MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À ANÁLISE GEOMÉTRICA DE PLACAS RETANGULARES ENRIJECIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME

por

Vinícius Torres Pinto

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 13 de junho de 2019

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À ANÁLISE GEOMÉTRICA DE PLACAS RETANGULARES ENRIJECIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME

por

Vinícius Torres Pinto
Engenheiro Civil

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi
FURG/PPGEO
Coorientador: Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
FURG/PPGEO

Comissão de Avaliação:

Profa. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor
UnB/PPG Integridade

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira
FURG/PPGEO

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 13 de junho de 2019.

“SIMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À ANÁLISE GEOMÉTRICA DE PLACAS RETANGULARES ENRIJECIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME”

Vinícius Torres Pinto

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de:

MESTRE EM ENGENHARIA OCEÂNICA

Tendo sido aprovada em sua forma final pela Coordenação de Pós Graduação em Engenharia Oceânica

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do PPGEO/FURG

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Orientador – PPGEO/FURG

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Coorientador – PPGEO/FURG

Profa. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor
Membro Externo – PPGINTEGRIDADE/UnB

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira
Membro Interno – PPGEO/FURG

AGRADECIMENTOS

A Deus pela oportunidade da vida.

A meus pais Celso Chimieski Pinto, Eva d'Arc Torres Pinto e minha tia Rosa Laura Baes Torres por todo apoio e amor dedicado a mim.

A minha namorada e companheira de vida Mayara Copello Veiga por todo amor, incentivo, motivação e contribuição ao texto desta dissertação.

Ao meu professor e orientador Liércio André Isoldi por toda paciência, dedicação e contribuição ao longo do desenvolvimento deste trabalho, sendo um referencial para mim.

Ao professor e coorientador Elizaldo Domingues dos Santos pela contribuição e parceria ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao acadêmico Marcelo Langhinrichs Cunha por sua importante contribuição neste trabalho.

Aos amigos, Kauê Martins, Rafael Lemos, Luís Basso, Jorge Paes e Matheus Freitas pela amizade formada e pelos momentos de descontração.

A banca examinadora pela disponibilidade de avaliar este trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro ao desenvolvimento desta pesquisa.

A Universidade Federal do Rio Grande (FURG) por me acolher como estudante de graduação e pós-graduação ao longo da última década.

RESUMO

Placas são componentes estruturais aplicáveis em diversas estruturas de engenharia. Em estruturas navais, tais como, navios e plataformas petrolíferas, as placas são responsáveis por compor grande parte do conjunto estrutural. Para aumentar a rigidez, usualmente são inseridos reforços chamados de enrijecedores, dispostos normalmente nos sentidos longitudinal e/ou transversal das placas. Neste estudo aplicou-se o método Design Construtal para analisar o comportamento mecânico de placas enrijecidas sujeitas a carregamento transversal uniforme quanto às deflexões, através de modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS®, que possui como base o Método dos Elementos Finitos. A análise foi dividida em dois estudos de caso. O primeiro destinou-se a investigar a influência causada pela orientação dos enrijecedores ao comportamento mecânico das placas. Para tal, partindo de uma placa de referência não enrijecida e mantendo o volume total de material constante, parcelas de volume de material da mesma foram removidas da espessura e transformadas em enrijecedores retangulares através da fração volumétrica ϕ, que relaciona o volume de material dos enrijecedores com volume de material da placa de referência, para valores de ϕ = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,5. Para cada valor de ϕ foram configurados 25 arranjos de placas enrijecidas com diferentes números de enrijecedores retangulares orientados em 0° e 45°. Ainda, em cada arranjo avaliou-se a influência da variação do grau de liberdade dado pela razão entre altura e espessura dos enrijecedores h_s/t_s. O segundo estudo de caso avaliou a influência de enrijecedores trapezoidais. Para isso, duas etapas foram apresentadas. A primeira destinou-se a descobrir qual seria a melhor razão entre as bases dos enrijecedores trapezoidais orientados em 0°, adotando uma placa com ϕ = 0,3 e três enrijecedores nas direções longitudinal e transversal. Com base na primeira etapa, a segunda etapa consistiu na análise de 25 arranjos de placas com diferentes números de enrijecedores trapezoidais (orientados em 0°) nas direções longitudinal e transversal, e assim, avaliou-se a influência quanto às deflexões. Os resultados mostraram que em grande parte dos arranjos de placas com enrijecedores retangulares, orientá-los em 45° é mais vantajoso para a redução das deflexões, quando comparados com enrijecedores retangulares orientados em 0°, principalmente para valores de $\phi \leq$ 0,3, podendo alcançar reduções nas deflexões centrais e máximas maiores do que 60%. Em relação aos arranjos de placas com enrijecedores trapezoidais, estes mostraram-se mais eficientes do que os enrijecedores retangulares orientados em 0° podendo alcançar reduções de até 30% nas deflexões centrais e máximas. Porém em comparação com os enrijecedores orientados em 45° os enrijecedores trapezoidais apresentaram vantagem em apenas alguns casos.

Palavras-chaves: Enrijecedores retangulares, Enrijecedores trapezoidais, Enrijecedores inclinados à 45°, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

Plates are structural components applicable in several engineering structures. In naval structures, such as ships and oil rigs, the plates are responsible for compose a large part of the structural arrangement. To increase rigidity, usually, are inserted reinforcements, called stiffeners normally in the longitudinal and/or transverse directions of the plates. In this study the Construtal Design method was applied to analyze the mechanical behavior of stiffened plates subjected to uniform transverse loading as to the deflections, through computational models developed by ANSYS® software which is based on the Finite Element method. The analysis was divided into two case studies. The first one it was aimed to investigate the influence that the orientation of the stiffeners causes the mechanical behavior of the plates. To do this, starting from a non-stiffened reference plate and keeping the total volume of material constant, material volume portions of it were removed from the thickness and converted into rectangular stiffeners through the volumetric fraction ϕ, which relates the volume of material of the stiffeners with volume of material of the reference plate, for values of ϕ = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4 and 0.5. For each value of ϕ were configured 25 stiffened plates arrangements with different numbers of rectangular stiffeners oriented at 0° and 45°. Also, in each arrangement, the influence of the degree of freedom variation given by the relation between height and thickness of the stiffeners h_s/t_s was evaluated. The second case study aimed to analyze the influence of trapezoidal stiffeners. For this, two stages were presented. The first one it was aimed to find out the best relation between the bases of the trapezoidal stiffeners oriented at 0°, adopting a plate with ϕ = 0.3 and three stiffeners in the longitudinal and transverse directions. Based on the first step, the second one analyzed 25 plate arrangements with different numbers of trapezoidal stiffeners (oriented at 0°) in the longitudinal and transverse directions, and thus, their influence on the deflections was evaluated. The results showed that in a large part of the plate arrangements with rectangular stiffeners, orienting them at 45 ° is more advantageous regarding of deflections reduction, when compared with rectangular stiffeners oriented at 0°, mainly for values of $\phi \leq 0.3$, achieving reductions in the central and maximum deflections greater than 60%. Regarding to the plate arrangements with trapezoidal stiffeners, these were more efficient than rectangular stiffeners oriented at 0°, achieving until 30% of reduction in the central and maximum deflections. However, comparing rectangular stiffeners oriented at 45° with the trapezoidal stiffeners, these had an advantage in only a few cases.

Keywords: Rectangular stiffeners, Trapezoidal stiffeners, Stiffeners leaned at 45°, Finite Element Method.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Comprimento da placa [mm]
b	Largura da placa [mm]
D	Rigidez Flexural
E	Módulo de elasticidade (módulo de Young) [MPa]
$\{F\}$	Vetor de cargas
G	Módulo de elasticidade transversal [MPa]
h_s	Altura dos enrijecedores [mm]
$[K]$	Matriz de rigidez global
M_x	Momentos fletores na direção *x* [kN.mm]
M_y	Momentos fletores na direção *y* [kN.mm]
M_{xy}	Momento torçor atuante no plano ortogonal ao eixo *x* [kN.mm]
M_{yx}	Momento torçor atuante no plano ortogonal ao eixo *y* [kN.mm]
m_x	Momento fletor por unidade de comprimento em *x* [kNmm/mm]
m_y	Momento fletor por unidade de comprimento em *y* [kNmm/mm]
m_{xy}	Momento torçor distribuído atuante no plano ortogonal ao eixo *y* [kNmm/mm]
m_{yx}	Momento torçor distribuído atuante no plano ortogonal ao eixo *x* [kNmm/mm]
N_{int}	Número de intersecções entre os enrijecedores
N_{sx}	Número de enrijecedores na direção *x*
N_{sy}	Número de enrijecedores na direção *y*
$N_{sx'}$	Número de enrijecedores na direção *x'*
$N_{sy'}$	Número de enrijecedores na direção *y'*
p_z	Carga distribuída na direção *z* [kN]
Q_x	Força de cisalhamento transversal na direção *x* [kN]
Q_y	Força de cisalhamento transversal na direção *y* [kN]
q_x	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em *x* [kNmm/mm]
q_y	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em *y* [kNmm/mm]
R_0	Força adicional de canto [kN]
t	Espessura da placa de referência [mm]
t_p	Espessura da placa enrijecida
t_s	Espessura dos enrijecedores [mm]
U	Energia de deformação para placa
U_z	Deflexão no centro da placa [mm]
$U_{z\text{Máx}}$	Deflexão máxima na placa [mm]

u	Componente de deslocamento na direção *x* [mm]
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos nodais
V_{int}	Volume de material total entre as intersecções do enrijecedores [mm³]
V_r	Volume de material da placa de referência [mm³]
V_s	Volume de material dos enrijecedores [mm³]
v	Componente de deslocamento na direção *y* [mm]
W	Energia potencial de cargas para placa
w	Componente de deslocamento na direção *z* [mm]
ε_x	Deformação normal na direção do eixo *x* [mm]
ε_y	Deformação normal na direção do eixo *y* [mm]
σ_x	Tensão normal na direção do eixo *x* [MPa]
σ_y	Tensão normal na direção do eixo *y* [MPa]
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo *x* na direção *y* [MPa]
τ_{yx}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo *y* na direção *x* [MPa]
γ	Deformação por cisalhamento [mm]
γ_{xy}	Deformação por cisalhamento nas direções *x* e *y* [mm]
ν	Coeficiente de Poisson
ϕ	Fração Volumétrica
ϑ	Variação angular
∇	Operador diferencial delta
Π	Energia potencial total para placa

1 INTRODUÇÃO

A construção naval é uma prática extremamente antiga, existem evidências mostrando que os egípcios dominavam técnicas de manipulação da madeira para construir cascos de embarcações. No Brasil, a construção naval data do período colonial, onde em solo brasileiro foram construídas as primeiras embarcações pelos portugueses. Após um período de desenvolvimento no século XIX, a indústria naval no Brasil entrou em recessão voltando a ganhar força apenas em meados do século passado. Na década de 1970, os principais estaleiros brasileiros foram ampliados e modernizados e após um período de crescimento o setor novamente entrou em recesso, voltando a destacar-se no início do século XXI principalmente com a expansão da indústria petrolífera com foco nas unidades de produção *offshore* e embarcações de apoio marítimo (CEMBRA, 2012).

As estruturas navais sejam elas plataformas de exploração de petróleo (estruturas *offshore*) ou embarcações de transporte de carga e pessoas, são agentes importantes na economia não apenas no Brasil, mas a nível mundial. Conforme CEMBRA (2012), a matriz energética mundial é composta em 60% pelo uso de petróleo e gás, sendo o petróleo responsável por 37% desta parcela. Quanto ao transporte de cargas, estima-se que as movimentações em portos brasileiros chegam a 730 toneladas por ano, quantia significativa no âmbito global. Além do mais, o turismo marítimo presta atualmente uma contribuição importante para economia brasileira, fomentando a geração de empregos, receitas e desenvolvimento do setor.

A composição das estruturas navais acontece pela junção de diversos componentes estruturais, como vigas, colunas e placas que juntos fornecem a rigidez necessária para o cumprimento da função estabelecida em projeto. Dentre os elementos que compõe uma estrutura naval as placas ganham atenção especial devido ao seu papel no desempenho estrutural global e funcional. Segundo Yasuhisa et al. (2009) em estruturas navais, como navios, as placas compõem grande parte do casco principal, além de estarem presentes na composição do convés e das anteparas que dividem os compartimentos da embarcação.

Por definição, de acordo com Szilard (2004) placas são componentes estruturais planos, retos e bidimensionais, com espessura muito menor do que as demais dimensões. Conforme Orozco (2009) esses componentes possuem a função de garantir a estanqueidade, transmitir os esforços para os demais elementos estruturais e fornecer rigidez para a estrutura como um todo. Manrique (1989) explica que as placas são usadas nas estruturas navais para resistir às cargas longitudinais oriundas da flexão do navio, além da pressão hidrostática e dos diferentes itens em transporte (carregamento estático) conforme mostra a Fig. 1.1.

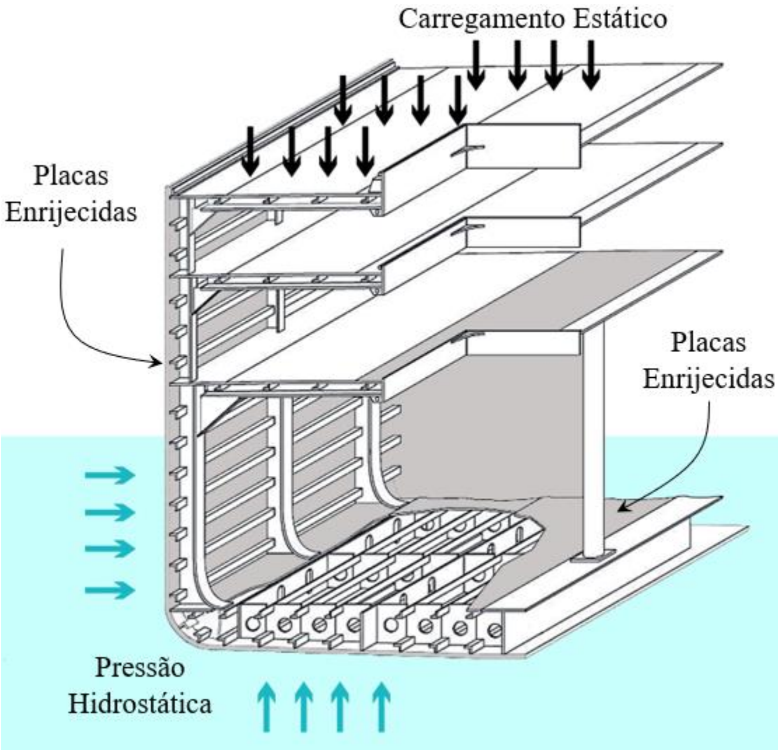


Figura 1.1 - Seção transversal de um navio
(Fonte: Adaptado de GHAVAMI e KHEDMATI, 2012)

Na prática de engenharia é comum inserir reforços (enrijecedores) em placas dispostos no sentido longitudinal e/ou transversal ao plano (ver Fig. 1.2). A grande vantagem de acrescentar enrijecedores é a possibilidade de aumentar a rigidez com o mínimo de material adicional, tornando as placas enrijecidas altamente desejáveis. A inclusão de enrijecedores permitem que as placas resistam ao carregamento imposto, introduzindo vários caminhos de carga que são importantes na prevenção de danos sob cargas de tração e compressão (HAFTKA E GÜRDAL, 1992).

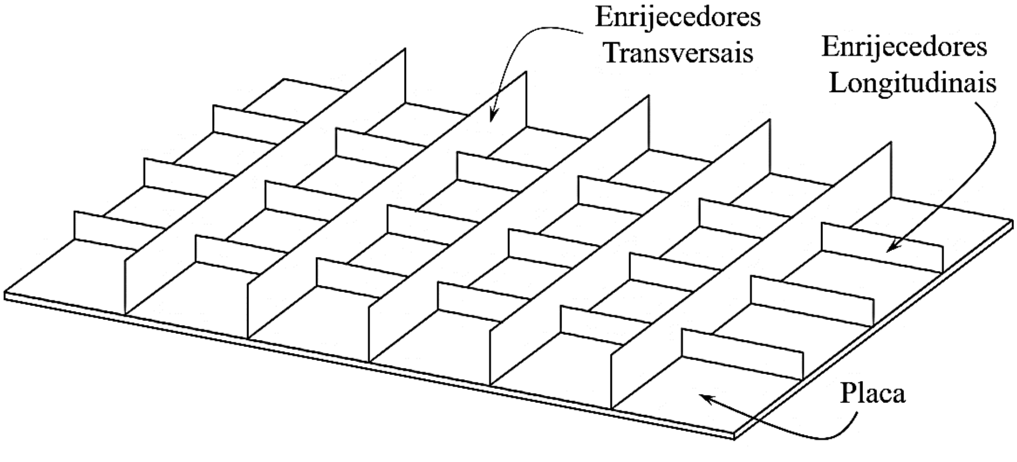


Figura 1.2 – Placa enrijecida

Sabendo a aplicabilidade que as placas possuem para indústria naval, percebe-se a importância de projetar esses componentes de maneira adequada, de modo que, possam cumprir o seu propósito de maneira segura, durável e econômica. Ramaswamy (1999) afirma que projetar placas enrijecidas utilizando diferentes técnicas pode trazer muitos benefícios, como redução no uso do material, custo e desempenho.

Entretanto, a análise do comportamento estrutural de placas esbarra na dificuldade de se proporem soluções analíticas para o problema. Szilard (2004) ressalta que a dificuldade matemática inerente à análise de placas, faz com que as soluções analíticas fiquem restritas a geometrias simples de placas, carregamento e condições de contorno. Para muitos problemas práticos de engenharia não se pode encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais governantes. Em função disso, os métodos numéricos tornam-se uma opção. Dentre as metodologias existentes o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o que mais se destaca. Associado à evolução da computação de alta performance sugere uma ferramenta extremamente eficaz para análise de estruturas.

O MEF é a mais versátil técnica computacional para soluções aproximadas, aplicável em uma grande variedade de problemas reais de engenharia que apresentam domínio complexo e sujeitos a condições de contorno (MADENCI E GUVEN, 2006). Szilard (2004), explica que ao aplicar o MEF na análise do comportamento mecânico de placas o modelo contínuo é dividido em um conjunto de elementos finitos conectados entre si por nós, de modo que, a resposta global do sistema é obtida pela solução de equações algébricas simultâneas prontamente solucionáveis por computador.

Em análise estrutural, sabe-se que o comportamento mecânico dos elementos estruturais é influenciado em grande parte pela geometria, dando margem para que estudos de análise geométrica sejam realizados. De acordo com Salomon (2000) o propósito de analisar geometricamente uma estrutura é configurar um arranjo estrutural eficiente, capaz de resistir aos esforços externos aumentando a capacidade de carga e limitando as deflexões e tensões aos seus valores admissíveis.

Diante disso, esse estudo teve como objetivo analisar o comportamento mecânico de placas de aço retangulares com enrijecedores também retangulares submetidas a carregamento transversal uniforme quanto à influência da orientação de enrijecedores, assim como, testar a aplicabilidade de enrijecedores trapezoidais. Para isso, foi empregado o método Design Construtal aliado à simulação numérica realizada por modelos computacionais baseados no MEF.

1.1 Estado da arte

Os primeiros estudos relacionados a placas surgiram no século XVIII, enquanto o desenvolvimento da mecânica estrutural começou com a análise de problemas estáticos, os primeiros estudos experimentais e analíticos envolvendo placas foram dedicados quase que exclusivamente a vibrações livres (SZILARD, 2004).

Segundo Ugural (2010) a teoria das placas e cascas é uma combinação experimental e teórica que conta com a contribuição histórica de vários matemáticos, cientistas e engenheiros consagrados. As primeiras investigações exploraram as vibrações livres com Leonard Euler em 1776, e foram estendidas por seu aluno Jacob Bernoulli. Em 1811, o renomado matemático Joseph-Louis Lagrange recebeu o crédito por desenvolver uma equação diferencial parcial de quarta ordem que descreve as vibrações em placas.

A primeira equação diferencial correta para placas submetidas a cargas transversais estáticas foi creditada ao engenheiro e cientista L. Navier em 1823. Porém, foi o alemão Gustav R. Kirchhoff que desenvolveu a primeira teoria completa de placas submetidas a flexão. Ele derivou a mesma equação diferencial de Navier com base nas hipóteses de Bernoulli para vigas, utilizando uma abordagem diferente de energia. Sua grande contribuição para a teoria das placas foi a introdução das forças de contorno suplementares, que substituem os momentos de torção nos limites da placa, de modo que, as condições de contorno possam ser declaradas em função dos deslocamentos e suas derivadas (SZILARD, 2004). Posteriormente, a contribuição do trabalho de Kirchhoff adicionada ao trabalho do matemático inglês Augustus Love originou a famosa Teoria de Placas de Kirchhoff-Love ou Teoria Clássica de Placas Finas.

Ao longo do século XX diversos estudos que tratam do comportamento estrutural de placas foram publicados, estendendo-se no século XXI com a contribuição de diversos autores. Shade (1940, 1941, 1951) desenvolveu um método analítico que permite avaliar a máxima deflexão em placas enrijecidas submetidas a carregamento transversal uniforme. A metodologia consiste em seguir alguns passos que envolvem equações e gráficos que, quando combinados, são capazes de identificar de maneira aproximada a deflexão máxima da placa para diferentes condições de contorno.

Rossowt e Ibrahimkhail (1978) realizaram um estudo utilizando MEF com base no método das restrições para investigar as deflexões transversais de placas rígidas com enrijecedores concêntricos e excêntricos. O método das restrições tem como base o teorema da mínima energia potencial e sua aplicação em elementos finitos se diferencia pela possibilidade de utilizar elementos conformes, com base em polinômios completos ou de alta ordem. O estudo foi desenvolvido em dois exemplos distintos, considerando uma placa quadrada com um enrijecedor e uma placa retangular com dois enrijecedores em cruz. As placas foram submetidas a uma carga transversal uniformemente distribuída ou a uma carga concentrada, já as condições de contorno adotadas na análise foram de bordas simplesmente apoiadas. Ainda, com a intenção de obter uma checagem independente, os exemplos foram solucionados com os softwares NASTRAN® e STRUDL®. O estudo ressaltou que a utilização de elementos de alta ordem devidamente formulados apresentou resultados satisfatórios, reduzindo o número de elementos e graus de liberdade, quando comparados ao uso de elementos de baixa ordem.

Visando um modelo com maior precisão para a análise de placas enrijecidas, Mukhopadhyay (1981) propôs uma abordagem que permitiu superar algumas limitações impostas por modelos anteriores, permitindo que a disposição e o espaçamento entre os enrijecedores fossem realizados arbitrariamente. O MEF foi utilizado considerando elementos do tipo isoparamétrico e triangular. O estudo apresentou exemplos comparativos entre o método proposto e métodos anteriores, além de apresentar a análise estrutural de uma seção transversal completa em dimensões reais de um navio petroleiro.

Tanaka e Bercin (1998) apresentaram uma expansão do Método dos Elementos de Contorno para a análise do comportamento estático de placas enrijecidas sob flexão. O equacionamento proposto levou em consideração os efeitos de flexão, torção, deformação e a influência da excentricidade dos reforços. O método foi aplicado em três exemplos distintos, considerando um e dois enrijecedores, e os resultados apresentaram boa concordância quando comparados a exemplos apresentados na literatura.

Para analisar placas reforçadas por vigas Sapountzakis e Katsikadelis (2000) propuseram uma solução que incluía as forças e deformações da placa, assim como, as forças axiais e deformações das vigas. A análise consistiu em separar a viga da placa e então calcular as trações na região de ligação entre elas. Para conhecer esses esforços, foram estabelecidas condições de continuidade de deslocamento na interface entre viga e placa. O Método da Equação Análoga foi adotado para a solução das equações do problema. Dois exemplos foram propostos para aplicação do método, no primeiro uma placa retangular enrijecida simplesmente apoiada nas bordas de menor dimensão e livre nas demais. No segundo exemplo, a análise foi análoga ao primeiro, porém considerando todas as bordas simplesmente apoiadas. Em ambos, foram analisadas diversas alturas de viga considerando carregamento transversal uniforme. Os valores de deflexão encontrados com o método mostraram uma considerável divergência em comparação com métodos que desconsideram as forças e as deformações da interação placa e viga.

Tanaka et al. (2000) utilizaram o Método dos Elementos de Contorno para analisar a deflexão em placas reforçadas por enrijecedores. No método numérico proposto, apenas o contorno da placa e a linha de conexão entre a placa e o enrijecedor são discretizados em elementos, de modo que, não sejam necessários elementos de ordem superior, o que torna a solução mais simples. As forças e momentos atuantes na linha de interação da placa e do reforço são desconhecidos, sendo aproximados por funções de interpolação adequadas. Foram analisados dois casos com diferentes condições de contorno e os resultados foram comparados com a solução proposta por Timoshenko e Krieger (1959) apresentando bons resultados.

Salomon (2000) utilizando o MEF com base em elementos do tipo viga Hermitiano e isoparamétrico, assim como elemento do tipo casca, analisou alguns modelos de placas com o objetivo de compor um arranjo otimizado capaz de suportar o carregamento externo aplicado limitando tensões e deslocamentos com o menor peso de material possível. As soluções encontradas com os modelos propostos foram comparadas com soluções obtidas com elementos tridimensionais. Os resultados do estudo apontaram algumas limitações nos modelos investigados, permitindo assim, que fosses sugeridas modificações que possibilitassem maior precisão nos modelos propostos. O estudo destacou os bons resultados encontrados com o elemento tipo Hermitiano e a forte influência que a excentricidade dos enrijecedores acarreta no desempenho de placas enrijecidas.

Marcelin (2001) fez uso de um algoritmo genético com o objetivo de otimizar placas enrijecidas. O estudo considerou dois casos, no primeiro foram variadas as posições de cinco enrijecedores, de modo que, fosse encontrada uma configuração otimizada de placa para reduzir a deflexão máxima. No segundo caso, o processo considerou o efeito da flambagem. Por ser um algoritmo de processo evolutivo, iniciou-se com um conjunto de soluções iniciais utilizando o MEF, e a partir dos resultados obtidos, foi sofrendo adaptações em busca de melhores soluções. A partir das soluções iniciais obtidas pelo MEF o método de Ritz foi inserido para completar o processo de otimização. Essa estratégia permitiu reduzir consideravelmente o tempo de cálculo e apresentou bons resultados para problemas de otimização de placas enrijecidas.

Peng et al. (2005) utilizaram o método numérico de Galerkin baseado na Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento. O estudo analisou a deflexão central em placas para diferentes geometrias de enrijecedores em condições excêntricas e concêntricas. O modelo foi discretizado considerando o sistema *meshless* (sem malha), onde um conjunto de pontos nodais foi distribuído ao longo da placa e do enrijecedor. A compatibilização entre o deslocamento do enrijecedor e da placa permitiu que o campo de deslocamentos do enrijecedor fosse expresso em função da superfície média da placa. Por não utilizar malha, o método permitiu maior flexibilidade na colocação dos enrijecedores, de modo que, qualquer alteração nas suas posições não necessitasse na redefinição da malha.

Hasan (2007) aplicou o MEF através do *software* NASTRAN®para determinar as melhores localizações de enrijecedores quadrados inseridos em placas submetidas à flexão. O estudo foi desenvolvido em três casos, onde foram analisadas as máximas tensões e deflexões para diferentes condições de contorno. Os procedimentos consistiram em variar a espessura, o espaçamento e a localização dos enrijecedores na placa. Os resultados obtidos mostraram que localizações otimizadas de enrijecedores podem trazer benefícios ao comportamento mecânico de placas quadradas enrijecidas.

Com o objetivo de investigar a influência da altura dos enrijecedores nos valores máximos de tensão em placas submetidas a carregamento transversal uniforme, Yousif et al. (2008) aplicaram o MEF utilizando o software ANSYS®. As configurações de placas analisadas levaram em conta variações nas dimensões da placa, assim como, altura e espessura dos enrijecedores e pressão aplicada. Os resultados obtidos pelo método numérico foram comparados com soluções analíticas e apresentaram boa concordância. O estudo concluiu que a altura ideal para os enrijecedores deve ficar entre 40 mm e 50 mm. Valores acima são insignificantes e conduzem a uma solução antieconômica.

Fernandes (2009) apresentou um equacionamento utilizando o Método dos Elementos de Contorno baseado nas hipóteses de Kirchhoff. O objetivo do estudo foi analisar a flexão de placas reforçadas por vigas de diferentes materiais. A metodologia adotada baseou-se em dividir placa e vigas em sub-regiões, com o intuito de definir para cada uma delas, diferentes espessuras, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. O Método dos Resíduos Ponderados foi aplicado nas soluções das equações para cada sub-região, as quais foram somadas para obter a equação da estrutura inteira. Além disso, o modelo propôs aproximações para os deslocamentos e trações ao longo das seções transversais das vigas, reduzindo alguns graus de liberdade do problema para simplificar a solução. A performance do método foi comparada com modelos solucionados pelo MEF através do ANSYS® apresentando bons resultados.

O trabalho de Orozco (2009) teve como objetivo estabelecer um comparativo entre o método da chapa ortotrópica e o MEF para painéis reforçados carregados transversalmente. Foram construídos modelos considerando bordas simplesmente apoiadas e engastadas com enrijecedores de seção transversal em forma de T, os quais foram modelados com elementos de casca e viga. A análise ocorreu para diferentes espaçamentos e momentos de inércia dos enrijecedores, permitindo a obtenção de uma grande quantidade de dados paramétricos. Os valores de tensões e deflexões alcançados por meio do MEF foram parametrizados em função das variáveis da chapa ortotrópica, permitindo a geração de curvas de tensão e deflexão. Tais curvas foram comparadas com as curvas propostas pelo método da chapa ortrotópica para painéis simplesmente apoiados, permitindo avaliar a sensibilidade dos resultados dos modelos numéricos. E ainda, estabelecer o nível de desvio entre os métodos já mencionados.

Banai e Pedatzu (2010) tomaram como base o trabalho de Shade (1940, 1941, 1951) e desenvolveram um programa de computador com a finalidade de obter uma análise estrutural rápida e funcional para placas ortotrópicas enrijecidas ou não. Uma das premissas do trabalho foi a possibilidade de avaliar se a placa pode suportar as cargas aplicadas, de modo a evitar as possíveis complicações matemáticas impostas por métodos numéricos. O processo de informatização resumiu-se a dois principais parâmetros, o coeficiente *K* necessário para calcular a máxima deflexão, o qual relaciona propriedades geométricas, coeficiente de torção e condições de contorno e também o parâmetro da amplitude relativa da placa. Para representar as curvas propostas no trabalho de Shade foram utilizados polinômios capazes de rastrear as curvas originais com alto grau de precisão. A interface visual do programa permite ao usuário inserir os dados de entrada de forma bastante simplificada, possibilitando inclusive que novas configurações sejam testadas sem grandes dificuldades. Entretanto, por ser um modelo de aproximação os resultados obtidos apresentam uma acurácia mediana, mas se adequaram bem para o uso como ferramenta preliminar de projeto.

Baseado no princípio da energia potencial mínima, o trabalho de Singh (2013) teve como foco a análise estática de grandes deflexões em placas enrijecidas submetidas a carregamento transversal uniforme. Além disso, foi avaliada a influência da geometria dos enrijecedores no comportamento estrutural da placa. O estudo foi desenvolvido para uma placa retangular com um enrijecedor central disposto paralelamente à borda de menor dimensão. Para tal, foram analisadas seis diferentes combinações de condições de contorno e três diferentes geometrias para os enrijecedores.

