde foi verificado a influência da consideração ou não da excentricidade no comportamento da estrutura.

Bedair (1997) estudou o comportamento elástico de placas enrijecidas submetidas a carregamento transversal. Neste trabalho é apresentada uma nova formulação de energia em que é considerado o sistema formado pela placa e viga conectados de forma rígida em suas junções. Somado ao método da energia é utilizado o método da Programação Sequencial Quadrática (SQP). Os resultados demonstram a influência da localização do enrijecedor na estabilidade da placa e uma estratégia para a sua melhor localização. Sapountzakis e Mokos (2008) propõe uma solução geral para a análise de placas enrijecidas através de um método iterativo que permite a avaliação não linear da força de cisalhamento transversal na interface entre a placa e o enrijecedor, a análise é realizada na sua forma deformada através do método da equação análoga (AEM).

Bhaskar e Pydah (2014) empregaram quatro modelos utilizando modelo tridimensional e bidimensional através de solução analítica exata das equações que regem o problema para análise de placas simplesmente apoiadas com um enrijecedor central, chegando à conclusão da importância de modelos rigorosos, sendo os erros maiores nas placas enrijecidas do que as não enrijecidas. Aneja

et al. (2018) estudaram placas enrijecidas através da modelagem no Software CATIA e simulação numérica no ANSYS 18, realizando a análise a fim de quantificar a resistência-peso nos enrijecedores da placa em relação a placa que não apresenta esses reforços. Houve a variação do ângulo e da altura dos enrijecedores. Verificou-se que a força que atua no enrijecedor aumenta com o aumento do ângulo e com o aumento da altura dos enrijecedores. Chujutalli et al. (2018) realizaram experimentos que foram feitos através de modelos em escala reduzida dos painéis de fundo de um típico navio petroleiro Suezmax. Foi analisado os deslocamentos na interseção dos enrijecedores com a placa. Os modelos numéricos através do MEF foram desenvolvidos no software ABAQUS em três etapas sequenciais: implementação do código, partida e carregamento de compressão uniaxial. Os resultados indicam boa correlação numérica e experimental da força-deslocamento durante o processo.

No que diz respeito a estudos envolvendo o Design Construtal, diversos autores também propuseram contribuições, Troina (2017) determinou relações geométricas ótimas que minimizassem o valor da deflexão central em placas enrijecidas, submetidas a esforços transversais uniformemente distribuídos. Para esse fim, o autor utilizou o Método Design Construtal e a técnica de otimização por Busca Exaustiva, além do software ANSYS® com o emprego dos elementos finitos bidimensionais (SHELL93) e tridimensionais (SOLID95), para realizar a solução numérica. Por fim, Cunha et al. (2018) apresentaram uma avaliação geométrica de placas enrijecidas submetidas a carregamento transversal uniformemente distribuído, os modelos numéricos foram realizado no software ANSYS. Com esse objetivo, os autores aliaram Design Construtal e Busca Exaustiva, visando minimizar a deflexão central da placa.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo Geral**

Analisar o comportamento de placas retangulares de aço com enrijecedores nos sentidos longitudinais e transversais através da realização de simulações numéricas. Para isso aliou-se a modelagem computacional, o método Design Construtal e a técnica de Busca Exaustiva para avaliar a influência da configuração geométrica de placas com enrijecedores em relação à deflexão máxima e central devido a um carregamento transversal uniformemente distribuído. Além de definir a configuração geométrica ótima que minimiza a deflexão máxima e central da placa através da influência dos graus de liberdade do problema.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

Avaliar a influência dos seguintes fatores na deflexão máxima e central de uma placa com

enrijecedores:

- Número de enrijecedores na longitudinal ( $N_{ls}$ );
- Número de enrijecedores na transversal ( $N_{ts}$ );
- Espessura do enrijecedor ( $t_s$ );
- Relação entre a altura do enrijecedor na direção transversal ( $h_{ts}$ ) e a altura do enrijecedor na direção longitudinal ( $h_{ts}/h_{ls}$ ).

### 1.3. Metodologia

A metodologia para o desenvolvimento deste trabalho baseia-se na realização de simulações numéricas, através do MEF, para avaliação da deflexão de placas metálicas. A modelagem numérica foi realizada através do software ANSYS® onde foram inseridos a geometria, condições de contorno (simplesmente apoiada) e cargas aplicadas (carregamento transversal uniformemente distribuído). Foi utilizado o elemento SHELL281 de 8 nós, através de malha regular formada por quadriláteros. Para uma estimativa da precisão da solução com o modelo computacional faz-se necessário a verificação do modelo computacional, ou seja, comparação com resultados obtidos com resultados existentes na literatura, sejam analíticos ou numéricos.

Nesta pesquisa foi realizada uma análise elástica, linear e estática sendo assim foram considerados materiais linearmente elásticos, ou seja, que apresentam relação linear entre a tensão e deformação, onde há uma tendência de voltar a sua configuração inicial após o alívio do carregamento externo que provocou sua deformação.

Os primeiros casos analisados foram uma placa quadrada e uma retangular, ambas sem enrijecedores que tiveram sua deflexão central comparada com a solução analítica proposta por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). Após, foram modeladas placas com, um enrijecedor central e dois enrijecedores ortogonais, comparando suas deflexões centrais com as apresentadas por Rossow e Ibrahimkhail (1978) e Silva (2010). Por fim, realizou-se a análise de uma placa retangular com variação de altura de um enrijecedor central, avaliando assim a influência desta variação na deflexão central da placa. Os resultados foram comparados com Silva (2010) e Troina (2017).

Após o processo de verificação, o método Design Construtal foi empregado para determinar as diferentes configurações geométricas de placas com enrijecedores avaliadas nesta pesquisa. Para isso, foi considerada uma placa sem enrijecedores como referência, com comprimento  $a = 2$  m e largura  $b = 1$  m, e como o método exige que o volume total se mantenha constante durante o processo a altura, o comprimento, a largura e o volume total da placa de referência permanecem constantes, portanto, parte do volume da placa de referência (retirado da sua espessura) é convertido em

enrijecedores nas direções longitudinal e transversal. Como a espessura dos enrijecedores ( $t_s$ ) é constante, é possível a variação na altura dos enrijecedores na direção longitudinal e transversal ( $h_{ls}, h_{ts}$ ), permitindo a geração de diferentes combinações.

Desta forma foi necessário o emprego do parâmetro  $\emptyset$  que é a relação entre o volume de material utilizado para os enrijecedores ( $V_s$ ) e o volume total da placa de referência ( $V_r$ ) observando que devido ao número de iterações necessárias e a quantidade de configurações geométricas possíveis, optou-se pelas simulações numéricas com um único valor do parâmetro  $\emptyset$ . Foram consideradas também três valores para a espessura do enrijecedor  $t_s = 6,35$  mm,  $12,70$  mm e  $25,40$  mm.

Os graus de liberdade do problema que foram analisados para avaliar a influência da geometria na deflexão máxima e central das placas são: número de enrijecedores na longitudinal ( $N_{ls}$ ), número de enrijecedores na transversal ( $N_{ts}$ ), espessura do enrijecedor ( $t_s$ ) e relação entre a altura do enrijecedor na direção transversal e altura do enrijecedor na direção longitudinal ( $h_{ts}/h_{ls}$ ).

#### **1.4. Organização da dissertação**

No capítulo 1 consta um breve histórico sobre a indústria naval brasileira, ressaltando a importância do uso de placas metálicas enrijecidas no ramo da engenharia oceânica, o estado da arte, um histórico sobre a literatura existente sobre o tema abordado nesta pesquisa, o objetivo geral deste estudo bem como os objetivos específicos além da metodologia a ser utilizada.

No capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica sobre a teoria de placas finas e teoria de placas com enrijecedores, apresentando as soluções analíticas empregadas para a solução de problemas referentes a este assunto.

No capítulo 3 apresenta-se o método dos elementos finitos, que é utilizado na discretização do modelo a fim de se obter uma solução para o mesmo. Este método serve como base para o software ANSYS, e é utilizado na solução do problema proposto. Este capítulo apresenta também as verificações do modelo computacional proposto por comparação com soluções analíticas e numéricas encontradas na literatura.

No capítulo 4 é apresentada a Teoria Construtal, bem como o Método Design Construtal que será utilizado para se obter as diferentes configurações de geometria da placa com enrijecedores buscando a configuração ótima.

No capítulo 5 são demonstrados os resultados e a avaliação dos efeitos da variação dos graus de liberdade na deflexão central e máxima das placas com enrijecedores.

O capítulo 6 reúne as conclusões da presente pesquisa e sugestões para sua continuidade.

## 2. TEORIA DAS PLACAS

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Szilard (2004) definem placas como estruturas planas, bidimensionais, apresentando uma de suas dimensões, denominada espessura, muito menor que as demais. Sua geometria pode apresentar contornos retos ou curvos.

As cargas aplicadas a estas placas são predominantemente transversais a sua superfície, podendo ser estáticas ou dinâmicas. Podem apresentar apoios livres, simplesmente apoiadas ou condições de contorno fixas incluindo suportes elásticos e restrições elásticas. O comportamento dessas placas é, em muitos aspectos, análogo ao de grelhas bidimensionais formadas por um conjunto de vigas, assim, estas estruturas apresentam uma resistência mecânica com melhor desempenho para carregamentos transversais que provocam cisalhamento, flexão e torção (SZILARD, 2004).

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) as propriedades de flexão apresentam dependência com a sua espessura em relação às demais dimensões. Sendo divididas em três categorias:

a) placas delgadas com pequenas flechas: para o caso de placas com flecha  $w$  (deflexão) que apresentam valores pequenos quando comparadas com sua espessura  $t$ , há uma boa aproximação através da teoria de flexão, para isso é feita a consideração que não há deformação no plano médio da placa, que os planos normais ao plano médio da placa permanecem normais após a flexão da mesma e que as tensões normais na direção transversal da placa são desprezíveis;

b) placas delgadas com grandes flechas: se a placa apresenta flechas  $w$  consideradas grandes, as tensões no plano médio da placa não são desprezíveis e devem ser consideradas na dedução da equação diferencial de placas. Devido a esta deformação a carga é transmitida pela rigidez a flexão e pelo efeito da membrana da placa;

c) placas espessas: se o problema se trata de uma placa espessa a teoria considera esta como uma situação de elasticidade tridimensional. A análise das forças da placa é independente da flexão e, portanto, definidas pelas condições de equilíbrio estático.

Como mencionado em Szilard (2004) as estruturas de placas são estudadas de acordo com as equações governantes da teoria da elasticidade, desta forma a solução para a maioria das configurações de placa consiste em resolver uma equação diferencial que é uma função de deflexão, cargas aplicadas e rigidez da placa. No entanto a solução da equação diferencial de forma analítica somente é possível para casos muito específicos de carregamento e condições de contorno, sendo de difícil aplicação nos demais casos. Assim, se faz necessário, para contemplar a complexidade de casos estudados, a aplicação de soluções analíticas aproximadas e as soluções através de simulações

numéricas.

A teoria da elasticidade tem como base o uso dos conceitos de equilíbrio, compatibilidade de deformação e considerando o comportamento do material constitutivo para realizar a análise da estrutura a fim de se obter deslocamentos, tensões e deformação em qualquer ponto a partir das condições de apoio e carregamentos impostos (BHASKAR E VARADAN, 2013).

Como este trabalho tem como objeto de estudo placas metálicas com enrijecedores a partir de uma placa de referência sem enrijecedores, que apresentam comportamento estrutural linear-elástico, são de material isotrópico (aço), simplesmente apoiadas nas quatro bordas e sujeitas a carregamento transversal uniformemente distribuído; serão apresentadas aqui as principais soluções analíticas para placas encontradas na literatura que podem ser aplicadas ao problema em questão, são elas: a equação diferencial governante para placas finas, a solução aproximada por Navier, a solução aproximada por Lévy e a solução para placas enrijecidas.

## 2.1. Teoria de placas finas

A solução matemática exata para placas finas sujeitas a carregamento transversal, agindo normal à superfície da placa, necessita de uma análise com equações diferenciais tridimensionais que geram dificuldades matemáticas. O emprego das hipóteses de Kirchhoff na dedução da teoria de placas finas apresenta resultados com boa acurácia sem a necessidade de uma análise tridimensional completa, exigindo apenas duas condições de contorno para cada borda (SZILARD, 2004).

Ainda de acordo com Szilard (2004) as hipóteses assumidas na dedução da equação que governa o problema de placas finas são:

1. Admite-se que o material é homogêneo, isotrópico e elástico linear;
2. A placa é inicialmente plana;
3. O plano médio da placa permanece sem restrições durante a flexão;
4. A espessura constante da placa  $t$  é no máximo um décimo do valor da menor dimensão lateral da placa;
5. As deflexões transversais  $w(x,y)$  devem ser pequenas e menores do que a espessura da placa, sendo o limite da deflexão de um décimo da espessura para a aplicação desta teoria;
6. As inclinações do plano médio são pequenas quando comparadas com a unidade;
7. As seções planas e normais à superfície média antes da deformação permanecem planas e normais à superfície média após a deformação;
8. A tensão normal  $\sigma_z$  na direção transversal à placa pode ser desprezada.

As hipóteses citadas acima, conhecidas como as hipóteses de Kirchhoff, são consideradas para

a dedução da equação diferencial governante da placa em termos da deflexão transversal  $w(x,y)$  (YAMAGUCHI, 1999). Para placas retangulares é conveniente adotar o sistema de coordenadas  $x, y$  e  $z$  conforme Fig. 2.1. As forças internas e externas, esforços e os deslocamentos  $u, v, w$  são consideradas positivas quando apontam na direção positiva dos eixos  $x, y$  e  $z$  enquanto que os momentos positivos são os que tracionam as fibras inferiores da placa.

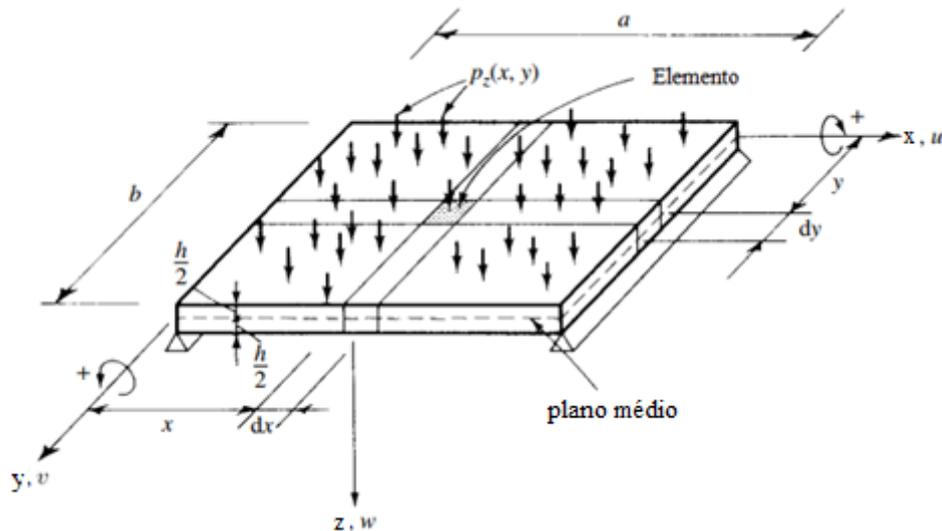


Figura 2.1 - Placa retangular sujeita a carregamento transversal (Fonte: Adaptada de Szilard, 2004).

Na Fig 2.2 é apresentado um elemento retirado do interior da placa, nele é possível analisar as componentes de tensões internas que surgem com a aplicação do carregamento externo, e devem satisfazer o equilíbrio do mesmo.

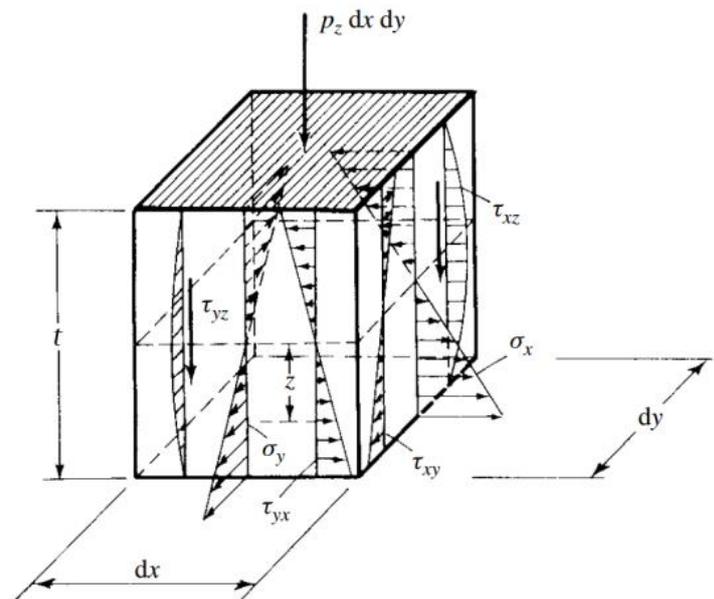


Figura 2.2 – Estado de tensões provado pelo carregamento (Fonte: Szilard, 2004).

A equação diferencial governante para placas finas é obtida através do somatório de equilíbrio de forças e momentos do elemento da Fig 2.3. Este elemento infinitesimal apresenta os esforços internos devido, somente, ao carregamento transversal. O comportamento é análogo ao de uma malha de vigas bidimensionais. O carregamento externo  $p_z$  é equilibrado pelas forças transversais  $Q_x$  e  $Q_y$  e os momentos  $M_x$  e  $M_y$ , além de apresentarem momentos de torção  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ .

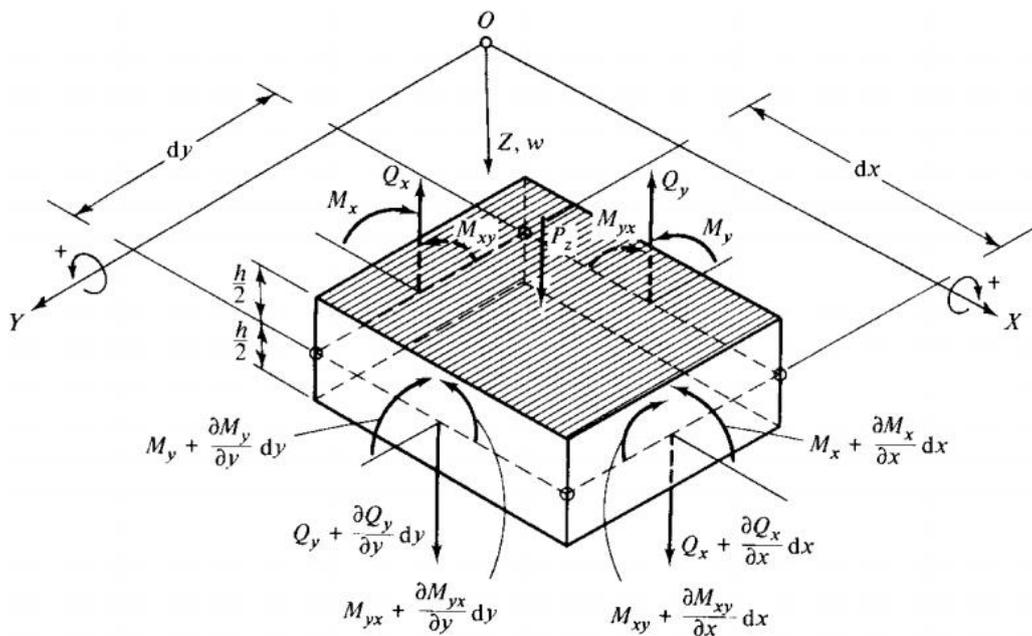


Figura 2.3 – Esforços internos do elemento da placa (Fonte: Adaptada de Szilard, 2004).

É comum na teoria de placas a apresentação das forças internas e momentos por unidade de área, passando-se a apresentar as notações:  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$ . Estas podem ser representadas no seu plano médio visto que aplicadas as hipóteses de Kirchhoff o problema passou de uma análise tridimensional completa para uma análise bidimensional conforme Fig. 2.4.

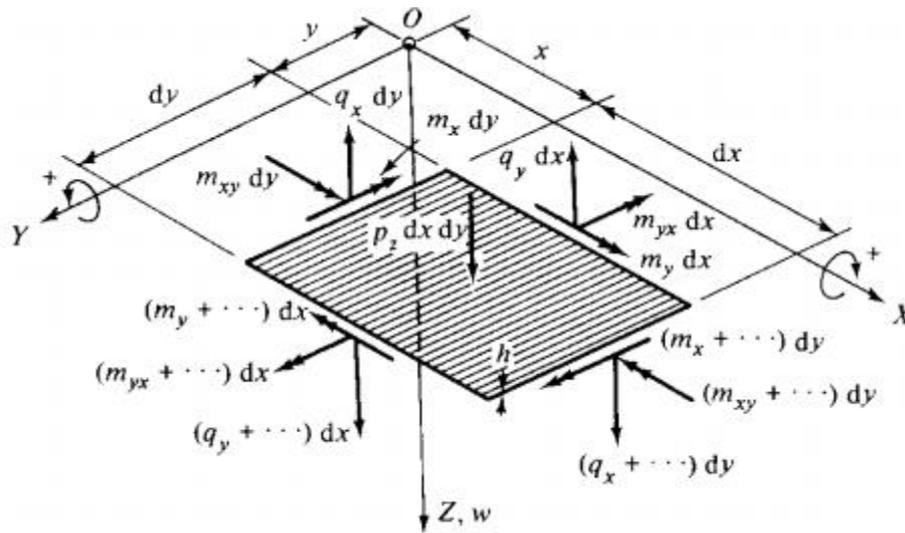


Figura 2.4 - Esforços internos no plano média da placa (Fonte: Szilard, 2004)

As equações diferenciais de equilíbrio são expressas na forma de incrementos, que são determinados com a utilização de series truncadas de Taylor nas derivadas de primeira ordem, e que podem ser expressos através do equilíbrio das forças internas e externas nas direções  $x$  e  $y$  como é demonstrado nas Eqs. (2.1) e (2.2).

$$q_x + dq_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

$$m_y + dm_y = m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \quad (2.2)$$

Do somatório de forças e momentos em torno do eixo  $Y$  igualado a zero obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - m_{yx} dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} \\ - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Uma vez que as simplificações sejam realizadas, os termos infinitesimais de segunda ordem são negligenciados visto que seus valores são de pequena importância para o resultado final (BHASKAR, 2014).

Após divide-se a Eq. (2.3) por  $dx dy$ , observando que as somas dos momentos em  $X$  e  $Y$  são similares. A soma das forças na direção  $Z$  produz a terceira equação de equilíbrio, realizando a mesma divisão pelo termo  $dx dy$ , observando que os momentos de torção  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$  são iguais e por fim fazendo

as substituições, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{dx^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{dy^2} = -p_z(x, y) \quad (2.4)$$

Os momentos de flexão e torção apresentados na Eq. (2.4) dependem das deformações e dos deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , sendo necessário encontrar a relação entre os momentos internos e as componentes de deslocamento.

Assumindo que o material utilizado é linear-elástico e utilizando a Lei de Hooke bidimensional se tem as expressões:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x + \nu \sigma_y \quad (2.5)$$

$$\sigma_y = E \varepsilon_y + \nu \sigma_x \quad (2.6)$$

onde  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são as tensões normais,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são os coeficientes de deformações da placa nas direções  $x$  e  $y$ . O resultado da relação de tensão-deformação é apresentado nas Eqs. (2.7) e (2.8).

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.8)$$

Os momentos de torção  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$  produzem as tensões de cisalhamento  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$  no plano, resultando na seguinte equação:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tau_{yx} \quad (2.9)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\gamma_{xy}$  é a deformação de cisalhamento.

Através das hipóteses 6 e 7 de Kirchhoff (apresentadas no item 2.1) e realizando análises geométricas da placa antes e depois da deflexão, conforme Fig. 2.5, consegue-se expressar relações entre as deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  e os deslocamentos transversais  $w(x, y)$ .

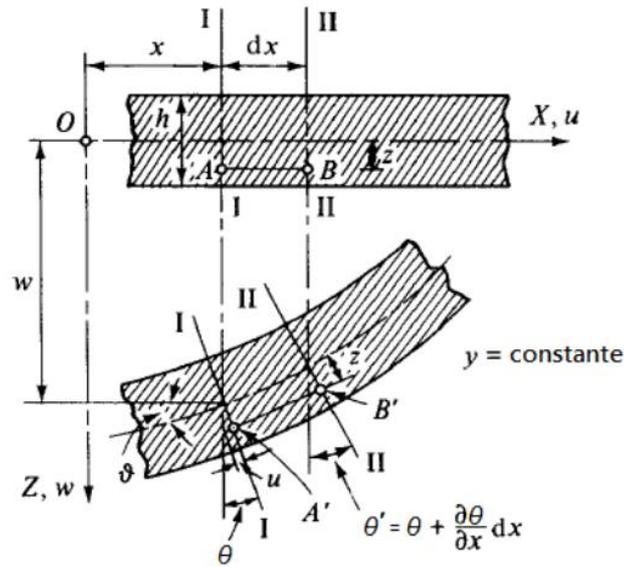


Figura 2.5 - Seção da placa antes e depois da deflexão (Fonte: Adaptado de Szilard, 2004).

Considerando um segmento  $\overline{AB}$ , após a deflexão da placa ele passa a ter um comprimento  $A'B'$  localizado a uma distância  $Z$  do plano médio. Usando a definição de deformação se têm:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\overline{AB} - \overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{[dx + z\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)dx] - dx}{dx} = z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq. (2.10) na Eq. (2.11), obtém-se:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

## 2.2. Teoria de placas elásticas e suas equações governantes

As componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  produzem em um elemento da placa momentos de flexão, logo através da integração é possível determinar esses momentos como:

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz \quad (2.15)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \quad (2.16)$$

Da mesma forma os momentos de torção  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  produzem tensões de cisalhamento definidas como:

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.17)$$

Substituindo as Eqs. (15) e (16) nas Eqs. (7) e (8) determinam-se as tensões normais expressas em função da deflexão transversal  $w$ .

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.18)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.19)$$

Integrando as Eqs. (10) e (11) e substituindo nas Eqs. 17 e 18, tem-se:

$$m_x = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.20)$$

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D(k_x + \nu k_y) \quad (2.21)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D(k_y + \nu k_x) \quad (2.22)$$

onde  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ , é denominada rigidez à flexão

De forma similar obtém-se a expressão do momento de torção em termos da deflexão lateral:

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-(t/2)}^{+(t/2)} \tau z dz = -2G \int_{-(t/2)}^{+(t/2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz \quad (2.23)$$

$$D(1 - \nu)\chi = -(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

Substituindo as Eqs. (19), (20) e (21) na Eq. (4) é deduzida a equação diferencial governante para placas finas submetida a carga distribuída.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (2.25)$$

### 2.3. Solução de Navier para placa retangular simplesmente apoiada

Esta solução tem como objetivo transformar a equação diferencial em uma equação algébrica, através da expansão em série dupla de Fourier, o que torna a solução mais simples. Este tipo de solução é aplicado em placas simplesmente apoiadas como da Fig. 2.6. satisfazendo as seguintes condições de contorno:

Para  $x = 0$  ou  $x = a$

$$w = 0 \text{ e } m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Para  $y = 0$  ou  $y = b$

$$w = 0 \text{ e } m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.27)$$

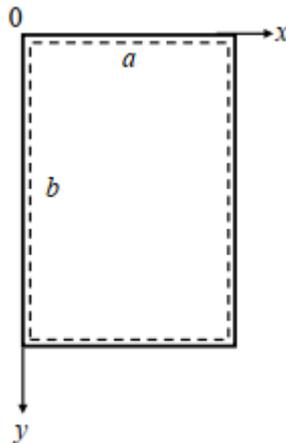


Figura 2.6 - Placa retangular simplesmente apoiada (Fonte: Bhaskar e Varadan, 2013).

A equação de deslocamento transversal representada pela forma de uma série dupla de senos é apresentada na equação 2.27.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.28)$$

Após a equação é expandida em série dupla de Fourier

$$p_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.29)$$

onde  $a$  é o comprimento da placa na direção  $x$ ,  $b$  é a largura da placa na direção  $y$  e  $P_{mn}$  são coeficientes de expansão tabelados em Szilard (1974) para diversos tipos de carregamento.

As equações 2.28 e 2.29 são substituídas na equação diferencial resultando em:

$$\begin{aligned} W_{mn} \left[ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \\ = \frac{1}{D} P_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desta forma, os coeficientes da função deslocamento  $W_{mn}$  serão dados por:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{D\pi^4 \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} \right) + \left( \frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \quad (2.31)$$

Substituindo a equação 2.31 na equação 2.38 resulta para a deflexão a seguinte expressão:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{D\pi^4 \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} \right) + \left( \frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.32)$$

A série apresenta rápida convergência e resultados com boa aproximação com apenas os primeiros termos da série, apresentando limitação de seu uso em relação ao tipo de carga e geometria da estrutura.

#### 2.4. Solução alternativa para placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído – Lévy

Outro método aproximado para a equação diferencial governante de placas finas foi apresentada por M. Lévy, ele propõe tornar a solução em forma de série trigonométrica simples, sendo aplicável para o caso particular de placas retangulares com duas bordas opostas simplesmente apoiadas e carregamento uniformemente distribuído, a deflexão pode ser expressa como:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.33)$$

onde  $Y_m$  é função apenas de  $Y$ .

Conforme Fig. 2.6 os lados com  $x = 0$  e  $x = a$  são simplesmente apoiados. Cada termo da série satisfaz as condições  $w = 0$  e  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$  nesses lados.

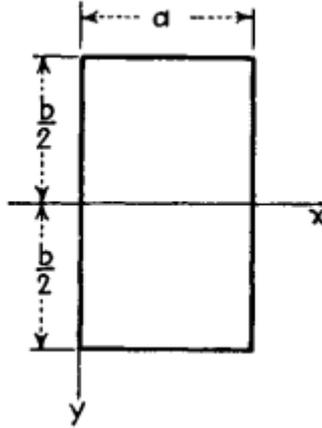


Figura 2.7 - Placa retangular com bordos opostos simplesmente apoiados (Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959)

Assim,  $Y_m$  é determinado de forma a satisfazer as condições de contorno nos lados  $y = \pm b/2$  obtendo a equação de deflexão da superfície da forma:

$$\frac{\partial^2 w}{dx^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{dy^4} = \frac{q}{D} \quad (2.34)$$

Considerando que o carregamento externo varia apenas na direção  $X$ , expandindo em séries trigonométricas ( $m = 1, 3, 5, \dots$ ), utilizando-se a forma integral geral proposta por Nádai (1925) e com a obtenção das equações para a determinação das constantes, a solução para a deflexão da superfície pode ser expressa como:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.35)$$

A deflexão máxima da placa é obtida no meio da placa ( $x = a/2, y = 0$ ):

$$w_{max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2} \alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{m^5 2 \cosh \alpha_m} \quad (2.36)$$

A série nessa expressão converge rápido e com suficiente acurácia com apenas os primeiros termos, que ainda pode ser representada da forma:

$$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad (2.37)$$

onde  $q$  é o carregamento distribuído,  $a$  é menor dimensão da placa e  $D$  é a rigidez a flexão da placa e  $\alpha$  é um fator numérico que depende da relação das dimensões laterais  $b/a$  da placa ( $b > a$ ).

Conforme Fig. 2.6. Com a obtenção desse valor tabelado por Timoshenko e Woinowsky Krieger (1959) e apresentado na Fig. 2.7, é possível encontrar a deflexão central da placa de forma prática.

$b/a$	$w_{max}$ $= \alpha \frac{qa^4}{D}$ $\alpha$	$(M_x)_{max}$ $= \beta qa^2$ $\beta$	$(M_y)_{max}$ $= \beta_1 qa^2$ $\beta_1$	$(Q_x)_{max}$ $= \gamma qa$ $\gamma$	$(Q_y)_{max}$ $= \gamma_1 qa$ $\gamma_1$	$(V_x)_{max}$ $= \delta qa$ $\delta$	$(V_y)_{max}$ $= \delta_1 qa$ $\delta_1$	$R$ $= nqa^2$ $n$
1.0	0.00406	0.0479	0.0479	0.338	0.338	0.420	0.420	0.065
1.1	0.00485	0.0554	0.0493	0.360	0.347	0.440	0.440	0.070
1.2	0.00564	0.0627	0.0501	0.380	0.353	0.455	0.453	0.074
1.3	0.00638	0.0694	0.0503	0.397	0.357	0.468	0.464	0.079
1.4	0.00705	0.0755	0.0502	0.411	0.361	0.478	0.471	0.083
1.5	0.00772	0.0812	0.0498	0.424	0.363	0.486	0.480	0.085
1.6	0.00830	0.0862	0.0492	0.435	0.365	0.491	0.485	0.086
1.7	0.00883	0.0908	0.0486	0.444	0.367	0.496	0.488	0.088
1.8	0.00931	0.0948	0.0479	0.452	0.368	0.499	0.491	0.090
1.9	0.00974	0.0985	0.0471	0.459	0.369	0.502	0.494	0.091
2.0	0.01013	0.1017	0.0464	0.465	0.370	0.503	0.496	0.092
3.0	0.01223	0.1189	0.0406	0.493	0.372	0.505	0.498	0.093
4.0	0.01282	0.1235	0.0384	0.498	0.372	0.502	0.500	0.094
5.0	0.01297	0.1246	0.0375	0.500	0.372	0.501	0.500	0.095
$\infty$	0.01302	0.1250	0.0375	0.500	0.372	0.500	0.500	0.095

Figura 2.8 - Fatores numéricos para placas retangulares com carregamento uniformemente distribuído e simplesmente apoiada ( $\nu = 0,3$ ) (Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959).

## 2.5. Placas com enrijecedores

Placas metálicas enrijecidas são indispensáveis na construção de navios devido ao aumento de rigidez e, conseqüentemente, redução de peso que proporcionam. Essas placas estão presentes no casco, no convés, na parte inferior e na superestrutura de navios.

Segundo Szilard (2004) em muitas aplicações práticas é necessário considerar a rigidez de flexão direcional, ou seja, a placa apresenta propriedades diferentes em duas direções perpendiculares. Nesse caso a placa pode ser descrita como ortogonalmente anisotrópica ou simplesmente ortotrópica. Essa anisotropia estrutural pode vir da introdução de nervuras, corrugações ou vigas (enrijecedores) conforme Fig. 2.6.

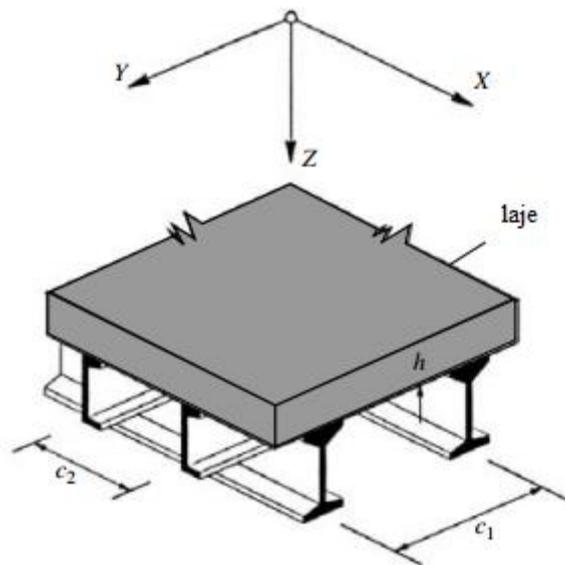


Figura 2.9 - Placa enrijecida (Fonte: Adaptada de Szilard, 2004).

O modelo de aproximação de uma placa enrijecida como uma placa ortotrópica baseia-se na ideia de transformar a placa com enrijecedor em uma placa ortotrópica equivalente (sem a presença dos enrijecedores), embora o comportamento estrutural do conjunto não seja exatamente representado por essa aproximação, os dados experimentais indicam bom ajuste dos resultados, ressaltando que apenas nos casos de enrijecedores relativamente pequenos, espaçados de forma uniforme e próximos.

É possível uma forma analítica de resolução para o caso de placas ortotrópicas através da reformulação da lei de Hooke, apresentada no item 2.2, que após toda a análise física e desenvolvimento matemático chega-se à equação diferencial governante para placas ortotrópicas (UGURAL, 1981).

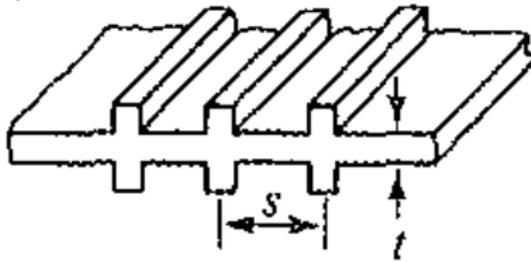
$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (2.38)$$

onde:

$$H = D_{xy} + 2G_x \quad (2.39)$$

As rigidezes à flexão da placa ortotrópica nas direções x e y,  $D_y$  e  $D_x$ , e a rigidez à torção efetiva,  $H$ , podem ser obtidas para alguns casos comuns da engenharia através de tabelas como mostra a Fig. 2.7.