Shanmugam et al. (2014) avaliaram o comportamento de placas enrijecidas submetidas a carregamentos combinados de pressão transversal e compressão axial. O experimento analisou 12 placas divididas em dois grupos com diferentes índices de esbeltez. Foi utilizado um equipamento de testes capaz de aplicar simultaneamente o carregamento transversal e a compressão axial às placas. Todo o procedimento foi monitorado e registrado com o auxílio de medidores de tensão e deflexão. Além disso, o MEF foi utilizado através do software ABAQUS® com o objetivo de comparar os resultados numéricos e experimentais. A modelagem computacional levou em consideração as imperfeições geométricas encontradas no modelo físico, de forma que, os resultados fossem reproduzidos de maneira fiel. Os autores concluíram que é possível reproduzir computacionalmente de maneira precisa o comportamento elástico e inelástico de placas rígidas submetidas a carregamento combinado.

Singh et al. (2015) utilizaram o software ANSYS® baseado no MEF para realizar um estudo paramétrico com a finalidade de analisar a máxima deflexão e a máxima tensão em placas isotrópicas reforçadas submetidas a flexão. Foram analisadas diferentes configurações geométricas de enrrijecedores quadrados, mantendo o seu volume de material constante. Para cada configuração geométrica os autores variaram os carregamentos e as condições de contorno das placas em análise. Com base nos resultados, os autores recomendaram que para melhorar o desempenho estrutural, a espessura do enrijecedor deve ser aproximadamente igual à espessura da placa. Já o comprimento deve ter entre 65% e 75% da largura da placa, assim como, a altura deve ser de 4 a 6 vezes a espessura do próprio enrijecedor.

Singh e Pal (2016) analisaram o comportamento mecânico de placas isotrópicas enrijecidas e placas compósitas. O MEF foi utilizado através do software ANSYS® e o estudo decorreu com a análise das placas sobre diferentes condições de contorno. Foi adotado carregamento transversal uniforme e pontual para as placas com e sem enrijecedores. As placas enrijecidas foram testadas com diferentes configurações geométricas de enrijecedores, variando altura, espessura e comprimento, mantendo o volume de material. Para a modelagem das placas isotrópicas foi utilizado o elemento SHELL281 e para o enrijecedores o elemento SOLID186. Para as placas compósitas, o elemento SHELL281 foi utilizado para a modelagem tanto da placa quanto do enrijecedor.

Troina (2017) fez uso do software ANSYS® baseado no MEF para realizar simulações numéricas em placas finas de aço enrijecidas. O método Design Construtal foi utilizado em associação à técnica de Busca Exaustiva para investigar configurações geométricas que reduzissem a deflexão central das placas quando submetidas a carregamento transversal uniforme. O estudo considerou diferentes valores do parâmetro ϕ, dito como a razão entre o volume de material dos enrijecedores e o volume de material total da placa. Além disso, os graus de liberdade considerados no estudo foram o número de enrijecedores longitudinais e transversais e também a razão entre a altura e a espessura. Para a modelagem computacional foram adotados os elementos finitos SHELL93 quadrilátero e triangular e o SOLID95 tetraédrico e hexaédrico.

Cunha et al. (2018) avaliaram a geometria de placas enrijecidas submetidas a carregamento transversal uniformemente distribuído utilizando o software ANSYS®. Foram propostas diversas configurações geométricas utilizando o método do Design Construtal associado à técnica de Busca Exaustiva para encontrar configurações geométricas que reduzissem a deflexão no centro das placas. Para isso, uma placa de referência foi considerada, onde uma parcela de volume de material foi transformada em enrijecedores, considerando a fração volumétrica $\phi = 0{,}5$. Os graus de liberdade analisados no estudo foram o número de enrijecedores longitudinais e transversais, assim como a razão ente sua altura e espessura, mantendo o volume de material da placa constante. Os resultados mostraram que o aumento no número de enrijecedores não significa maior redução na deflexão no centro da placa e ressalta que a geometria do enrijecedor tem forte influência no seu comportamento estrutural. Em comparação com a placa de referência a configuração ótima encontrada apresentou redução de 9110% da deflexão no centro da placa.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Utilizar modelos computacionais para simular comportamento mecânico de placas finas enrijecidas submetidas a flexão aplicando o método do Design Construtal aliado à técnica de Busca Exaustiva, com o intuito de analisar a influência de diferentes geometrias e orientação dos enrijecedores.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar a influência da fração volumétrica ϕ, que relaciona o volume de material dos enrijecedores (V_s) com volume de material da placa de referência (V_r).
- Analisar a influência do grau de liberdade h_s/t_s, que relaciona a altura do enrijecedor (h_s) com a espessura do enrijecedor (t_s).
- Analisar a influência do número de enrijecedores.
- Analisar o comportamento quanto à deflexão central e máxima em placas com enrijecedores retangulares orientados em 0° (longitudinalmente e transversalmente) e 45° (inclinados).
- Analisar o comportamento quanto à deflexão central e máxima em placas com enrijecedores trapezoidais.
- Analisar a eficácia do método Design Construtal aplicado à análise geométrica em mecânica dos sólidos.

2 TEORIA DAS PLACAS FINAS

As placas finas são componentes estruturais retos, delimitados por dois planos paralelos separados por uma espessura *t* de dimensão muito menor do que as demais e por bordas ortogonais aos dois planos limitantes, normalmente formando um ângulo reto entre si. As cargas aplicadas às placas, que podem ser dinâmicas ou estáticas, são predominantemente perpendiculares ao plano. Uma placa originalmente plana desenvolve forças de cisalhamento, flexão e torção para resistir a carregamentos transversais. Como essas cargas normalmente são transportadas em duas direções e a rigidez de torção em placas isotrópicas é significativa, esses componentes estruturais tornam-se uma combinação eficaz de leveza e alta capacidade de suporte (VENTSEL E KRAUTHAMMER, 2001).

A solução matemática exata de placas finas sujeitas a carregamento transversal requer a solução de equações diferencias tridimensionais. Porém, esse tipo de abordagem implica em soluções matemáticas de extrema dificuldade. Entretanto, para a maioria dos casos a Teoria de Placas Finas proposta por Kirchhoff conduz a resultados precisos sem a necessidade de realizar uma análise tridimensional completa, através da solução de uma equação diferencial de quarta ordem, que exige apenas duas condições de contorno em cada borda para ser satisfeita (SZILARD, 2004).

Logo, os próximos tópicos e subtópicos desse capítulo serão destinados à formação da equação governante de placas finas, incluindo abordagens da teoria da elasticidade, condições de contorno e soluções.

2.1 Teoria clássica de pequenas deflexões de placas finas

Segundo Szilard (2014) a formação da equação governante de placas finas proposta por Kirchhoff requer que algumas hipóteses sejam consideradas:

1. Material elástico linear, homogêneo e isotrópico.
2. Inicialmente a placa é considerada plana, o plano médio não sofre deformação durante a flexão.
3. A espessura da placa *t* é constante e a menor dimensão lateral da placa deve ser no mínimo dez vezes maior que a espessura.
4. As deflexões transversais da placa $w(x,y)$ são consideradas pequenas, quando comparadas com a espessura, sendo a deflexão máxima permitida na ordem de um décimo da espessura *t*.
5. As rotações da superfície média da placa são pequenas em relação à unidade.
6. Após as deformações, as seções planas e normais ao plano médio da placa, permanecem planas e normais ao plano médio.
7. As tensões normais σ_z transversais ao plano médio da placa são desconsideradas.

Ao assumir essas hipóteses, explica Szilard (2004), o problema originalmente tridimensional pode ser reduzido a uma análise bidimensional. Convenientemente, adota-se para placas retangulares o sistema de coordenadas cartesiano. As forças internas e externas, assim como as tensões e as componentes de deslocamento *u*, *v* e *w*, são consideradas positivas quando direcionadas para o sentido positivo dos eixos *x*, *y* e *z*. Além disso, seguindo a convenção usual adotada em engenharia, os momentos são considerados positivos quando tracionam as fibras inferiores de placa. A Fig. 2.1 (a) representa uma placa submetida a um carregamento transversal, conforme o sistema de coordenadas adotado, enquanto a Fig. 2.1 (b) mostra o estado de tensões internas que se manifestam em resposta ao carregamento externo aplicado em um elemento infinitesimal.

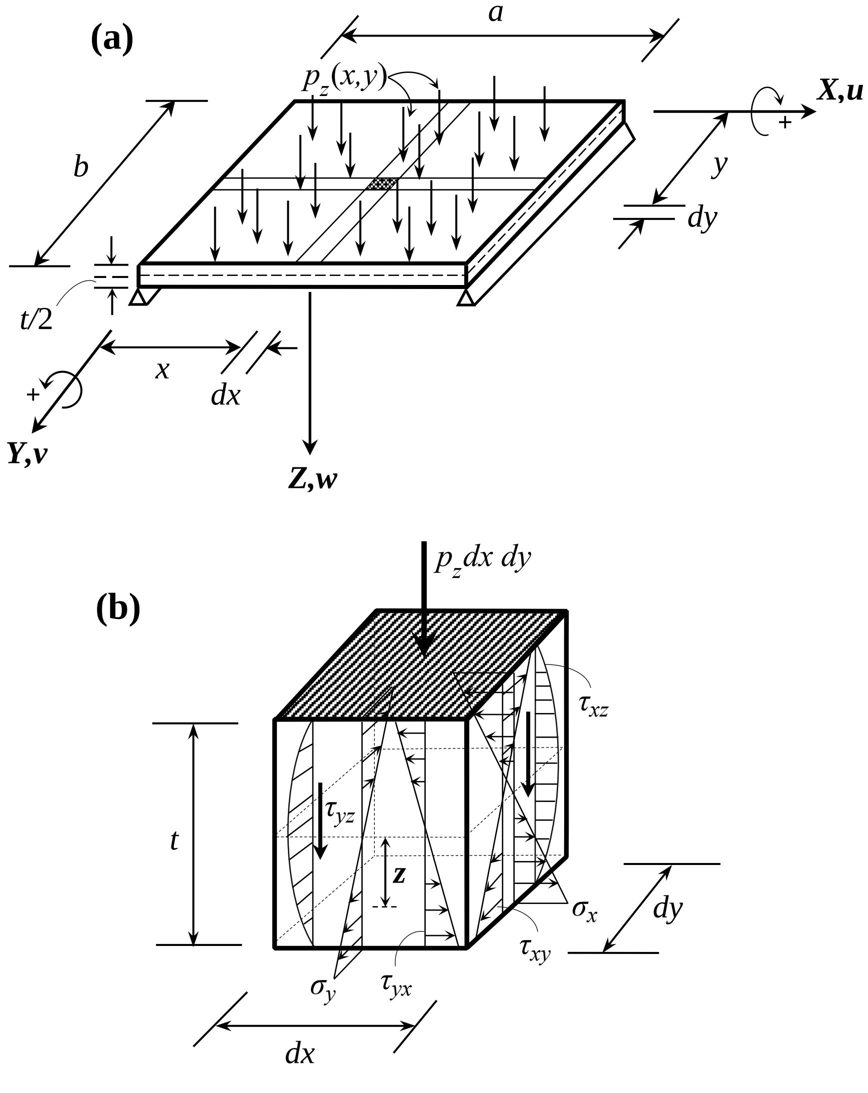


Figura 2.1 – (a) Placa submetida a carregamento transversal uniforme; (b)Tensões em um elemento infinitesimal de placa

2.1.1 Relações de equilíbrio

Considerando que a placa está sujeita apenas a carregamento transversal, podem-se assumir as três seguintes equações fundamentais de equilíbrio:

$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum p_z = 0 \tag{2.1}$$

Ao analisar um elemento infinitesimal de placa (Fig. 2.2) submetido a uma carga p_z, nota-se o surgimento de forças de cisalhamento Q_x e Q_y e momentos fletores M_x e M_y, necessários ao equilíbrio. Além disso, conforme explica Szilard (2004), o comportamento de placas finas assemelha-se em muitos aspectos com uma malha de vigas bidimensionais, sendo a presença dos momentos torçores em placas M_{xy} e M_{yx} a principal diferença entre as duas abordagens. Esses momentos acrescentam uma parcela de contribuição na resistência ao carregamento interno.

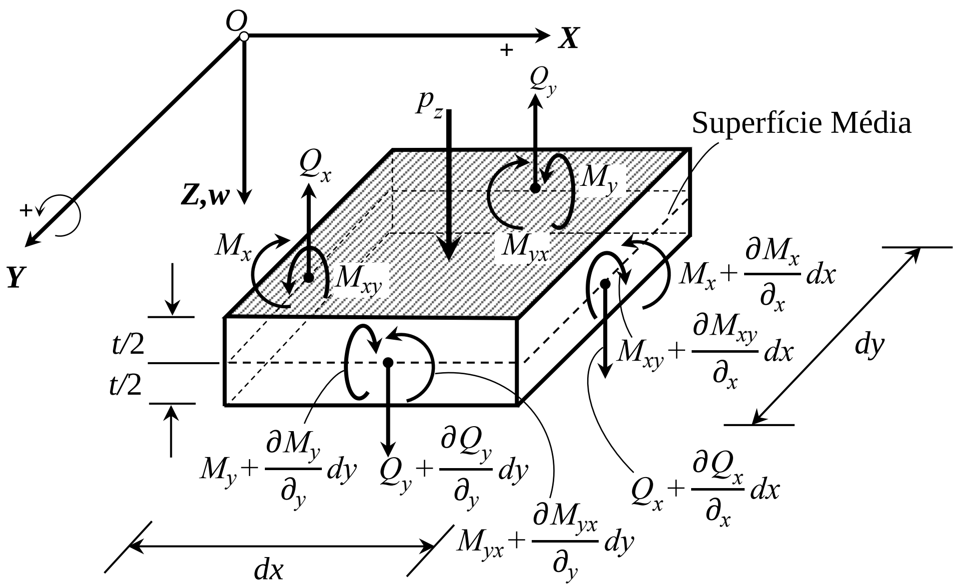


Figura 2.2 - Esforços resultantes em um elemento de placa

Na teoria de placas, é usual que os momentos e forças internas sejam expressos por unidade de comprimento, de modo que, passam a ser representados conforme a seguinte notação: q_x, q_y, m_x, m_y, m_{xy} e m_{yx}. O primeiro termo do índice refere-se à direção normal ao plano que o esforço atua. Enquanto o segundo índice indica a direção onde o esforço é exercido. Como as hipóteses propostas por Kirchhoff simplificam o problema de placas finas a uma análise bidimensional, pode-se apresentar os esforços internos por meio do plano médio do elemento infinitesimal, conforme a Fig. 2.3 (SZILARD, 2004).

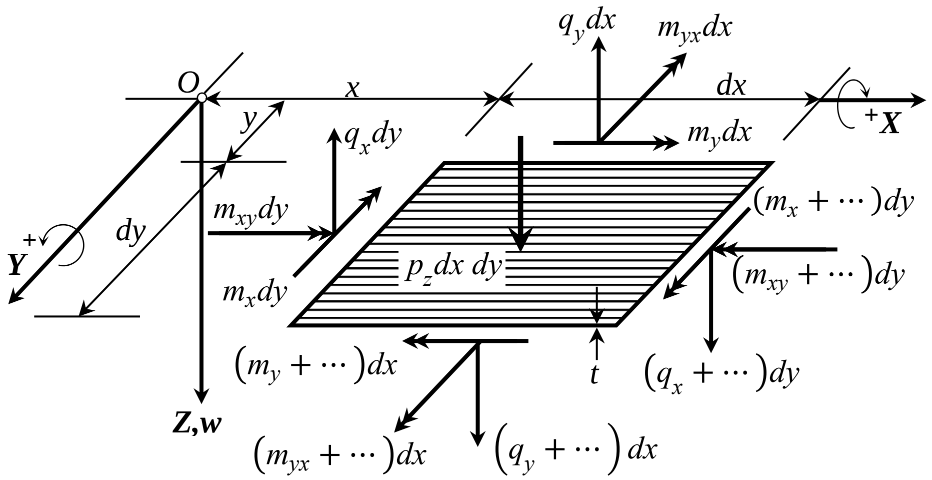


Figura 2.3 - Esforços resultantes na superfície média de um elemento de placa

De acordo com Szilard (2004) o processo de formulação de equação diferencial governante de placas, parte das equações fundamentais de equilíbrio. Primeiramente realiza-se o somatório de momentos de todas as forças em torno do eixo *y*:

$$\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - m_{yx}dx + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy\frac{dx}{2} \\ - q_x dy\frac{dx}{2} = 0 \tag{2.2}$$

Após expansão em série de Taylor e simplificação da Eq. (2.2), pode-se desprezar o termo $1/2(\partial q_x/\partial x)(dx)^2 dy$, visto que, é uma parcela infinitésima de ordem superior. Assim a Eq. (2.2) fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dydx - q_x dxdy = 0 \tag{2.3}$$

Dividindo os termos da Eq. (2.3) por *dydx*, obtém-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \tag{2.4}$$

Analogamente ao processo anterior, realizando o somatório de momentos em torno do eixo *x:*

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \tag{2.5}$$

Dessa vez, realizando o equilíbrio em tono do eixo *z*, chega-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial q_y}{\partial y}dxdy + p_z dxdy = 0 \tag{2.6}$$

Dividindo por *dydx* tem-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}=-p_z \tag{2.7}$$

Substituindo as Eqs. (2.4) e (2.5) na Eq. (2.7) e observando que os momentos torçores m_{xy} = m_{yx}, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}=-p_z(x,y) \tag{2.8}$$

Os momentos de flexão e torção que compõe a Eq. (2.8) estão relacionados com as tensões internas, que por sua vez, relacionam-se com as componentes de deslocamento *u*, *v* e *w*. Sendo assim, é preciso recorrer a algumas relações da Teoria da Elasticidade.

2.1.2 Relações entre tensões, deformações e deslocamentos

Segundo Szilard (2004) assumindo que o material tem comportamento linear-elástico, a Lei de Hooke bidimensional passa a ser válida:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y \tag{2.9}$$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x \tag{2.10}$$

onde σ_x e σ_y as tensões normais nas direções *x* e *y*, bem como, ε_x e ε_y representam as deformações normais. Além do mais, *E* e ν representam o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente.

Relacionando tensão e deformação em um elemento de placas, substitui-se a Eq. (2.9) na Eq. (2.10), obtendo:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \tag{2.11}$$

De modo semelhante:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \tag{2.12}$$

Os momentos torçores m_{xy} e m_{yx} produzem tensões de cisalhamento no plano τ_{xy} e τ_{yx} (Fig. 2.4) que estão relacionadas com deformação de cisalhamento γ, conforme a Lei de Hooke. Sendo assim:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\,\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \qquad (2.13)$$

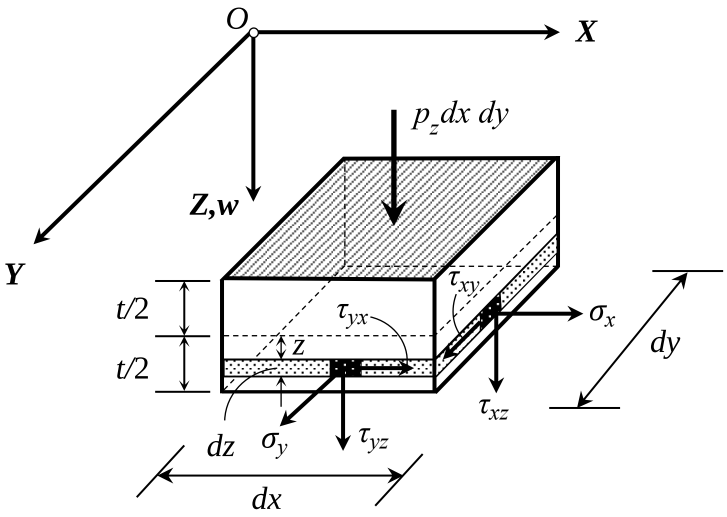


Figura 2.4 - Tensões atuantes em um elemento de placa

Após, considera-se a geometria da placa defletida, para expressar as deformações em termos dos coeficientes de deslocamento. Tomando uma seção com y constante, conforme mostra a Fig. 2.5, pode-se comparar o antes e depois da deformação.

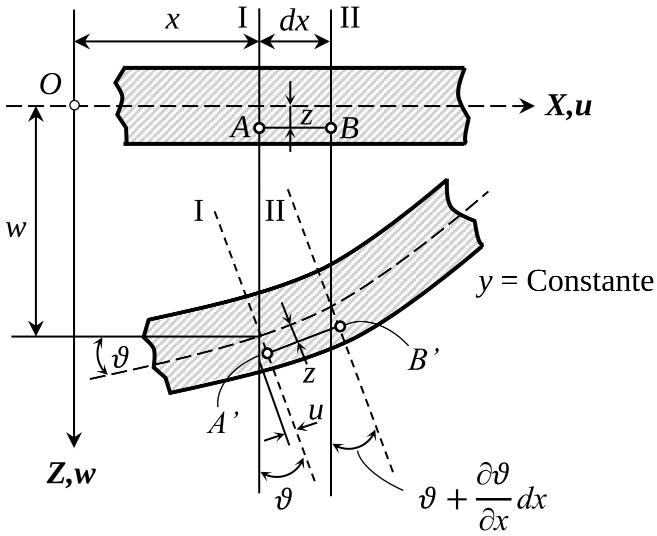


Figura 2.5 - Seção de um elemento de placa antes e depois da flexão

Lembrando-se das hipóteses de Kirchhoff que assumem que as rotações do plano médio são pequenas comparadas a unidade e que as seções planas e normais ao plano médio permanecem planas e normais após a deformação, o ângulo de rotação das linhas I-I e II-II (ver Fig. 2.5), respectivamente, são:

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.14}$$

$$\vartheta + ... = \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \tag{2.15}$$

Em seguida, a deformação do comprimento $\overline{AB}$ de uma fibra da placa localizada a uma distância z da linha central, passa a ser $\overline{A'B'}$ como mostra a Fig. 2.6. Usando a definição de deformação, pode-se escrever:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{[dx + z(\partial\vartheta/\partial x)\, dx] - dx}{dx} = z\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{2.16}$$

Realizando a substituição da Eq. (2.16) na Eq. (2.14), encontra-se a deformação na direção do eixo x:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.17}$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtém-se a deformação na direção do eixo y:

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.18}$$

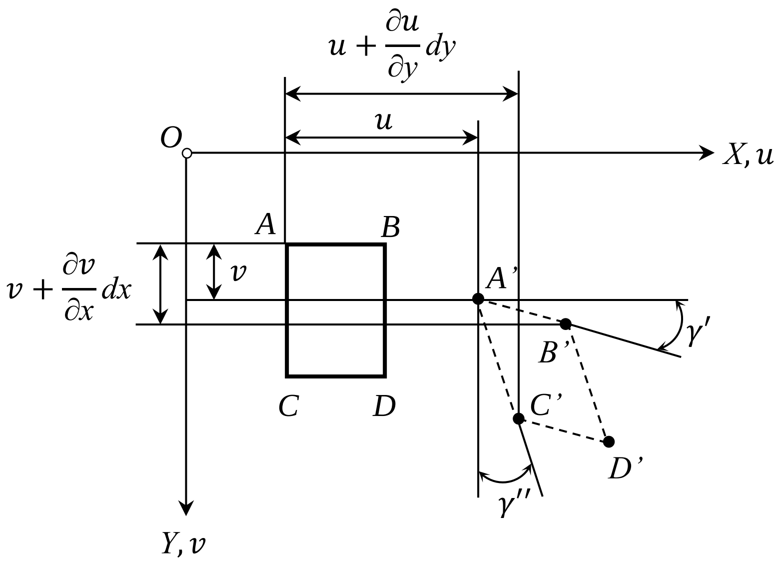


Figura 2.6 - Distorção angular

A determinação da distorção angular $\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma''$ pode ser realizada comparando a deformação do paralelogramo *ABCD* em *A'B'C'D'* localizado a uma distância constante *z* da superfície média da placa (ver Fig. 2.6). Onde γ' e γ'' são dados por:

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.19}$$

Assim, os deslocamentos *u* e *v* são representados pelas seguintes equações:

$$u = z\vartheta = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.20}$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.21}$$

Relacionando as deformações de cisalhamento com os deslocamentos:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.22}$$

Substituindo as Eqs. (2.20) e (2.21) na Eq. (2.22) chega-se a:

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.23}$$

Sendo assim, as mudanças de curvatura nas direções *x* e *y* e o empenamento, ficam da seguinte forma:

$$Kx = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad Ky = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \text{e} \qquad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.24}$$

2.1.3 Forças internas expressas em termos de *w*

As componentes de tensão σ_x e σ_y criam momentos de flexão no elemento de placa (Fig. 2.4), de modo similar ao que acontece à teoria de vigas (SZILARD, 2004). Dessa forma, através da integração das componentes de tensão normal, chega-se aos momentos de flexão que agem no elemento de placa:

$$m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z \, d_z \tag{2.25}$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z \, d_z \tag{2.26}$$

De maneira similar, os momentos torçores produzidos pelas tensões de cisalhamento $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ podem ser calculados por:

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z \, d_z \tag{2.27}$$

$$m_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} z \, d_z \tag{2.28}$$

considerando que $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$, consequentemente $m_{xy} = m_{yx}$.

Substituindo as Eqs. (2.17) e (2.18) nas Eqs. (2.11) e (2.12), as tensões normais ficam expressas em ternos da deflexão transversal w, da seguinte forma:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1 - v^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.29}$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1 - v^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.30}$$

Após substituir as Eqs. (2.29) e (2.30) nas Eqs. (2.25) e (2.6) e resolver as integrais, obtém-se:

$$m_x = \frac{Eh^3}{12(1 - v^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = D(Kx + vKy) \tag{2.31}$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = D(Ky + vKx) \tag{2.32}$$

onde D é a rigidez flexural da placa, expressa por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - v^2)} \tag{2.33}$$

sendo t a espessura da placa, E o módulo de elasticidade do material e v seu coeficiente de Poisson.

De maneira similar, os momentos torçores em termos da deflexão transversal w, são dados por:

$$m_{xy} = m_{yx} = -(1-\nu)\,D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)D\chi \tag{2.34}$$

Enfim, substituindo as Eqs. (2.31), (2.32) e (2.34) na Eq. (2.8), encontra-se a equação diferencial governante de placas sujeitas a carregamento transversal distribuído:

Reescrevendo a Eq. (2.36) de forma mais resumida:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{-p_z(x,y)}{D} \tag{2.35}$$

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = -p_z(x,y) \tag{2.36}$$

A Eq. (2.35) é diferencial parcial de quarta ordem, não-homogênea e do tipo elíptica com coeficientes constantes, conhecida como equação bi-harmônica não-homogênea. Esta é uma equação linear, pois as derivadas de $w(x,y)$ não possuem expoentes maiores do que 1 (SZILARD, 2004).

Ainda é possível apresentar as forças de cisalhamento em função da deflexão transversal, substituindo as Eqs. (2.31), (2.32) e (2.34) nas Eqs. (2.4) e (2.5), chegando nas seguintes equações:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \tag{2.37}$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \tag{2.38}$$

2.2 Condições de Contorno para placas

Uma solução exata para a equação de quarta ordem que governa o comportamento de placas finas deve satisfazer simultaneamente a equação diferencial e as condições de contorno do problema. Assim, duas condições de contorno devem ser satisfeitas em cada borda da placa. Essas podem ser condições de deslocamento, ou condições geométricas, e ainda, condições em termos dos esforços internos, chamadas de condições estáticas. A combinação desses dois tipos de condições de contorno recebe o nome de condição mista (SZILARD, 2004). Os três principais tipos de condições de contorno encontrados em placas sujeitas a carregamento transversal são apresentados na Fig. 2.7.

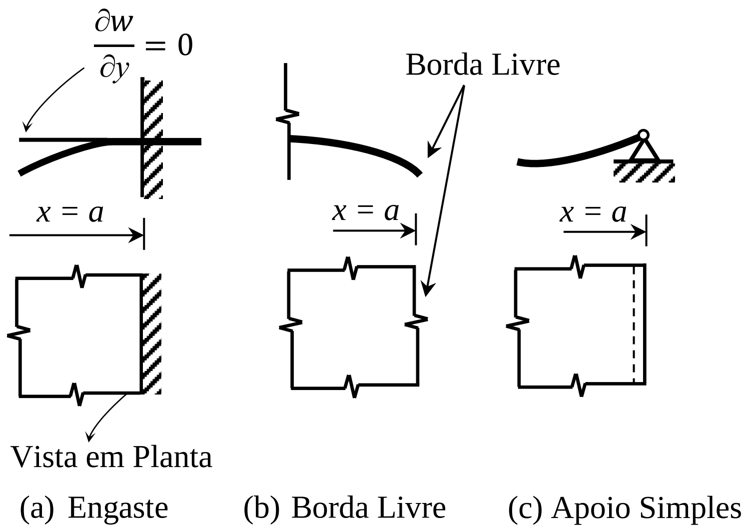


Figura 2.7 - Condições de contorno em placas

2.2.1 Condições de contorno geométricas

Uma condição geométrica pode ser inserida ao se designar valores para o deslocamento ou rotação em uma borda. Por exemplo, observando a Fig. 2.7(a), a qual possui um comprimento *a* na direção do eixo *x* e largura *b* na direção *y* (SZILARD, 2004). Considerando que as quatro bordas estão engastadas restringindo as deflexões e rotação, pode-se escrever:

$$w_x = 0 \quad \text{e} \quad \vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}\,, \qquad \text{em} \quad x = a \quad \text{e} \quad x = a \tag{2.40}$$

$$w_x = 0 \quad \text{e} \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}\,, \qquad \text{em} \quad y = a \quad \text{e} \quad y = b \tag{2.41}$$

2.2.2 Condições de contorno estáticas

De acordo com Szilard (2004) ao ter uma placa com uma borda livre (Fig. 2.7 (b)), os esforços solicitantes na borda devem ser nulos, podendo ser expressos da seguinte maneira:

$$v_x = m_x = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = a \tag{2.42}$$

$$v_y = m_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = b \tag{2.43}$$

A equação diferencial da placa é de quarta ordem, sendo assim, permitindo apenas duas condições de contorno na borda. Porém, a existência de esforços cortantes, momentos fletores e torçores necessita de três condições de contorno. Sendo assim, a solução de Kirchhoff para esse problema foi introduzir um esforço cortante adicional em substituição ao momento torçor, conforme mostra a Fig. 2.8.

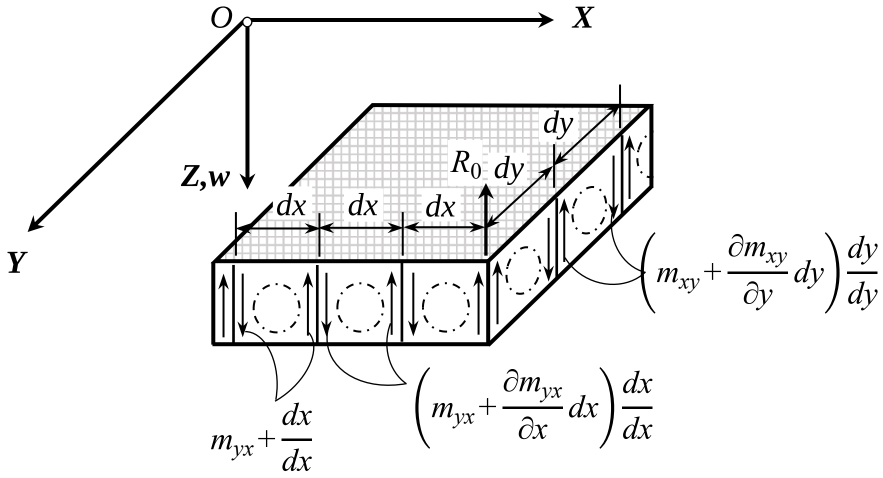


Figura 2.8 - Forças cortantes devido aos momentos torçores

O esforço cortante que a atua n borda é composto por dois termos, que são a força cortante transversal e o momento torçor. Considerando que as bordas da placa são normais às direções x e y, respectivamente, é possível escrever as forças verticais nas bordas por unidade de comprimento:

$$q_x = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] \quad \text{em} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = a \tag{2.44}$$

$$q_y = \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] \quad \text{em} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad x = b \tag{2.45}$$

onde q_x e q_y são as forças transversais de cisalhamento, assim como, $\partial m_{xy}/\partial y$ e $\partial m_{yx}/\partial x$, representam as forças adicionais de cisalhamento na borda produzidas pelos momentos torçores m_{xy} = m_{xy}. Substituindo os momentos torçores por $m_{xy}\ dy/dy$ e $m_{yx}\ dx/dx$, respectivamente, tem-se:

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy \quad \text{e} \quad \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}dx \tag{2.46}$$

Dividindo as Eqs. (2.46) por dy e dx, respectivamente, chega-se às forças de cisalhamento adicionais por unidade de comprimento:

$$q_x{}^* = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \text{e} \quad q_y{}^* = \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}dx \tag{2.47}$$

Essas forças são conhecidas como forças suplementares de Kirchhoff. Desse modo, ao substituir os momentos de torção por essas forças, o número de forças internas na borda livre é reduzido de três para duas, da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_x = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = a \tag{2.48}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad x = b \tag{2.49}$$

2.2.3 Condições de contorno mistas

Esses tipos de condições de contorno são apresentados em placas simplesmente apoiadas (Fig. 2.27(c)) e envolvem afirmações referentes a momentos e forças. Considerando uma placa com as quatro bordas em condições de apoio simples, o deslocamento transversal e o momento fletor são considerados nulos em cada bordo (SZILARD, 2004). E podem ser representados pelas seguintes expressões:

$$w_x = 0, \quad m_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = a \tag{2.50}$$

$$w_y = 0, \quad m_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad x = b \tag{2.51}$$

Em placas simplesmente apoiadas retangulares ou quadradas é importante observar o surgimento de forças adicionas nos cantos, podendo causar o levantamento da região e consequente falha local, conforme mostra a Fig. 2.9. Isso acontece devido ao fato de que os momentos torçores somam-se nos vértices ao invés de cancelaram-se. Matematicamente essa força é dada por:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.52}$$

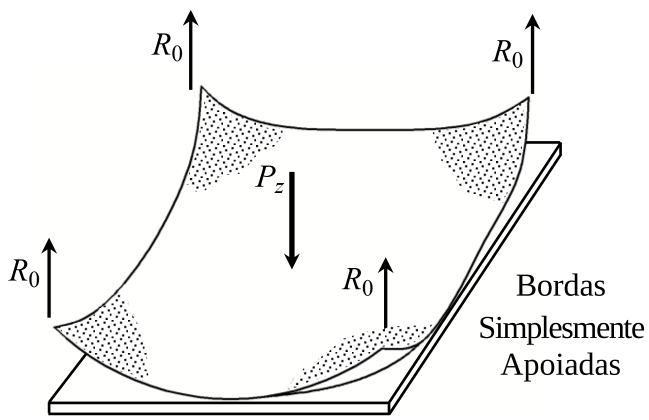


Figura 2.9 - Forças adicionais nos cantos

2.3 Solução da equação diferencial de placas finas

Szilard (2004) explica que a equação diferencial governante de placa é função de $w(x,y)$ e deve satisfazer as condições de contorno no bordo referentes a cada situação e o equilíbrio de forças.

Assim, uma vez que a equação é linear, a solução pode ser obtida através da sobreposição de duas soluções, uma homogênea $w_H(x,y)$ e outra particular $w_P(x,y)$. Dessa forma a solução homogênea satisfaz as condições de contorno prescritas nas bordas e a solução particular satisfaz o equilíbrio de forças externas. A solução geral pode ser escrita da seguinte maneira:

$$w(x,y) = w_H(x,y) + w_P(x,y) \tag{2.52}$$

A solução exata para a equação diferencial de placas pode ser obtida apenas para alguns casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, as soluções podem ser encontradas adotando-se expansões em séries de Fourier. Duas das soluções disponíveis são a de Navier e Lévy (ARAÚJO, 2014).

2.3.1 Solução de Navier

Navier propôs a solução da equação diferencial governante de placas através da expansão em séries trigonométricas duplas. Essa abordagem é restrita para condições de contorno de bordas simplesmente apoiadas e tem como objetivo transformar a equação diferencial em algébrica, reduzindo as dificuldades matemáticas (SZILARD, 2004).

Considerando a Fig. 2.10 que representa uma placa retangular com bordas simplesmente apoiadas sob um carregamento transversal uniforme, a deflexão $w(x,y)$ e o termo de carga $p_z(x,y)$ são expandindos da seguinte maneira:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.53}$$

$$p_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.54}$$

onde W_{mn} são os coeficientes desconhecidos e p_{mn} são os coeficientes de expansão do termo de carga para m, n = 1,2,3..., encontrados no Apêndice A.

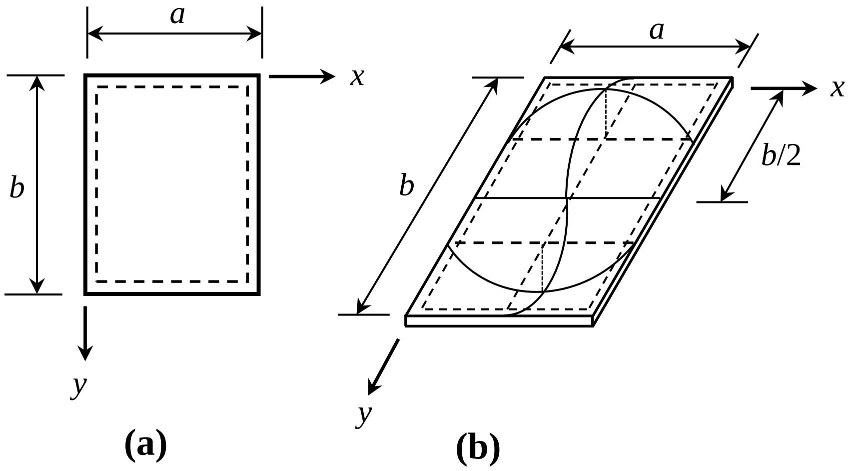


Figura 2.10 – (a) Referencial de coordenadas; (b) Placa retangular com bordas simplesmente apoiados sob flexão

Substituindo as Eqs. (2.53) e (2.54) na equação governante de placas, Eq. (2.35), pode ser obtida uma equação algébrica que permite calcular os coeficientes W_{mn}:

$$W_{mn} = \frac{p_{mn}}{D\pi^4\left[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)\right]^2} \tag{2.55}$$

Sendo assim, é possível obter uma solução analítica para a deflexão de placas, escrita da seguinte forma:

$$w(x,y) = \frac{1}{D\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{mn}}{\left[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)\right]^2} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.56}$$

Ainda pode-se obter os momentos fletores e torçor ao substituir a Eq. (2.56) nas Eqs. (2.31), (2.32) e (2.34), respectivamente. Um exemplo detalhado da aplicação do método de Navier para o caso verificado no item 3.31 desta dissertação é apresentado no Apêndice B.

$$m_x = \pi^2 D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + v\left(\frac{n}{b}\right)^2\right] W_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.57}$$

$$m_y = \pi^2 D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + v\left(\frac{m}{a}\right)^2\right] W_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.58}$$

$$m_{xy} = -\pi^2 D(1 - v)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mn}{ab}\right) W_{mn} cos\frac{m\pi x}{a} cos\frac{n\pi y}{b} \tag{2.59}$$

2.3.2 Solução de Lévy

A proposta de Lévy segundo Szilard (2004) para a solução da equação governante de placas propõe que sejam encontradas duas soluções, uma homogênea $w_H(x,y)$ e uma particular $w_P(x,y)$:

$$w(x,y) = w_H(x,y)+w_P(x,y) \tag{2.60}$$

A obtenção da solução particular requer que duas bordas opostas da placa sejam simplesmente apoiadas e assume-se que a placa é infinitamente longa na outra direção. Além disso, deve-se considerar que a carga externa tenha um perfil constante na direção paralela aos bordos simplesmente apoiados, podendo variar apenas nas direções perpendiculares aos mesmos, conforme a Fig. 2.11.

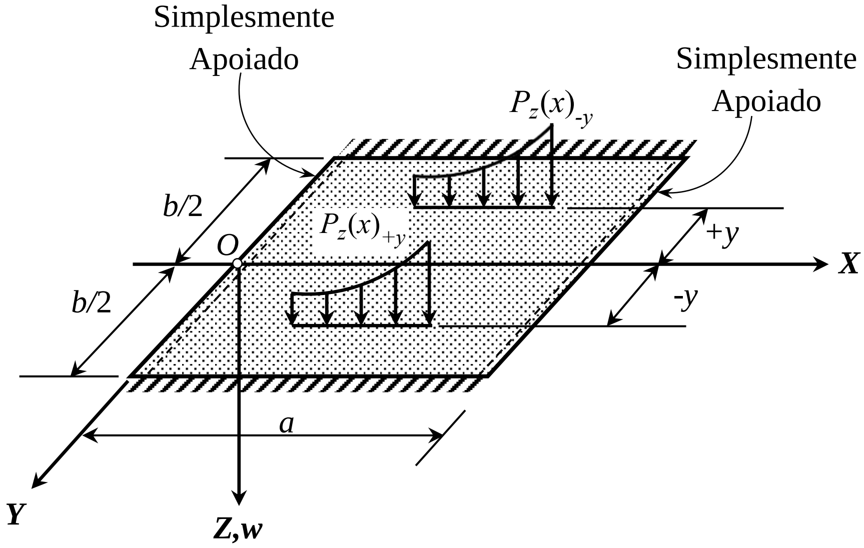


Figura 2.11 - Placa retangular com bordas opostas simplesmente apoiadas

Considerando que $b \to \infty$, a equação diferencial governante de placas pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{p_z(x)}{D} \tag{2.61}$$

Expandindo a Eq. (2.61) em uma série trigonométrica simples que atente as condições de contorno, bem como o terno te carga $p_z(x)$, chega-se ao seguinte par de equações:

$$w_P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.62}$$

$$p_z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.63}$$

Substituindo as Eqs. (2.62) e (2.63) na Eq. (2.61) a solução particular torna-se uma equação algébrica, onde W_{mn} são os coeficientes desconhecidos e p_{mn} os coeficientes de expansão do termo de carga.

A solução homogênea também é expandida em uma série trigonométrica simples que atende às condições de contorno na direção *x*, da seguinte forma:

$$w_H(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) sin \frac{m\pi x}{a} \tag{2.64}$$

A função $Y_m(y)$ demanda que sejam encontrados os valores de quatro constantes A_m, B_m, C_m e D_m a partir das condições de contorno das bordas da placa. Porém, Lévy propõe uma simplificação devido à simetria em relação ao eixo *x*, de modo que a equação para obtenção de $Y_m(y)$ seja expressa da seguinte maneira:

$$Y_m(y) = A_m cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} sinh \frac{m\pi y}{a} \tag{2.65}$$

Sendo assim, para o caso de condições de contorno nas bordas paralelas ao eixo *x*, onde $y = \pm b/2$, a solução da equação diferencial para placas pode ser escrita assim:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} sinh \frac{m\pi y}{a} \right) sin \frac{m\pi x}{a} \tag{2.66}$$

2.3.3 Solução por Energia (Método de Rayleigh-Ritz)

A aplicação do Método de Rayleigh-Ritz baseia-se no princípio de energia potencial mínimo. Para que um corpo sujeito a cargas externas atinja o equilíbrio estável a energia potencial deve ser mínima, ou seja, a energia potencial deve assumir um valor mínimo para todos os deslocamentos que satisfazem determinadas condições de contorno e equilíbrio (UGURAL, 2010).

Segundo Bernardino (2016) a energia potencial total Π de uma placa é a soma de todas as energias envolvidas no processo de deformação elástica, que correspondem a energia de deformação *U* e a energia potencial de cargas *W*:

$$\Pi = U - W \tag{2.67}$$

e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Pi = \iint_A \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - p_z w \right] \right\} dxdy \tag{2.68}$$

Para a solução aproximada dos deslocamentos adota-se uma função $\widetilde{w}(x,y)$ composta por um conjunto de funções que atendem às condições de contorno nas bordas para as direções x e y. Este conjunto de funções é apresentado abaixo para as direções x e y respectivamente, para o caso de bordas simplesmente apoiadas conforme apresentado por Bernardino (2016):

$$w_1\,(x) = 1 - \left(\frac{2x}{a} - 1\right)^2 \tag{2.69}$$

$$w_2\,(x) = 1 - \left(\frac{2x}{a} - 1\right)^4 \tag{2.70}$$

$$w_1\,(y) = 1 - \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \tag{2.71}$$

$$w_2\,(y) = 1 - \left(\frac{2x}{b} - 1\right)^4 \tag{2.72}$$

Substituindo as Eqs. (2.69), (2.70), (2.71) e (2.72) na equação de energia potencial total, Eq. (2.68), e aplicando a condição de primeira derivada nula, surgem constantes desconhecidas que podem ser determinadas por um sistema de equações simples. Aplicando os valores das constantes na função $\widetilde{w}(x,y)$ é possível conhecer os deslocamentos na placa de modo aproximado.

Um exemplo detalhado da aplicação do método de Rayleigh-Ritz para o caso verificado no item 3.31 desta dissertação é apresentado no Apêndice C.

2.3.4 Soluções práticas para placas finas

Conforme comentado anteriormente, as soluções analíticas para placas são complicadas e demandam muito trabalho. Sendo assim, alguns autores como Timoshenko e Krieger (1959) fornecem soluções para os principais casos práticos de placas em forma de tabelas, que são elaboradas em função das condições de contorno e das dimensões laterais da placa. A Fig. 2.12 apresenta a tabela para o caso de placa com carregamento transversal uniforme e condições de contorno de bordas simplesmente apoiadas, os demais casos de condições de contorno e carregamento podem ser encontrados na bibliografia de Timoshenko e Krieger (1959).

b/a	$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$(M_x)_{max} = \beta qa^2$	$(M_y)_{max} = \beta_1 qa^2$	$(Q_x)_{max} = \gamma qa$	$(Q_y)_{max} = \gamma_1 qa$	$(V_x)_{max} = \delta qa$	$(V_y)_{max} = \delta_1 qa$	$R = nqa^2$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1.0	0.00406	0.0479	0.0479	0.338	0.338	0.420	0.420	0.065
1.1	0.00485	0.0554	0.0493	0.360	0.347	0.440	0.440	0.070
1.2	0.00564	0.0627	0.0501	0.380	0.353	0.455	0.453	0.074
1.3	0.00638	0.0694	0.0503	0.397	0.357	0.468	0.464	0.079
1.4	0.00705	0.0755	0.0502	0.411	0.361	0.478	0.471	0.083
1.5	0.00772	0.0812	0.0498	0.424	0.363	0.486	0.480	0.085
1.6	0.00830	0.0862	0.0492	0.435	0.365	0.491	0.485	0.086
1.7	0.00883	0.0908	0.0486	0.444	0.367	0.496	0.488	0.088
1.8	0.00931	0.0948	0.0479	0.452	0.368	0.499	0.491	0.090
1.9	0.00974	0.0985	0.0471	0.459	0.369	0.502	0.494	0.091
2.0	0.01013	0.1017	0.0464	0.465	0.370	0.503	0.496	0.092
3.0	0.01223	0.1189	0.0406	0.493	0.372	0.505	0.498	0.093
4.0	0.01282	0.1235	0.0384	0.498	0.372	0.502	0.500	0.094
5.0	0.01297	0.1246	0.0375	0.500	0.372	0.501	0.500	0.095
∞	0.01302	0.1250	0.0375	0.500	0.372	0.500	0.500	0.095

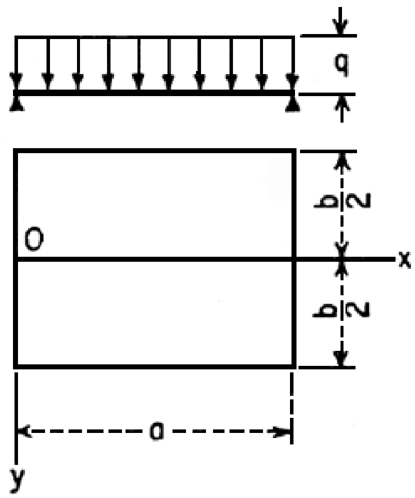


Figura 2.12 - Solução prática para placas simplesmente apoiadas
(Fonte: TIMOSHENKO E KRIEGER, 1959)

2.4 Teoria de placas com enrijecedores

As placas enrijecidas são compostas por enrijecedores normalmente ortogonais entre si e dispostos no sentido longitudinal e/ou transversal ao plano da placa conferindo maior rigidez ao conjunto. A associação entre placa e enrijecedores faz com que esses componentes estruturais combinem leveza e capacidade de carga, tornando-os altamente aplicáveis em diversas estruturas de engenharia, principalmente em estruturas navais onde são fundamentais. Segundo Salomon (2000) as principais abordagens para a solução de placas enrijecidas dividem-se em: modelo de placa ortotrópica, modelo de grelha e sistemas placa-enrijecedor.

O modelo de placa ortotrópica considera a substituição de uma placa enrijecida por uma placa sem enrijecedores com propriedades ortotrópicas em duas direções ortogonais. De acordo com Szilard (2004), de modo semelhante a teoria de placas finas de Kirchhoff, ao invés de apenas duas constantes elásticas (E e v) o modelo de placa ortotrópica assume quatro constantes, sendo E_x e E_y os módulos de elasticidade nas direções x e y, assim como v_x e v_y são os coeficientes de Poisson relativos a condição ortotrópica, ou seja, não estão relacionadas com as propriedades do material e sim correspondem a configuração geométrica do sistema estrutural. Sendo assim, para descrever as relações entre tensão-deformação ortotrópicas, têm-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - v_y \frac{\sigma_y}{E_y} \tag{2.73}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - v_x \frac{\sigma_x}{E_x} \tag{2.74}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{xy}} \tag{2.75}$$

onde G_{xy} é o módulo de cisalhamento expresso em função de E_x e E_y e pode ser escrito da seguinte forma:

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x\, E_y}}{2\left(1 + \sqrt{v_x\, v_y}\right)} \approx \frac{E}{2\left(1 + \sqrt{v_x\, v_y}\right)} \tag{2.78}$$

Solucionando as Eqs. (2.73), (2,74) e (2,75) em função de σ_x, σ_y e τ as seguintes equações que representam as relações tensão-deformação para condição ortotrópica de placas:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - v_x\, v_y}\left(\varepsilon_x + v_y \varepsilon_y\right) \tag{2.79}$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - v_x\, v_y}\left(\varepsilon_y + v_x \varepsilon_x\right) \tag{2.80}$$

$$\tau = G_{xy}\gamma \tag{2.81}$$

Expressando as Eq. (2.79), (2.80) e (2.81) em termos da deflexão transversal w e realizando o processo de integração análogo as Eqs. (2.25), (2.26) e (2.27) é possível obter as equações que representam os momentos:

$$m_x = D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{2.82}$$

$$m_y = D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \tag{2.83}$$

$$m_{xy} = -2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \tag{2.84}$$

onde D_x e D_y representam a rigidez flexural da placa ortotrópica nas direções x e y, bem como, D_t representa a rigidez à torção, conforme apresentado abaixo:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \tag{2.85}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1\text{-}\nu_x \nu_y)} \tag{2.86}$$

$$D_t = G_{xy} \frac{h^3}{12} \tag{2.87}$$

Por fim substituindo as Eqs. (2.82), (2.82) e (2.57) na Eq. (2.8), é possível obter a equação governante para placas ortotrópicas, também conhecida como equação de Huber, o qual idealizou a teoria:

$$D_x \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \, \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = p_z(x,y) \tag{2.88}$$

onde B é a rigidez torcional efetiva, dada pela seguinte equação:

$$B = \frac{1}{2} \left(\nu_y D_x + \nu_x D_y + 4D_t \right) \tag{2.89}$$

Uma segunda abordagem para o problema de placas ortotrópicas trata do modelo de grelha. De acordo com Salomon (2000) esse modelo idealiza a placa enrijecida como uma grelha que supõe uma largura efetiva com variação de 50% a 80% do espaçamento entre os enrijecedores (ver Fig.2.13). A largura efetiva é utilizada em conjunto com o enrijecedor para os cálculos das rigidezes de flexão e torção, bem como os momentos de inércia nas direções transversal e horizontal. Esse modelo de análise normalmente conduz a erros de 5% para as deflexões, podendo eventualmente atingir a ordem de 10%.

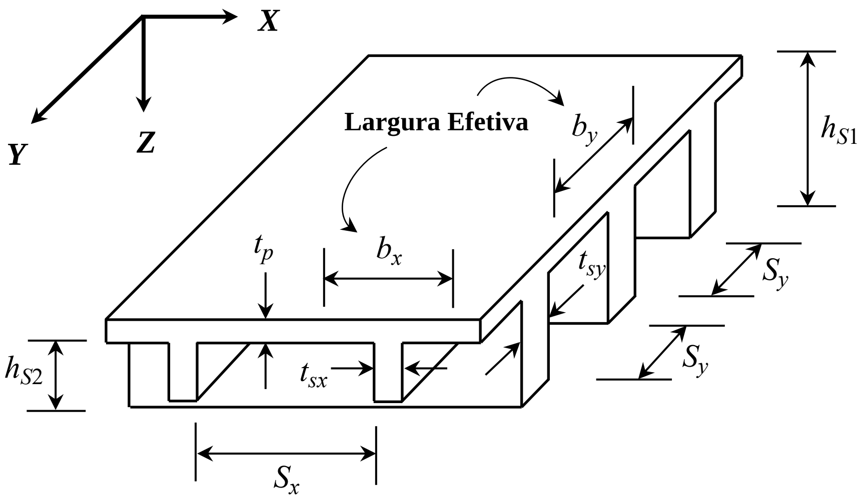


Figura 2.13 - Placa ortotrópica

Por fim, uma terceira abordagem para placas enrijecidas considera o sistema estrutural como uma placa devidamente conectada ao enrijecedor, representando a verdadeira natureza do problema, ou pelo menos aproximando-se o máximo possível dela. Entretanto as implicações matemáticas relativas a esse tipo de abordagem são de difícil solução analítica. O surgimento dos computadores digitais e possibilidade de reproduzir modelos numéricos com maior precisão motivou a aplicação desta metodologia. Entre os métodos numéricos mais utilizados destaca-se o MEF, como uma ferramenta capaz de reproduzir modelos numéricos de maneira bastante precisa (SOLOMON, 2000).

3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

O surgimento da computação de alta performance trouxe grandes avanços para a engenharia e a ciência moderna. Fenômenos de difícil solução matemática hoje são reproduzíveis através de modelos computacionais. Em caráter multidisciplinar, a modelagem computacional é aplicável em diversas áreas: ciências exatas, biológicas, humanas, ambientais, sendo amplamente aplicável em engenharia.

Segundo Steinhauser (2008), a simulação computacional tornou-se uma ferramenta indispensável, tanto para os cientistas, quanto para os engenheiros, permitindo testar hipóteses e extrapolar resultados obtidos, o que muitas vezes é inviável de ser realizado em laboratório, do ponto de vista de custo e segurança.

Paralelamente ao avanço computacional, engenheiros, cientistas e matemáticos têm evoluído a aplicação de métodos numéricos para a solução de sistemas regidos por equações complexas. O Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), por exemplo, estão disponíveis em softwares comerciais e são utilizados em diversas aplicações industriais para desenvolvimento e otimização do processamento e transformação de materiais (RAPPAZ et al., 2008).

Em análise estrutural, as equações diferenciais que descrevem o comportamento de placas com e sem enrijecedores são de difícil solução analítica, sendo limitadas a placas homogêneas com geometria e condições de contorno simplificadas. Dessa forma, faz-se necessário a utilização de técnicas capazes de lidar com geometrias complexas, por exemplo placas enrijecidas, assim como, diferentes condições de contorno de carregamento. Os métodos numéricos cumprem esse papel, fornecendo soluções aproximadas com alto nível de precisão, para esses problemas de difícil solução matemática (SZILARD, 2004).

Dentre os métodos numéricos existentes, o MEF destaca-se quando o assunto é comportamento mecânicos de estruturas. Sendo assim, nesta dissertação análise geométrica de placas enrijecidas sob flexão foi realizada utilizando o software ANSYS® *Mechanical APDL*, baseado no MEF.

3.1 Método dos Elementos Finitos

Na década de 50 os trabalhos do professor John Argyris do Imperial College de Londres e de um grupo de engenheiros da empresa de desenvolvimento de aeronaves Boeing liderados pelo professor Ray W. Clough, apresentaram o Métodos dos Elementos Finitos (MEF) ao cenário internacional. Porém, o trabalho de Richard Courant em 1943, sobre o problema de torção de Saint-

Venant foi considerado o pioneiro do método. Entretanto, o estudo não teve a devida repercussão na época, devido à falta de recursos computacionais para sua implementação (VAZ, 2011).

Para compreender o comportamento dos sistemas, é próprio da mente humana subdividi-los em componentes individuais ou elementos, para que assim, partindo do entendimento do comportamento de cada elemento, seja possível compreender o comportamento do conjunto (FILHO, 2000).

A decomposição do domínio contínuo em um domínio discreto composto por elementos de tamanho finito é a base do MEF. Os elementos conectam-se entre si por pontos nodais, formando uma rede de elementos denominada malha (Fig. 3.1). O campo de deslocamentos de cada elemento é arbitrado em função dos deslocamentos nodais, sendo assim, a interação dos componentes de tensão entre elementos adjacentes é substituída pela interação de forças nodais entre os elementos. Desse modo, o modelo contínuo é substituído pelo equilíbrio de cada elemento finito, trocando as equações diferenciais por equações algébricas em cada elemento (MADENCI E GUVEN, 2006; SORIANO, 2003).

Inicialmente, o MEF foi associado a aplicações estruturais, como análise linear de estruturas, vibrações livres e forçadas, análise não-linear de grandes e pequenas deformações, plasticidade, instabilidade estrutural e etc. Porém, sua aplicação vai além da análise estrutural, podendo ter aplicações generalizadas, tornando-se uma excelente ferramenta em análises físicas e matemáticas, tais como: transferência de calor, escoamento de fluidos, ondas eletromagnéticas e hidrodinâmica (FILHO, 2000).

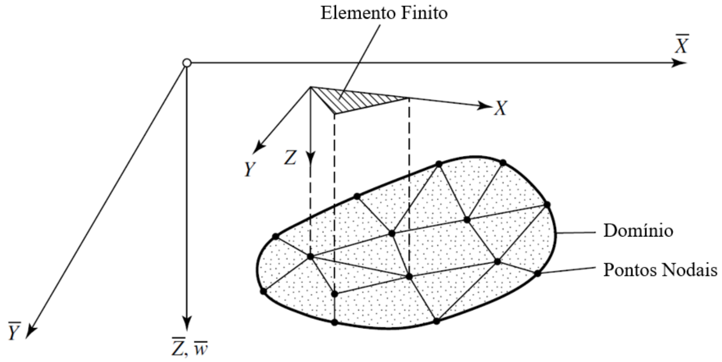


Figura 3.1 - Discretização de domínio por elementos finitos
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

Dependendo das características físicas e geométricas do problema, o domínio pode ser discretizado em elementos de linha, área e volume (Fig. 3.2). Cada elemento é identificado por um número e definido por uma sequência de nós globais, normalmente disposta em sentido anti-horário (MADENCI E GUVEN, 2006).

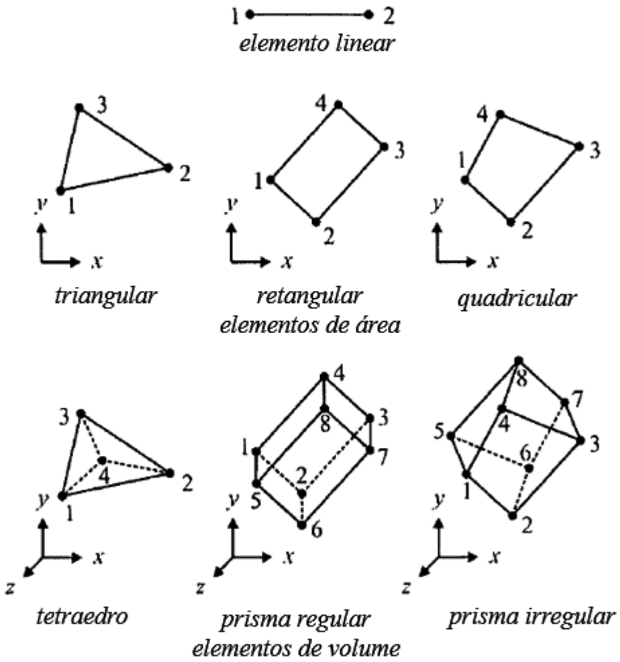


Figura 3.2 - Tipos de elementos finitos
(Fonte: Adaptada de MADENCI E GUVEN, 2006)

Segundo Szilard (2004) a aplicação do MEF deve seguir os seguintes passos:

1. Discretização do domínio contínuo,
2. Determinação das funções de interpolação adequadas,
3. Formulação do elemento,
4. Aplicação dos carregamentos e das condições de contorno,
5. Montagem do sistema discretizado,
6. Solução do sistema de equações resultantes, e
7. Cálculo das tensões resultantes.

De modo geral, o MEF requer que a geometria de um sistema contínuo seja definida por um número de pontos no espaço, chamados de nós. Em cada nó são atribuídos um conjunto de graus de liberdade (deslocamentos, temperatura, tensões, etc.) que podem variar conforme a base de dados de entrada do sistema. Os nós conectam-se por elementos que definem as interações matemáticas dos graus de liberdade. Sendo assim, todos os elementos são combinados para criar um sistema de equações que representa o modelo analisado. Por fim, ao solucionar essas equações, obtém-se as informações necessárias sobre o seu comportamento (THOMPSON et al., 2017).

3.1.1 Análise linear estática

Conforme Marinho (2002), o objetivo principal da análise estática de estruturas é quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos que surgem nos sistemas estruturais quando submetidos a um carregamento arbitrário, desprezando o efeito das forças de amortecimento e inércia.

Especificamente para a análise estática linear, as não-linearidades são desconsideradas, por exemplo, plasticidade, grandes deformações e elementos de contato.

De acordo com Madenci e Guven (2006), a análise estática linear utilizando o MEF, necessita da montagem de um sistema global de equações composto pelas matrizes características do elemento e pelo vetor de forças:

$$[K]\,.\{u\} = \{F\} \tag{3.1}$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global; $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos nodais desconhecidos e $\{F\}$ representa o vetor de cargas externas.