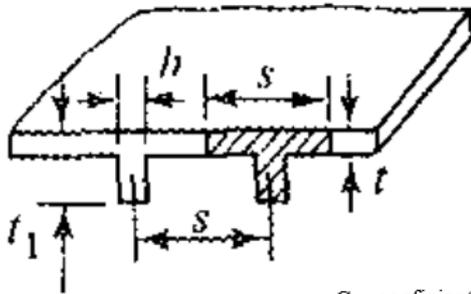
### Placa reforçada por enrijecedores equidistantes



$$D_x = H \cong \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} + \frac{Et}{s}$$

### Placa reforçada por um conjunto de nervuras equidistantes



$$D_x = \frac{Est^3}{12(s - h + h(t/t_y)^3)}$$

$$D_y = \frac{Et}{s}$$

$$D_{xy} \cong 0$$

$$H = 2G_{xy} + \frac{C}{s}$$

$C$  = coeficiente de torção do enrijecedor     $I$  = Momento de inércia

$G_{xy}$  = Coeficiente de torção da placa     $E$  = Módulo de Elasticidade

Figura 2.10 - Rigidezes de placas ortotrópicas (Fonte: Adaptada de Ugural, 1981).

Com base no modelo apresentado na Fig.2.6, Szilard (2004) também apresenta equações para a obtenção dos valores de rigidezes, que estão expressas nas Eqs. (2.39), (2.40) e (2.41)

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_{xy}^2)} + \frac{Ehe_x^2}{1 - \nu_{xy}^2} + \frac{EI_{0x}}{c_1} \quad (2.40)$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_{xy}^2)} + \frac{Ehe_y^2}{1 - \nu_{xy}^2} + \frac{EI_{0y}}{c_2} \quad (2.41)$$

$$D_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_{xy}^2)} + \frac{G_{xy}}{6} \left( \frac{\sum d_t d_t^3}{c_1} + \frac{\sum d_t d_t^3}{c_2} \right) \quad (2.42)$$

Onde:  $I_{0x}$  e  $I_{0y}$  são os momentos de inércia dos enrijecedores em relação à seu eixo neutro nas direções x e y,  $e_x$  e  $e_y$  representam as distâncias dos eixos neutros até o centro da placa,  $c_1$  e  $c_2$  representam os espaços entre os enrijecedores e os valores de  $D_t$  e  $G_{xy}$  são expressos por:

$$D_t = G_{xy} \frac{Eh^3}{12} \quad (2.43)$$

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x E_Y}}{2(1 + \sqrt{\nu_X \nu_Y})} \approx \frac{\sqrt{E_x E_Y}}{2(1 + \sqrt{\nu_X \nu_Y})} \quad (2.44)$$

As soluções analíticas apresentadas são limitadas para casos simples de geometria e carregamento, sendo necessária a análise de casos mais complexos através de métodos numéricos que somado ao avanço tecnológico de computadores tem se mostrado uma ferramenta importante na solução de problemas estruturais complexos (SZILARD, 2004). Entre os métodos numéricos destaca-se o Método dos Elementos Finitos que será utilizado neste trabalho.

### **3. MODELAGEM COMPUTACIONAL**

A modelagem computacional tem como objetivo simular fenômenos físicos por meio de um sistema que envolve engenharia, matemática e ciência da computação. Com essa finalidade, o fenômeno é traduzido por um sistema de equações parciais diferenciais (tradução do problema de engenharia para a matemática), sendo estas equações aproximadas por um método de discretização como o Método de Elementos Finitos (tradução do problema de matemática para matemática aplicada e para a ciência da computação). Por fim os resultados são comparados com o fenômeno físico em estudo (retornando a um problema de engenharia) (DEVLOO, 2005).

Com a presente evolução nas últimas décadas no nível de processamento dos computadores, aumento da disponibilidade tecnológica, da capacidade de cálculo e armazenamento dos meios computacionais a análise de problemas através da modelagem numérica se tornou cada vez mais possível para uma infinidade de problemas como análise de comportamento de matérias, estudo de sistemas vibratórios, problemas de condução de calor e mecânica dos fluidos, eletricidade e magnetismo, estruturas metálicas, entre outros (DIAS et al., 2010).

O planejamento correto dos modelos a serem investigados deve ser realizado com muita cautela de forma a considerar os efeitos das principais variáveis que influenciam o comportamento estrutural estudado. Desta forma se faz necessário reconhecer, estabelecer e delimitar o problema, identificar os fatores que afetam o problema e quais variáveis podem ser mantidas fixas, não tendo seus efeitos analisados no estudo (VELLASCO et al., 2014)

O processo de resolução passa por três etapas: fase de pré-processamento, fase de análise e fase de pós-processamento. Na primeira fase se tem a construção do modelo geométrico, dos carregamentos aplicados, das propriedades mecânicas do material e das condições de contorno. A segunda fase conta com o processo de simulação numérica, onde são realizados os cálculos. No pós-processamento são apresentados os resultados, podendo ser na forma de arquivos de saída, gráficos e tabelas (DIAS, 2010).

#### **3.1. Método dos Elementos Finitos (MEF)**

O primeiro estudo realizado utilizando a nomenclatura MEF foi publicado no ano de 1960 por Ray Clough que apresentou, através da análise de problemas de elasticidade em estado plano de tensão, procedimentos que servem de base para a implementação computacional do MEF. Este é um método de discretização bastante difundido na análise numérica estrutural (AZEVEDO, 2003).

O MEF pode ser definido como um método matemático de análise e resolução para problemas

científicos e de engenharia. É uma solução aproximada sendo utilizado na resolução de problemas, de diversas áreas de estudo, onde a solução de forma analítica seria de difícil ou inexistente obtenção. O método pode ser aplicado em problemas unidimensionais, mas sua vasta aplicação é em problemas bi e tridimensionais (DIAS et al., 2010).

A primeira fase é a representação do domínio do sistema ou uma simplificação que represente o caso a ser estudado. Este domínio é dividido em um número finito de elementos, áreas ou volumes, que são denominados por elementos finitos. Este processo recebe o nome de discretização e pode ser visualizado na Fig. 3.1. Em problemas bidimensionais, os elementos mais utilizados são os quadriláteros ou triangulares (DIAS et al., 2010). Nesta pesquisa optou-se pelo uso do elemento finito do tipo quadrilátero.

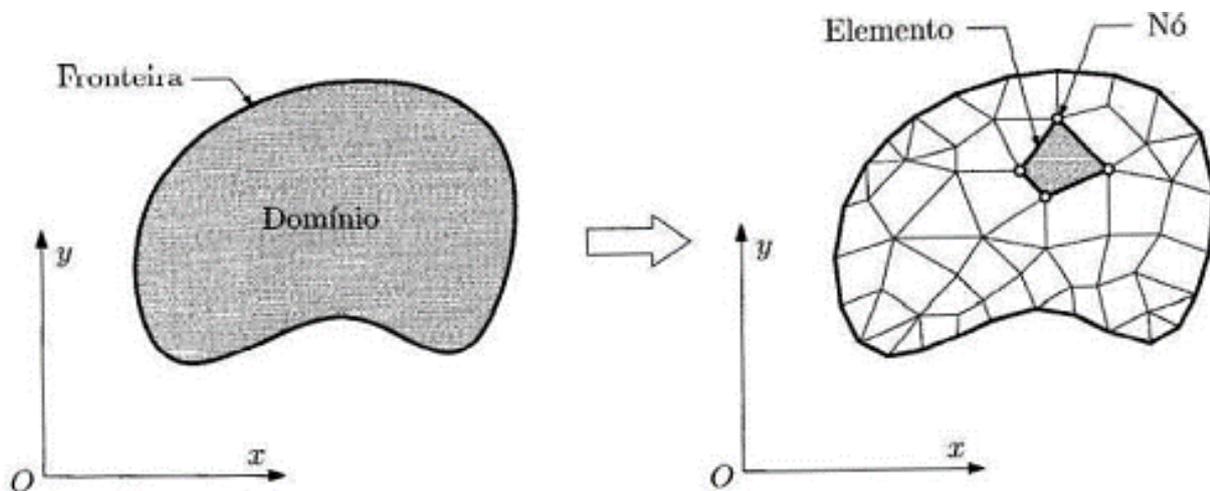


Figura 3.1 - Representação esquemática do processo de discretização espacial de um domínio por elementos finitos. (Fonte: Adaptado de Dias et al., 2010).

O estudo realizado limita-se ao campo da análise linear elástica, a primeira variável a se determinar é o campo de deslocamentos de um número finito de pontos do sistema. Estes pontos são conhecidos como nós e encontram-se nos vértices e nas arestas dos elementos. Este fato por ser observado na Fig. 3.2. Os nós pertencentes a elementos adjacentes são comuns aos dois elementos. Portanto, através da análise numérica com o MEF é determinado os deslocamentos nos nós para o carregamento aplicado ao domínio analisado, posteriormente o deslocamento de cada ponto do elemento finito pode ser determinado pelos valores dos deslocamentos dos nós desse mesmo elemento (em função dos deslocamentos nodais). (DIAS et al., 2010).

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000) a determinação dos deslocamentos nodais é obtida por um conjunto de equações algébricas de equilíbrio, através da montagem da matriz global dos elementos, que para problemas de comportamento linear elástico pode ser representada como:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (3.1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez do sistema,  $\{U\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais (incógnitas) e  $\{F\}$  é o vetor força.

Não é foco do presente estudo aprofundar-se na teoria dos elementos finitos podendo a mesma ser consultada em Burnett (1987), Bathe (1996), Zienkiewicz e Taylor (2000), Azevedo (2003), Dias (2010) e Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013).

O software ANSYS® 17.2, baseado no MEF, foi utilizado neste trabalho. O elemento finito adotado foi SHELL281, com oito nós, apresentado na Fig. 2. Esse elemento é composto por oito nós, sendo que cada nó apresenta seis graus de liberdade, sendo eles três de translação (nas direções x, y e z) e três de rotação (em torno dos eixos x,y e z). É um elemento adequado para modelar estruturas de placas finas a moderadamente espessas, apresentando bons resultados nas análises de deformação.

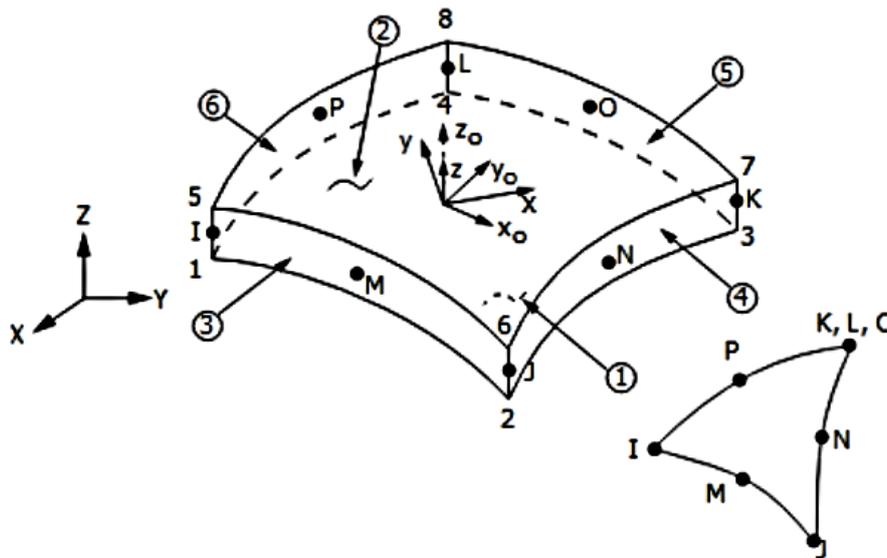


Figura 3.2 – Elemento quadrático SHELL281 (Fonte: ANSYS, 2017).

## 4.1 TEORIA CONSTRUTAL

A Teoria Construtal, proposta por Adrian Bejan em 1996, apresenta que o mundo não foi formado por acidentes aleatórios, acaso ou destino. Segundo o autor é uma nova teoria para a história da terra e o que significa estar vivo. Essa teoria prevê que por trás de toda a diversidade há um fluxo contínuo de padrões previsíveis que é governada pela Lei Construtal. Para isso o sistema deve mudar sua configuração ao longo do tempo, resultado do movimento, de forma que o acesso as suas correntes seja facilitado. A teoria Construtal é universal, porém os designs desenvolvidos por ela não, ou seja, não há uniformidade nas respostas. É uma teoria revolucionária, pois abrange todas as áreas de estudo (biologia, hidrologia, geologia...) e governa todos os sistemas, qualquer tempo e tecnologia. (BEJAN E ZANE, 2012)

Quando os sistemas param de fluir e transformar, eles morrem. Vida é movimento e constante transformação, melhoria de desempenho e melhor forma de mover a massa. Essa teoria ocorre em todas as escalas e conecta tudo no planeta (BEJAN E LORENTE, 2008).

### 4.1. Lei Construtal

Segundo Bejan e Lorente (2008) a Lei Construtal afirma que: “Para que um sistema de fluxo de tamanho finito persista no tempo (continue vivo), sua configuração deve evoluir ao longo do tempo de forma que facilite o acesso de suas correntes.”

Os sistemas de fluxos apresentam duas propriedades, corrente que está fluindo (fluido, energia, massa...) e design através do qual flui. Por trás de toda a diversidade, há um fluxo contínuo de padrões previsíveis. Uma manifestação da Lei Construtal comum na natureza é a forma de árvore, esta é uma maneira eficaz de conectar os componentes, conseguindo fazer conexões entre ponto a área e área a ponto.

Segundo essa lei, os designs surgem de forma natural, mas não ao acaso. Surgem naturalmente uma vez que aumentam o acesso ao fluxo no tempo, gerando forma e estrutura ao longo do tempo que facilite este movimento. Todos os sistemas evoluem com base nessa lei, animados e inanimados. Todos os processos são transformações para facilitar o movimento (desenho do corpo, florestas, trânsito, rios, floco de neve, entre outros).

A natureza não produz solução ótima, design final ou destino. É governada pela tendência de gerar designs ao longo do tempo que reduzam as imperfeições. A evolução do design nunca termina.

### 4.2. Método Design Construtal

É possível usar a Lei Construtal para entender por que surgem os designs e prever como eles

vão evoluir no futuro. A aplicação da Lei Construtal é executada através do Método Design Construtal. Este método de engenharia é utilizado para otimizar caminhos para fluxos através de sistemas abertos de tamanho finito. Isto demonstra que se um sistema está livre para se transformar em restrições globais, o melhor *design* de fluxo é aquele que minimiza as resistências de fluxo global ou maximiza o acesso ao fluxo global (ROCHA, LORENTE E BEJAN, 2013).

O objetivo sempre é distribuir as imperfeições do sistema tal que o sistema global é o sistema com menor número de imperfeições possíveis. O método Design Construtal pode ser considerado como um método de ótima distribuição das imperfeições (BEJAN E LORENTE, 2008).

Como é descrito por Isoldi et al. (2013) a aplicação do Método Construtal em problemas de engenharia vem sendo amplamente estudada na literatura recente, com ênfase em pesquisas com aplicação do método em problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor. No entanto, poucos estudos no campo da Mecânica dos Sólidos foram desenvolvidos. Lorente et al. (2010) apresentam um estudo com a analogia entre a configuração geométrica do fluxo de calor e fluido e a configuração de distribuição de tensão, demonstrando uma metodologia básica de como modelar estruturas sólidas de forma que o fluxo de tensões não tenha pontos de acúmulo de tensão.

### **4.3. Método Design Construtal aplicado em placas enrijecidas**

O método Design Construtal é utilizado para a aplicação da Lei Construtal, sendo este baseado no princípio de objetivos e restrições (locais e globais). Neste estudo, o método foi empregado em placas finas enrijecidas sujeitas a carregamento transversal com o objetivo de se obter diferentes configurações geométricas através da variação dos parâmetros:  $N_{ls}$ ,  $N_{ts}$ ,  $h_{ls}$ ,  $h_{ts}$ , essas configurações ocorrem com a transformação do volume de uma placa de referência, de comprimento  $a$ , largura  $b$  e espessura  $t$ , em enrijecedores. A Fig. 5.1 apresenta um modelo de placa enrijecida com seus parâmetros geométricos com dois enrijecedores longitudinais e três enrijecedores transversais.

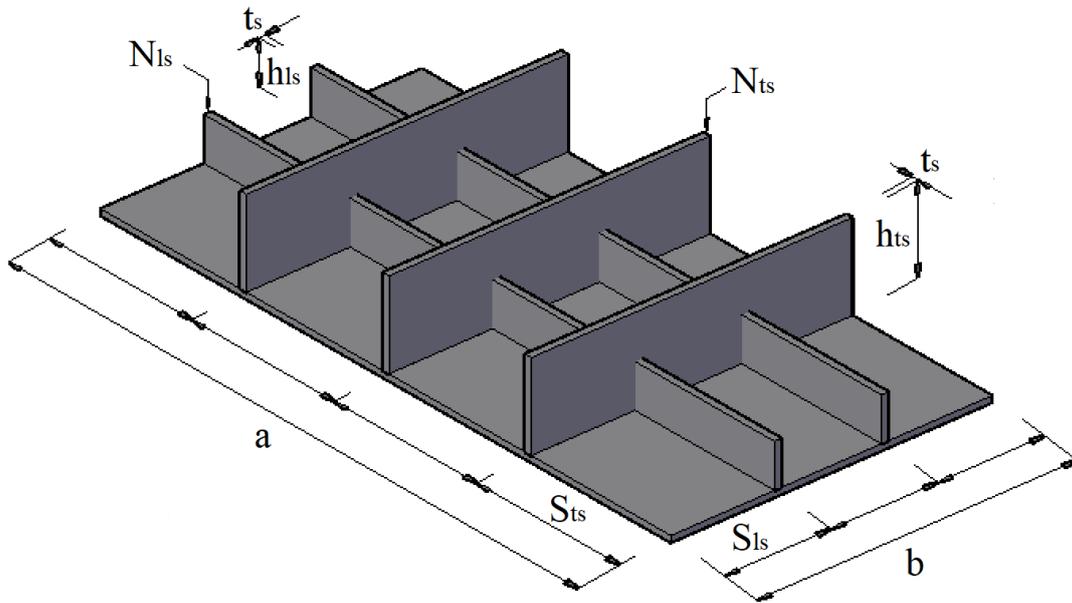


Figura 4.1 - Representação da placa enrijecida na configuração P (2,3).