Para compreender a montagem do sistema apresentado na Eq. (3.1) é apresentado a seguir o exemplo adaptado de Okumoto et al. (2009) que trata de um elemento tipo mola unidimensional (Fig. 3.3).

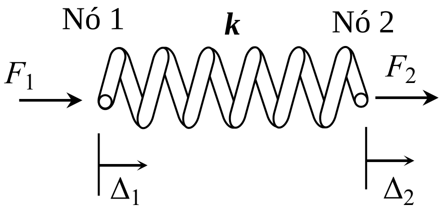


Figura 3.3 - Elemento unidimensional tipo mola

Na Fig. 3.3, F_1 e F_2 são as forças externas aplicadas ao elemento, os deslocamentos dos nós são Δ_1 e Δ_2, e a constante elástica da mola é k.

Para montagem da matriz de rigidez do elemento, foram explorados os 2 graus de liberdade do problema, que são os deslocamentos horizontais possíveis em cada um dos nós. Assim, foi estabelecido um deslocamento unitário em cada um, mantendo o outro fixo, conforme mostra a Fig. 3.4. Dessa forma, f_1 é a força necessária para produzir um deslocamento unitário no nó 1, em contrapartida para manter o sistema em equilíbrio surge a força f_2. O mesmo acontece ao aplicar um deslocamento unitário ao nó 2, a força f_2 implica o surgimento da força de equilíbrio f_1. Essas forças são representadas pela Eq. (3.2). Uma vez que o deslocamento é unitário $u = 1$, pode-se considerar as forças conforme apresentadas na Eq. (3.3).

$$f_1 = f_2 = k.u \tag{3.2}$$

$$f_1 = f_2 = k \tag{3.3}$$

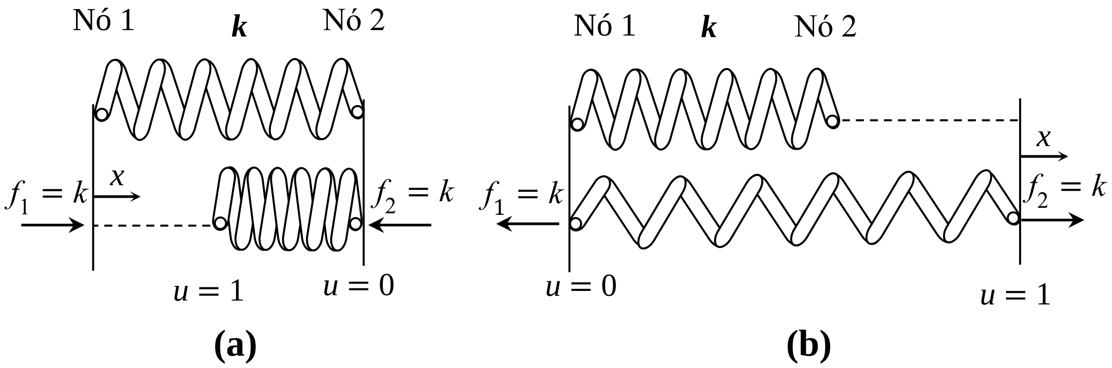


Figura 3.4 - (a) Deslocamento unitário do nó 1; (b) Deslocamento unitário do nó 2

A representação da matriz de rigidez fica da seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Os coeficientes da primeira coluna da matriz estão relacionados com o nó 1, enquanto os da segunda coluna com o nó 2.

As forças externas F_1 e F_2 têm relação direta com os deslocamentos, conforme mostram as Eqs. (3.5) e (3.6):

$$F_1 = -k(\Delta_2 - \Delta_1) \tag{3.5}$$

$$F_2 = k(\Delta_2 - \Delta_1) \tag{3.6}$$

A matriz de rigidez global do elemento fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

3.2 Modelagem computacional com ANSYS®

Os programas de elementos finitos comerciais fornecem uma coleção extensa de ferramentas para o projeto, análise e otimização de sistemas complexos de engenharia. O ANSYS® é um software comercial de simulação numérica desenvolvido pela ANSYS® *Inc.* Atualmente a empresa oferece uma grande variedade de produtos de engenharia assistidos por computador, tanto para uso geral, quanto para demandas específicas, como aplicações em eletrônicos, máquinas e estruturas *offshore.* (THOMPSON et al., 2017).

O ANSYS® *Mechanical APDL* utilizado nessa dissertação, permite que sejam realizadas análises estruturais estáticas lineares e não lineares, dinâmicas e de flambagem. Conforme Thompson et al. (2017) a linguagem do ANSYS® *Mechanical APDL* (*Parametric Design Language*) é o recurso mais importante do software. Através dela é possível definir algumas ou todas as partes do modelo (geometria, propriedades do material, cargas, etc.) como parâmetros, de tal forma que criar ou resolver uma nova variação do modelo parametrizado é simples: basta alterar os valores e executar o modelo novamente.

3.2.1 Elemento SHELL281

O elemento SHELL281 está disponível da biblioteca de elementos do ANSYS®, é ideal para modelagem de placa finas e moderadamente espessas. O elemento possui a versão quadrilátera com 8 nós e a versão triangular com 6 nós. Cada um dos nós possui 6 graus de liberdade, sendo três translações nas direções *x*, *y* e *z* e três rotações em torno desses mesmos eixos (Fig. 3.5). Esse elemento usa funções de interpolação do tipo quadrática e é capaz de realizar análises de plasticidade, grandes e pequenas deformações. Ainda, cabe ressaltar que o elemento SHELL281 assume que a tensão normal ao plano varia linearmente através da espessura, assim como, a tensão de cisalhamento é considerada constante ao longo da espessura.

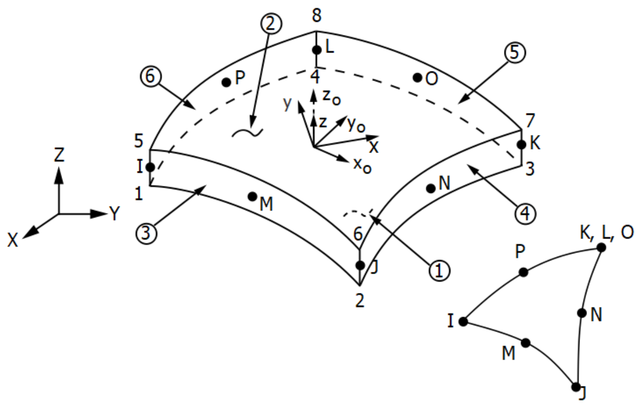


Figura 3.5 - Elemento SHELL281
(Fonte: ANSYS, 2012)

3.3 Verificação do modelo computacional

Ao utilizar modelos computacionais para reproduzir o comportamento de problemas físicos reais faz-se necessário o procedimento de verificação do modelo. Esse processo legitima a precisão do modelo computacional, garantindo que a solução apresentada seja a mais fiel possível ao modelo físico real. A verificação pode ser realizada comparando os resultados do modelo analisado com soluções analíticas quando existentes, ou então, com outros modelos apresentados em estudos anteriores.

Nesse estudo, foram reproduzidos através do software ANSYS® modelos de placas com e sem enrijecedores apresentados em estudos já publicados, utilizando o elemento SHELL281 na versão triangular. A opção de utilizar a versão triangular deve-se ao fato de que as geometrias das placas com enrijecedores analisadas nesse estudo são de natureza complexa, de modo que, ao utilizar um elemento triangular foi possível alcançar maior uniformidade na discretização dos modelos computacionais.

Em cada verificação foi realizado um teste de convergência de malha, onde o tamanho dos elementos finitos foi reduzido sucessivamente a cada malha analisada, com o intuito de definir a mais adequada, que conduzisse a um resultado preciso com o menor número possível de elementos na malha. Conforme explica Troina (2017), para que a malha não interfira na magnitude da solução apresentada pelo modelo computacional, um número mínimo de elementos finitos deve ser respeitado, de modo que, o modelo discreto consiga aproximar-se o mais fiel possível do modelo contínuo.

É importante ressaltar que um número insuficiente de elementos finitos pode acarretar em resultados imprecisos. Em contrapartida, um número excessivo de elementos finitos pode ser desnecessário. Pois uma vez atingida a convergência de valores, a utilização de malhas refinadas além deste ponto, torna-se inviável em função de tempo e custo computacional.

Em cada teste de convergência foram adotadas seis malhas (M_1, M_2,M_3, M_4, M_5 e M_6), sendo o critério de escolha da discretização que conduz a uma solução independente de malha, a menor diferença percentual relativa entre malhas sucessivas.

3.3.1 Placa retangular simplesmente apoiada sem enrijecedores

O primeiro modelo verificado consistiu em uma placa retangular sem enrijecedores com condição de contorno de bordas simplesmente apoiadas (Fig. 3.6). O material possui módulo de elasticidade E = 210 GPa e coeficiente de Poisson ν = 0,3. O carregamento transversal uniforme aplicado foi de 10 kN/m².

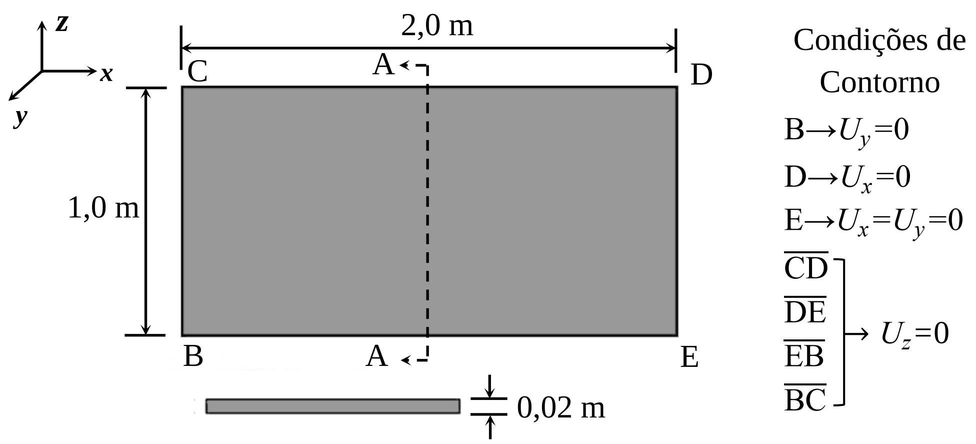


Figura 3.6 - Placa sem enrijecedores

Para definir o tamanho adequado dos elementos finitos que compõe a malha utilizada para essa verificação, foi realizado um teste de convergência de malha utilizando seis configurações de malhas. Em cada uma delas foi identificado o deslocamento central na placa U_z, conforme pode ser visualizado na Fig. 3.7.

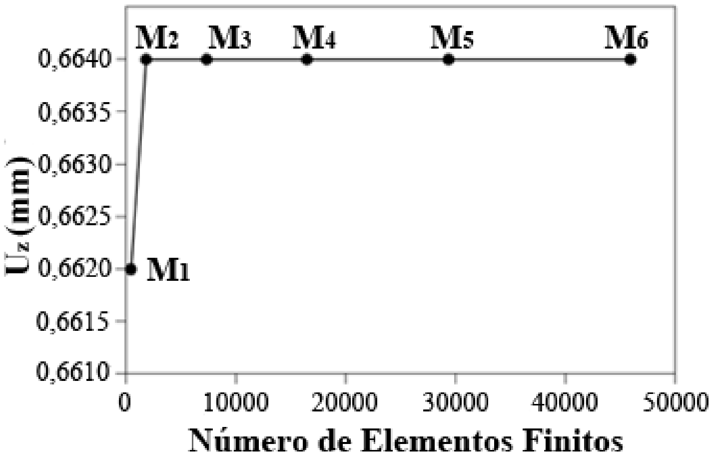


Figura 3.7 - Teste de convergência de malha para placa sem enrijecedores

De acordo com o critério de escolha da malha independente, para esse modelo foi adotada a malha M_2 com elementos de 50 mm, a qual não apresentou nenhuma diferença relativa em comparação com a malha posterior. Entretanto, para garantir a precisão do resultado apresentado, acrescentou-se um refinamento de 10% à malha independente M_2. Sendo assim, a malha final foi composta por elementos finitos de 45 mm, totalizando 2250 elementos. A Fig. 3.8 apresenta a configuração deformada da placa.

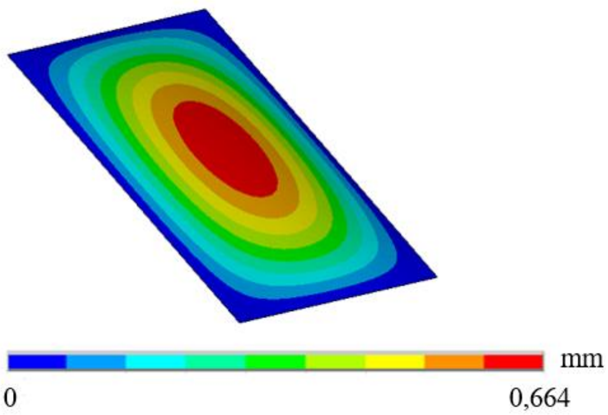


Figura 3.8 - Configuração deformada para placa sem enrijecedores

O resultado obtido nessa verificação utilizando o elemento SHELL281 na versão triangular foi comparado com os resultados obtidos com a solução prática de Timoshenko e Krieger (1959) (ver Fig. 2.12), pelo método de Navier (ver Apêndice B), assim como, pela solução de energia através do método de Rayleigh-Ritz (Ver Apêndice C) e com os resultados encontrados por Troina (2017) utilizando o elemento tridimensional SOLID95 nas versões tetraédrica e hexaédrica, apresentados na

Tab. 3.1. Percebe-se que as diferenças percentuais entre as deflexões centrais são menores do que 1%, verificando o modelo.

Tabela 3.1 - Comparação de resultados para placa sem enrijecedores

	U_z (mm)	Diferença (%)
SHELL281 Triangular	0,664	--
Timoshenko e Krieger (1959)	0,658	0,90
Navier	0,658	0,90
Rayleigh-Ritz	0,669	0,75
Troina (2017) – SOLID95 Tetraédrico	0,663	0,15
Troina (2017) – SOLID95 Hexaédrico	0,662	0,30

3.3.2 Placa retangular com dois enrijecedores ortogonais

O próximo modelo verificado foi uma placa retangular com dois enrijecedores ortogonais dispostos no centro da placa (Fig. 3.9). Esse modelo foi apresentado nos trabalhos de Rossow e Ibrahimkhail (1978) e Troina (2017). A carga transversal uniforme aplicada foi de 0,006895 kN/cm² e o material da placa possui módulo de elasticidade E = 20.684,27 kN/cm² com coeficiente de Poisson de ν = 0,3 e condição de contorno de bordas simplesmente apoiadas.

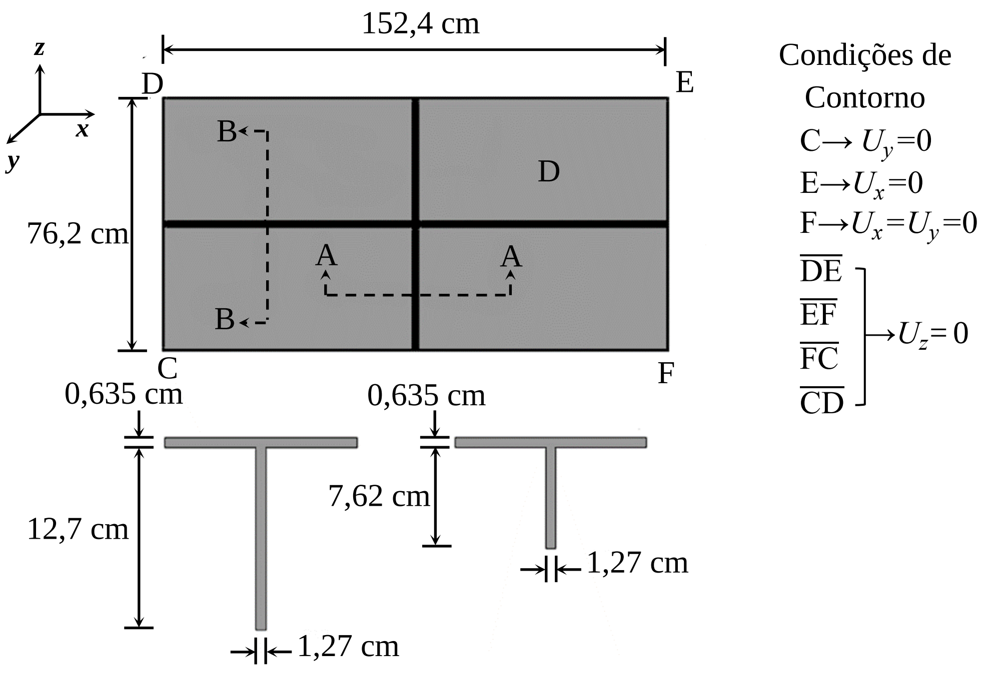


Figura 3.9 - Placa retangular com dois enrijecedores

Considerando a deflexão central da placa com enrijecedores e seguindo critério de escolha de solução independente de malha, foi adotada a malha M_5 com elementos de 9,525 mm, cuja diferença percentual foi de 0,007 % em comparação com a malha seguinte (M_6), com acréscimo de refinamento de 10% para assegurar uma solução mais precisa. Sendo assim, a malha adotada para essa verificação foi composta por elementos triangulares de 8,572 mm, totalizando 37.940 elementos. O resultado do teste de convergência para o modelo em questão pode ser visualizado na Fig. 3.10.

Percebe-se que diferentemente do que aconteceu com o caso de placa sem enrijecedores verificado anteriormente, para placas enrijecidas são necessárias malhas muito mais refinadas para atingir um valor de convergência satisfatório. Isso ocorre devido à complexidade geométrica da placa com enrijecedores do caso aqui analisado. A configuração deformada da placa resultante da malha independente é apresentada na Fig. 3.11.

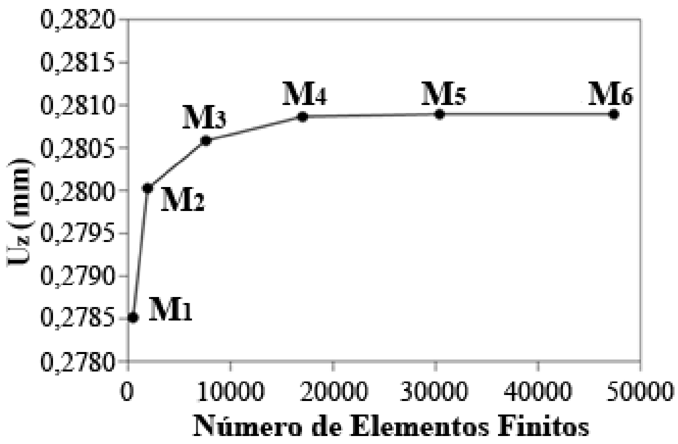


Figura 3.10 - Teste de convergência de malha para placa com enrijecedores ortogonais

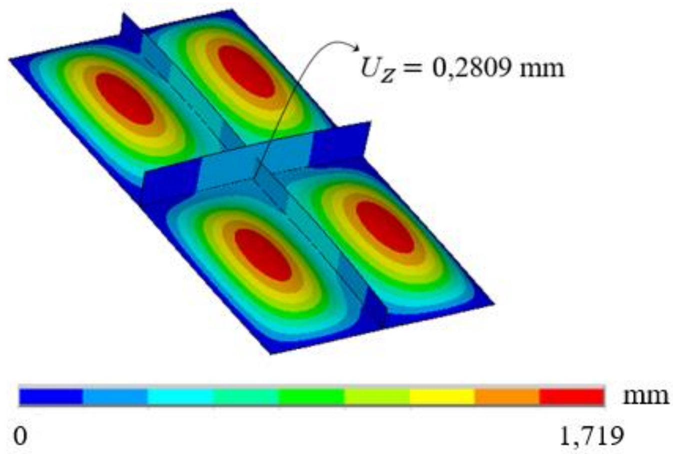


Figura 3.11 - Configuração deformada para placa com enrijecedores ortogonais

Conforme os resultados apresentados na Tab. 3.2, nota-se uma diferença significativa entre o resultado obtido e o resultado apresentado por Rossow e Ibrahimkhail (1978). Isso se justifica considerando a precisão do modelo atual, que devido à capacidade computacional disponível, possibilita um maior refinamento de malha na discretização do domínio computacional apresentando. Informações detalhadas sobre o trabalho de Rossow e Ibrahimkhail (1978) podem ser obtidas consultando o artigo referenciado no capítulo 7 (Referências Bibliográficas).

Por sua vez, comparando com o resultado obtido por Troina (2017) que utilizou o elemento tridimensional SOLID95, nas versões tetraédrica e hexaédrica, obteve-se uma boa concordância. Essa pequena diferença pode ser explicada devido ao elemento SOLID95 considerar todas as componentes do estado de tensões e deformações do sólido tridimensional, enquanto o SHELL281, por ser bidimensional, sofre simplificações relativas ao estado plano de tensões e deformações. Sendo assim, pode-se considerar o modelo proposto como verificado.

Tabela 3.2 - Comparação de resultados para placa retangular com enrijecedores ortogonais

	U_z (mm)	**Diferença (%)**
SHELL281 Triangular	0,28090	---
Rossow e Ibrahimkhail (1978)	0,22450	20,070
Troina (2017) – SOLID95 Tetraédrico	0,27820	0,961
Troina (2017) – SOLID95 Hexaédrico	0,27810	0,996

3.3.3 Placa retangular com um enrijecedor central

A última verificação analisou uma placa retangular com um enrijecedor longitudinal sujeita a carga transversal uniforme de 10 kN/m² para diferentes alturas do enrijecedor h_s conforme apresentado na Fig. 3.12, visando avaliar o comportamento de sua deflexão central.

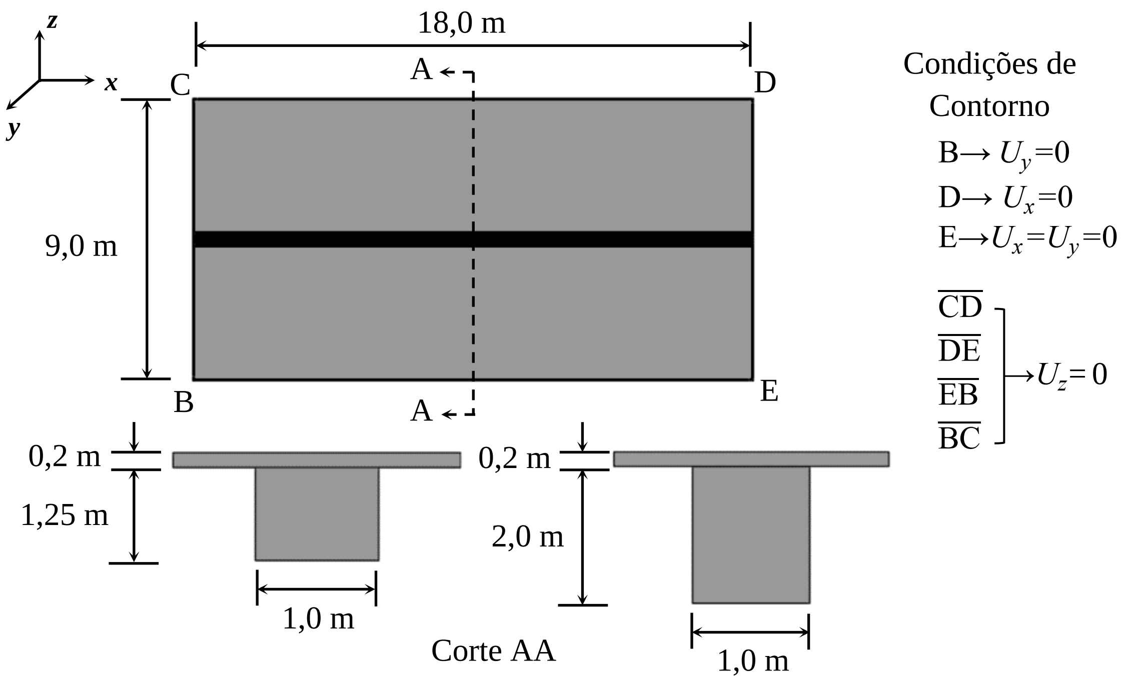


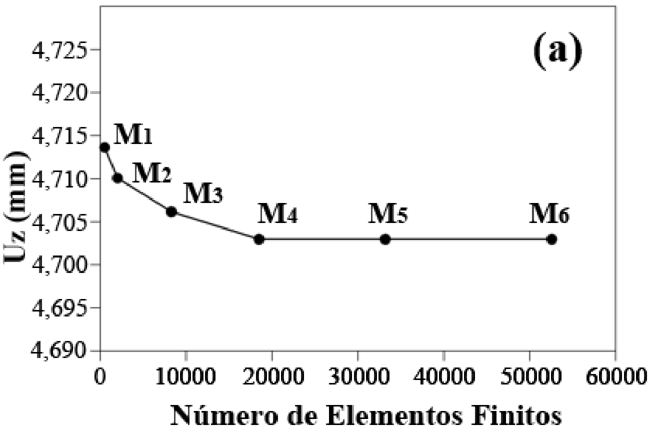
Figura 3.12 - Placa retangular com diferentes alturas de enrijecedores

As condições de contorno foram de bordas simplesmente apoiadas. O material da placa possui módulo de elasticidade E = 3,0 x 10^7 kN/m² e coeficiente de Poisson ν = 0,154.

Um teste de convergência de malha foi realizado para as duas alturas de enrijecedores h_s consideradas para a verificação deste modelo, conforme a Fig. 3.13. Para ambos os casos foram adotadas as malhas M_4 com elementos de 0,15 m, as quais não apresentaram diferença em relação à malha posterior (M_5). Para os dois casos foi adicionado um aumento de 10% no refinamento da malha M_4 para garantir uma margem de precisão. Dessa forma, para h_s= 1,25 m a malha foi composta por 23.020 elementos finitos triangulares e para h_s= 2,00 m a malha totalizou 24.900 elementos finitos também triangulares.

Os resultados obtidos com o elemento SHELL281 foram comparados com os resultados apresentados por Silva (2010) e por Troina (2017) utilizando o MEF. Silva (2010) utilizou os elementos bidimensionais BEAM44 do tipo viga para a modelagem do enrijecedor e SHELL93 para modelar a placa. Enquanto Troina (2017), fez uso do elemento tridimensional SOLID95 nas versões tetraédrica e hexaédrica tanto para o enrijecedor quanto para a placa.

Pode-se observar uma boa concordância entre os resultados, conforme mostra a Tab. 3.3. As diferenças quanto aos resultados de Silva (2010) podem ser compreendidas devido ao uso de malhas pouco refinadas (220 elementos) em comparação com as malhas adotadas para os modelos dessa verificação utilizando o elemento SHELL281. Entretanto as diferenças quanto aos resultados de Troina (2017), conforme explicado no modelo verificado anteriormente, deve-se às simplificações inerentes ao elemento bidimensional SHEEL281 em comparação com o elemento tridimensional SOLID95. Sendo assim pode-se considerar o modelo como verificado. As configurações deformadas das placas com as malhas independentes podem ser observadas na Fig. 3.14.



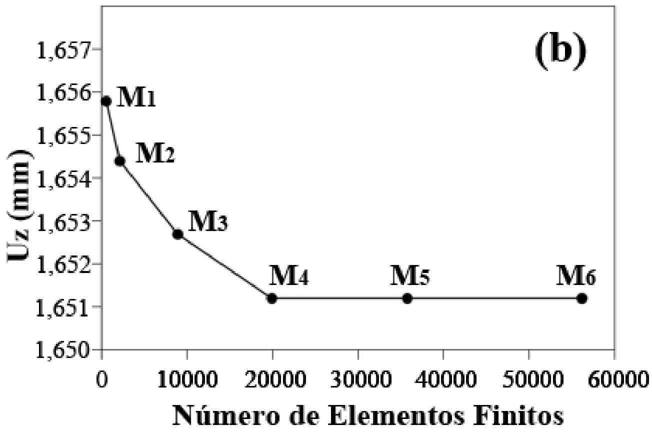


Figura 3.13 - Teste de convergência de malha: (a) Placa com h_s= 1,25 m; (b) Placa com h_s= 2,00 m

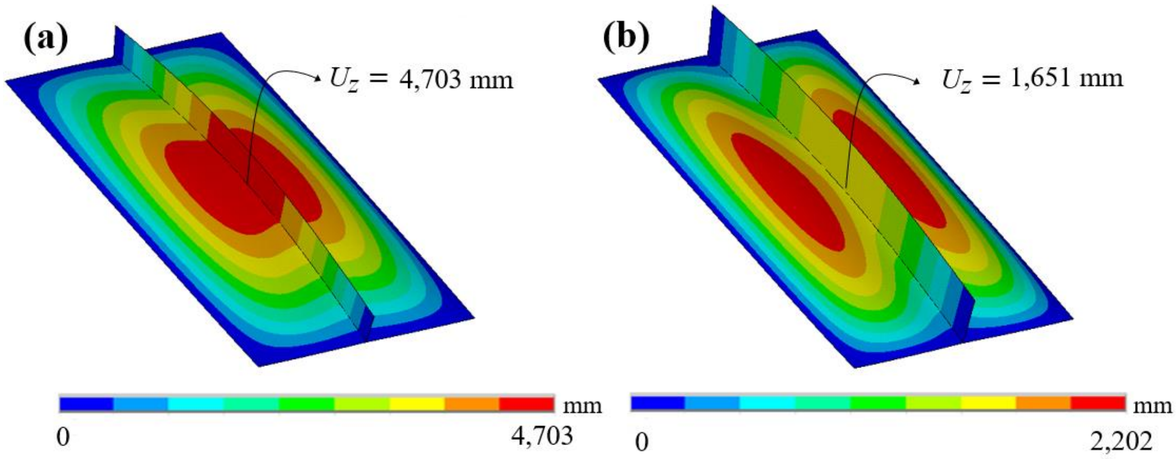


Figura 3.14 - Configuração deformada: (a) Placa com h_s= 1,25 m; (b) Placa com h_s= 2,00 m

Tabela 3.3 - Comparação de resultados para placa retangular com um enrijecedor central

		U_z (mm)	Diferença (%)
h_s = 1,25 m	SHELL281 Triangular	4,703	---
	Silva (2010)	4,500	4,30
	Troina (2017) – SOLID95 Tetraédrico	4,690	0,30
	Troina (2017) – SOLID95 Hexaédrico	4,690	0,30
h_s = 2,00 m	SHELL281 Triangular	1,651	---
	Silva (2010)	1,600	3,10
	Troina (2017) – SOLID95 Tetraédrico	1,670	2,90
	Troina (2017) – SOLID95 Hexaédrico	1,670	2,90

4 TEORIA CONSTRUTAL

A Teoria Construtal foi proposta por Adrian Bejan, partindo de suas observações sobre a similaridade das estruturas em forma de árvore *"treelike structures"* existentes na natureza. Segundo Bejan e Zane (2012) o mundo não foi formado por acidentes aleatórios, acaso ou destino, por trás da grande diversidade existente, está um fluxo contínuo de padrões previsíveis.

O fenômeno que gera as formas geométricas que ocorrem na natureza é governado por um princípio físico, a Lei Construtal. A ideia que fundamenta essa lei diz que tudo que se move é um sistema de fluxo, seja animado ou inanimado. Todos os sistemas de fluxos geram forma e estrutura no tempo, a fim de facilitar o movimento em um cenário repleto de resistência. As formas que vemos na natureza não resultam do acaso, surgem de maneira natural e espontânea, pois aumentam o acesso ao fluxo no tempo (BEJAN E ZANE, 2012).

Cientificamente, Bejan e Zane (2012) definem a Lei Construtal como:

"Para que um sistema de fluxo de tamanho finito persista no tempo (para sobreviver), sua configuração deve evoluir de modo a facilitar o acesso às correntes que fluem através dele."

De acordo com Bejan e Lorente (2008) a Teoria Construtal é a visão mental de que a geração das estruturas de fluxo que existem em toda a parte na natureza (bacias hidrográficas, pulmões, circulação atmosférica, tecidos vascularizados, etc.) pode ser fundamentada com base em um princípio evolucionário de aumento do acesso ao fluxo no tempo. A geometria é resultado do movimento persistente, da contorção e do mecanismo pelo qual o sistema de fluxo alcança o objetivo global sob restrições globais. A Fig. 4.1 apresenta a manifestação da Lei Construtal em dois sistemas de fluxos distintos, à esquerda a bacia hidrográfica de um rio e à direita um pulmão humano.

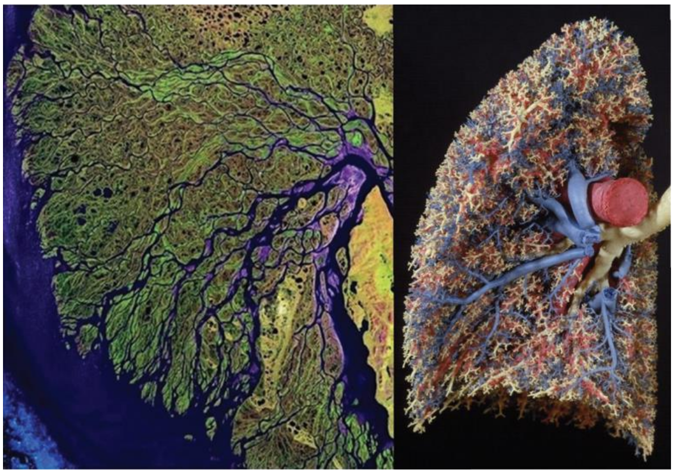


Figura 4.1 - Sistemas de Fluxo
(Fonte: BEJAN E ZANE, 2012)

A manifestação da Lei Construtal mostra que em um sistema de fluxo, as melhores configurações que conectam um componente aos demais que compõe a geometria, normalmente são em formas ramificadas, razão pela qual destacam-se as arquiteturas de fluxo dendríticas. As árvores são sistemas de fluxo com capacidade de fazer conexões entre pontos discretos e contínuos, ou seja, entre um ponto e uma infinidade de pontos, entre uma área e um ponto, entre um volume e um ponto e uma curva e um ponto, permitindo que o fluxo emane em qualquer direção, por exemplo, volume-para-ponto e ponto-para-volume (BEJAN E LORENTE, 2008).

Os seres humanos uma vez que fazem parte da natureza, também são regidos por essa lei, de modo que, os sistemas de fluxo que são construídos e que interligam pontos ao espaço ou pontos a outros pontos também tendem a ter estruturas ramificadas. Por exemplo, rotas de transporte são sistemas de fluxo utilizados para mover pessoas e mercadorias, esses sistemas possuem calçadas e vias menores que interligam o fluxo a vias e rodovias maiores. O mundo engenhoso que existe para permitir a movimentação das pessoas com mais facilidade não copia a natureza, é uma manifestação dela (BEJAN E ZANE, 2012).

O corpo humano também apresenta sistemas de fluxo com arquiteturas ramificadas que são tratadas do ponto de vista da Lei Construtal, como os pulmões, rins, tecidos vascularizados e o sistema nervoso (Bejan e Lorente, 2006). A manifestação da Lei Construtal, segundo Bejan e Lorente (2013) une o animado ao inanimado ao longo de uma gama extremamente grande de escalas, que vai desde a configuração de uma árvore até um floco de neve, ou ainda de um animal até a configuração ramificada da bacia de um rio.

A Lei Construtal nem sempre resulta em arquitetura com forma ramificada, Bejan e Zane (2012) trazem o exemplo de troncos flutuando em um lago ou *icebergs* no mar, os quais se orientam perpendicularmente ao vento para facilitar a transferência de movimento do corpo de ar para o corpo de água. Outro exemplo, é a estrutura dos animais que evoluíram com o intuito de mover sua massa corporal de modo mais eficiente, ou seja, cobrir maiores distâncias por unidade de energia útil. Essa evolução inclui o tamanho dos órgãos, o formato dos ossos, o ritmo da respiração pulmonar, o ritmo das batidas do coração, o movimento da cauda, das pernas e das assas batendo.

Além do mais, Bejan e Lorente (2008) ressaltam que estruturas em forma de árvore (ramificadas) não são as únicas descobertas através da Lei Construtal, ela também prevê como desenvolver espaçamentos em diferentes escalas que são distribuídos de maneira não uniforme em sistemas de fluxo, estruturas de fluxo com mais de um objetivo e ainda estruturas que devem executar funções de suporte mecânico.

Bejan e Zane (2012) explicam que os sistemas de fluxo, embora bem estruturados, não conseguem eliminar as imperfeições (resistências), porém, podem reduzir seu efeito global através de uma redistribuição eficiente dessas imperfeições, o que só pode ser alcançado com a configuração e reconfiguração dos componentes do sistema, tornando-o cada vez menos imperfeito e assim permitindo maior acesso ao fluxo.

Reis (2006) afirma que a Teoria Construtal é uma ferramenta útil para a descrição de sistemas de fluxo complexos e sua aplicação abre possibilidades para pesquisadores de diferentes áreas, como engenharia, ciências naturais e sociais. Essa teoria propõe ver as árvores e o corpo humano como máquinas sujeitas às restrições constituídas com o objetivo de obter máxima eficiência.

Para a análise de estruturas mecânicas, a Lei Construtal é aplicada de modo semelhante aos demais sistemas de fluxo, uma vez que, quando solicitados a um carregamento os arranjos mecânicos funcionam como redes através das quais as tensões fluem entre seus componentes. A partir desse princípio, a estrutura sólida resultante com melhor desempenho é aquela que apresenta menores áreas de concentração de tensões. Esse resultado só pode ser atingido com a distribuição uniforme das tensões máximas através do material disponível, evidenciando que esse princípio é decorrente da Lei Construtal (BEJAN E LORENTE, 2008).

4.1 Método Design Construtal

O método Design Construtal é o modo pelo qual se aplica a Lei Construtal em situações práticas. O método é sobre a geração da arquitetura de fluxo e guia o projetista no tempo em direção às arquiteturas que apresentam melhor desempenho para as condições de acesso ao fluxo, seja ele, um fluido, calor ou tensões (REIS, 2006; BEJAN E LORENTE, 2008).

A base do método Design Construtal segue o princípio de restrições e objetivos. O desempenho de um sistema é global e carrega consigo restrições que incluem o espaço designado ao sistema, os materiais e componentes disponíveis, faixas limites de temperatura, pressão ou tensão. Uma vez definidas as restrições e os indicadores de performance do sistema (minimização de deflexões), alguns parâmetros e razões geométricas são alterados com o objetivo de avaliar sua influência sobre o indicador de performance. Sendo assim, o projetista reúne todos os componentes e otimiza o arranjo, de modo a desenvolver a arquitetura de fluxo que alcance melhor desempenho (REIS, 2006; DOS SANTOS et al., 2017).

O método do Design Construtal por si só não é um método de otimização e sim uma ferramenta para a definição do espaço de busca, onde os graus de liberdade são manipulados dentro do conjunto de restrições na busca por arranjos geométricos que permitam o melhor desempenho possível do sistema. Nesta dissertação, o método foi aplicado com o intuito de analisar geometricamente placas metálicas finas enrijecidas submetidas a carregamento transversal uniforme visando a redução das deflexões centrais e máximas. Dentro do conjunto de restrições imposto pelo volume constante de material e pelas dimensões da placa foram explorados os graus de liberdade referentes à orientação de enrijecedores retangulares no plano da placa, o número de enrijecedores e razão entre sua altura e a espessura. Além disso, foram analisados enrijecedores trapezoidais sob a variação do número de enrijecedores.

4.2 Método de Busca Exaustiva

Neste estudo, o Design Construtal foi associado à uma técnica de Busca Exaustiva, segundo Khoury e Harder (2016) esse é um método estocástico útil e funcional que por sua simplicidade torna-o um bom método para o estudo de análise geométrica. O método de Busca Exaustiva refere-se a qualquer sequência de ações de busca que analisa sistematicamente soluções sucessivas até encontrar uma solução aceitável ou que atinja o número máximo de tentativas predefinido.

Khoury e Harder (2016) acrescentam que embora o método da Busca Exaustiva pareça pouco sofisticado, possibilita a vantagem de estudar qualquer configuração geométrica, mesmo as que possuem comportamento complexo e irregular. Além disso, o método não faz suposições sobre as geometrias estudadas e não requer um ponto de partida específico. Portanto, a aplicação do método pode realizar uma busca e gerar bons resultados em situações de completa ausência de conhecimento.

4.3 Estudo de Caso I - Enrijecedores Retangulares

Um estudo realizado por Ramaswamy (1999) teve como objetivo investigar diferentes arranjos geométricos de placas enrijecidas sobre a influência de vibrações e de flambagem utilizando o MEF. Dentre arranjos de placas analisadas no estudo, aquelas com enrijecedores orientados em 45° mostraram resultados promissores. Dessa forma, surge a oportunidade de investigar o comportamento mecânico desse tipo de arranjo geométrico de placas sobre a influência de outros fenômenos estruturais. Sendo assim, este estudo de caso destinou-se a estudar o comportamento mecânico de placas em relação à deflexão sob diferentes orientações de enrijecedores retangulares.

Para a aplicação do método Design Construtal no primeiro estudo de caso desta dissertação, uma placa sem enrijecedores com comprimento a, largura b e espessura t foi tomada como referência (Fig.4.2). A partir desta, mantendo o volume de material total constante como principal restrição do método Design Construtal, diferentes porcentagens de material desta placa foram convertidas em enrijecedores através da fração volumétrica ϕ, a qual representa a razão entre o volume de material dos enrijecedores e o volume de material da placa de referência. As dimensões a e b da placa de referência também foram mantidas constantes nas placas com enrijecedores, sendo também adotadas como restrições durante a aplicação do método Design Construtal.

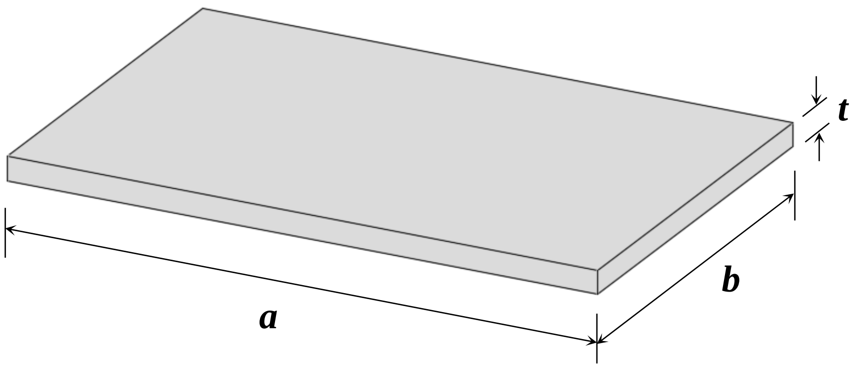


Figura 4.2 - Placa de Referência

Foram considerados os valores de $\phi = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; e 0,5, ou seja, 10%, 20%, 30%, 40% e 50% do volume de material da placa de referência transformado em enrijecedores, respectivamente. A cada novo valor de ϕ, um novo valor de espessura de placa t_p vigora, visto que, a parcela de material convertida em enrijecedores foi integralmente deduzida da espessura da placa de referência t. Cabe ainda destacar que a fração volumétrica ϕ, embora seja uma restrição imposta pelo método Design Construtal, por ter uma característica variável permite também avaliar sua influência no comportamento mecânico da estrutura.

Quanto aos enrijecedores, foram considerados dois casos relacionados à orientação: orientados em 0° (não inclinados, sendo posicionados nas direções longitudinal e transversal em relação às bordas da placa), conforme a Eq. (4.1), e orientados em 45° (inclinados em relação às bordas da placa) de acordo com a Eq. (4.2). Em cada caso, foram configurados diferentes arranjos geométricos de placas enrijecidas com diferentes números de enrijecedores em cada direção do plano da placa, seguindo o sistema de coordenadas x, y e z para enrijecedores não inclinados e x', y' e z' para placas com enrijecedores inclinados.

$$\phi = \frac{V_s}{V_r} = \frac{n_{sx}(\, a h_s t_s) + n_{sy}[(b - n_{sx} t_s) h_s t_s]}{abt} \tag{4.1}$$

$$\phi = \frac{V_s}{V_r} = \frac{\sum_{d=1}^{n}[(d_1 + d_2 + d_3 \ldots d_\mathrm{n}) h_s t_s] - (n_{int} h_s t_s{}^2)}{abt} \tag{4.2}$$

onde V_s é o volume de material dos enrijecedores; V_r é o volume de material da placa de referência; o comprimento, a largura e a espessura da placa de referência são respectivamente a = 2000 mm, b = 1000 mm e t = 20 mm; h_s e t_s são a altura e a espessura dos enrijecedores, comum para todas as placas configuradas. Cabe enfatizar que exclusivamente para os arranjos geométricos formados com enrijecedores inclinados, os parâmetros $[d_1, d_2, d_3, \ldots d_n]$, representam o comprimento dos enrijecedores, sendo n o número total e n_{int} o número de interseções, respectivamente.

Para representar cada arranjo geométrico, adotou-se o seguinte formato: $P(n_{sx}, n_{sy})$ e $P'(n_{sx'}, n_{sy'})$, para placas com enrijecedores orientados em 0° e enrijecedores orientados em 45°, respectivamente, sendo n_{sx} e n_{sy} os números de enrijecedores nas direções x e y, assim como, $n_{sx'}$ e $n_{sy'}$ representam o número de enrijecedores nas direções x' e y'. Logo, as Figs. 4.3 e 4.4 mostram as placas P(3,3) e P'(3,2).

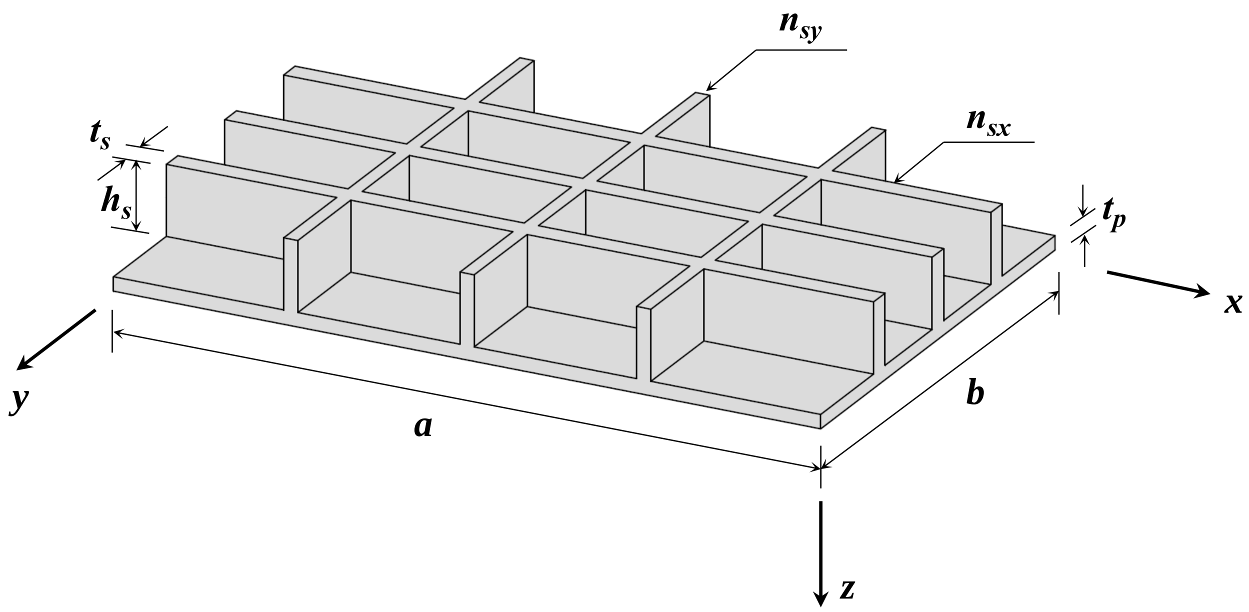


Figura 4.3 - Placa P(3,3)

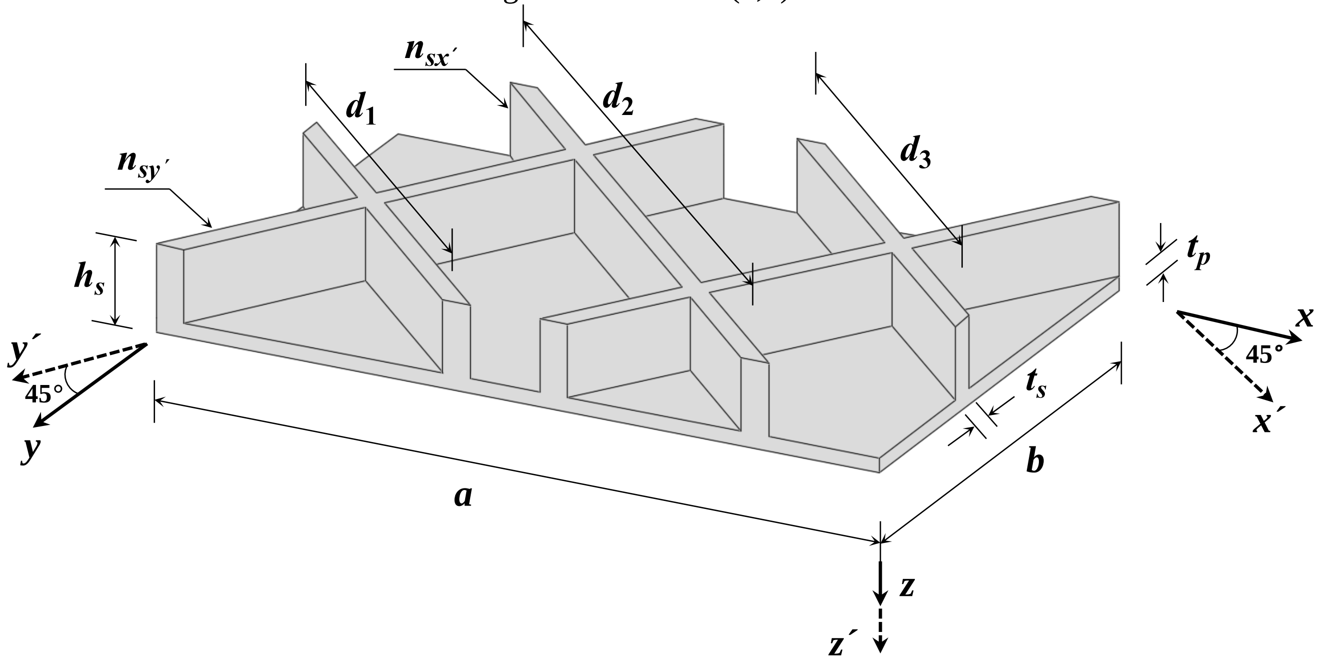


Figura 4.4 - Placa P'(3,2)

A distribuição dos enrijecedores foi realizada de modo que todos fossem equidistantes. Para as placas com enrijecedores não inclinados, os enrijecedores na direção x (chamados de longitudinais) foram distribuídos em relação à largura b e os enrijecedores na direção y (chamados de transversais) em relação ao comprimento a. Entretanto para as placas com enrijecedores orientados em 45° a distribuição dos enrijecedores para as duas direções x' e y' foi realizada com base nas diagonais da placa.

Considerando o volume de material total constante como restrição global do problema, foram explorados dentro de cada parâmetro ϕ os graus de liberdade relacionados à orientação de 0° e 45° dos enrijecedores, assim como, o número de enrijecedores para cada orientação, e ainda, a razão entre a altura e espessura h_s/t_s. O número de enrijecedores variou de 2 até 6 em cada direção (x, y e x', y') e a razão h_s/t_s é consequência de cada altura h_s , formadas através das Eqs. (4.1) e (4.2) ao serem estabelecidas diferentes espessuras de enrijecedores t_s, as quais estão definidas de acordo com espessuras de chapas comerciais.

Ainda, tomou-se o cuidado para que a comparação dos resultados fosse sempre realizada entre placas equivalentes, ou seja, placas com o mesmo número e espessura de enrijecedores, porém cada uma com a sua respectiva orientação de enrijecedores. Por exemplo, a placa P(4,3) sempre será comparada com a placa P'(4,3), onde as mesmas tem o mesmo número de enrijecedores em cada direção e a mesma espessura de enrijecedor, sendo a orientação o fator diferencial. Dessa forma foi possível analisar o quanto a orientação influi no comportamento.

Cabe ressaltar que, como em Troina (2017), a altura dos enrijecedores h_s foi limitada em 300 mm, para evitar desproporção excessiva em comparação com o comprimento das bordas da placa. Do mesmo modo, as razões h_s/t_s menores do que 1 foram desconsideradas, evitando que as espessuras fossem maiores do que as alturas dos enrijecedores.

Para facilitar a organização e compreensão dos resultados, abaixo é apresentado um quadro com os parâmetros considerados, assim como, a Fig.4.5 mostra um fluxograma de todos os passos de aplicação do método design construtal para o caso de enrijecedores retangulares. Além do mais, a Fig. 4.6 mostra os arranjos geométricos de placas analisados divididos em grupos.

	Parâmetros	**Condição**
ϕ	Razão volumétrica	Variável de 0,1 até 0,5
a	Comprimento das placas	Fixado em 2000 mm
b	Largura das placas	Fixado em 1000 mm
t_p	Espessura das placas	Variável para cada diferente valor de ϕ
V_r	Volume de material da placa de referência	Fixado em 40.000x10³ mm³
V_s	Volume de material dos enrijecedores	Variável para cada diferente valor de ϕ
n_{sx} e n_{sy}	Número de enrijecedores nas direções x e y (orientados em 0°)	Variável de 2 até 6 em cada uma das direções
$n_{sx'}$ e $n_{sy'}$	Número de enrijecedores nas direções x' e y' (orientados em 45°)	Variável de 2 até 6 em cada uma das direções
t_s	Espessura dos enrijecedores	Variável de acordo com valores comerciais
h_s	Altura dos enrijecedores	Variável para cada diferente valor de t_s
d_1, d_2, d_3, d_n	Comprimento dos enrijecedores orientados em 45°	Variável de acordo com o número de enrijecedores.

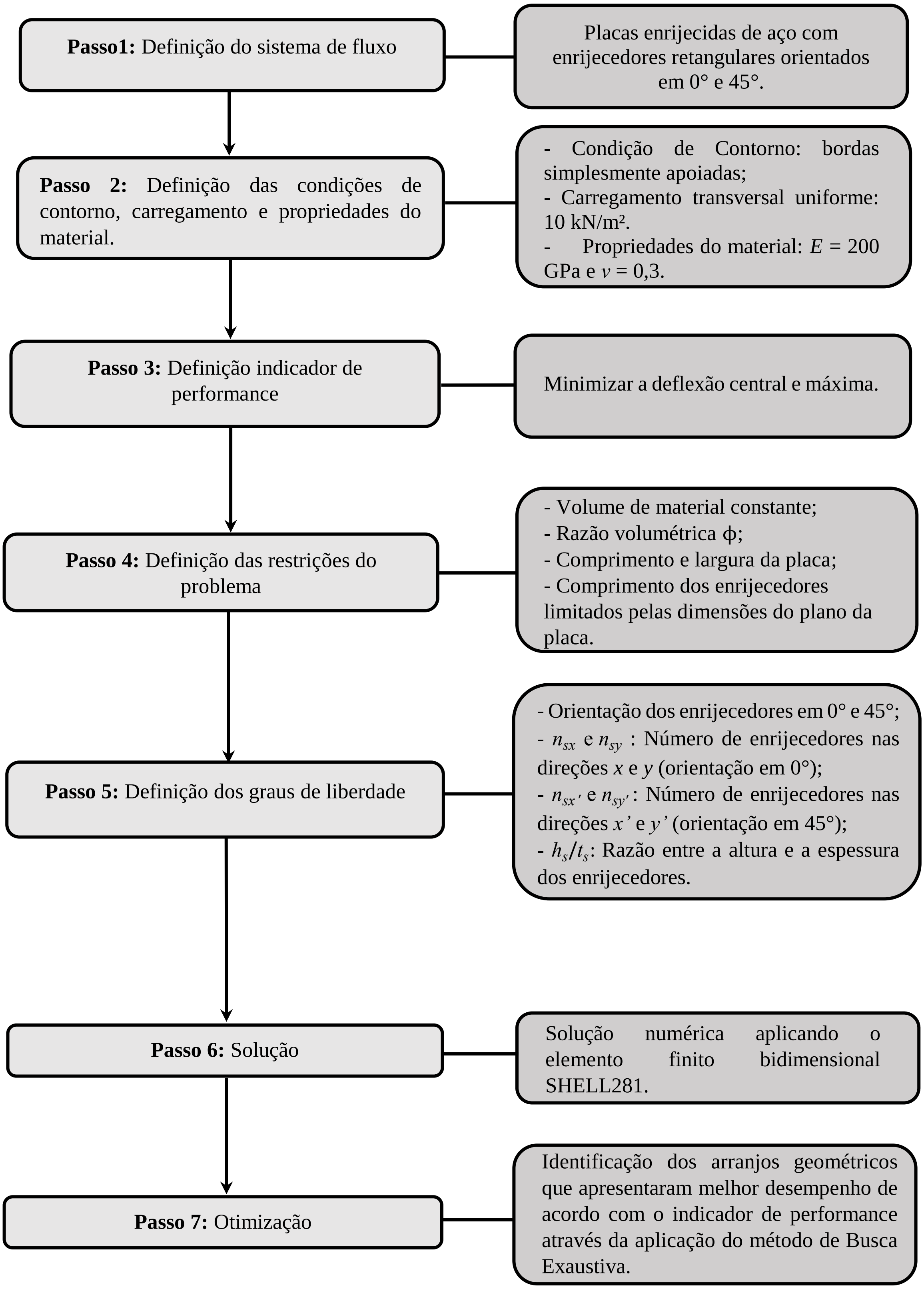


Figura 4.5 - Fluxograma de aplicação do método Design Construtal para enrijecedores retangulares

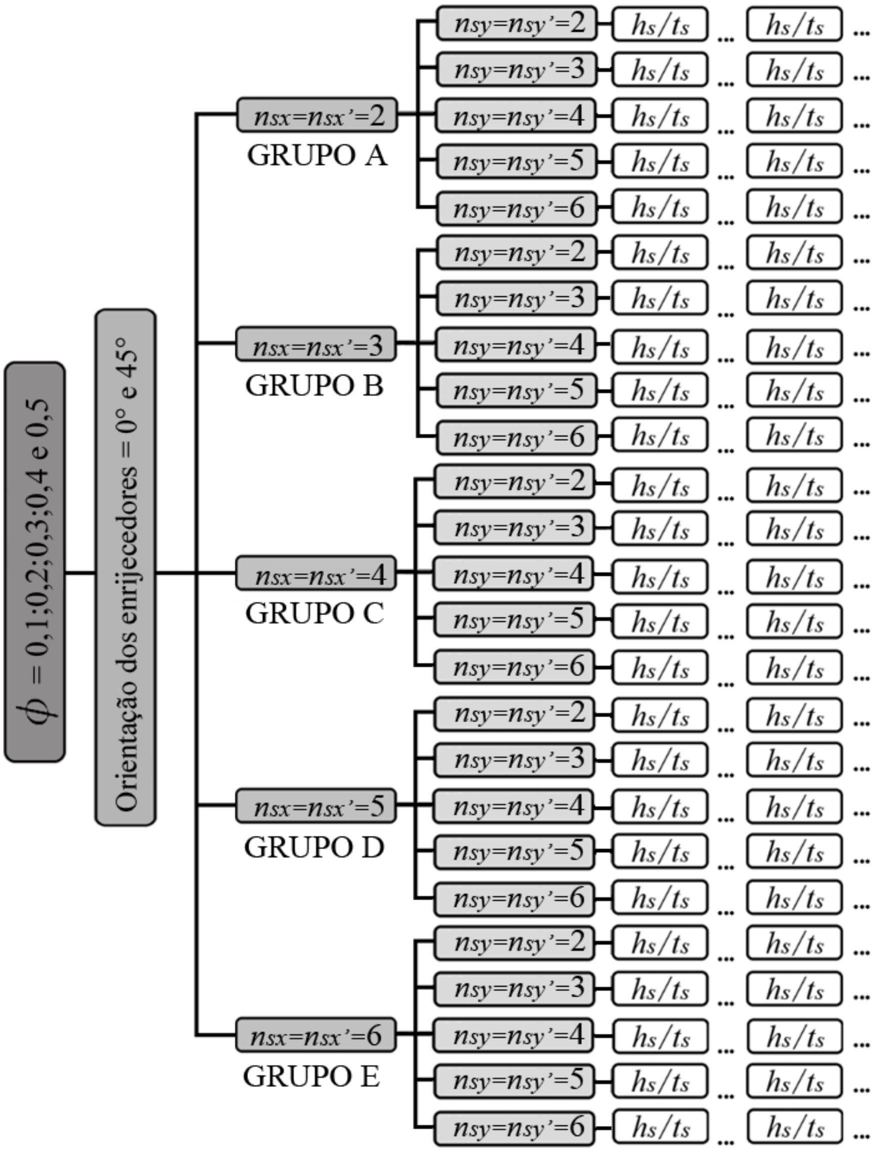


Figura 4.6 - Organograma das simulações para enrijecedores retangulares

4.4 Estudo de Caso II - Enrijecedores Trapezoidais

O segundo estudo de caso teve como objetivo analisar a influência geométrica de enrijecedores trapezoidais no comportamento mecânico das placas em relação à deflexão. Para tal, o estudo foi divido em duas etapas. Na primeira buscou-se descobrir qual a melhor razão entre as bases dos enrijecedores trapezoidais c/a e d/b (ver Fig.4.7). Após, a segunda etapa foi desenvolvida com base no resultado da primeira, onde foi realizada uma avaliação geométrica seguindo o princípio do método Design Construtal.

Sendo assim, para a segunda etapa uma placa sem enrijecedores com comprimento a, largura b e espessura t foi tomada como referência. A partir desta, adotando a fração volumétrica $\phi = 0{,}3$ através da Eq.(4.3) para placa com enrijecedores trapezoidais, foram definidos diversos arranjos geométricos, variando o número de enrijecedores com espessura fixada de t_s = 19,21 mm, conforme mostra o organograma apresentado na Fig. 4.6.

$$\phi = \frac{V_s}{V_r} = \frac{\left\{ n_{sx} \left[\frac{(a+c) h_s t_s}{2} \right] + n_{sy} \left[\frac{(b+d) h_s t_s}{2} \right] \right\} - V_{int}}{abt} \tag{4.3}$$

onde V_s é o volume de material dos enrijecedores; V_r é o volume de material da placa de referência; N_{sx} e N_{sy} representam o número de enrijecedores nas direções x e y ; h_s e t_s são a altura e a espessura dos enrijecedores; c e d correspondem ao comprimento da bases menores dos enrijecedores trapezoidais nas direções x e y, respectivamente. A placa de referência possui as mesmas dimensões do Estudo de Caso I, ou seja, a = 2000 mm, b = 1000 mm e t = 20 mm. Cabe ressaltar, que a parcela de volume excedente de material que ocorre nos cruzamentos entre os enrijecedores, denominada V_{int}, foi subtraída para evitar sobreposição.