De acordo com o Design Construtal há a restrição de conservação do volume total da placa e da fração de volume  $\emptyset$  durante o processo, também foi considerado que o comprimento e largura da placa serão mantidos e os valores adotados para espessura dos enrijecedores são comerciais, desta forma o volume para os enrijecedores é função da variação da espessura da placa de referência da forma:

$$\emptyset = \frac{V_s}{V_r} = \frac{N_{ls}(ah_{ls}t_s) + N_{ts}(bh_{ts}t_s) - N_{ls}N_{ts}t_s^2}{abt} \quad \text{quando } h_{ls} = h_{ts} \quad (5.1)$$

$$\emptyset = \frac{V_s}{V_r} = \frac{N_{ls}(ah_{ls}t_s) + N_{ts}(bh_{ts}t_s) - N_{ls}N_{ts}t_s^2h_{ts}}{abt} \quad \text{quando } h_{ls} > h_{ts} \quad (5.2)$$

$$\emptyset = \frac{V_s}{V_r} = \frac{N_{ls}(ah_{ls}t_s) + N_{ts}(bh_{ts}t_s) - N_{ls}N_{ts}t_s^2h_{ls}}{abt} \quad \text{quando } h_{ls} < h_{ts} \quad (5.3)$$

onde  $V_s$  é o volume de material convertido em enrijecedores,  $V_r$  o volume total de material da placa de referência,  $N_{ls}$  e  $N_{ts}$  são, respectivamente, o número de enrijecedores nas direções longitudinal e transversal da placa;  $a$ ,  $b$  e  $t$  são, respectivamente, o comprimento, a largura e a espessura da placa;  $h_{ls}$  e  $h_{ts}$  são, respectivamente, a altura do enrijecedor na direção longitudinal e transversal e  $t_s$  é a espessura dos enrijecedores, que é a mesma nas duas direções da placa.

Devido a consideração de diferentes alturas dos enrijecedores na direção transversal e longitudinal, fez-se necessário a adoção de três equações para a determinação da fração de volume  $\phi$  a fim de realizar o desconto de material referente a diferença de altura entre eles.

As diferentes alturas de  $h_{ls}$  e  $h_{ts}$  foram obtidas através das Eqs. (5.1), (5.2) e (5.3) considerando a relação  $h_{ts}/h_{ls}$  nos valores de 0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75 e 2,00.

Para o estudo considerou-se 27 combinações de número de enrijecedores longitudinais e transversais, na forma  $P(N_{ls}, N_{ts})$ , variando ambos os parâmetros nas duas direções da forma  $N_{ls} = 2, 3, 4$  e  $N_{ts} = 2, 3, 4$ , como pode ser observado na Fig. 4.2.

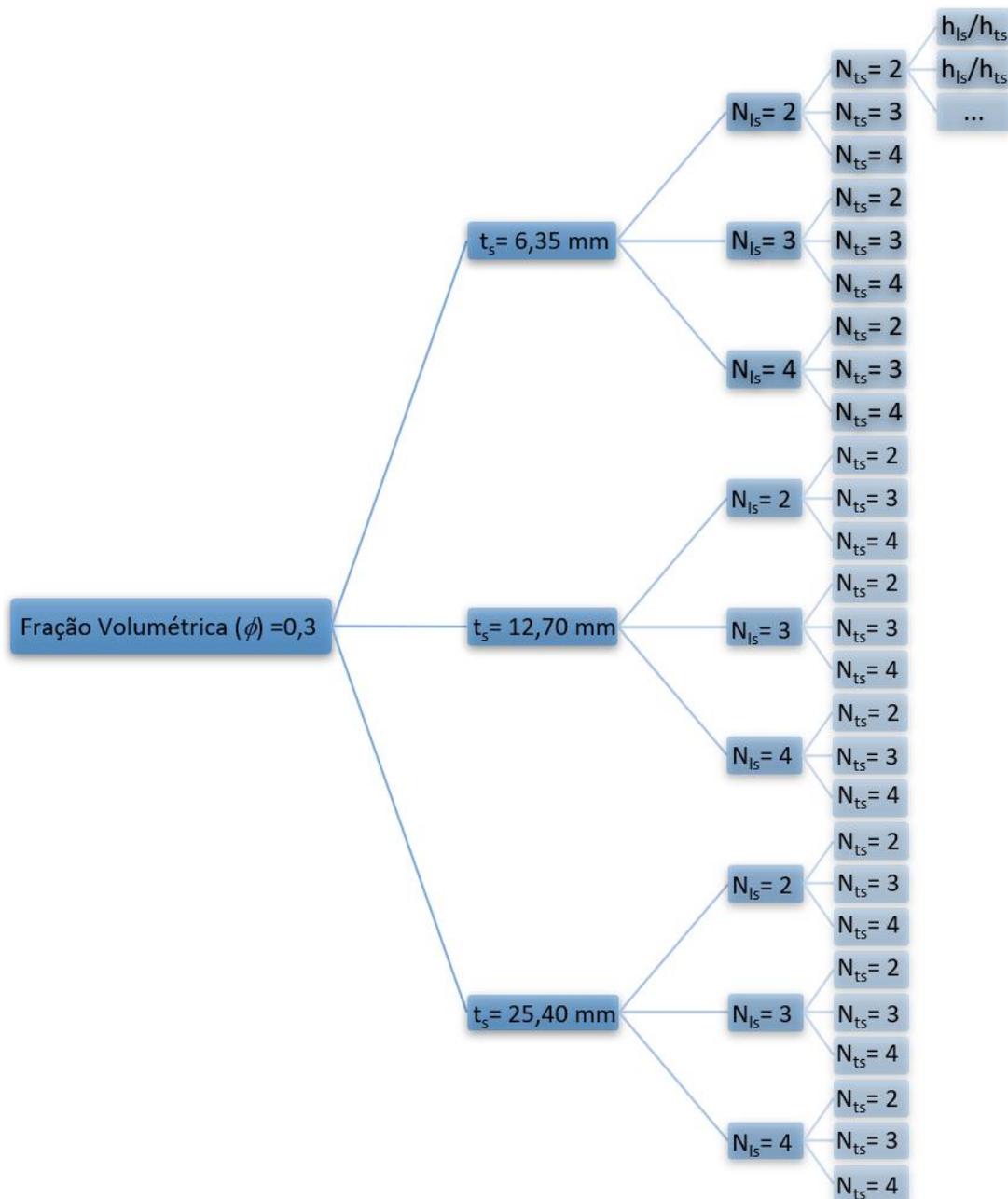


Figura 4.2 - Configurações geométricas obtidas pelo Método Design Construtal.

Os enrijecedores apresentam seção transversal retangular e espaçamentos equidistantes entre eles nas direções longitudinal  $S_{ls}$  e transversal  $S_{ts}$  (ver Fig. 4.1), dados por:

$$S_{ls} = \frac{b}{(N_{ls} + 1)} \quad (5.4)$$

$$S_{ts} = \frac{a}{(N_{ts} + 1)} \quad (5.5)$$

A placa não enrijecida adotada como referência apresenta comprimento  $a = 2$  m, largura  $b = 1$  m, espessura  $t = 20$  mm, suas bordas encontram-se simplesmente apoiados (incluindo as bordas dos enrijecedores) e está submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído de 10 kPa. O material de fabricação da placa possui módulo de elasticidade  $E = 200$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . No presente estudo foi considerada uma fração de volume  $\phi = 0,30$ , e fixou-se a variação do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  com relação de 0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75 e 2,00.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1. Teste de convergência de malha

O tamanho do elemento finito utilizado na malha das simulações numéricas necessita ser avaliado de forma que a variação do seu tamanho não altere o resultado, ou seja, deve haver convergência de valores. Portanto, o modelo ideal é aquele que se aproxima da realidade do problema físico em um tempo de processamento adequado. Este procedimento é conhecido como teste de convergência de malha.

O refinamento excessivo não pode ser adotado, pois torna tempo de processamento maior e não acrescenta melhoria significativa ao resultado. Portanto, faz-se necessário o procedimento conhecido como teste de convergência de malha.

O teste foi feito na placa com a maior diferença entre as alturas dos enrijecedores na direção longitudinal e transversal, a placa P (4,4) com  $t_s = 6,35$  mm e  $h_{ts}/h_{ls} = 2,00$ , sendo essa a geometria de maior complexidade geométrica entre as estudadas neste trabalho.

A malha definida como independente foi a malha 5 com diferença relativa de 0,2% para a deflexão máxima e de 0,2% para a deflexão central, como é demonstrado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1. Teste de independência de malha.

Malha	Tamanho do elemento (m)	$U_z$ máx (mm)	$U_z$ central (mm)	Diferença relativa(%)	Diferença relativa (%)
1	0,30000	0,018100	0,017300	0,00	4,62
2	0,20000	0,018100	0,018100	3,91	3,91
3	0,10000	0,018807	0,018807	0,02	0,02
4	0,05000	0,018811	0,018811	0,05	0,05
5	0,02500	0,018821	0,018821	0,02	0,02
6	0,01250	0,018825	0,018825	0,00	0,00
7	0,00625	0,018825	0,018825	0,00	0,00

A placa não enrijecida utilizada como referência apresentou um deslocamento máximo (central) de  $U_z = 0,6914$  mm, o qual foi determinado de forma analítica através da Eq. (2.36) e um deslocamento máximo (central) de  $U_z = 0,6976$  mm por simulação numérica no software ANSYS com elementos de tamanho 5 mm. A diferença entre o resultado numérico e o analítico foi de 0,95%, demonstrando resultado satisfatório.

## 5.2. Verificação do modelo computacional

Todos os estudos realizados através da simulação numérica necessitam de verificação e/ou validação do modelo com o intuito de estimar a precisão do mesmo. Neste trabalho realizou-se a verificação através de comparação dos resultados para a deflexão no centro da placa com resultados obtidos de forma analítica, para casos de placas sem enrijecedores, e com resultados numéricos de outros autores que já realizaram estudos numéricos nesta área, para o caso de placas enrijecidas.

### 5.2.1. Placa quadrada simplesmente apoiada sem enrijecedores

O primeiro caso analisado para a verificação numérica trata-se de um caso comum de placa quadrada simplesmente apoiada nas quatro bordas sem a utilização de enrijecedor, com lado igual a 141,4 cm sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no valor de 0,001 kN/cm<sup>2</sup>. A placa é constituída de material com módulo de elasticidade equivalente a  $E = 20\,000$  kN/cm<sup>2</sup>, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e espessura constante  $t = 2$  cm.

Para obter um valor de resultado numérico próximo ao do resultado analítico necessita-se ter um refinamento da malha adequado, ou seja, com um tamanho de elemento que se aproxime da realidade. Para este caso utilizou-se um elemento do tipo quadrilátero de 1 cm de lado.

A deflexão da placa é mostrada na Fig. 5.1, com valor máximo no centro da malha no valor de 1,112 mm apresentando uma diferença de 0,34% em relação à solução analítica de Lévy dada pela Eq. (2.37) com deflexão máxima de 1,1083 mm.

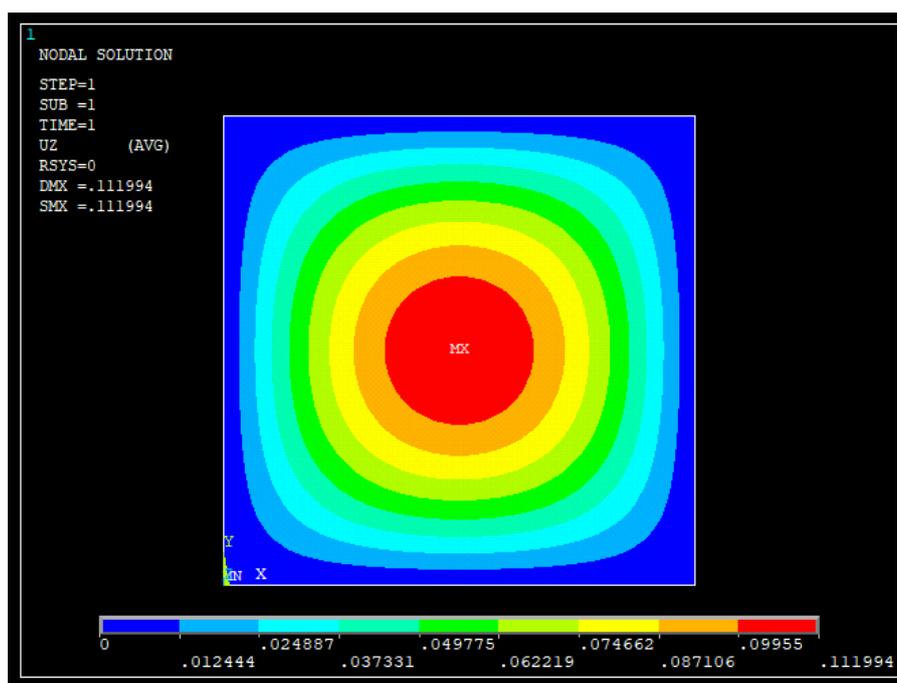


Figura 5.1 - Representação do campo de deslocamento da placa quadrada sem enrijecedor.

### 5.2.2. Placa retangular simplesmente apoiada sem enrijecedores

A segunda placa analisada apresenta as mesmas características de material, carregamento e condições de contorno do primeiro caso analisado apresentado no item 4.2.1 com largura igual a 100 cm e comprimento igual a 200 cm.

A deflexão da placa é mostrada na Fig. 5.2, com valor máximo no centro da malha no valor de 0,698 mm. Da mesma forma que no caso anterior, o resultado da deflexão central da placa foi comparado com a deflexão máxima obtida na solução analítica de Lévy, através da Eq. (2.37) com uma deflexão máxima de 0,691 mm, obtendo-se uma diferença de 1,01%. O tamanho do elemento utilizado foi de 1 cm.

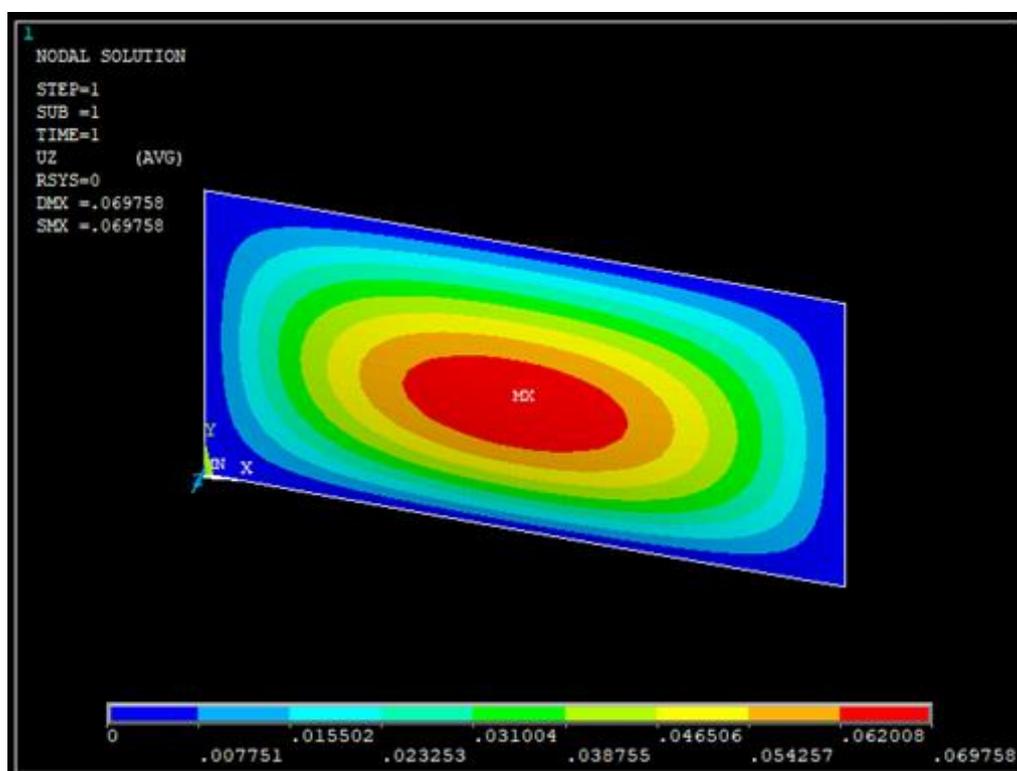


Figura 5.2 - Representação do campo de deslocamento da placa retangular sem enrijecedor.

### 5.2.3. Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor central

Para essa verificação, selecionou-se um caso já analisado por Rossow e Ibrahimkhail (1978), Tanaka e Bercin (1997), Silva (2010) e Troina (2017) sendo utilizado por eles, respectivamente, o método das restrições, o método dos elementos de contorno, o método dos elementos finitos (shell63 combinado com Beam44) e método dos elementos finitos (SOLID95 – hexaedros).

O problema apresenta uma placa retangular com um enrijecedor central e simplesmente apoiada em todas as bordas, é constituída de material com módulo de elasticidade equivalente  $E = 11.721,09 \text{ kN/cm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , espessura da placa  $t = 0,0254 \text{ cm}$ , espessura do

enrijecedor constante  $t_s = 0,0254$  cm, altura do enrijecedor no valor de 0,254 cm, apresenta comprimento de 2,54 cm e força distribuída atuando sobre a placa  $q = 0,000689$  kN/cm<sup>2</sup>.

Para esta análise foi utilizado uma malha com elemento de 1 mm, determinado através do teste de independência de malha com uma diferença de 0,20% em relação a malha anterior, determinado através da malha independente. A placa apresentou a configuração deformada apresentada na Fig. 4.3. O resultado obtido para a deflexão no centro da placa foi de 0,0039 mm apresentando valor próximo ao dos estudos citados acima, a diferença em relação ao encontrado por Troina (2017) foi de 2,63% o qual teve uma deflexão central de 0,0038 mm, em relação aos valores obtidos por Rossow e Ibrahimkhail (1978) e Silva (2010) a diferença foi na ordem de 11% com valor de deflexão de 0,0035 mm e teve-se como maior diferença o resultado obtido por Tanaka e Bercin (1997) com valor de 0,0031 mm e uma diferença de 25%.

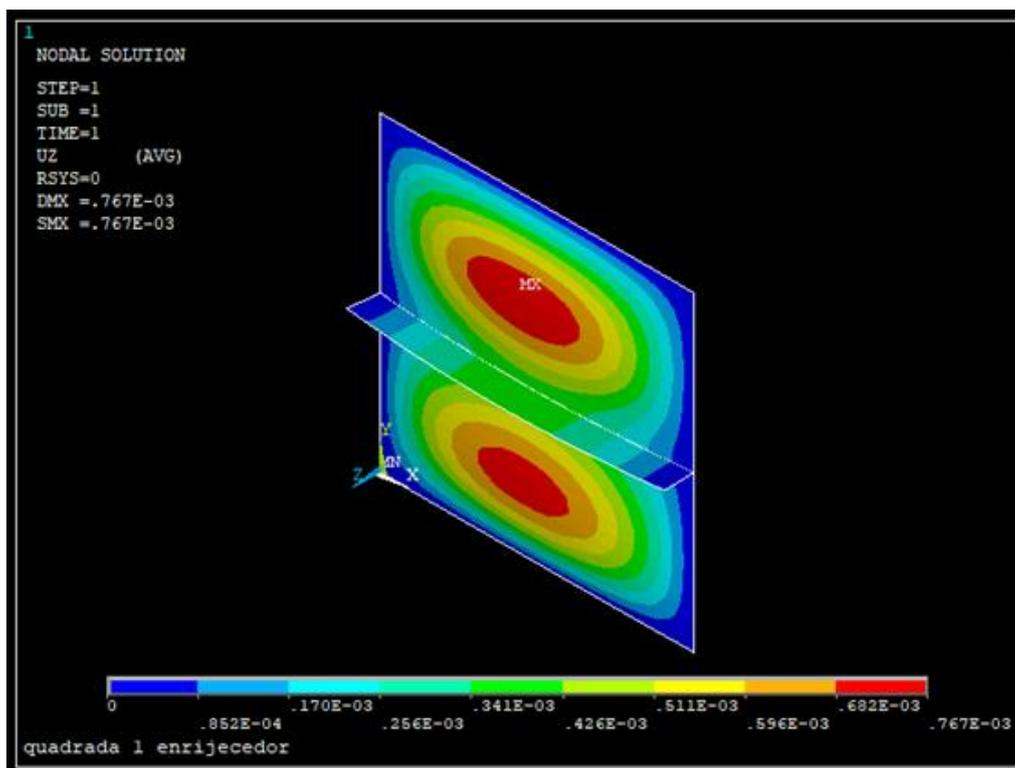


Figura 5.3 - Representação do campo de deslocamento da placa quadrada com um enrijecedor central.

#### 5.2.4. Placa retangular simplesmente apoiada com dois enrijecedores em cruz

Para esse caso da verificação apresenta-se um problema já analisado por Rossow e Ibrahimkhail (1978), Berdair (1997), Silva (2010) e Troina (2017). Os métodos utilizados por Rossow e Ibrahimkhail (1978), Silva (2010) e Troina (2017) são os mesmos do caso 4.2.3 enquanto que Berdair (1997) utilizou o método da programação sequencial quadrática.

O problema trata de uma placa retangular com dois enrijecedores ortogonais que se cruzam no centro da placa, apresenta material com módulo de elasticidade equivalente  $E = 20.684,27 \text{ kN/cm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , espessura da placa  $t = 0,635 \text{ cm}$ , espessura do enrijecedor constante  $t = 0,635 \text{ cm}$ , altura do enrijecedor na direção do maior vão no valor de  $12,7 \text{ cm}$  e na direção do menor vão uma altura de  $7,62 \text{ cm}$ , com maior vão de  $152,4 \text{ cm}$  e menor vão de  $76,2 \text{ cm}$  e força distribuída atuando sobre a placa  $q = 0,000689 \text{ kN/cm}^2$

Neste caso a malha gerada utilizou um elemento com tamanho igual a  $1 \text{ cm}$ , o qual foi determinado pelo teste de independência de malha. A placa apresenta configuração deformada conforme Fig. 5.4, com resultado para a deflexão máxima de  $0,27 \text{ mm}$ , resultado que converge com o obtido por Troina (2017) com uma diferença de  $2,91\%$  e apresenta uma diferença próxima de  $32\%$  em relação ao valor mais discrepante obtido por Bedair (1997). Como já sugerido por Troina (2017) o modelo de Silva não apresentou o refinamento de malha adequado, quando foi refeito com um número maior de elementos apresentou resultado próximo ao encontrado nesta pesquisa.

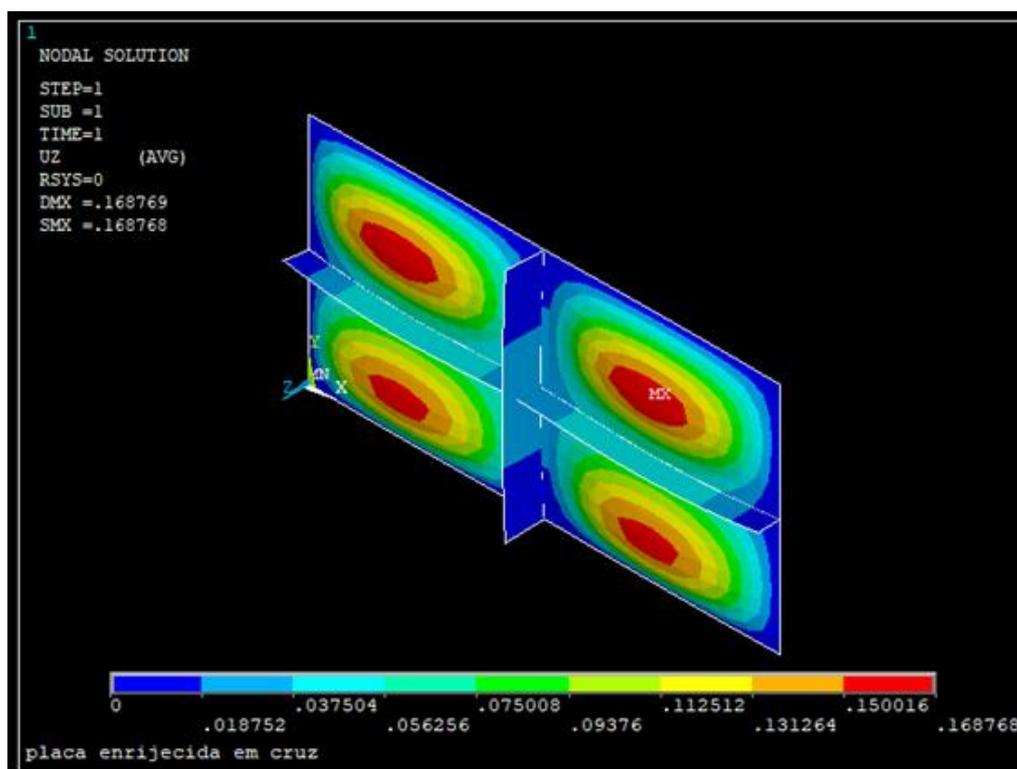


Figura 5.4 - Representação do campo de deslocamento da placa retangular com dois enrijecedor ortogonais

### 5.2.5. Placa retangular simplesmente apoiada com variação de altura do enrijecedor central

No último caso analisado nesta verificação é analisada a influência da variação da altura do enrijecedor em uma placa retangular na sua deflexão central.

A placa em questão apresenta material com módulo de elasticidade equivalente a  $E = 3,9 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , espessura constante  $t = 0,20$  m, com maior vão de 18 m e menor vão de 9 m e força distribuída  $q = 10$  kN/m<sup>2</sup>. A placa é simplesmente apoiada em todas as bordas, apresenta o enrijecedor central na direção do maior vão e as alturas de enrijecedor analisadas foram de 0 m, 0,20 m, 0,60 m, 1,25 m e 2,00 m.

Esse problema já foi desenvolvido por Rossow e Ibrahimkhail (1978), Sapountzakis e Katsikadelis (2000), Silva (2010) e Troina (2017), utilizando, respectivamente, o método da equação análoga, método dos elementos finitos (shell63 para a placa e Beam44 para o enrijecedor), método dos elementos finitos (shell63) e método dos elementos finitos (SOLID95 - Hexaedros).

Para altura de enrijecedor igual a zero a deflexão máxima obtida foi de 0,0328 m conforme Fig. 4.5. Como ele não apresenta altura, passa a ser um caso de placa sem enrijecedor. Portanto o resultado da deflexão foi comparado com a solução analítica apresentando uma diferença aproximadamente 8%.

Como já observado por Troina (2017), o valor máximo da deflexão excede o exposto na 5ª hipótese de Kirchhoff, ela não se enquadraria na análise de pequenas deflexões o que levou nesse aumento da diferença de resultados.

Os resultados da deflexão central para altura de enrijecedor 0,20 m; 0,60 m; 1,25 m e 2,00 m conforme Figs. 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 foram, respectivamente, de 32,23 mm, 26,49 mm, 4,73 mm e 1,66 mm. Esses valores convergem com as referências citadas excetuando os valores sugeridos por Rossow e Ibrahimkhail (1978).

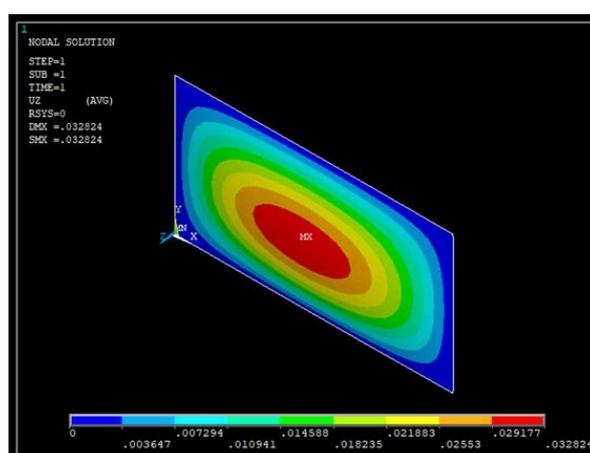


Figura 5.5 - Deformada placa retangular com  $h_s = 0$ .

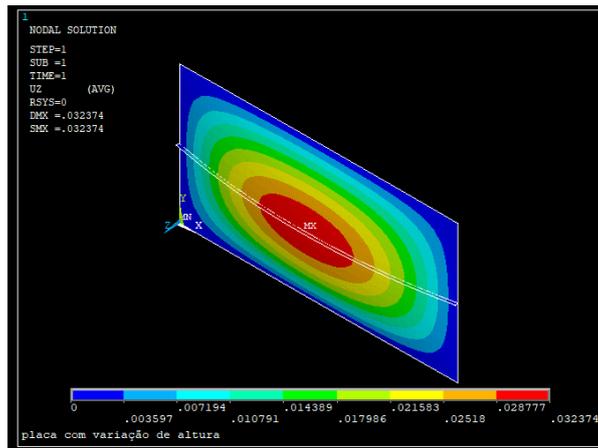


Figura 5.6 - Deformada placa retangular com  $h_s = 0,20$  m.

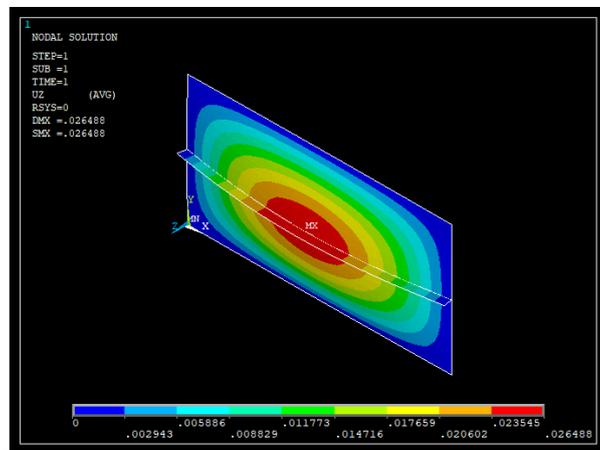


Figura 5.7 - Deformada placa retangular com  $h_s = 0,60$  m.

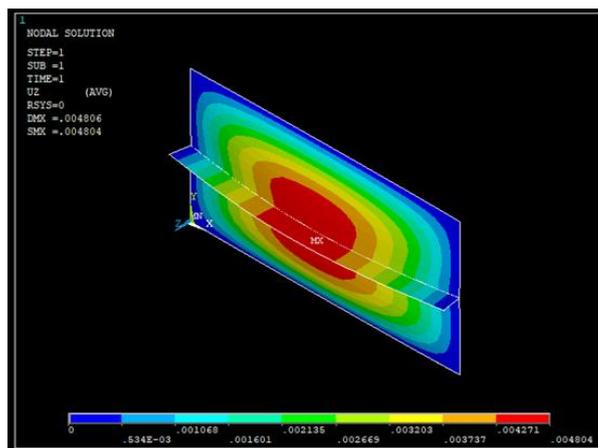


Figura 5.8 - Deformada placa retangular com  $h_s = 1,20$  m.

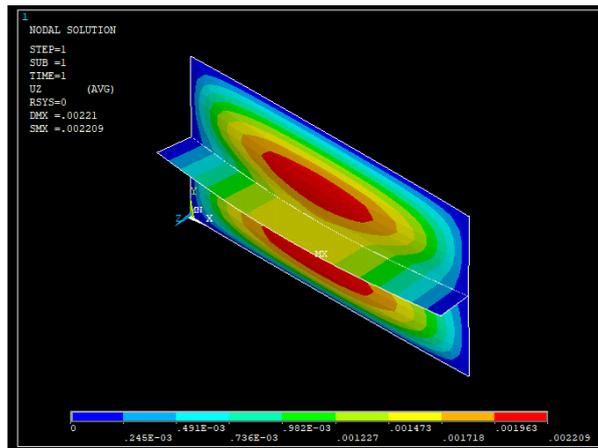


Figura 5.9 - Deformada placa retangular com  $h_s = 2,0$  m.

### 5.3. Aplicação do modelo

As Figs. 5.10 à 5.18 apresentam os resultados numéricos da variação na deflexão máxima e central,  $(U_Z)_{max}$  e  $(U_Z)_{central}$ , respectivamente, devido à alteração do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$ , tendo como parâmetro a variação da relação nas alturas de enrijecedores da forma,  $0,5 < h_{ts}/h_{ls} < 2,0$  com passo de 0,25, para três espessuras de enrijecedores  $t_s = 6,35$  mm,  $t_s = 12,70$  mm e  $t_s = 25,40$  mm e com o número de enrijecedores,  $P(N_{ls}, N_{ts})$ , variando de  $N_{ls} = 2, 3, 4$  e  $N_{ts} = 2, 3, 4$ .

O resultado numérico encontrado para deflexão máxima (central) da placa de referência foi  $U_Z = 0,6976$  mm.

Observando as Figs. 5.10 à 5.18, como já era esperado, os valores de deflexão máxima e central apresentam diminuição com o emprego de enrijecedores na placa em relação à placa não enrijecida usada como referência, englobando todos os casos analisados nesse estudo.

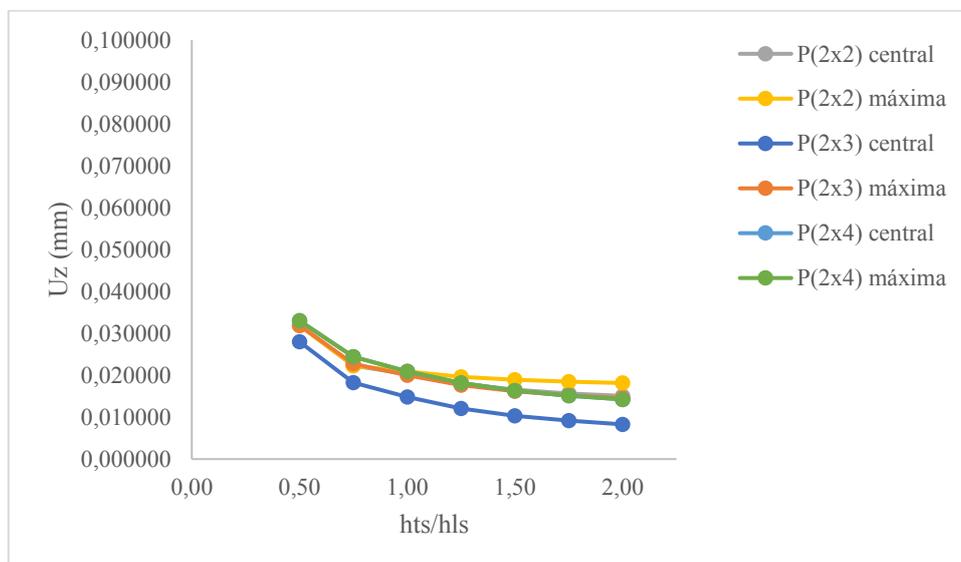


Figura 5.10 - Variação da deflexão em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$   $N_{ls} = 2$  e  $t_s = 6,35$  mm.

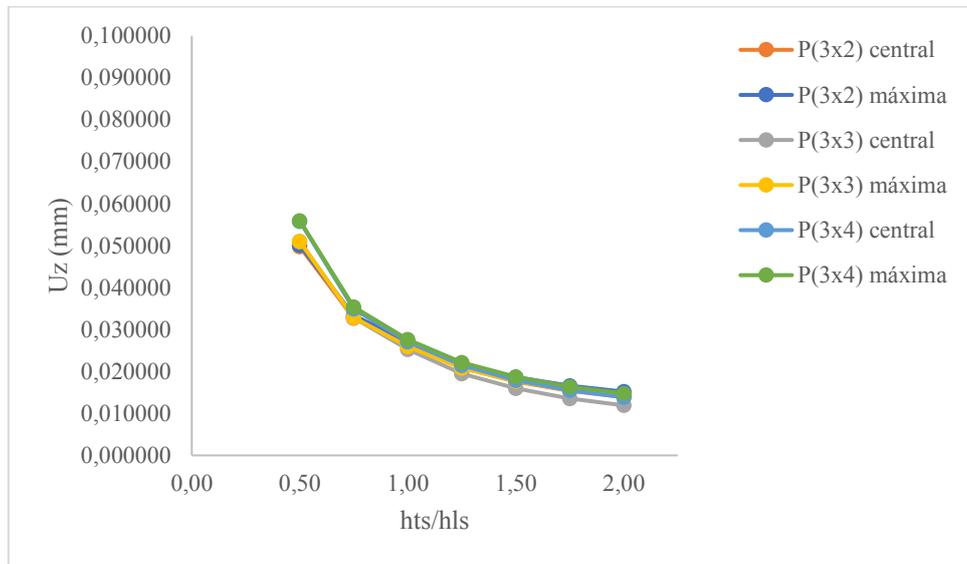


Figura 5.11 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 3$  e  $t_s = 6,35$  mm.