Para as placas com enrijecedores trapezoidais foi adotado o formato $P_T(n_{sx}, n_{sy})$, sendo n_{sx} e n_{sy} os números de enrijecedores nas direções x e y, respectivamente. Logo a Fig. 4.7 apresenta a placa $P_T(3,3)$. Além disso, adotando $\phi = 0{,}3$ a espessura da placa de referência t = 20 mm passou a ser t_p = 14 mm após a remoção de material para compor os enrijecedores.

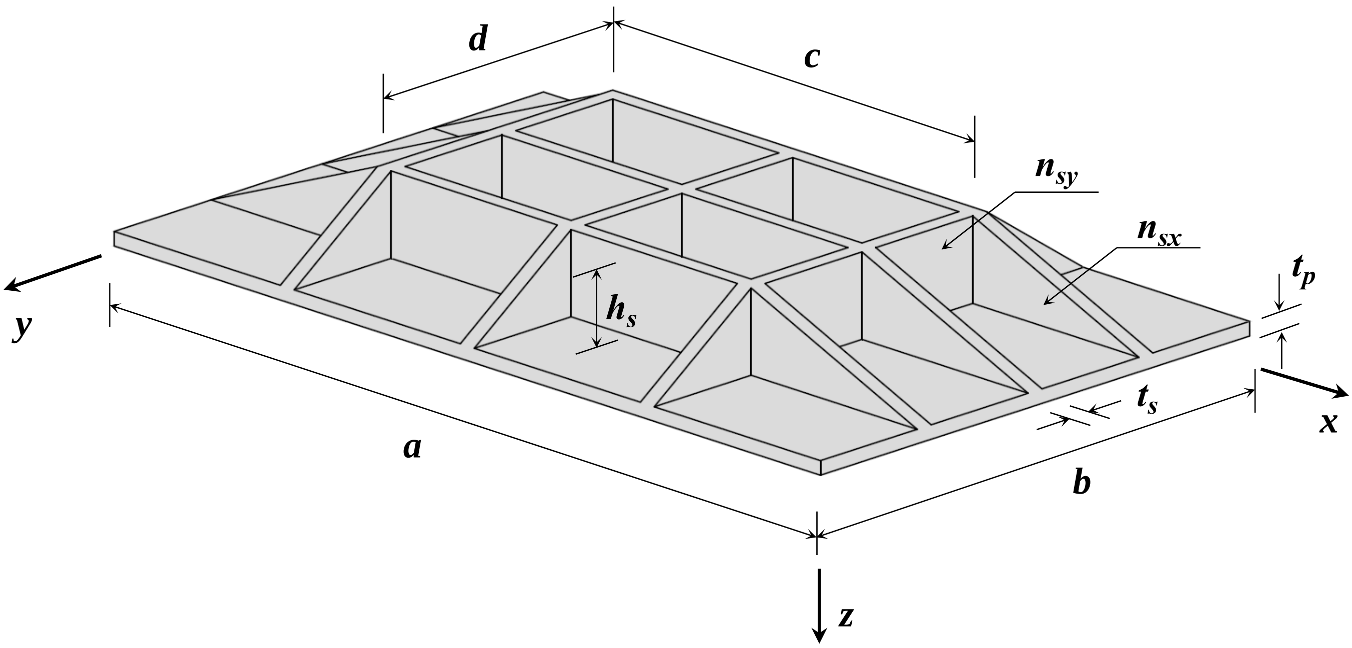


Figura 4.7 -Placa $P_T(3,3)$

Logo abaixo é apresentado um quadro mostrando os parâmetros considerados para o estudo de caso de enrijecedores trapezoidais, assim como, a Fig. 4.8 apresenta um fluxograma com os passos de aplicação no método Design Construtal. Por fim, a Fig. 4.9 mostra todas as simulações de placas consideradas.

Parâmetros		Condição
ϕ	Razão volumétrica	Fixado em 0,3
a	Comprimento das placas	Fixado em 2000 mm
b	Largura das placas	Fixado em 1000 mm
c	Comprimento da base menor do trapézio na direção x	Fixado em 1000 mm
d	Comprimento da base menor do trapézio na direção y	Fixado em 500 mm
t_p	Espessura das placas	Fixado em 14mm para ϕ = 0,3
V_r	Volume de material da placa de referência	Fixado em 40.000x10³ mm³
V_s	Volume de material dos enrijecedores	Fixado em 12.000x10³ mm³ para ϕ = 0,3
n_{sx} e n_{sy}	Número de enrijecedores nas direções x e y (orientados em 0°)	Variável de 2 até 6 em cada uma das direções
t_s	Espessura dos enrijecedores	Fixado em 19,21 mm (valor comercial)
h_s	Altura dos enrijecedores	Variável para cada para diferentes n_{sx} e n_{sy}

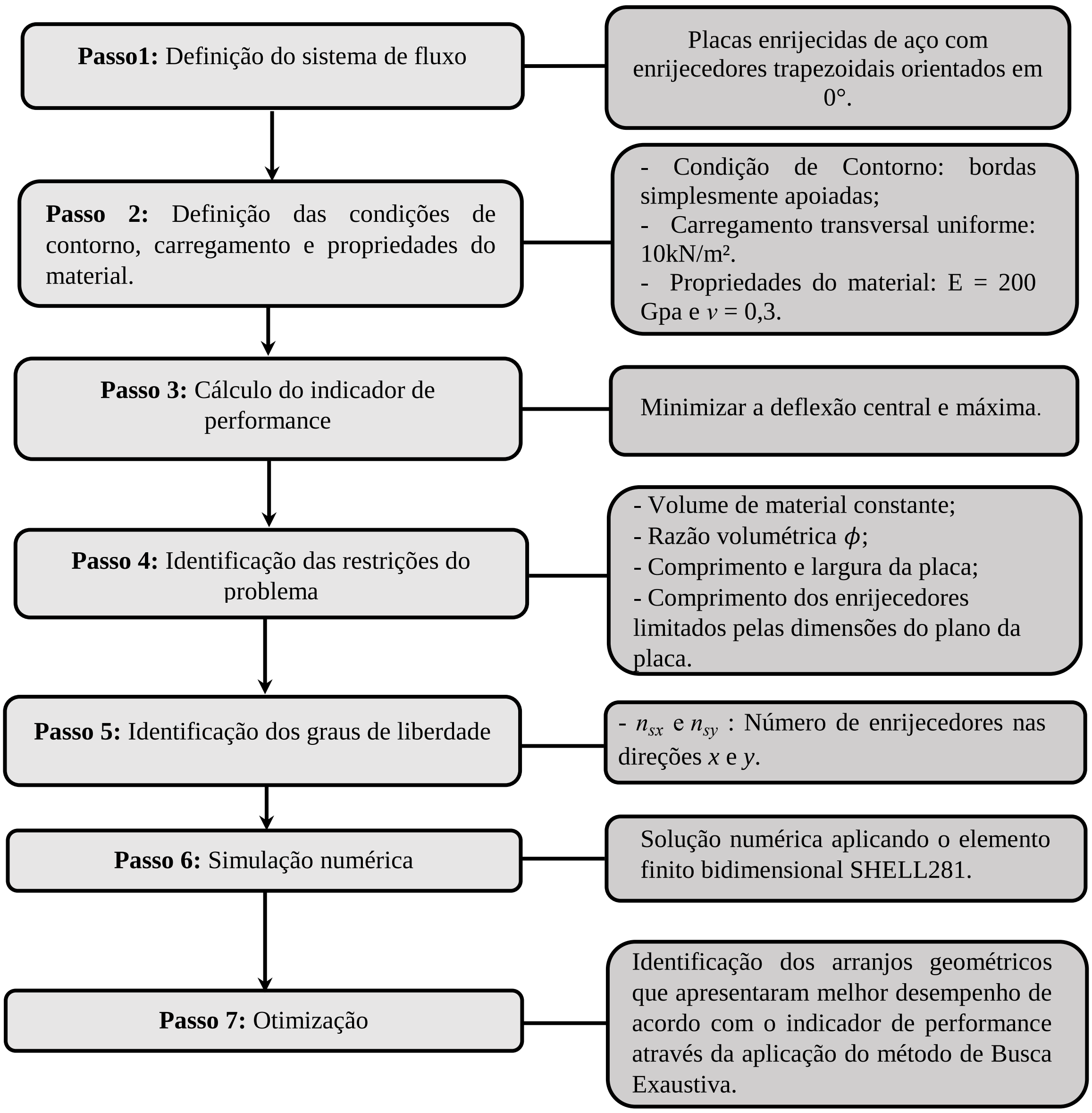


Figura 4.8 – Fluxograma de aplicação do método Design Construtal para enrijecedores trapezoidais (Etapa II)

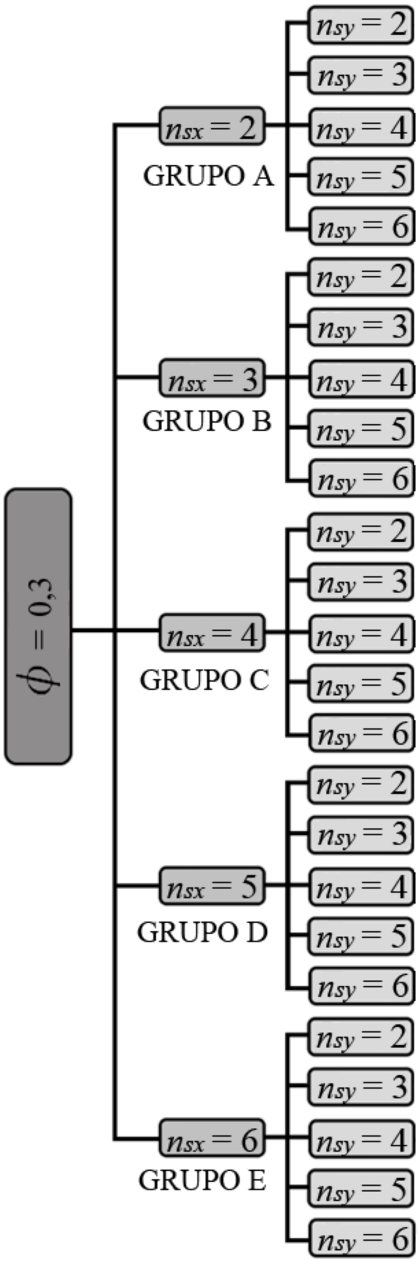


Figura 4.9 - Organograma das simulações para enrijecedores trapezoidais (Etapa II)

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados e discussões foram divididos em dois tópicos referentes aos estudos de caso analisados nesta dissertação. Com isso, espera-se uma maior compreensão dos resultados que serão apresentados a seguir, uma vez que, cada estudo de caso tem suas peculiaridades.

5.1 Estudo de Caso I – Enrijecedores Retangulares

Todos os arranjos geométricos de placas formadas a partir da placa de referência foram simulados utilizando o elemento finito SHELL281 na versão triangular. Além disso, foi adotado um carregamento transversal uniforme igual a 10 kN/m² com condições de contorno de bordas simplesmente apoiadas, material com módulo de elasticidade E = 200 GPa e coeficiente de Poisson v = 0,3.

5.1.1 Teste de convergência de malha para Enrijecedores Retangulares

Para cada ϕ (fração volumétrica) foi realizado um teste de convergência de malha, considerando as geometrias de placas com maior número de enrijecedores P'(6,6) e com maior razão h_s/t_s (ver Fig. 5.2), ou seja, seis enrijecedores em cada direção orientados em 45° com menor espessura e maior altura possível. O tamanho dos elementos finitos foi reduzido sucessivamente considerando seis diferentes malhas, conforme apresentado na Tabela 5.1. Lembrando que b = 1000 mm é a menor dimensão lateral das placas.

Tabela 5.1 - Critério de malha para testes de independência

Malhas	**Tamanho do Elemento Finito (mm)**
$M_1 = b/10$	100
$M_2 = M_1/2$	50
$M_3 = M_1/4$	25
$M_4 = M_1/6$	16,67
$M_5 = M_1/8$	12,5
$M_6 = M_1/10$	10

Com base nos gráficos apresentados na Fig. 5.1, os quais apresentam os resultados dos testes de convergência de malha, percebe-se que em todos os casos a partir da terceira malha M_3 houve uma estabilização dos resultados de deflexão máxima e central, sendo essa a malha adotada. Entretanto, com intuito de garantir uma melhor precisão aos resultados apresentados foi acrescentado um refinamento de 10%, onde os elementos de 25 mm passaram a ser para 22,5 mm.

A Tabela 5.2 apresenta a composição final de cada uma das malhas idependentes para cada valor de ϕ. Além do mais, a título de observação a Fig 5.2 mostra a discretização do domínimio com a malha independente para a placa P'(6,6) para fração volumétrica ϕ = 0,3 com maior razão h_s/t_s.

Tabela 5.2 - Malhas independentes

Fração Volumétrica ϕ	P' (6,6) h_s/t_s	Número total de Elementos Finitos
0,1	97,667	14.480
0,2	195,334	20.335
0,3	293,436	27.760
0,4	262,053	24.015
0,5	245,519	22.895

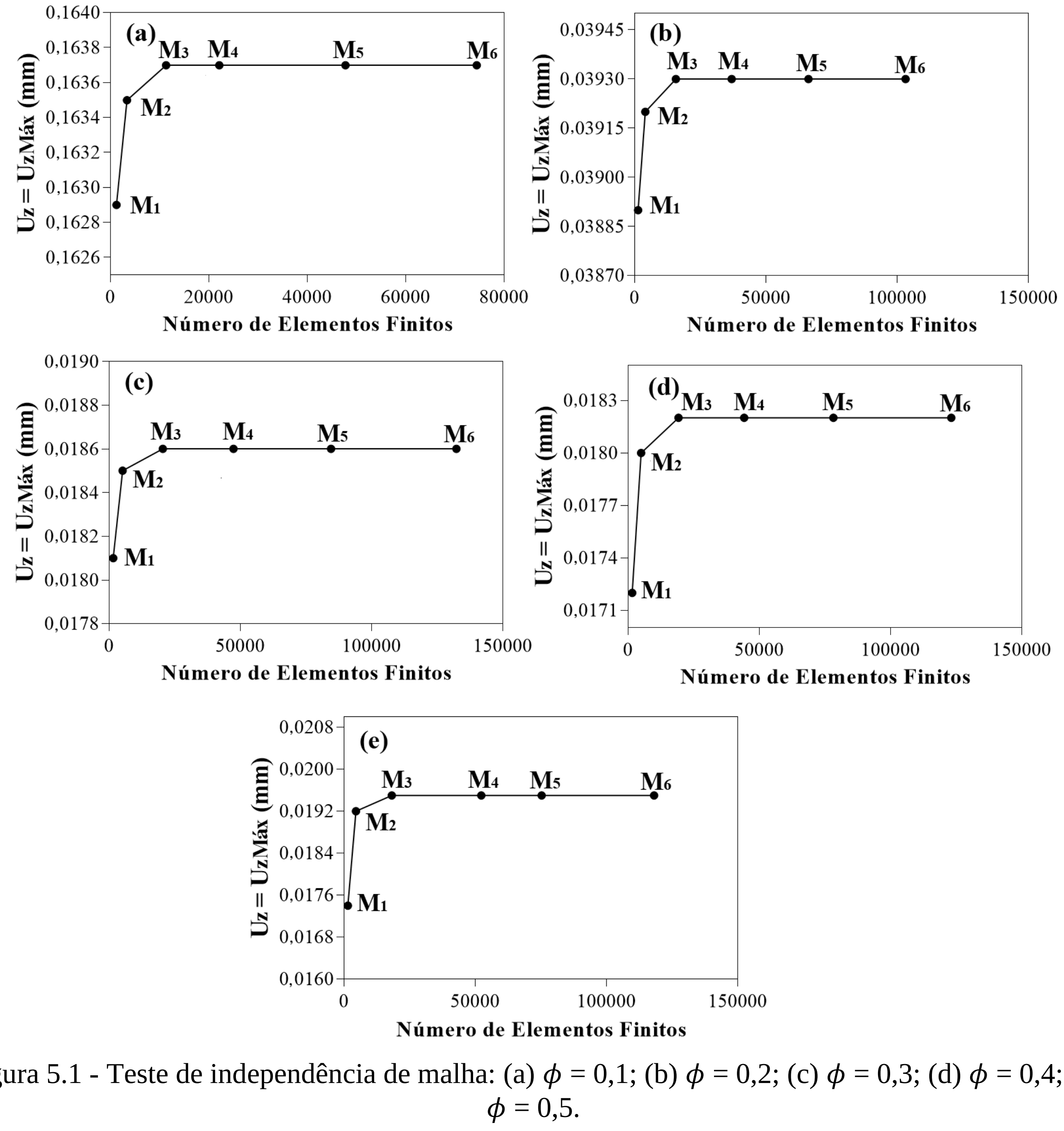


Figura 5.1 - Teste de independência de malha: (a) ϕ = 0,1; (b) ϕ = 0,2; (c) ϕ = 0,3; (d) ϕ = 0,4; (e) ϕ = 0,5.

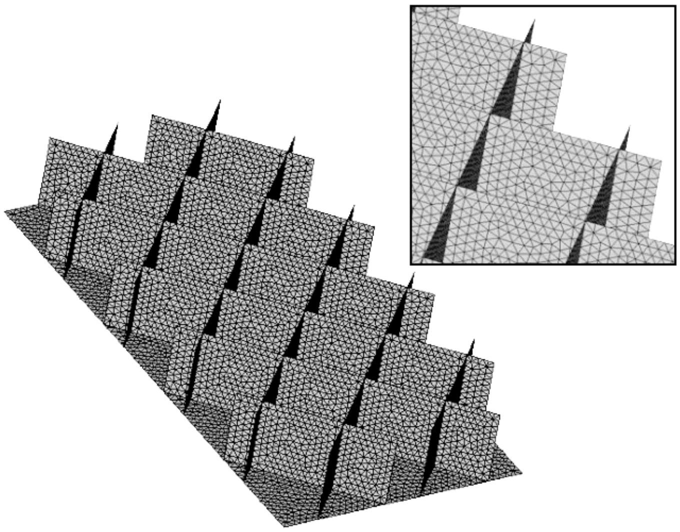


Figura 5.2 - Malha independente para ϕ = 0,3: Placa P'(6,6) com maior razão h_s/t_s

5.1.2 Análise das frações volumétricas ϕ = 0,1;0,2;0,4 e 0,5

Devido ao grande número de resultados gerados nesta dissertação, considerou-se conveniente apresentar primeiramente os resultados das frações volumétricas ϕ = 0,1;0,2;0,4 e 0,5 contemplando apenas as placas que apresentaram as menores deflexões centrais e máximas, permitindo assim, que algumas observações gerais fossem estabelecidas. Os resultados de cada grupo de placas para cada valor de ϕ são mostrados em forma de gráfico de colunas na sequência das Figs. 5.3 até 5.10, com exceção dos resultados de ϕ = 0,3 apresentados detalhadamente no subtópico seguinte.

Para estabelecer uma comparação mais direta, a sequência das Figs. 5.3 até 5.10 mostram as deflexões centrais e máximas para cada uma das frações volumétricas, respectivamente. Em cada gráfico são apresentados os resultados para cada uma das orientações de enrijecedores (0° e 45°). O eixo vertical mostra os valores de deflexões, enquanto o eixo horizontal apresenta os arranjos de placas formados, separados em dois níveis. O nível inferior mostra a quantidade de enrijecedores nas direções x e x', enquanto o nível superior mostra as variações dos números de enrijecedores y e y'. Aqui vale ressaltar que as placas são sempre comparadas entre si de acordo com o mesmo número de enrijecedores e espessura, sendo a orientação de 0° e 45° a única diferença entre elas.

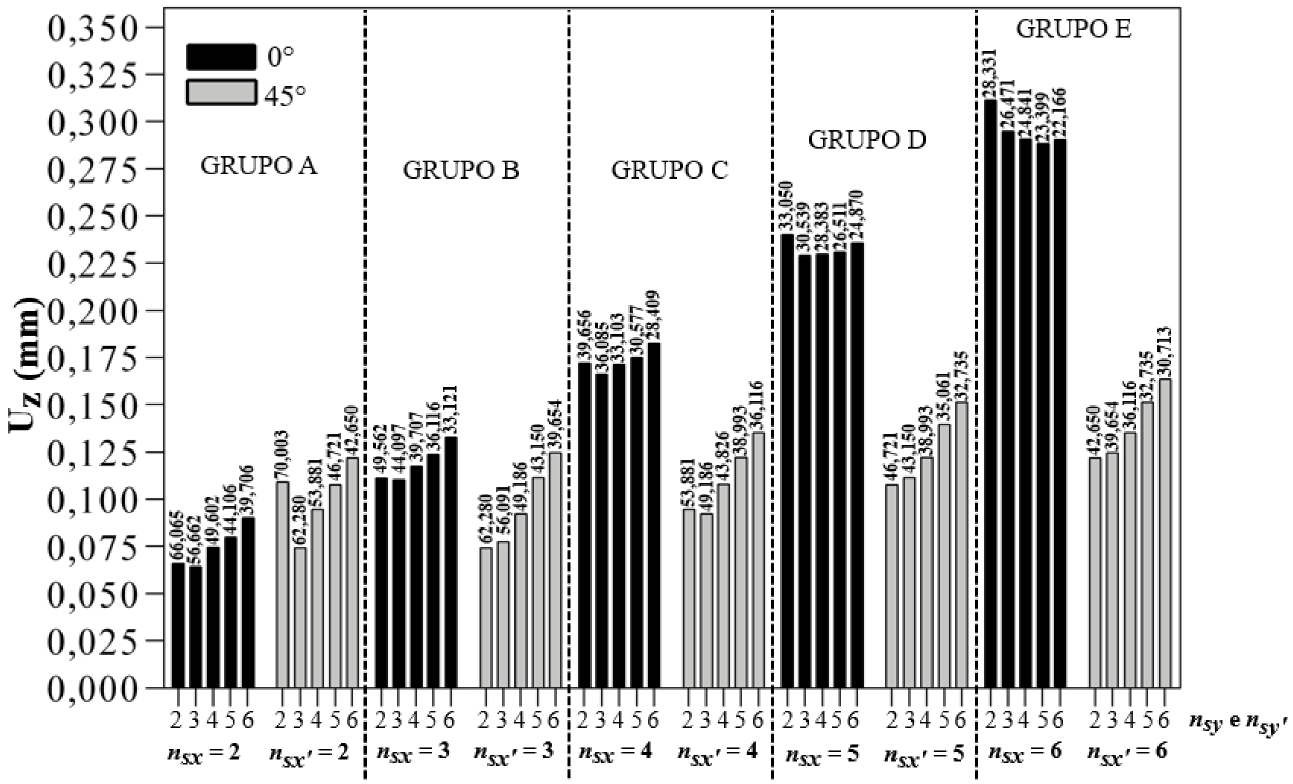


Figura 5.3 - ϕ = 0,1 - Melhores resultados de deflexão central

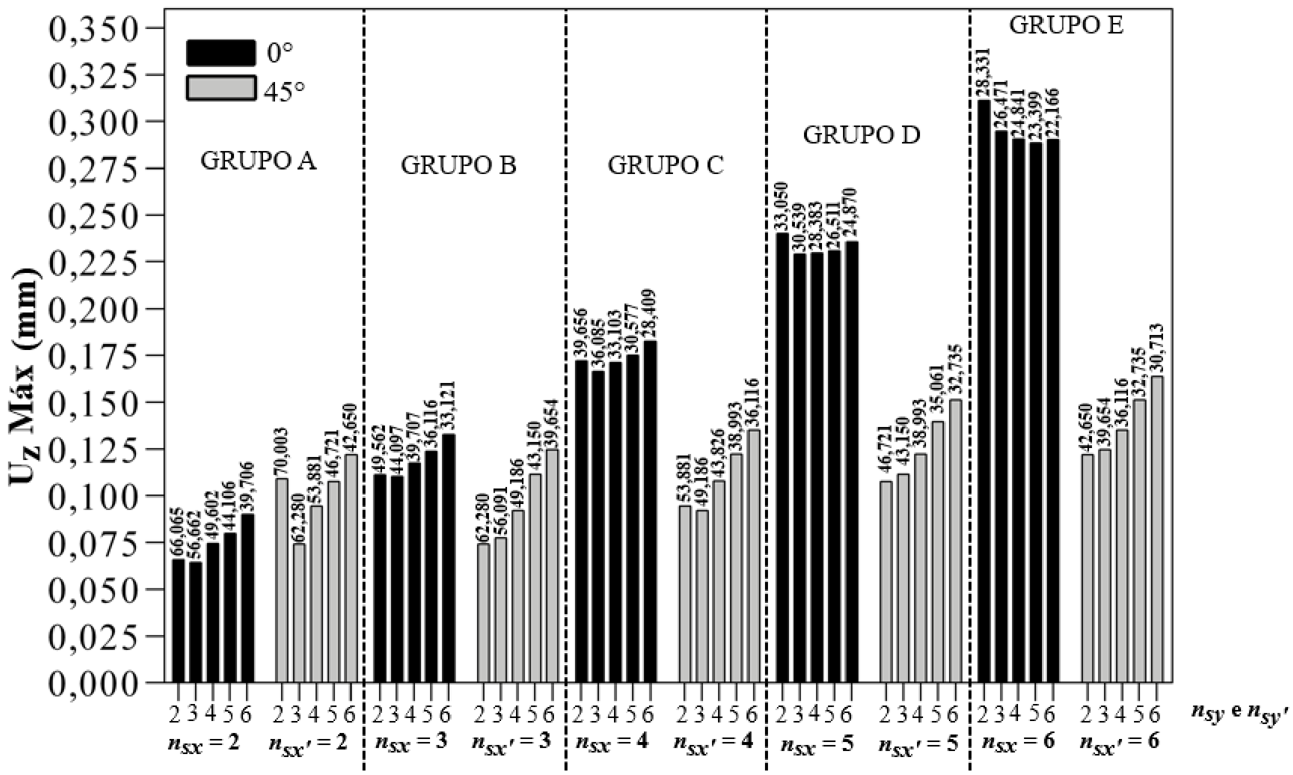


Figura 5.4 - ϕ = 0,1 - Melhores resultados de deflexão máxima

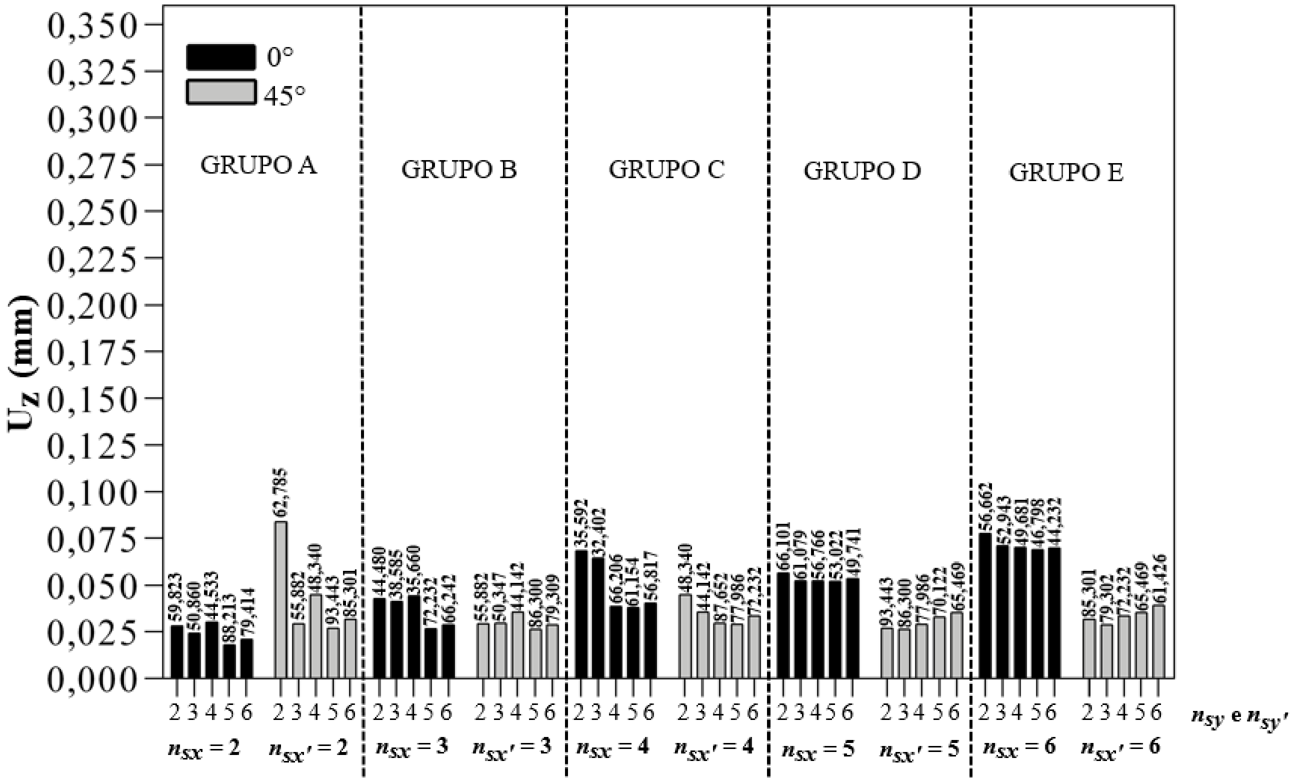


Figura 5.5 - ϕ = 0,2 - Melhores resultados de deflexão central

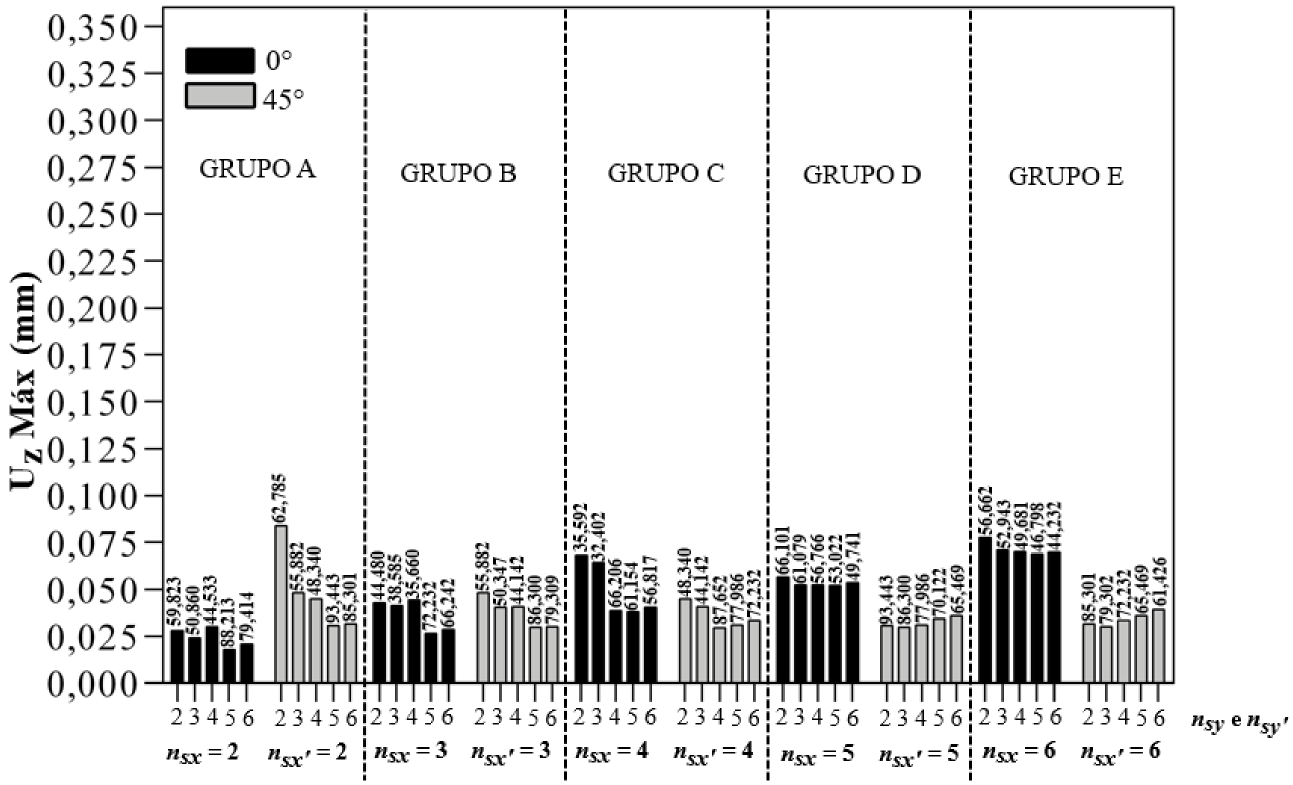


Figura 5.6 - ϕ = 0,2 - Melhores resultados de deflexão máxima

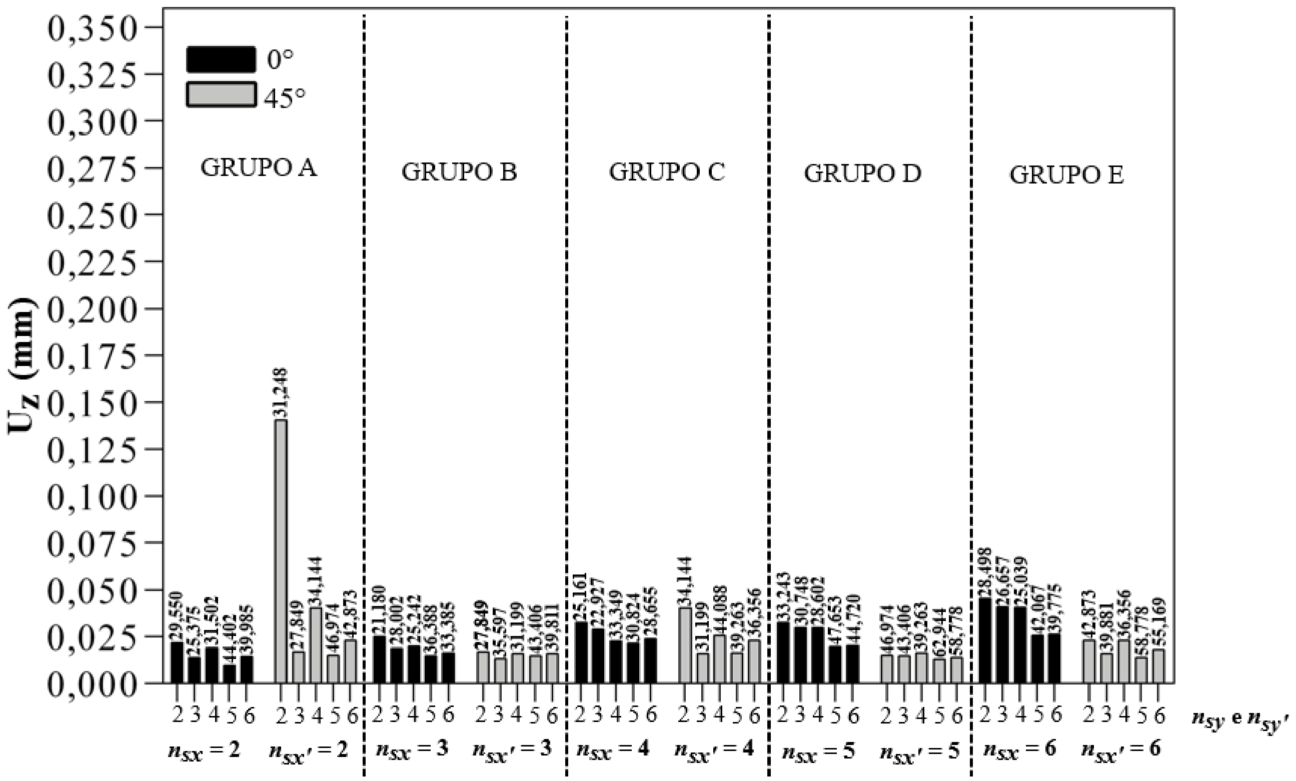


Figura 5.7- ϕ = 0,4 - Melhores resultados de deflexão central

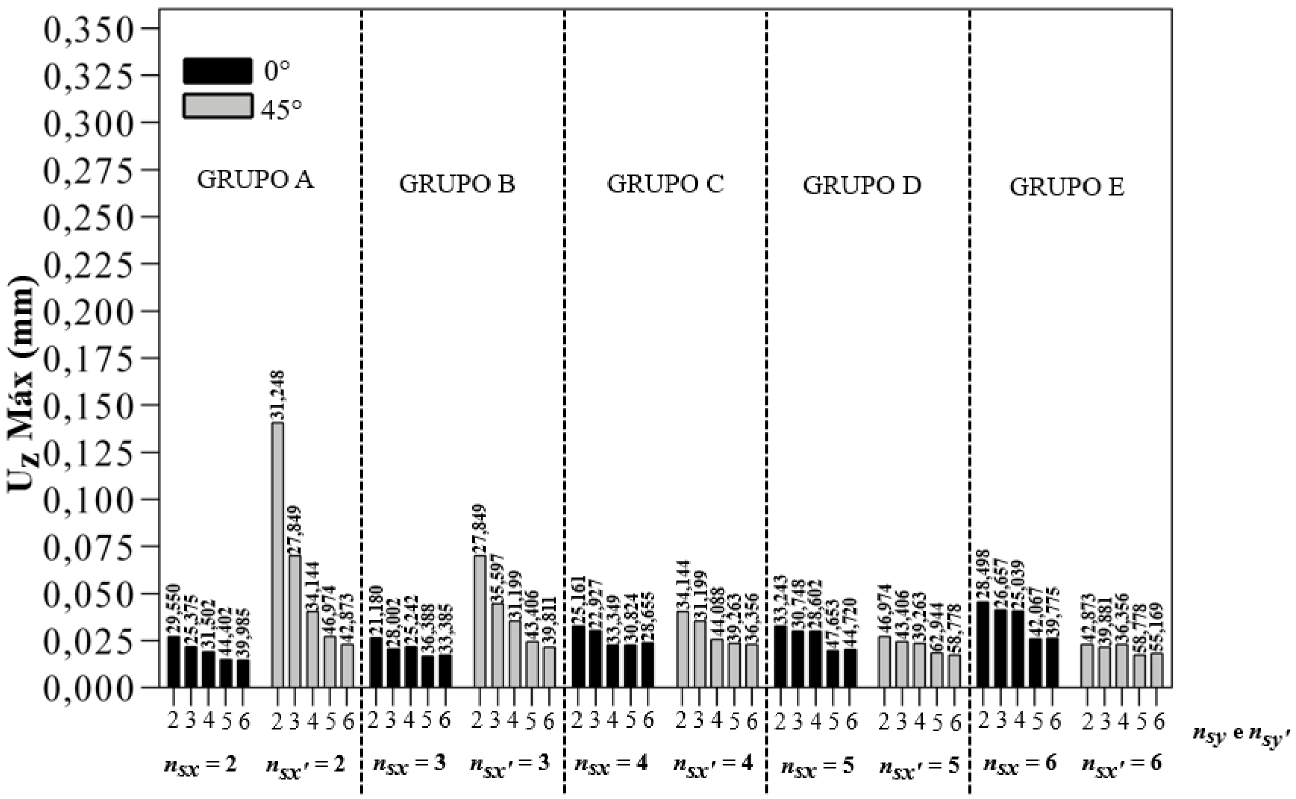


Figura 5.8 - ϕ = 0,4 - Melhores resultados de deflexão máxima

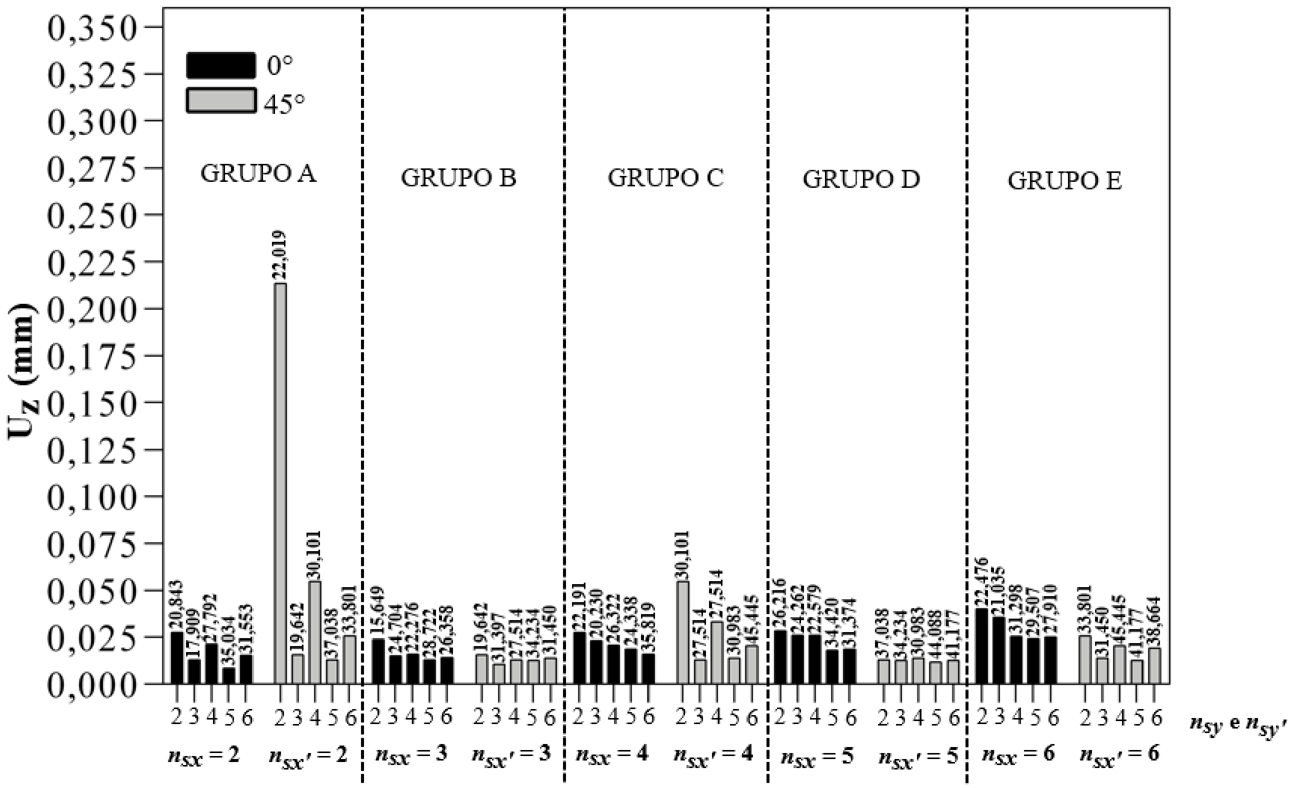


Figura 5.9 - ϕ = 0,5 - Melhores resultados de deflexão central

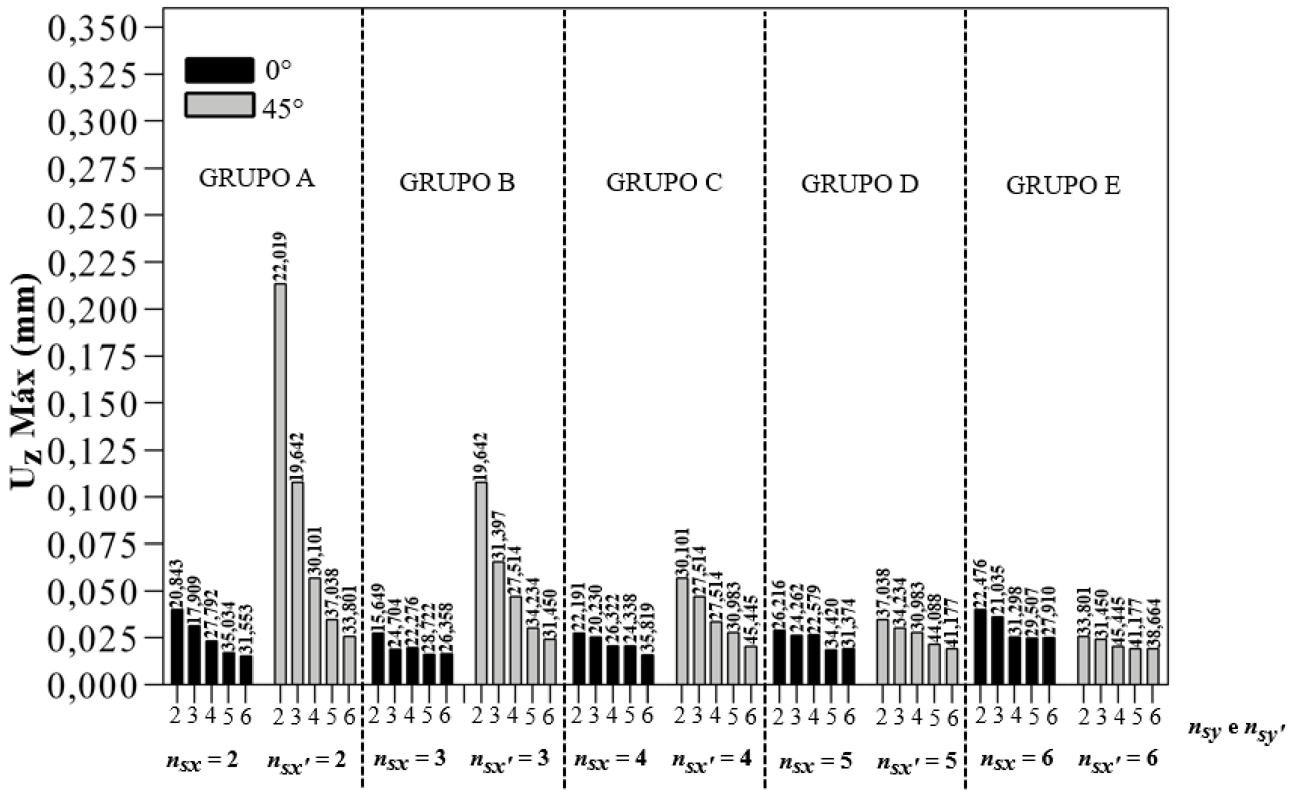


Figura 5.10 - ϕ = 0,5- Melhores resultados de deflexão máxima

Considerando as Figs. 5.3 até 5.10, pode-se observar que à medida que os valores de ϕ aumentaram, as deflexões centrais e máximas tenderam a diminuir. Além disso, notou-se que comparando as placas com enrijecedores orientados em 0° e 45°, as maiores diferenças entre deflexões ocorreram para valores de ϕ iguais a 0,1 e 0,2, favorável as placas com enrijecedores em 45° na maioria dos grupos de placas.

Uma outra observação interessante mostra que para ϕ = 0,1 as deflexões máximas ocorrem sempre no centro das placas, apresentando comportamento similar a uma placa sem enrijecedores, ou seja, $U_z = U_{z\text{Máx}}$, o que pode ser explicado devido à pouca quantidade de material destinada para a formação dos enrijecedores.

Além disso, observando as Figs. 5.7 até 5.10 nota-se uma acentuada deflexão central e máxima para as placas P'(2,2). Isso ocorre devido à distribuição dos enrijecedores orientados em 45° para este tipo de arranjo, formando uma grande área não enrijecida no centro da placa (ver Fig. 5.11). Isso se intensifica principalmente para os valores de ϕ iguais a 0,4 e 0,5, onde a espessura da placa é menor, devido a uma maior parcela de material transferida da espessura para a formação dos enrijecedores.

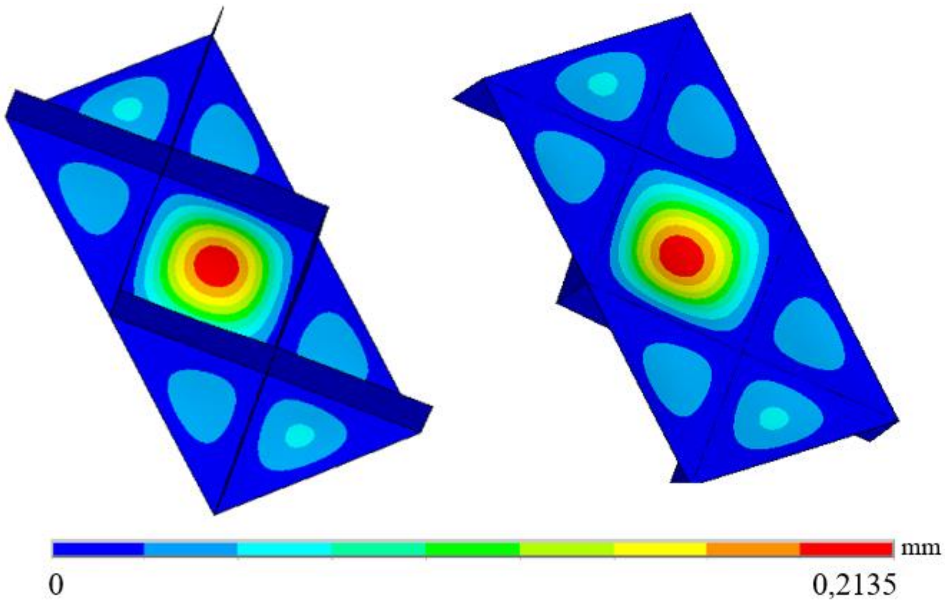


Figura 5.11 - Configuração deformada para P'(2,2) para ϕ = 0,5 *e* h_s/t_s = 22,019

Percebe-se também, que as diferenças entre deflexões, tanto centrais quanto máximas, comparando placas com enrijecedores orientados em 0° e 45° são menores para os valores de ϕ iguais a 0,4 e 0,5, com vantagem para as placas com enrijecedores orientados em 45° que apresentam maior número de enrijecedores (Grupos C, D e E).

5.1.3 Análise da fração volumétrica ϕ = 0,3

Este subtópico destina-se a apresentar de maneira detalhada apenas os resultados da fração volumétrica ϕ = 0,3 por ser um valor intermediário entre os valores de ϕ considerados nesta dissertação, permitindo analisar de modo satisfatório a influência dos graus de liberdade considerados no estudo em relação às deflexões. Os resultados para os demais valores de ϕ estudados, foram apresentados de modo geral no subtópico anterior, contemplando apenas as placas que apresentaram melhores resultados. Estes podem também ser observados no Apêndice D de modo detalhado considerando as deflexões em função do grau de liberdade h_s/t_s.

A fração volumétrica ϕ representa uma parcela de material removido da espessura da placa de referência e transformada em enrijecedores, ou seja, ao adotar o valor de ϕ = 0,3 entende-se que 30% do material da placa de referência foi transformado em enrijecedores. Os enrijecedores foram estudados em duas orientações 0° e 45° e distribuídos segundo o sistema de coordenadas *x*, *y* e *z* para enrijecedores orientados em 0° (não inclinados) e *x'*, *y'* e *z'* para enrijecedores em 45° (inclinados). Lembrando que o formato adotado para diferenciar as duas orientações consideradas neste estudo de caso foi $\mathrm{P}\left(n_{sx}, n_{sy}\right)$ e $\mathrm{P}'(n_{sx'}, n_{sy'})$, para enrijecedores não inclinados e inclinados, respectivamente. Onde, n_{sx} e n_{sy} o representam o número de enrijecedores na direção *x* e *y*, assim como, $n_{sx'}$ e $n_{sy'}$ representam o número de enrijecedores na direção *x'* e *y'* (ver Figs. 4.2 e 4.3).

Os resultados das Figs. 5.12 até 5.16 apresentam de forma gráfica o comportamento das deflexões centrais U_z e máximas $U_{z\mathrm{Máx}}$ em relação ao grau de liberdade h_s/t_s (razão entre a altura e espessura dos enrijecedores) para cada grupo de placas, conforme a apresentado na Fig. 4.4.

Primeiramente observou-se nas Figs. 5.12 até 5.16 que transformar parte do material da placa de referência em enrijecedores melhora o comportamento mecânico das placas em relação às deflexões, em razão de todos os arranjos geométricos analisados apresentarem valores de deflexão central e máxima menores do que os valores de deflexão $U_z = U_{z\mathrm{Máx}}$ = 0,697 mm obtidos para a placa de referência. Notou-se também que para todos os casos, seja para enrijecedores orientados em 0° ou 45°, o aumento da razão h_s/t_s reduziu deflexões centrais e máximas. Isso se deve ao aumento do momento de inércia da seção transversal dos enrijecedores que se torna maior à medida que a razão h_s/t_s aumenta, aumentando assim a rigidez da placa como um todo.

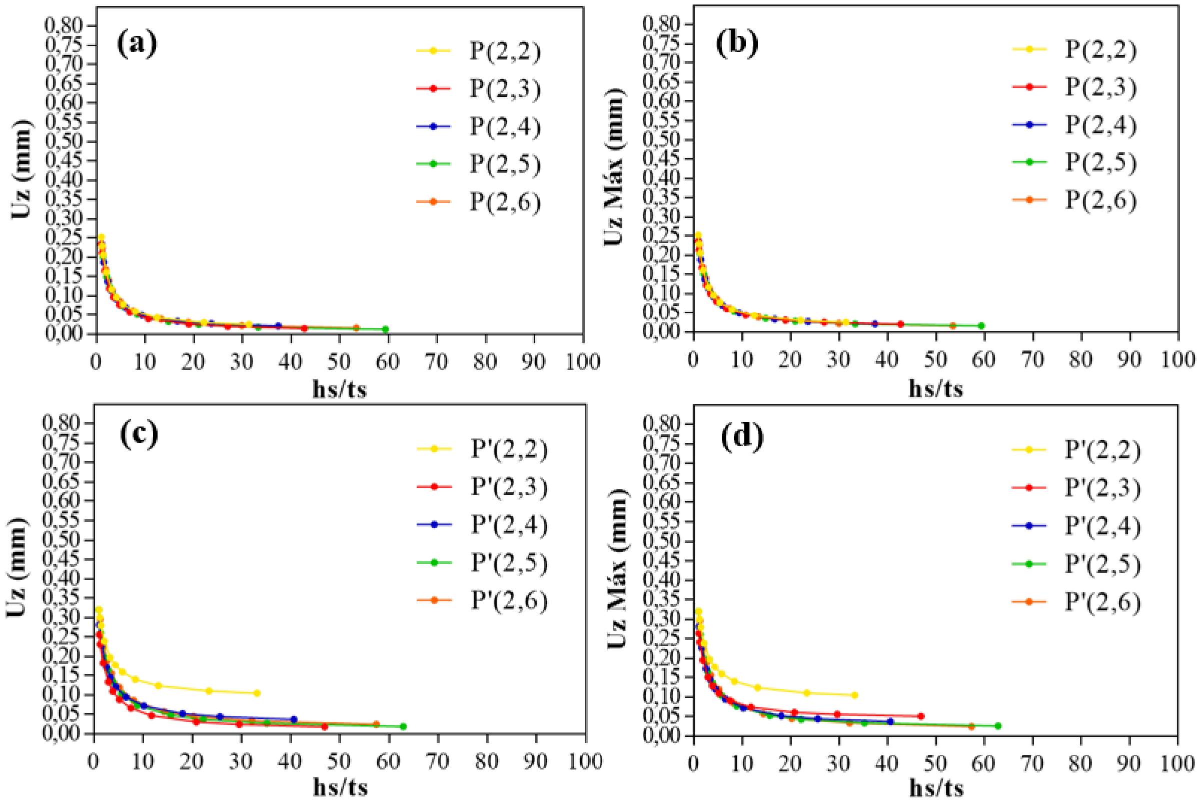


Figura 5.12 - Grupo A - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores ortogonais às bordas; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°

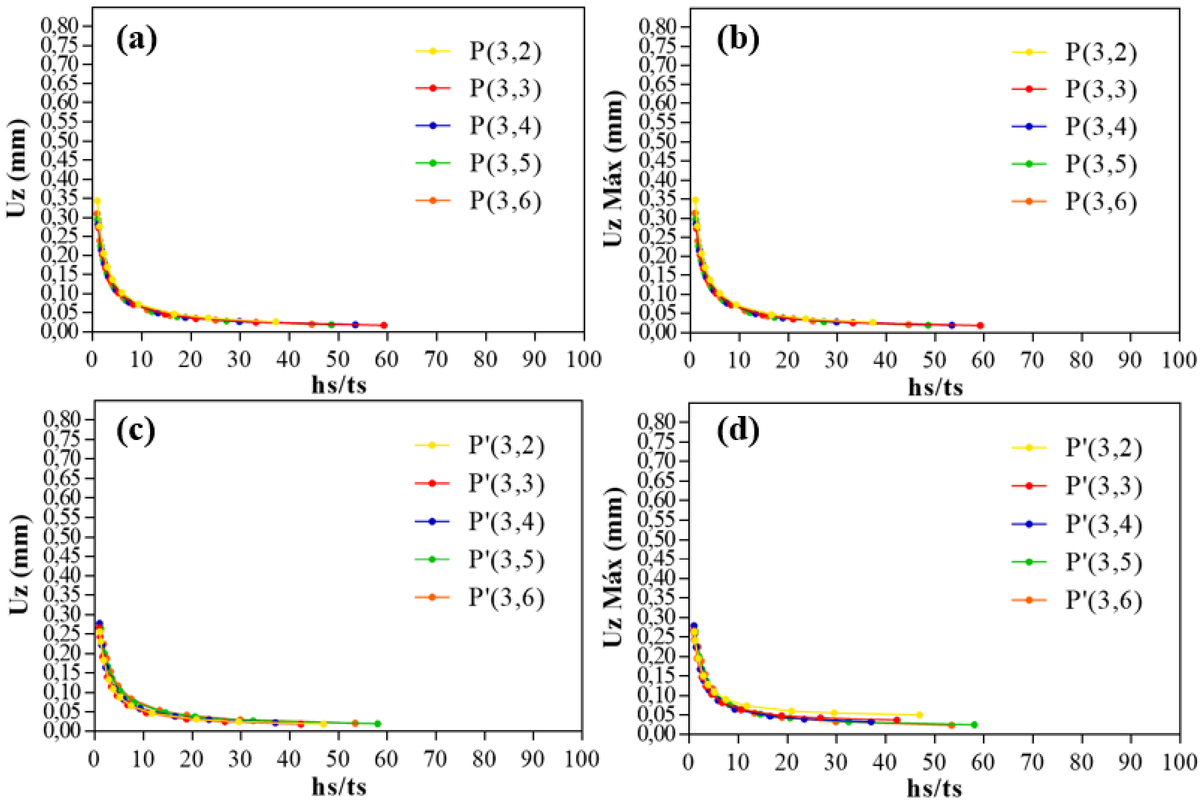


Figura 5.13 - Grupo B - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores ortogonais às bordas; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°

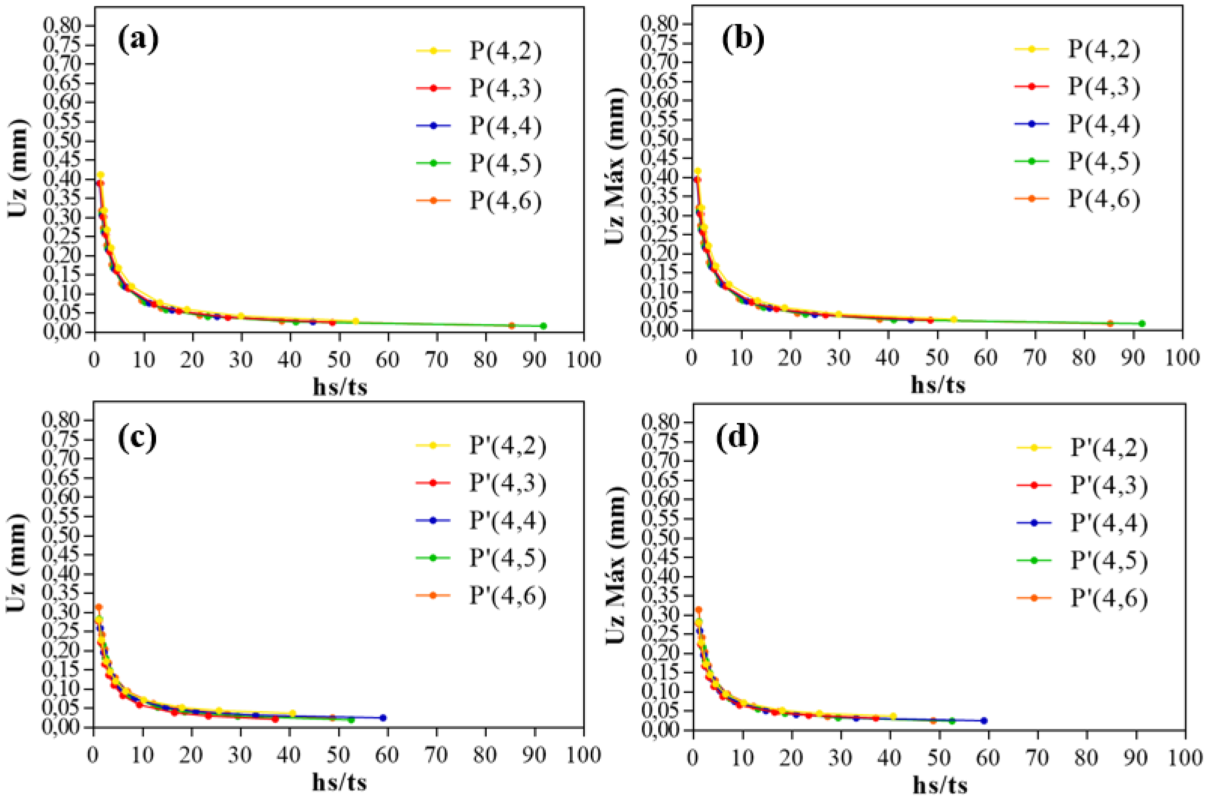


Figura 5.14 - Grupo C - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores ortogonais às bordas; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°