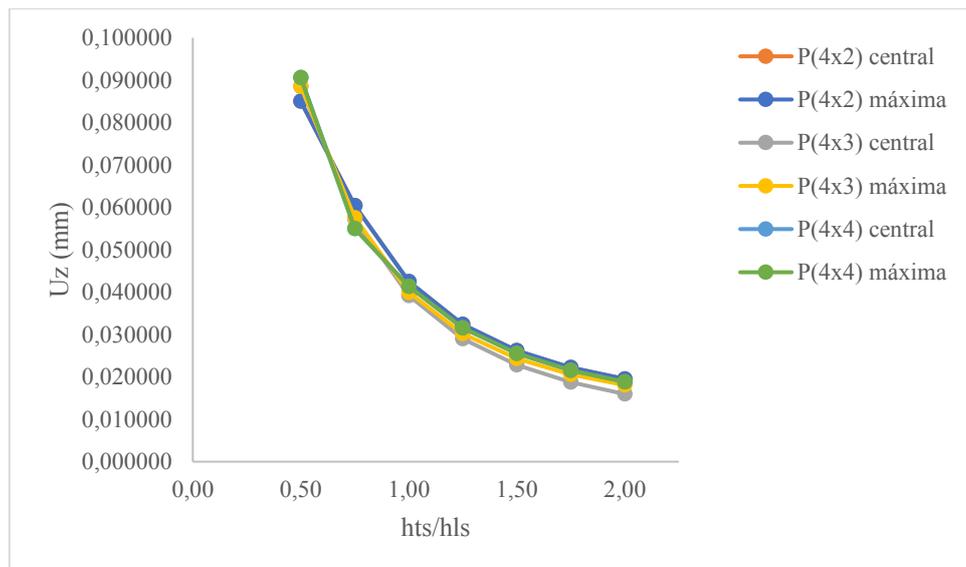


Figura 5.12 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 4$  e  $t_s = 6,35$  mm.

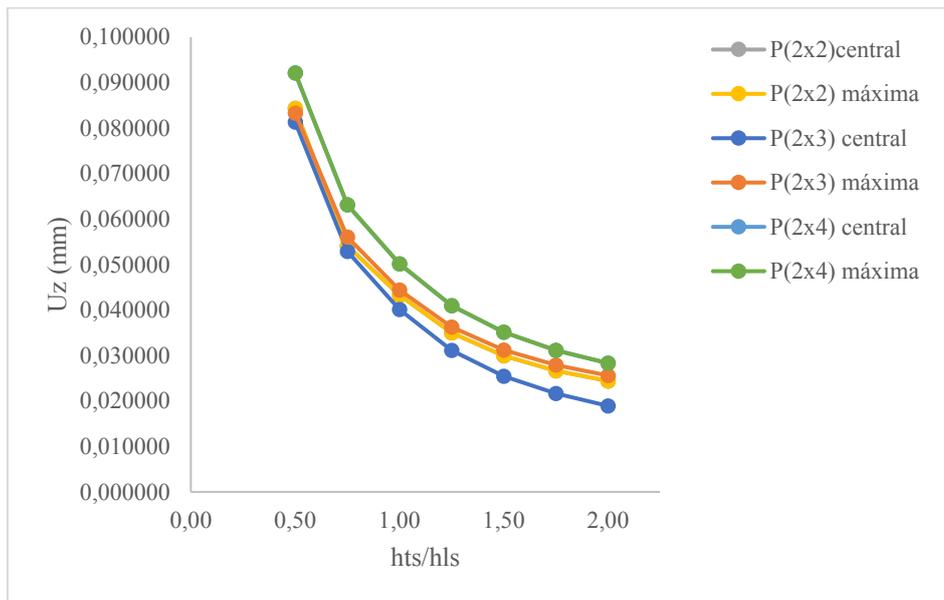


Figura 5.13 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 2$  e  $t_s = 12,70$  mm.

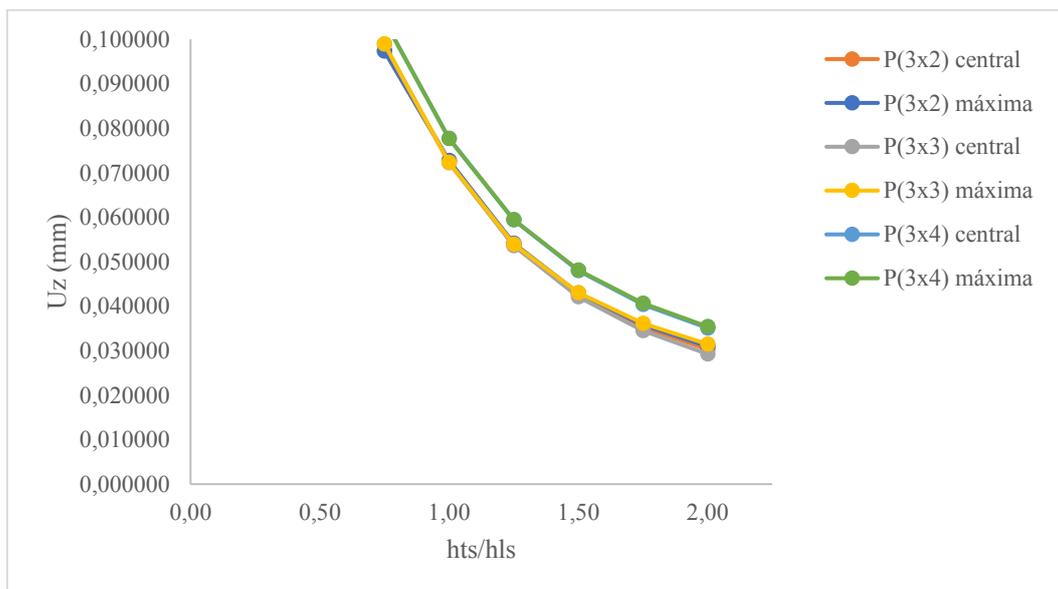


Figura 5.14 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 3$  e  $t_s = 12,70$  mm.

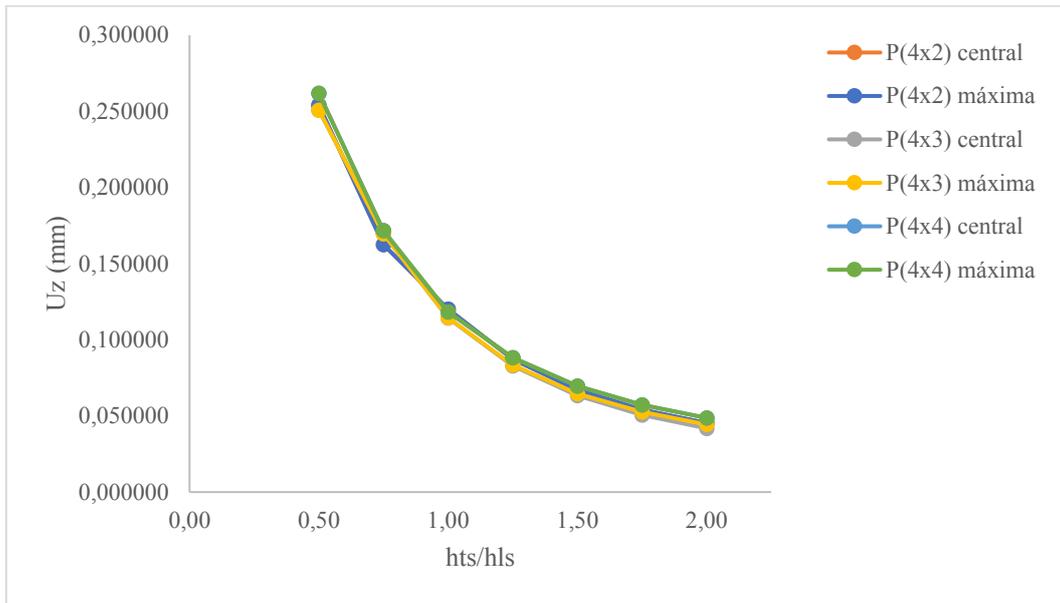


Figura 5.15 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 4$  e  $t_s = 12,70$  mm.

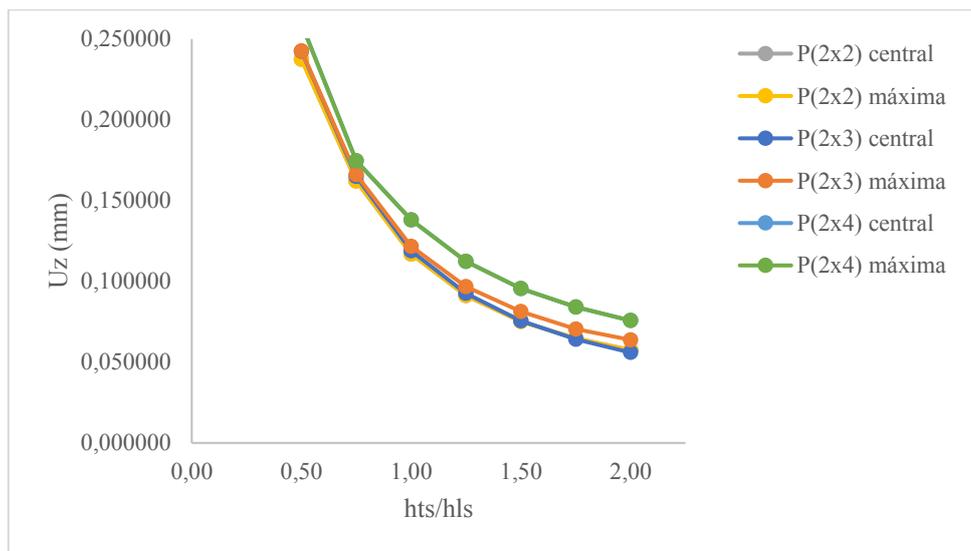


Figura 5.16 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h$  para  $N_{ls} = 2$  e  $t_s = 25,40$  mm.

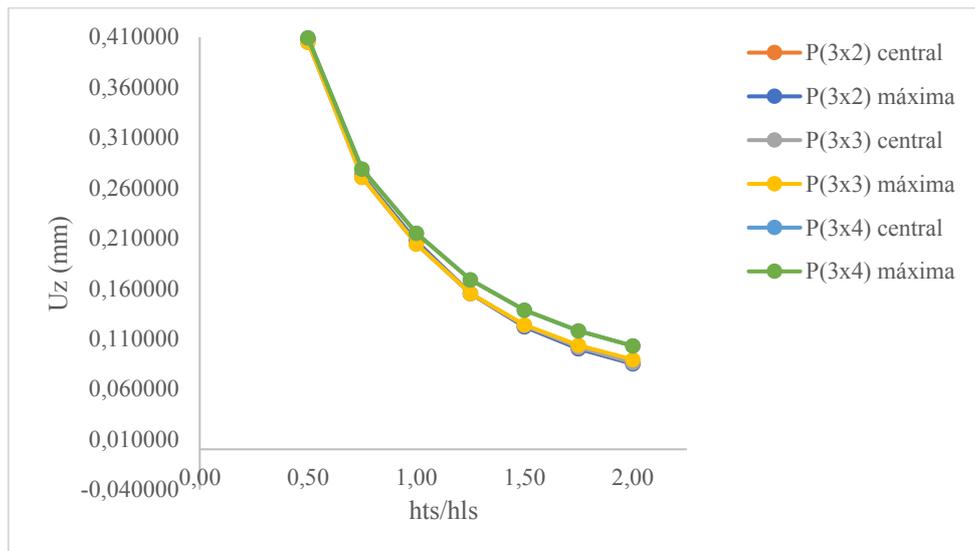


Figura 5.17 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 3$  e  $t_s = 25,40$  mm.

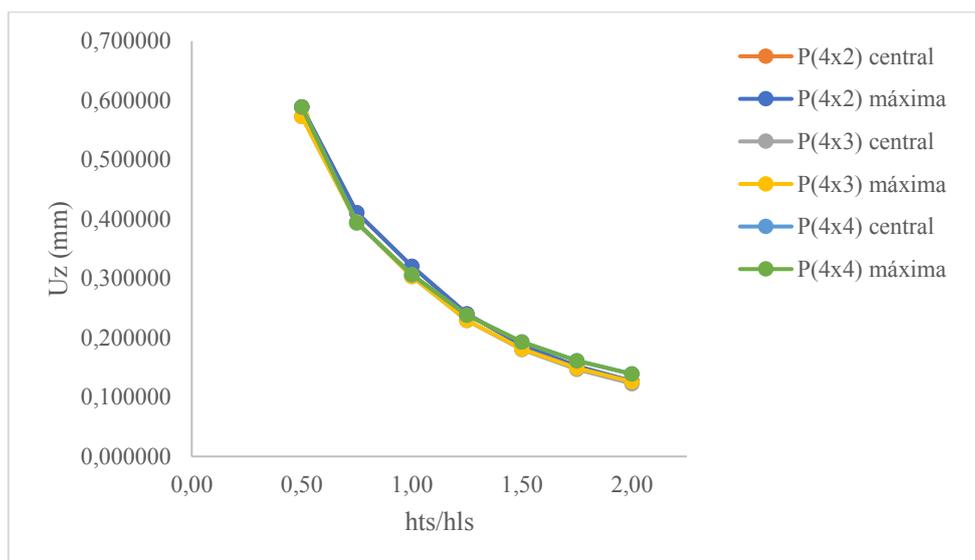


Figura 5.18 - Variação do deslocamento em função do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  para  $N_{ls} = 4$  e  $t_s = 25,40$  mm.

A partir das Figs. 5.10 à 5.18 notou-se também que com o aumento do valor do grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  há uma tendência de diminuição dos valores, tanto da deflexão máxima quanto para a deflexão central, tendo como melhor resultado, em todos os casos analisados nesse estudo, a relação  $h_{ts}/h_{ls} = 2,0$ . Tal fato demonstra que os enrijecedores transversais possuem uma maior influência na redução dos deslocamentos, em comparação com os enrijecedores dispostos longitudinalmente, ambas sujeitas ao mesmo carregamento, isto pode ser explicado pelo fato que o momento fletor solicitante é maior na direção do menor vão (ARAÚJO, 2014). Deste modo se torna mais vantajoso empregar uma maior parcela de volume de material nos enrijecedores transversais.

Nota-se também que o aumento simultâneo na quantidade de número de enrijecedores nas direções longitudinal e transversal, para as três espessuras de enrijecedores, resulta em um aumento da deflexão máxima e central quando comparadas às configurações com um menor número de enrijecedores. Este fato pode ser explicado devido ao volume fixo de 30% da placa de referência que é transformado em enrijecedor, o que acarreta em enrijecedores com menores alturas. Por isso, nenhuma configuração com mais de seis enrijecedores (somado longitudinal e transversal) apresentam-se entre os melhores resultados desta pesquisa.

Os resultados numéricos apresentados indicam que o aumento na altura do enrijecedor na direção transversal,  $h_{ts}$ , tem maior impacto na redução da deflexão, principalmente quando é utilizada uma espessura menor de enrijecedor. Dentre os resultados deste estudo teve-se, como melhor configuração estudada, a geometria P(2,3) com  $t_s = 6,35$  mm e  $h_{ts}/h_{ls} = 2,00$  com uma melhoria de 97,98% na deflexão máxima e de 98,85% na deflexão central em relação à placa de referência, cujos deslocamentos máximo e central foram, respectivamente, 0,01410 mm e 0,00802 mm.

Através da análise dos resultados gerados também é possível observar que para as três espessuras de enrijecedores consideradas,  $t_s = 6,35$  mm, 12,70 mm e 25,40 mm, a configuração geométrica P(2,3), com dois enrijecedores longitudinais e três enrijecedores transversais, apresentam os menores valores de deslocamento máximo e central. Para essa configuração com espessura de  $t_s = 12,70$  mm o valor de deflexão máxima obtido foi de 0,0256 mm e a deflexão central de 0,01893 mm representando uma melhoria de 96,33% e 97,29%, respectivamente, em relação à placa não enrijecida. Da mesma maneira, para  $t_s = 25,40$  mm a melhoria encontrada foi de 90,86% para a deflexão máxima e 91,98% para a deflexão central, tendo como deslocamentos 0,06377 mm e 0,05592 mm.

Pôde-se observar, ainda, que o grau de liberdade  $h_{ts}/h_{ls}$  apresentou maior impacto nos deslocamentos com o aumento da espessura dos enrijecedores ( $t_s$ ). Para a melhor configuração encontrada P(2,3) houve uma redução máxima de 73,72% e 76,93% para os deslocamentos máximo e central, respectivamente, com  $t_s = 25,40$  mm. Para  $t_s = 12,70$  mm a redução encontrada foi de 69,26% e 76,74% para os deslocamentos máximo e central e por último, para  $t_s = 6,35$  mm os valores encontrados foram de 54,54% e 70,43% para os deslocamentos máximo e central. Esses resultados indicam que um aumento na altura dos enrijecedores transversais, mesmo sem alterar o volume total de material empregado na placa, implica uma melhoria no comportamento mecânico no que tange os deslocamentos máximos e centrais.

Com base nos resultados numéricos apresentados nas tabelas do Apêndice 1 é possível observar que todos os resultados dos deslocamentos considerando  $t_s = 6,35$  mm, para as 9

configurações  $P(N_{ts}, N_{ts})$ , apresentam maior minimização das deflexões quando comparadas aos resultados obtidos utilizando as espessuras  $t_s = 12,70$  mm e  $t_s = 25,40$  mm. Isto é decorrente da taxa de volume fixo da placa que é transferida aos enrijecedores, que com menores espessuras tendem a proporcionalmente aumentarem a altura dos enrijecedores acarretando em um aumento na rigidez da estrutura e em uma melhor distribuição dos deslocamentos, tornando o deslocamento global da estrutura (que antes era situado na região central da mesma) em um comportamento de pequenas placas com deslocamentos centrais menores. Tal fato pode ser analisado na Fig. 5.19, onde é apresentada a mesma configuração geométrica  $P(3,3)$ , para as três espessuras de enrijecedores consideradas no estudo.

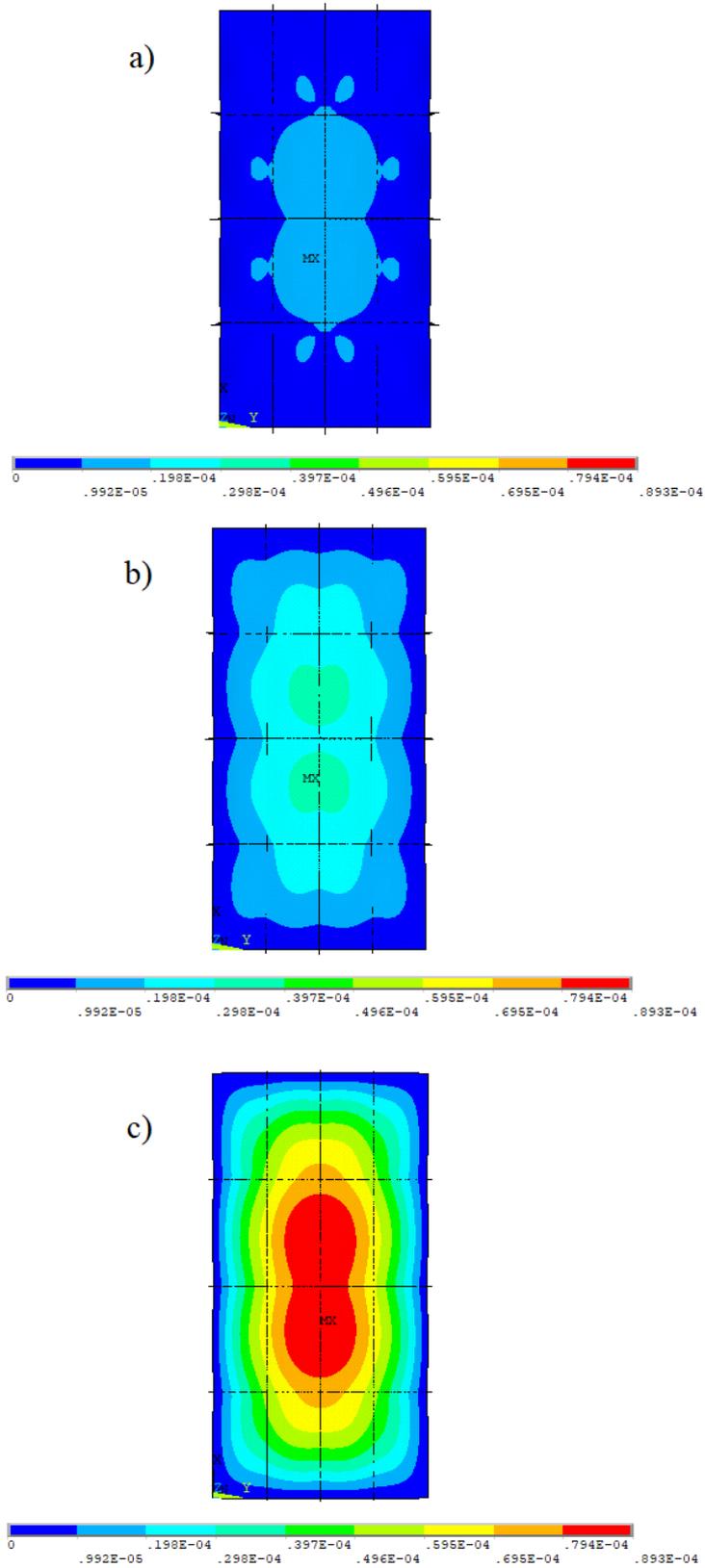


Figura 5.19 – Variação da distribuição de deslocamento para a placa P(3,3) com  $h_{ts}/h_{IS} = 2,0$  com  
a)  $t_s = 6,35$  mm b)  $t_s = 12,70$  mm e c)  $t_s = 25,40$  mm

Ressalta-se ainda que, entre os resultados obtidos, as maiores diferenças entre os valores de deflexão máxima e central, para as três espessuras de enrijecedores, também encontram-se na configuração geométrica P(2,3) apresentando para  $t_s = 6,35$  mm uma diferença de 42,90%, na espessura de  $t_s = 12,70$  mm um valor de 26,12% e para  $t_s = 25,40$  mm esta diferença foi de 12,31%. Salientando ainda que analisando os resultados para as três espessuras de enrijecedores e  $h_{ts}/h_{ls} = 2,0$ , todas as configurações que apresentam enrijecedor passando pelo ponto central (P(2,3), P(3,2), P(3,3), P(3,4) e P(4,3)) demonstram diferenças entre o valor da deflexão máxima e central enquanto nas configurações em que não são compostas por enrijecedor central (P(2,2), P(2,4), P(4,2) e P(4,4)) apresentam mesmo valor para a deflexão máxima e central. Esta diferença é justificada pelo fato do enrijecedor que passa pelo ponto central mover o campo de deslocamento para a área livre mais próxima.

Observou-se ainda que os piores resultados numéricos foram encontrados, para as três espessuras de enrijecedores, na configuração geométrica P(4,4) com valor da relação  $h_{ts}/h_{ls} = 0,50$ . Nestes casos o volume de material usado nos enrijecedores na direção longitudinal da placa ( $h_{ls} > h_{ts}$ ) e a quantidade de enrijecedores demonstram que não foi possível a distribuição dos deslocamentos, o que manteve a placa comportando-se como uma placa única com apenas um ponto central de deslocamento, como pode ser observado na Fig. 5.20. Como esse aumento da deflexão é proporcional ao aumento do número de enrijecedores, não se justificou a aplicação para casos com  $N_{ls}$  e  $N_{ts}$  superiores a 4.

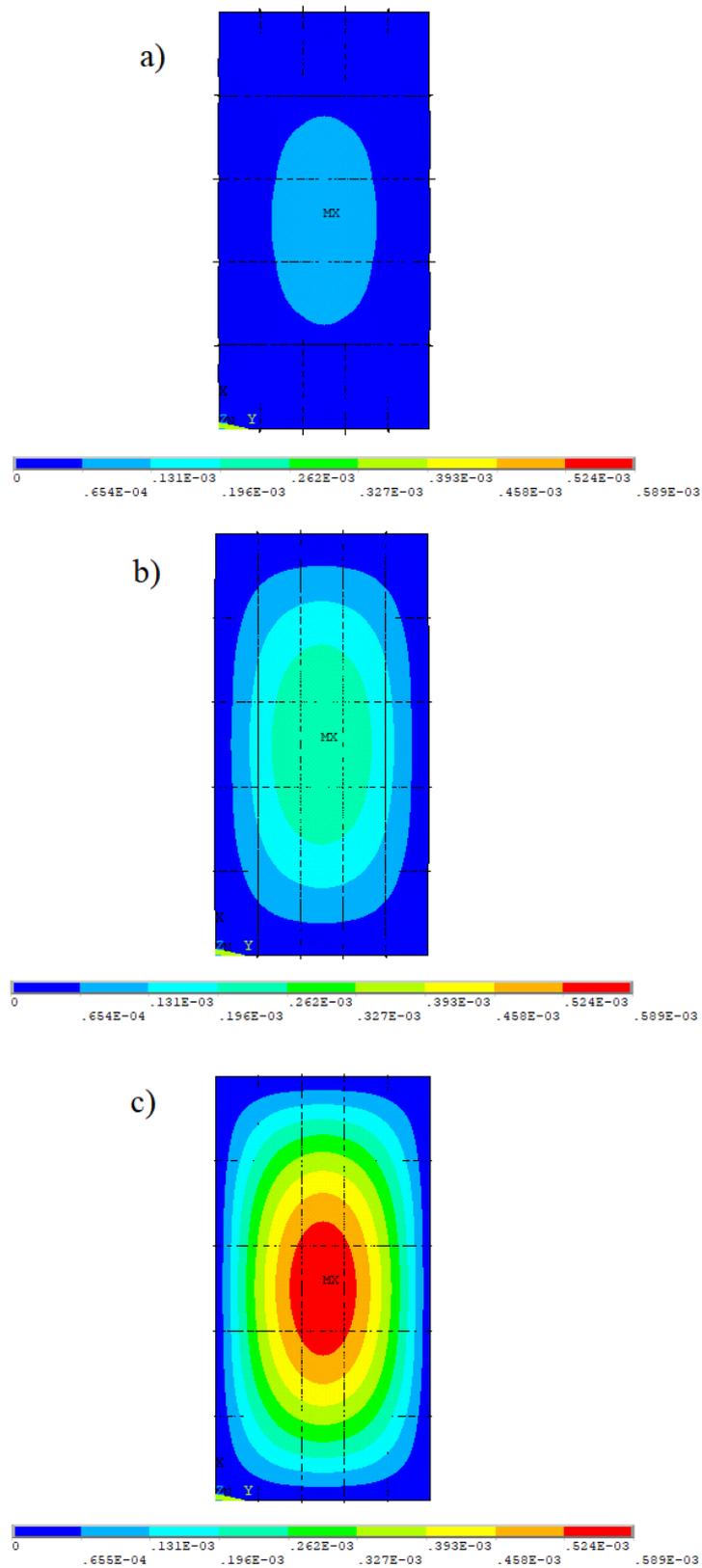


Figura 5.20 – Comparação entre as placas P(4,4) com  $h_{ts}/h_{ls} = 0,50$  para as três espessuras de enrijecedores  $t_s = 6,35, 12,70$  e  $25,40$  mm.

Na Fig. 5.21, é possível observar um comparativo entre o campo de deslocamentos da geometria ótima e da placa com o pior resultado numérico obtido. Nota-se que os resultados seguem os princípios do Método Design Construtal, em que ocorre uma ótima distribuição (ou fluxo) de deslocamentos na placa enrijecida P(2,3), ou seja, melhor distribuição dos deslocamentos máximos na área da placa enrijecida ótima.

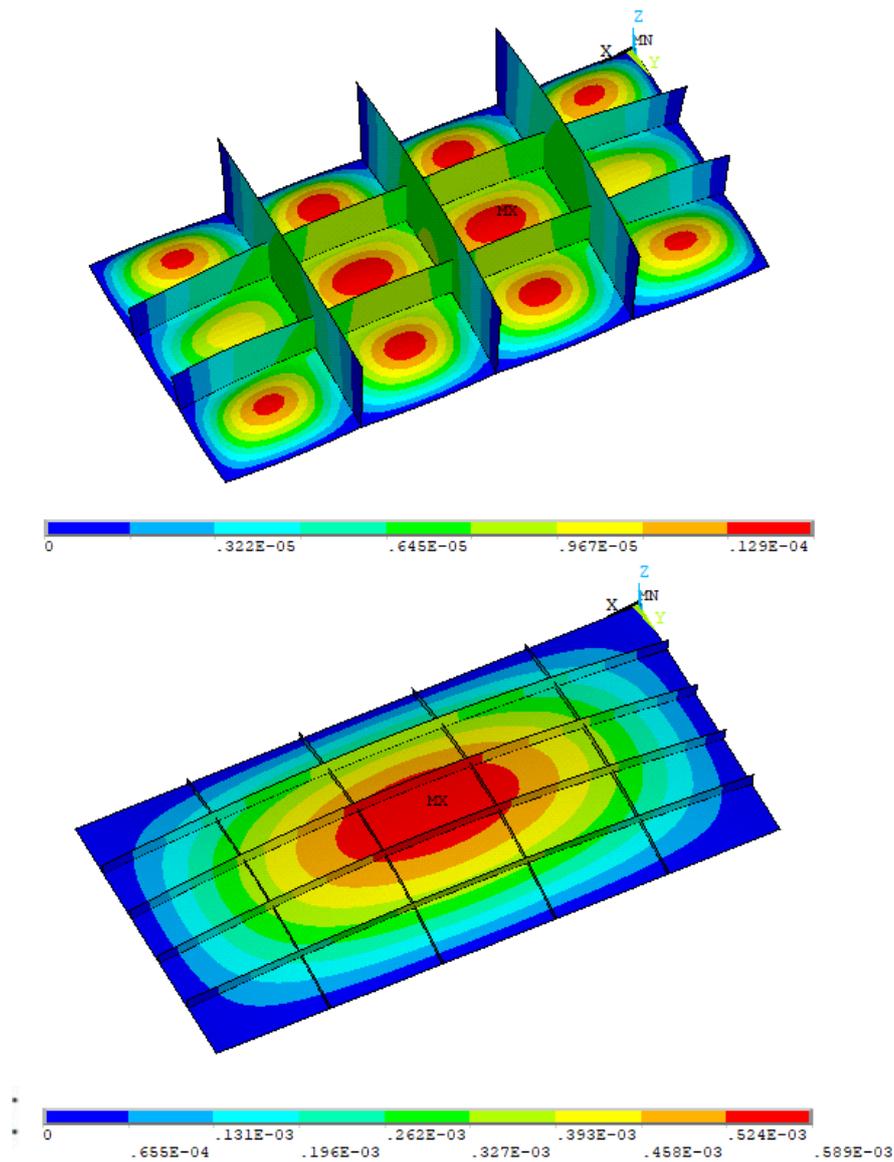


Figura 5.21 – Comparação entre a placa enrijecida P(2,3) com  $t_s = 6,35$  mm e a placa P(4,4) com  $t_s = 25,40$  mm.

## 6. CONCLUSÕES

A simulação numérica de placas metálicas através do software ANSYS®, baseado no MEF, associada com o Método Design Construtal tornou possível a avaliação da influência da variação do número de enrijecedores na direção longitudinal e transversal, da espessura do enrijecedor e da altura do enrijecedor na direção transversal e longitudinal na deflexão máxima e central de placas enrijecidas.

Como já observado em diversos estudos na literatura, a adição de enrijecedores, mesmo sem o acréscimo de volume ao conjunto, devido apenas à transformação de volume da placa de referência em enrijecedores, apresenta resultados significativos em relação à redução da deflexão de placas metálicas. Neste estudo, a transformação de 30% do volume da placa de referência em elementos enrijecedores apresentou, para todos os casos simulados, uma melhora na deflexão máxima e central.

Com base nos resultados percebeu-se que o grau de liberdade ( $h_{ts}/h_{ls}$ ) apresentou grande influência no valor da deflexão máxima e central da placa. Foi observado que um aumento na altura dos enrijecedores transversais ( $h_{ts}$ ), superior à altura do enrijecedor longitudinal ( $h_{ls}$ ), mesmo sem alterar o volume total de material empregado na placa, implica em uma melhoria no comportamento mecânico no que tange os deslocamentos resultando em melhores valores de minimização da deflexões.

Outro parâmetro que influenciou significativamente nos resultados foi a espessura do enrijecedor ( $t_s$ ), o qual considerando as mesmas configurações  $P(N_{ls}, N_{ts})$  apresenta maiores resultados de minimização da deflexão (máxima e central) a medida que a espessura do enrijecedor considerada foi diminuída.

Também foi possível a análise de que as melhores configurações encontradas são aquelas que permitem o desenvolvimento do campo de deslocamento da placa, ou seja, onde a placa apresenta vários pontos de deslocamentos localizados e que desta maneira se distancia da placa de referência (sem enrijecedores) a qual apresenta um ponto central de deslocamento. Essa estruturação só foi possível à medida que houve o aumento da altura do enrijecedor transversal ( $h_{ts}/h_{ls} = 2,00$ ) e com as menores espessuras de enrijecedores, sendo o melhor desempenho com  $t_s = 6,35$  mm.

A geometria ótima obtida é a configuração geométrica P (2,3) com  $t_s = 6,35$  mm e  $h_{ts}/h_{ls} = 2,00$  com uma melhoria de 97,98% na deflexão máxima e de 98,85% na deflexão central em relação à placa de referência não enrijecida.

Os resultados demonstram que a forma mais eficiente de minimizar a deflexão em placas de aço através da inserção de enrijecedores é acrescentando um maior número de enrijecedores na

direção do menor vão e que estes devem ainda apresentar uma altura superior aos dispostos no sentido contrário.

### 6.1. Proposta de continuidade

Em trabalhos futuros para a continuidade desta pesquisa, apresenta-se as seguintes sugestões:

1. Analisar a influência do parâmetro  $h_{ts}/h_{ls}$  para outros valores de espessura de enrijecedores, podendo ser adotado  $t_s = 1/8 \text{ pol} = 3,175 \text{ mm}$  (inferior a menor espessura desta pesquisa  $t_s = 1/4 \text{ pol}$ ) e  $t_s = 3/8 \text{ pol} = 12,70 \text{ mm}$ .
2. Acrescentar mais graus de liberdade ao variar-se, além dos parâmetros citados, o número de enrijecedores longitudinais  $N_{ls}$  e transversais  $N_{ts}$ .
3. Considerar diferentes valores de fração de volume  $\phi > 0,30$ , em conjunto com os parâmetros variados nesse estudo, de forma a determinar a influência deste volume na deflexão.
4. Aumentar a relação  $h_{ts}/h_{ls} > 2,0$ .
5. Utilização de outros tipos de enrijecedores.
6. Considerar espessuras dos enrijecedores  $t_s$  diferentes nas direções transversais e transversais.
7. Considerar outras relações entre lados:  $1,0 \leq a/b \leq 2,0$ .

## 7. REFERÊNCIAS

ANSYS, Inc. **ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 17.2, Help System, Coupled Field Analysis Guide.**

ANEJA, R., CHOUDHARY, A., JAIN, K. K., DAVE, R. K. **Design and optimization of hat stiffened plate using finite element method.** v. 05, p. 578-584, 2018.

ARAÚJO, J.M. **Curso de concreto armado.** 4 ed. Rio Grande: Dunas; 2014. 421 p

AZEVEDO, A.F.M. **Métodos dos elementos Finitos.** Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto; 2003. 258 p.

BEDAIR, O. K.; Analysis of stiffened plates under lateral loading using sequential quadratic programming (SQP). **Computers & Structures, Vol. 62,** No. 1, pp 63-80, 1997.

BEJAN, A., **Shape and Structure, from engineering to nature,** Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory.** Wiley, Hoboken, 2008.

BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in Nature: How the Constructal Law governs evolution in biology, physics, technology, and social organizations.** Anchor Books, 2012.

BEJAN, A.; LORENTE, S. Constructal law of design and evolution: Physics, biology, technology, and society. **Journal of Applied Physics 113,** 2013.

BHASKAR, K.; VARADAN, T. K., 2014. **Plates – Theories and Applications.** 1nd ed. Wiley, India.

BURNETT, D. S. **Finite Element Analysis - From Concepts to Applications,** Addison–Wesley, 1987.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bull. Amer. Math. Soc. 49,** no. 1, p. 1-23, 1943.

DEVLOO, P.R.B. Simulação numérica. *Multi Ciência: A Linguagem da Ciência.* 2005 Mai;4(1):1-13

DIAS, F. T.; CRUZ, J. P.; VALENTE, R. A. F.; SOUSA, R. J. A. 2010. **Método dos elementos finitos:**

**Técnicas de simulação numérica em engenharia.** ETEP, Lisboa.

JESUS, C. G., 2013. **Retomada da indústria de construção naval brasileira: reestruturação e trabalho.** Tese de Doutorado em Política Científica e Tecnológica, Programa de Pós-Graduação em Política Científica e Tecnológica, Universidade Estadual de Campinas.

GHAVAMI, K., KHEDMATI, M. R. Numerical and experimental investigations on the compression behaviour of stiffened plates. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 62, p. 1087-1100, 2006.

ISOLDI, L. A.; REAL, M. V. ; CORREIA, A. L. G. ; VAZ, J. ; Santos, E. D. dos ; ROCHA, L. A. O. Flow of Stresses: Constructal Design of Perforated Plates Subjected to Tension or Buckling. In: **Constructal Law and the Unifying Principle of Design** - Rocha, L. A. O.; Lorente, S.; Bejan, A.. (Org.). Understanding Complex Systems. 1ed. New York: Springer New York, 2013, v. 1, p. 195-217.

LIMA, J. P., 2016. **Análise numérica da flambagem de placas finas de aço com enrijecedores através do método design construtal.** Rio Grande. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

LORENTE S, LEE J, BEJAN A. **The “flow of stresses” concept: the analogy between mechanical strength and heat convection.** Int J Heat Mass Tran. 2010;53:2963–8

PASIN, J. A. B., 2002. Indústria Naval do Brasil: Panorama, Desafios e Perspectivas. **Revista do bndes**, Rio de Janeiro, V. 9, N. 18, P. 121-148.

ROCHA, L. A. O., LORENTE, S., BEJAN, A. **Constructal Law and the Unifying Principle of Design.** Springer Science, New York, 2013.

ROSSOW, M. P. e Ibrahimkhail, A. K. Constraint Method Analysis of Stiffened Plates. **Computers & Structures**, Vol. 8, pp. 51-60, 1978.

SAPOUNTZAKIS, E. J.; KATSIKADELIS, J. T.; Analysis of plates reinforced with beams. **Computational Mechanics**, pp 66-74, 2000.

SAPOUNTZAKIS, E. J.; MOKOS, V. G.; An improvement model for the analysis of plates stiffened by parallel beams with deformable connection. **Computers and Structures**, **86**, pp 2166-2181, 2008.

SILVA, H. B. S., 2010. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa viga em pavimentos usuais de edifícios**. Dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de São Carlos.

SZILARD, R., 2004. **Theories and Applications of Plates Analysis**. 1<sup>a</sup> ed. New Jersey: John Wiley & Sons.

TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, K. S. 1959. **Theory of Plates and Shells**, 2nd ed., McGraw-Hill, NY.

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. 1961. **Theory of Elastic Stability**. 2nd edn, McGraw Hill, New York.

TROINA, G. S., 2017. **Simulação numérica e Design Construtal aplicados à otimização geométrica de placas finas de aço com enrijecedores submetidas a carregamento transversal uniforme**. Rio Grande. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

UGURAL, A. C., 1981. **Stresses in Plates and Shells**. 1<sup>a</sup> ed. USA: McGraw-Hill.

VELLASCO, P. C. G.; DE LIMA, L. R. O.; DE ANDRADES, S. A. L.; VELLASCO, M. M. B. R.; DA SILVA, A. P. S.; **Modelagem de estruturas de aço e mistas (1<sup>a</sup> ed.)**. Rio de Janeiro, 2014.

YAMAGUCHI, E. 1999. **Basic Theory of Plates and Elastic Stability**. Structural Engineering Handbook. CRC Press LLC.

ZHU, L., SONG, Q., BAI, Y., WEI, Y., MA, L. 2017 Capacity of steel CHS T-Joints strengthened with external stiffeners under axial compression. *Thin-Walled Structures*, 39-46.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; **The Finite Element Method – Volume 1: The basis**. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

## APÊNDICE A – Resultados numéricos

Tabela A.1. Resultados numéricos para a placa  $P(N_{ts}, N_{ts})$  com  $t_s = 6,35$  mm

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	2	0,50	0,378915	0,189458	0,031908	0,031908
0,30	2	2	0,75	0,344788	0,258591	0,022258	0,022258
0,30	2	2	1,00	0,316300	0,316300	0,020877	0,020301
0,30	2	2	1,25	0,291873	0,364842	0,019640	0,017990
0,30	2	2	1,50	0,270949	0,406424	0,018904	0,016576
0,30	2	2	1,75	0,252825	0,442443	0,018448	0,015669
0,30	2	2	2,00	0,236973	0,473946	0,018147	0,015069

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	3	0,50	0,344788	0,172394	0,031904	0,027999
0,30	2	3	0,75	0,303751	0,227813	0,022701	0,018270
0,30	2	3	1,00	0,271444	0,271444	0,019970	0,014821
0,30	2	3	1,25	0,245045	0,306306	0,017616	0,012106
0,30	2	3	1,50	0,223326	0,334989	0,016148	0,010356
0,30	2	3	1,75	0,205144	0,359002	0,015173	0,009152
0,30	2	3	2,00	0,189699	0,379398	0,014502	0,008280

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	4	0,50	0,316300	0,158150	0,033013	0,033013
0,30	2	4	0,75	0,271444	0,203583	0,024431	0,024431
0,30	2	4	1,00	0,237730	0,237730	0,020933	0,020933
0,30	2	4	1,25	0,211166	0,263957	0,018155	0,018155
0,30	2	4	1,50	0,189941	0,284912	0,016360	0,016360
0,30	2	4	1,75	0,172594	0,302039	0,015125	0,015125
0,30	2	4	2,00	0,158150	0,316300	0,014237	0,014237

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	2	0,50	0,270703	0,135351	0,050073	0,049774
0,30	3	2	0,75	0,252932	0,189699	0,033358	0,032752
0,30	3	2	1,00	0,237351	0,237351	0,027165	0,026400
0,30	3	2	1,25	0,223326	0,279158	0,021895	0,020939
0,30	3	2	1,50	0,210866	0,316300	0,018682	0,017587
0,30	3	2	1,75	0,199723	0,349516	0,016606	0,015398
0,30	3	2	2,00	0,189699	0,379398	0,015189	0,013898

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	3	0,50	0,252932	0,126466	0,051006	0,051002
0,30	3	3	0,75	0,230259	0,172694	0,032851	0,032834
0,30	3	3	1,00	0,211316	0,211316	0,025944	0,025233
0,30	3	3	1,25	0,194965	0,243706	0,020755	0,019515
0,30	3	3	1,50	0,180962	0,271444	0,017629	0,015959
0,30	3	3	1,75	0,168837	0,295464	0,015617	0,013588
0,30	3	3	2,00	0,158234	0,316468	0,014241	0,011918

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	4	0,50	0,237351	0,118675	0,055961	0,055822
0,30	3	4	0,75	0,211316	0,158487	0,035354	0,034955
0,30	3	4	1,00	0,190427	0,190427	0,027662	0,027114
0,30	3	4	1,25	0,172995	0,216244	0,022122	0,021429
0,30	3	4	1,50	0,158487	0,237730	0,018695	0,017879
0,30	3	4	1,75	0,146224	0,255891	0,016403	0,015504
0,30	3	4	2,00	0,135722	0,271444	0,014799	0,013834

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	2	0,50	0,210568	0,105284	0,084993	0,084993
0,30	4	2	0,75	0,199723	0,149793	0,060367	0,060367
0,30	4	2	1,00	0,189941	0,189941	0,042515	0,042515
0,30	4	2	1,25	0,180852	0,226066	0,032402	0,032402
0,30	4	2	1,50	0,172594	0,258891	0,026237	0,026237
0,30	4	2	1,75	0,165056	0,288849	0,022246	0,022246
0,30	4	2	2,00	0,158150	0,316300	0,019525	0,019525

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	3	0,50	0,199723	0,099862	0,088546	0,088475
0,30	4	3	0,75	0,185401	0,139051	0,057570	0,057209
0,30	4	3	1,00	0,172995	0,172995	0,039891	0,039126
0,30	4	3	1,25	0,161881	0,202351	0,030180	0,028998
0,30	4	3	1,50	0,152108	0,228163	0,024341	0,022803
0,30	4	3	1,75	0,143449	0,251035	0,020589	0,018755
0,30	4	3	2,00	0,135722	0,271444	0,018049	0,015958

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	4	0,50	0,189941	0,094971	0,090592	0,090592
0,30	4	4	0,75	0,172995	0,129746	0,054992	0,054992
0,30	4	4	1,00	0,158825	0,158825	0,041314	0,041314
0,30	4	4	1,25	0,146511	0,183139	0,031521	0,031521
0,30	4	4	1,50	0,135970	0,203955	0,025510	0,025510
0,30	4	4	1,75	0,126843	0,221976	0,021561	0,021561
0,30	4	4	2,00	0,118865	0,237730	0,018821	0,018821

Tabela A.2. Resultados numéricos para a placa P( $N_{ls}$ ,  $N_{ts}$ ) com  $t_s = 12,70$  mm

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	2	0,50	0,189941	0,094971	0,084337	0,084337
0,30	2	2	0,75	0,172995	0,129746	0,054118	0,054118
0,30	2	2	1,00	0,158825	0,158825	0,043245	0,043245
0,30	2	2	1,25	0,146511	0,183139	0,034976	0,034976
0,30	2	2	1,50	0,135970	0,203955	0,029929	0,029929
0,30	2	2	1,75	0,126843	0,221976	0,026654	0,026654
0,30	2	2	2,00	0,118865	0,237730	0,024418	0,024418

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	3	0,50	0,172995	0,086498	0,083306	0,081361
0,30	2	3	0,75	0,152576	0,114432	0,056038	0,052924
0,30	2	3	1,00	0,136469	0,136469	0,044412	0,040123
0,30	2	3	1,25	0,123131	0,153914	0,036228	0,031133
0,30	2	3	1,50	0,112168	0,168252	0,031195	0,025460
0,30	2	3	1,75	0,102998	0,180246	0,027892	0,021638
0,30	2	3	2,00	0,095214	0,190427	0,025606	0,018926

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	4	0,50	0,158825	0,079413	0,092170	0,092170
0,30	2	4	0,75	0,136469	0,102352	0,063139	0,063139
0,30	2	4	1,00	0,119630	0,119630	0,050169	0,050169
0,30	2	4	1,25	0,106186	0,132732	0,040994	0,040994
0,30	2	4	1,50	0,095458	0,143187	0,035126	0,035126
0,30	2	4	1,75	0,086699	0,151723	0,031146	0,031146
0,30	2	4	2,00	0,079413	0,158825	0,028318	0,028318

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	2	0,50	0,135722	0,067861	0,161230	0,161230
0,30	3	2	0,75	0,126952	0,095214	0,097389	0,097389
0,30	3	2	1,00	0,119246	0,119246	0,072708	0,072649
0,30	3	2	1,25	0,112168	0,140210	0,054162	0,053960
0,30	3	2	1,50	0,105883	0,158825	0,042962	0,042602
0,30	3	2	1,75	0,100265	0,175465	0,035810	0,035279
0,30	3	2	2,00	0,095214	0,190427	0,030974	0,030296

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	3	0,50	0,126952	0,063476	0,162860	0,162860
0,30	3	3	0,75	0,115734	0,086800	0,098925	0,098910
0,30	3	3	1,00	0,106337	0,106337	0,072290	0,072230
0,30	3	3	1,25	0,098061	0,122576	0,053958	0,053597
0,30	3	3	1,50	0,090979	0,136469	0,043038	0,042083
0,30	3	3	1,75	0,084852	0,148490	0,036123	0,034502
0,30	3	3	2,00	0,079497	0,158995	0,031478	0,029242

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	4	0,50	0,119246	0,059623	0,162400	0,162400
0,30	3	4	0,75	0,106337	0,079753	0,104250	0,104250
0,30	3	4	1,00	0,095950	0,095950	0,077688	0,077672
0,30	3	4	1,25	0,087105	0,108881	0,059460	0,059395
0,30	3	4	1,50	0,079753	0,119630	0,048126	0,047983
0,30	3	4	1,75	0,073545	0,128704	0,040624	0,040389
0,30	3	4	2,00	0,068234	0,136469	0,035404	0,035089

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	2	0,50	0,105583	0,052791	0,254160	0,254160
0,30	4	2	0,75	0,100265	0,075199	0,162490	0,162490
0,30	4	2	1,00	0,095458	0,095458	0,120150	0,120150
0,30	4	2	1,25	0,090868	0,113585	0,087261	0,087261
0,30	4	2	1,50	0,086699	0,130049	0,067100	0,067100
0,30	4	2	1,75	0,082896	0,145068	0,054109	0,054109
0,30	4	2	2,00	0,079413	0,158825	0,045307	0,045307

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	3	0,50	0,100265	0,050133	0,250840	0,250840
0,30	4	3	0,75	0,093223	0,069917	0,169640	0,169600
0,30	4	3	1,00	0,087105	0,087105	0,114540	0,114280
0,30	4	3	1,25	0,081472	0,101840	0,083504	0,082746
0,30	4	3	1,50	0,076524	0,114785	0,064636	0,063278
0,30	4	3	1,75	0,072142	0,126248	0,052543	0,050565
0,30	4	3	2,00	0,068234	0,136469	0,044401	0,041839

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	4	0,50	0,095458	0,047729	0,261920	0,261920
0,30	4	4	0,75	0,087105	0,065329	0,171680	0,171680
0,30	4	4	1,00	0,080096	0,080096	0,118350	0,118350
0,30	4	4	1,25	0,073837	0,092297	0,088254	0,088254
0,30	4	4	1,50	0,068486	0,102728	0,069548	0,069548
0,30	4	4	1,75	0,063857	0,111750	0,057209	0,057209
0,30	4	4	2,00	0,059815	0,119630	0,048671	0,048671

Tabela A.3. Resultados numéricos para a placa  $P(N_{ls}, N_{ts})$  com  $t_s = 25,40$  mm

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	2	0,50	0,095458	0,047729	0,237430	0,237430
0,30	2	2	0,75	0,087105	0,065329	0,162030	0,162030
0,30	2	2	1,00	0,080096	0,080096	0,116830	0,116830
0,30	2	2	1,25	0,073837	0,092297	0,091193	0,091193
0,300	2	2	1,50	0,068486	0,102728	0,075216	0,075216
0,30	2	2	1,75	0,063857	0,111750	0,064695	0,064695
0,30	2	2	2,00	0,059815	0,119630	0,057436	0,057436

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	3	0,50	0,087105	0,043553	0,242630	0,242380
0,30	2	3	0,75	0,076999	0,057749	0,166040	0,164790
0,30	2	3	1,00	0,068994	0,068994	0,121590	0,118910
0,30	2	3	1,25	0,062183	0,077729	0,096771	0,092594
0,30	2	3	1,50	0,056596	0,084894	0,081239	0,075664
0,30	2	3	1,75	0,051930	0,090878	0,070394	0,064141
0,30	2	3	2,00	0,047975	0,095950	0,063772	0,055924

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	2	4	0,50	0,080096	0,040048	0,259450	0,259450
0,30	2	4	0,75	0,068994	0,051745	0,174510	0,174510
0,30	2	4	1,00	0,060594	0,060594	0,138110	0,138110
0,30	2	4	1,25	0,053706	0,067133	0,112380	0,112380
0,30	2	4	1,50	0,048224	0,072336	0,095608	0,095608
0,30	2	4	1,75	0,043757	0,076576	0,084024	0,084024
0,30	2	4	2,00	0,040048	0,080096	0,075715	0,075715

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	2	0,50	0,068234	0,034117	0,408210	0,408210
0,30	3	2	0,75	0,063967	0,047975	0,272230	0,272230
0,30	3	2	1,00	0,060202	0,060202	0,206660	0,206660
0,30	3	2	1,25	0,056596	0,070745	0,154930	0,154930
0,30	3	2	1,50	0,053398	0,080096	0,122020	0,122020
0,30	3	2	1,75	0,050541	0,088447	0,100180	0,100180
0,30	3	2	2,00	0,047975	0,095950	0,085077	0,085046

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	3	0,50	0,063967	0,031983	0,405000	0,405000
0,30	3	3	0,75	0,058481	0,043861	0,270590	0,270590
0,30	3	3	1,00	0,053862	0,053862	0,204110	0,204110
0,30	3	3	1,25	0,049619	0,062024	0,155130	0,154920
0,30	3	3	1,50	0,045996	0,068994	0,124040	0,123130
0,30	3	3	1,75	0,042866	0,075015	0,103470	0,101570
0,30	3	3	2,00	0,040135	0,080269	0,089309	0,086316

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	3	4	0,50	0,060202	0,030101	0,409260	0,409260
0,30	3	4	0,75	0,053862	0,040396	0,278870	0,278870
0,30	3	4	1,00	0,048729	0,048729	0,214930	0,214930
0,30	3	4	1,25	0,044173	0,055216	0,168630	0,168630
0,30	3	4	1,50	0,040396	0,060594	0,138430	0,138430
0,30	3	4	1,75	0,037214	0,065125	0,117700	0,117700
0,30	3	4	2,00	0,034497	0,068994	0,102910	0,102910

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	2	0,50	0,053093	0,026546	0,588920	0,588920
0,30	4	2	0,75	0,050541	0,037906	0,410980	0,410980
0,30	4	2	1,00	0,048224	0,048224	0,320370	0,320370
0,30	4	2	1,25	0,045882	0,057353	0,240470	0,240470
0,30	4	2	1,50	0,043757	0,065636	0,187740	0,187740
0,30	4	2	1,75	0,041821	0,073186	0,151980	0,151980
0,30	4	2	2,00	0,040048	0,080096	0,126950	0,126950

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	3	0,50	0,050541	0,025271	0,572920	0,572920
0,30	4	3	0,75	0,047143	0,035357	0,394780	0,394780
0,30	4	3	1,00	0,044173	0,044173	0,303570	0,303550
0,30	4	3	1,25	0,041279	0,051598	0,229640	0,229360
0,30	4	3	1,50	0,038740	0,058110	0,181340	0,180330
0,30	4	3	1,75	0,036495	0,063867	0,148770	0,146700
0,30	4	3	2,00	0,034497	0,068994	0,126090	0,122840

$\phi$	Nls	Nts	(hts/hls)	hls (m)	hts (m)	Uz máxima (mm)	Uz central (mm)
0,30	4	4	0,50	0,048224	0,024112	0,589170	0,589170
0,30	4	4	0,75	0,044173	0,033130	0,393960	0,393960
0,30	4	4	1,00	0,040750	0,040750	0,306520	0,306520
0,30	4	4	1,25	0,037514	0,046893	0,238230	0,238230
0,30	4	4	1,50	0,034755	0,052132	0,192920	0,192920
0,30	4	4	1,75	0,032373	0,056653	0,161590	0,161590
0,30	4	4	2,00	0,030297	0,060594	0,139080	0,139080