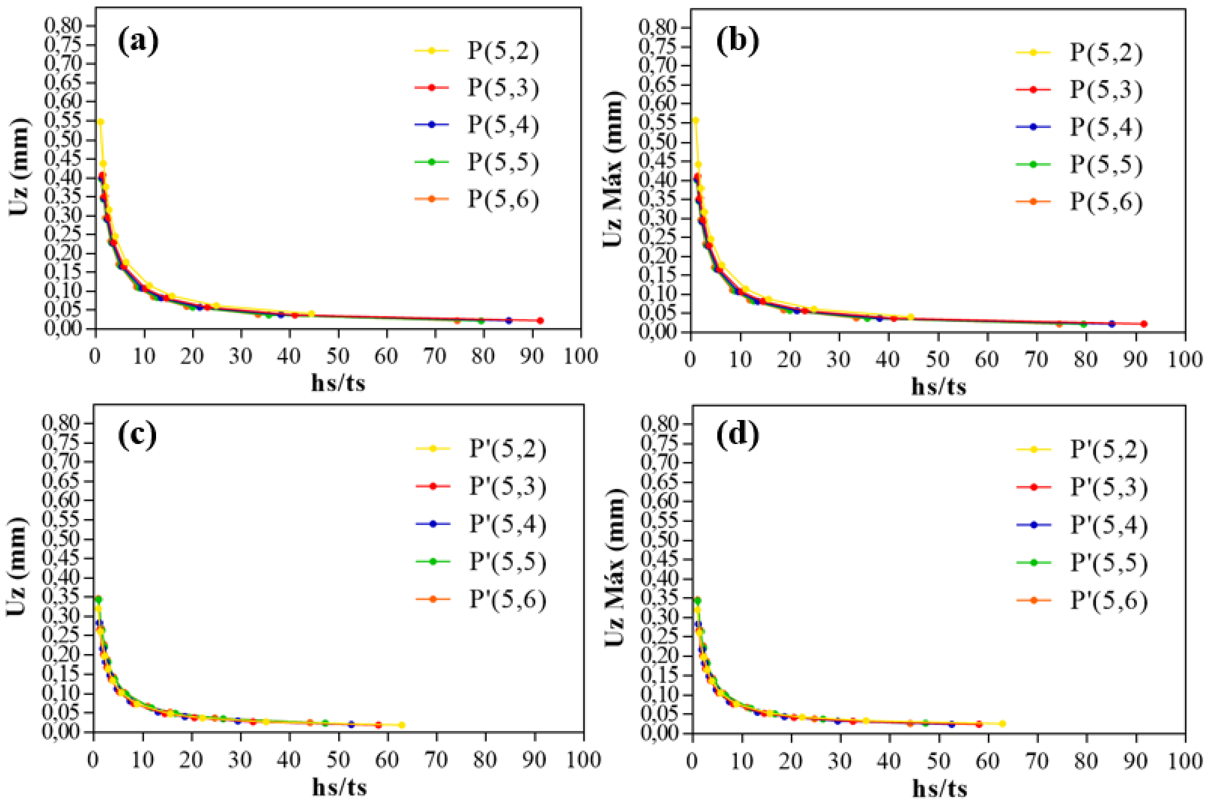


Figura 5.15 - Grupo D - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores ortogonais às bordas; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°

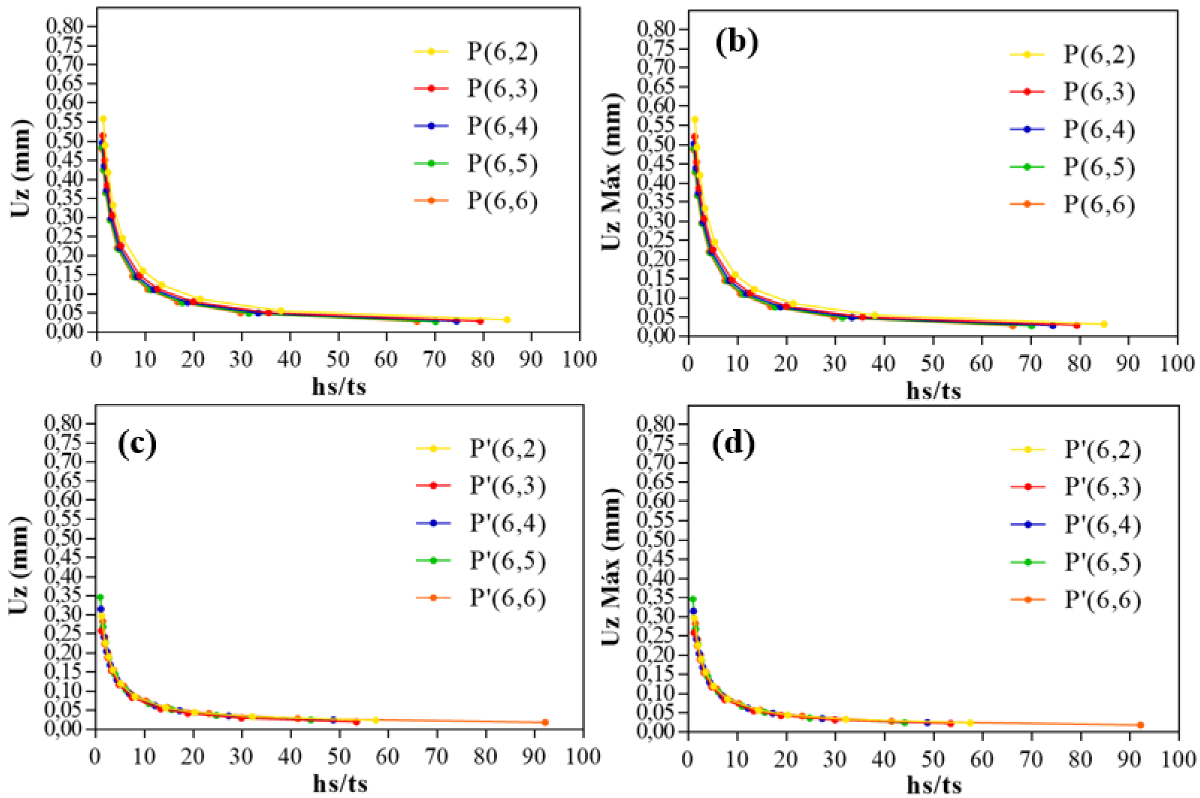


Figura 5.16 - Grupo E - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores ortogonais às bordas; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°

Quanto às deflexões centrais e máximas, foi possível notar que em algumas configurações geométricas seus valores são iguais, enquanto em outras são diferentes. Isso ocorre devido à distribuição dos enrijecedores. Para as placas com enrijecedores não inclinados a distribuição foi realizada em função do comprimento e da largura da placa. Já para as placas com enrijecedores orientados em 45°, a distribuição foi realizada em função das diagonais da placa. Portanto, sempre que um enrijecedor cruza o centro da placa a sua deflexão central é menor do que a máxima.

Para uma análise mais detalhada os melhores resultados (menores deflexões) de cada arranjo de placas dentro de cada grupo são apresentados em forma de gráfico de barras conforme a Fig. 5.17. Dessa forma foi possível estabelecer um comparativo entre as placas com enrijecedores orientados em 0° e 45°. Além do mais, a Tabela 5.3 apresenta as configurações de placas mais otimizadas, ou seja, os melhores resultados entre os melhores de cada grupo.

Observando os resultados da Fig. 5.17 (a), pode-se perceber que todas as placas do grupo A com enrijecedores não inclinados apresentaram desempenho superior quando comparadas às placas com enrijecedores orientados em 45°. Na comparação entre as placas com melhores resultados no grupo em questão, P(2,5) com h_s/t_s = 59,409 e P'(2,5) com h_s/t_s = 62,891, as diferenças foram de 34% para a deflexão central e 40% para a deflexão máxima.

Porém, ao observar os resultados do grupo B (Fig.5.17 (b)) pode-se perceber um comportamento distinto entre as deflexões centrais e máximas. As placas que apresentaram as menores deflexões foram: P(3,3) com h_s/t_s = 33,287 e P'(3,3) com h_s/t_s = 42,353. A placa com enrijecedores orientados em 0° apresentou uma deflexão central menor em comparação com a placa com enrijecedores orientados em 45°, com uma diferença de 28%. Porém, quanto à deflexão máxima a placa com enrijecedores orientados em 45° mostrou desempenho superior, apresentando uma diferença de 29,7% quando comparada com a placa com enrijecedores orientados em 0°.

Com exceção do grupo A e B, em todos os demais grupos C, D e E as placas com enrijecedores orientados em 45° apresentaram desempenho superior quando comparadas com as placas com enrijecedores em 0°, tanto para deflexão central quanto para máxima. Cabe observar a magnitude das diferenças entre as deflexões a favor das placas com enrijecedores orientados em 45° na comparação com as duas orientações de enrijecedores 0° e 45°. No grupo C as diferenças mostram-se mais sutis, porém, à medida que o número de enrijecedores aumentou, tornaram-se mais evidentes, como pode ser observado nos grupos D e E (Figs. 5.17 (d) e (e)).

No grupo C (Fig. 5.17 (c)), as placas que apresentaram os menores deslocamentos foram: P(4,5) com h_s/t_s = 41,213 e P'(4,5) com h_s/t_s = 52,577 onde a placa com enrijecedores orientados em 45º apresentou redução de 24,6% para deflexão central e 11,3% para deflexão máxima em comparação com a placa com enrijecedores orientados em 0°.

Para o grupo D (Fig. 5.17 (d)), as menores deflexões registradas foram para as placas P(5,3) com h_s/t_s = 41,137 e P'(5,3) com h_s/t_s = 58,129. Na comparação, a placa com enrijecedores orientados em 45° mostrou uma redução de 50,2% para a deflexão central e 34,8% para a deflexão máxima. No grupo E (Fig. 5.17 (e)), as menores deflexões foram para as placas P(6,6) com razão h_s/t_s = 66,348 e P'(6,6) com h_s/t_s = 92,275, onde a placa com enrijecedores orientados em 45º conduziu a uma redução de 34,6% para a deflexão central e de 33,8% para a deflexão máxima em comparação com a placa com enrijecedores orientados em 0°.

O grupo E apresentou as maiores diferenças relativas entre as deflexões no comparativo entre as placas com orientações de enrijecedores 0° e 45°. A maior diferença ocorreu entre as placas P(6,2) com h_s/t_s = 5,373 e P'(6,2) com h_s/t_s = 8,094, com um desempenho superior da placa com enrijecedores orientados em 45°, apresentando uma redução na deflexão central e máxima igual a 64,8%. Lembrando que esse resultado não foi o melhor encontrado no grupo E, e sim a maior diferença percentual entre as deflexões.

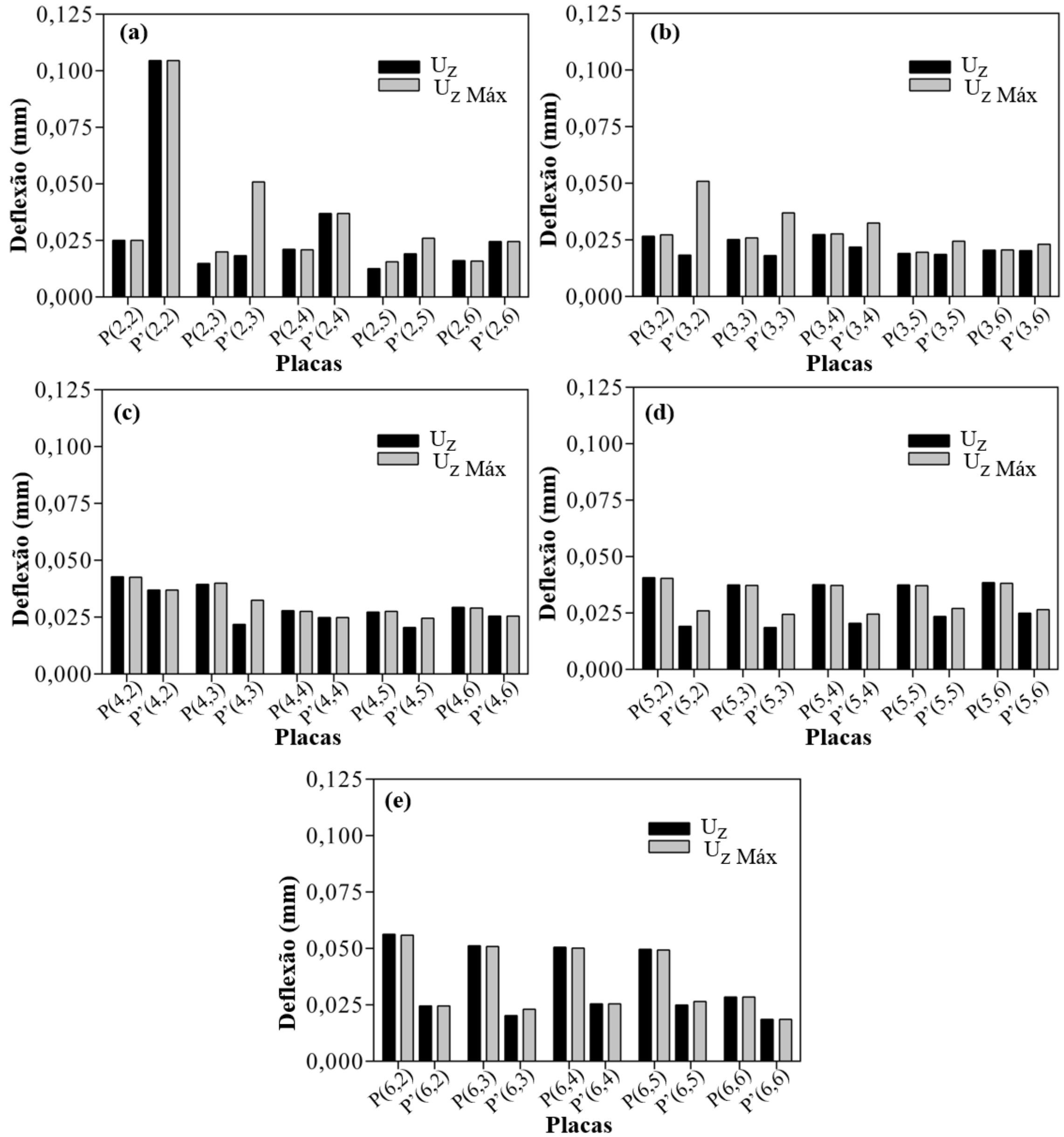


Figura 5.17 - Melhores resultados - (a) Grupo A; (b) Grupo B; (c) Grupo C; (d) Grupo D; (e) Grupo E

Tabela 5.3 - Melhores resultado de cada grupo

Grupos	Placas	h_s/t_s	U_z (mm)	$U_{zMáx}$ (mm)
A	P (2,5) 0°	59,409	0,0125	0,0156
	P' (2,5) 45°	62,891	0,0191	0,0260
B	P (3,3) 0°	33,287	0,0252	0,0259
	P' (3,3) 45°	42,353	0,0181	0,0369
C	P (4,5) 0°	41,213	0,0272	0,0276
	P' (4,5) 45°	52,577	0,0205	0,0245
D	P (5,3) 0°	41,137	0,0374	0,0372
	P' (5,3) 45°	59,129	0,0186	0,0244
E	P (6,6) 0°	66,348	0,0285	0,0282
	P' (6,6) 45°	92,275	0,0186	0,0186

A distribuição das deflexões para as placas que apresentaram os melhores resultados em cada grupo encontra-se na sequência das Figs. 5.18 até 5.22. Convém observar que as placas com enrijecedores não inclinados apresentam um padrão de deflexões uniforme (similar ao que ocorre na placa de referência), enquanto as placas com enrijecedores orientados em 45° apresentam um padrão irregular (na maioria dos casos, formado por deflexões localizadas).

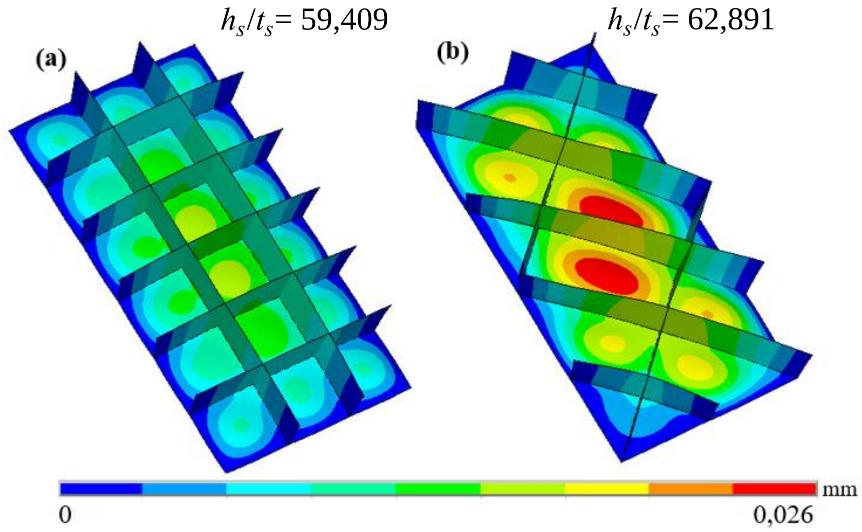


Figura 5.18 - Grupo A - Distribuição das deflexões: (a) P(2,5); (b) P'(2,5)

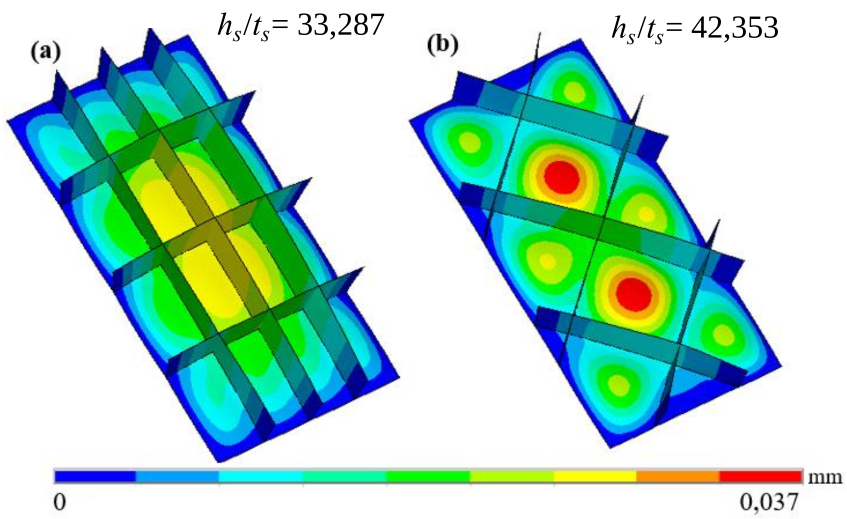


Figura 5.19 - Grupo B - Distribuição das deflexões: (a) P(3,3); (b) P'(3,3)

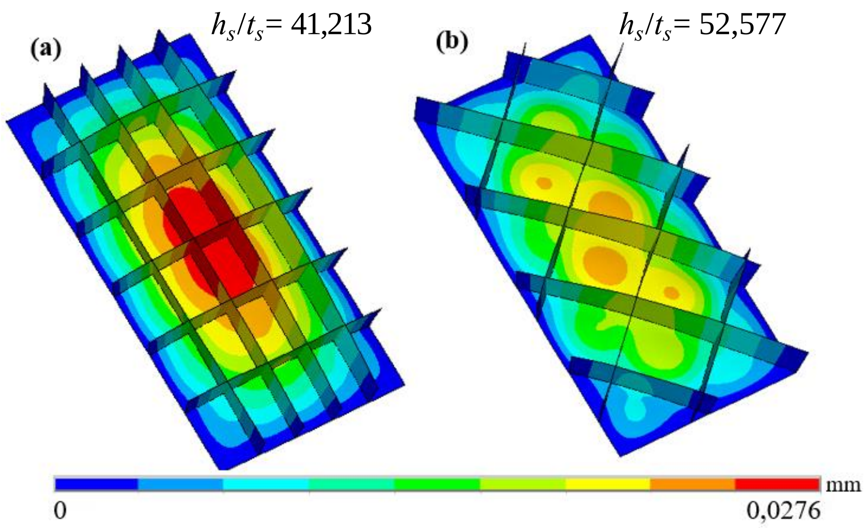


Figura 5.20 - Grupo C - Distribuição das deflexões: (a) P(4,5); (b) P'(4,5)

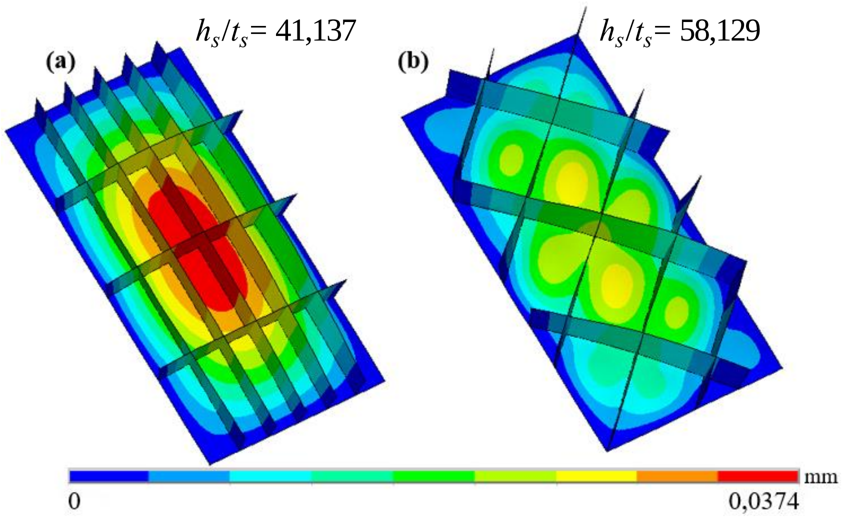


Figura 5.21 - Grupo D - Distribuição das deflexões: (a) P(5,3); (b) P'(5,3)

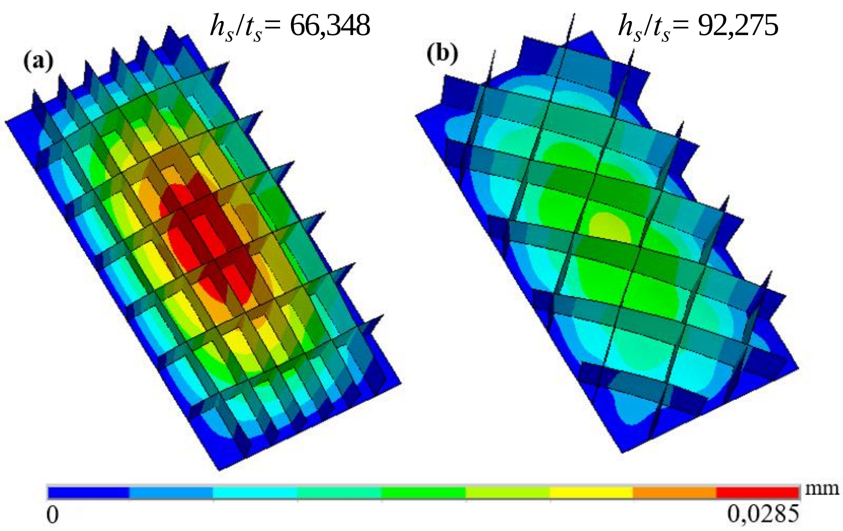


Figura 5.22 - Grupo E - Distribuição das deflexões: (a) P(6,6); (b) P'(6,6)

Por fim, outra importante observação indica que um número maior de enrijecedores não necessariamente conduz a menores deflexões, tanto para as placas com enrijecedores ortogonais às bordas quanto para as placas com enrijecedores orientados em 45°. Isso se deve à restrição de volume dos enrijecedores imposta pelo método Design Construtal. Uma vez que o volume é mantido constante, à medida que o número de enrijecedores aumenta, suas alturas tornam-se menores, reduzindo o momento de inércia da seção transversal e, por consequência, a rigidez da placa.

5.2 Estudo de Caso II – Enrijecedores Trapezoidais

De modo análogo ao estudo de caso anterior, todas as placas simuladas são de aço com módulo de elasticidade E = 200 GPa e coeficiente de Poisson v = 0,3. As condições de contorno foram de bordas simplesmente apoiadas com carregamento transversal uniforme igual 10 kN/m², considerando ϕ = 0,3.

5.2.1 Enrijecedores Trapezoidais - Etapa I

A primeira etapa destinou-se a encontrar qual a melhor razão entre as bases dos enrijecedores trapezoidais. Para isso, a placa com três enrijecedores trapezoidais em cada direção $P_T(3,3)$ foi adotada. Uma vez definida a placa, os graus de liberdade que relacionam as bases dos enrijecedores *c/a* e *d/b* foram variados de 1 até 0,1 com incremento de 0,1. O valor da espessura dos enrijecedores foi mantido constante, sendo adotado t_s = 19,21 mm. Do mesmo modo o volume total de material da placa, sua largura a = 2000 mm e comprimento b = 1000 mm são preservados em relação à placa de referência

Teste de convergência de malha para etapa I

Previamente, foi realizado um teste de independência de malha para definir o tamanho dos elementos finitos que seriam utilizados nas simulações, conforme mostra a Fig. 5.23. Para tal, foi escolhido o arranjo geométrico com maior número de enrijecedores e maior altura h_s = 128,86 mm, formados pela razão *c/a* e *d/b* igual a 0,1.

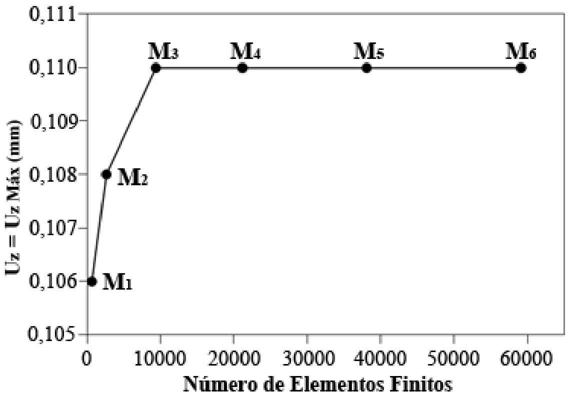


Figura 5.23 - Teste de convergência de malha para Etapa I

Seguindo o mesmo critério apresentado na Tab. 5.1 no estudo de caso anterior, foram adotadas seis malhas, as quais sofreram refinamentos sucessivos até encontrar um valor de convergência, conforme mostra a Fig. 5.23. A malha M_3 com elemento finito de 25 mm foi adotada, com um acréscimo de 10% no refinamento para assegurar uma melhor precisão. Sendo assim, a malha final foi por elementos de 22,5 mm, totalizando 11.505 elementos (ver Fig. 5.24).

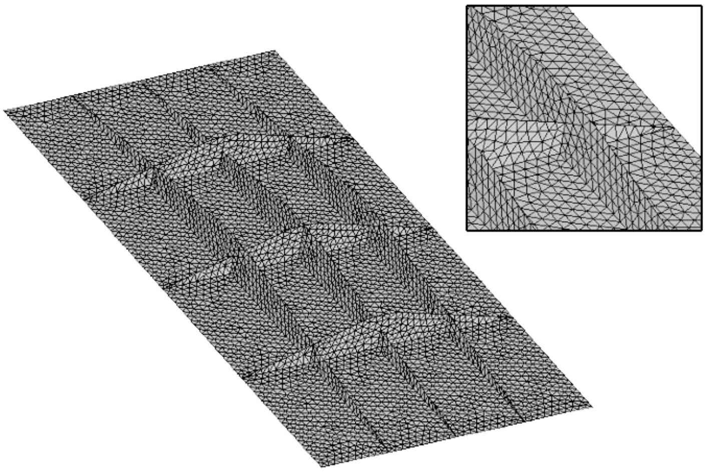


Figura 5.24 - Malha independente: Placa $P_T(3,3)$ razão c/a e d/b igual a 0,1

Análise dos resultados para etapa I

A análise das placas com enrijecedores começou estabelecendo relações *c/a* e *d/b* iguais a 1, sendo reduzidas até o valor de 0,1. Isso significa que os enrijecedores iniciaram com geometria retangular, e à medida que as relações *c/a* e *d/b* foram diminuindo a geometria dos enrijecedores adquiriu a forma trapezoidal. A cada nova geometria para os enrijecedores os valores de deflexão central e máxima foram obtidos numericamente. Estes resultados estão apresentados na Fig. 5.25, assim como as configurações deformadas para as razões *c/a* e *d/b* iguais à 0,1, 0,5 e 1 são apresentadas na Fig. 5.26.

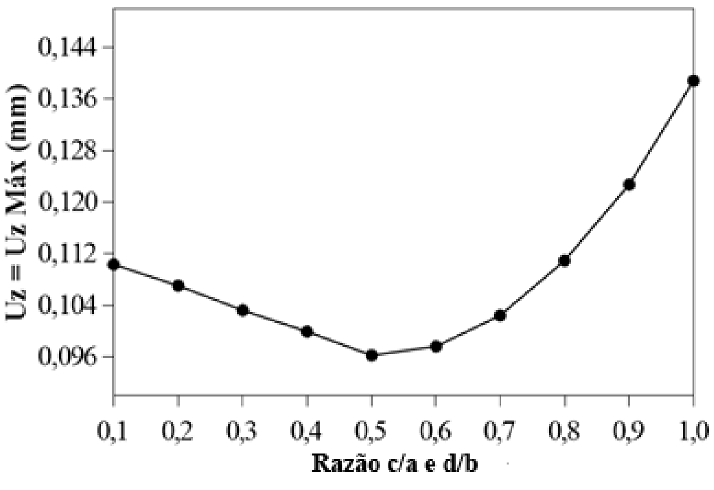


Figura 5.25 - Resultados da etapa I

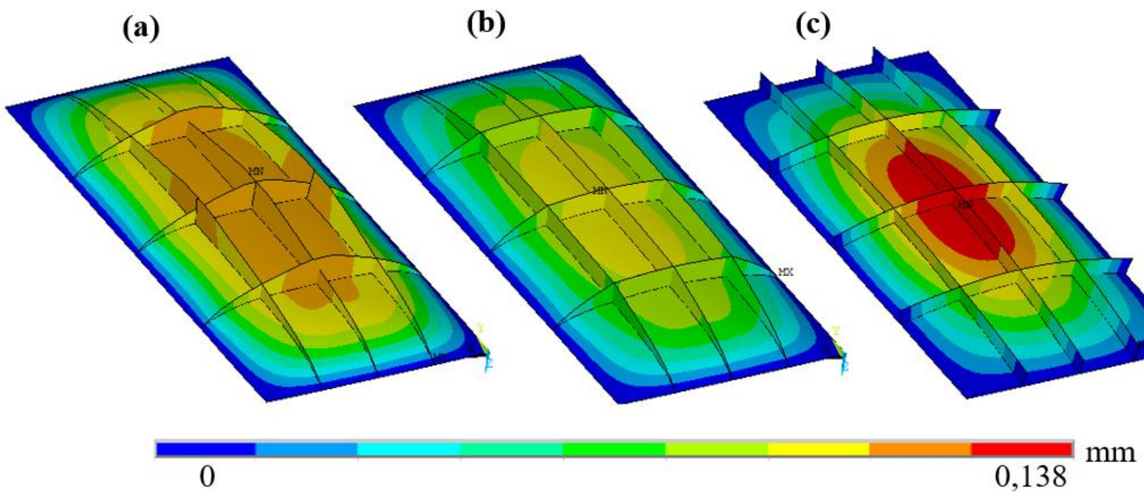


Figura 5.26 - Configurações deformadas: (a) *c/a e d/b* = 0,1 ; (b) *c/a* e *d/b* = 0,5; (c) *c/a e d/b* = 1.

Os resultados apontaram uma redução significativa da deflexão com a diminuição da razão entre as bases dos enrijecedores trapezoidais, uma vez que, ao manter-se o volume de material constante, a diminuição da razão entre as bases causa aumento da altura, influenciando no momento de inércia dos reforços. Porém, nota-se que após a razão *c/a* e *d/b* atingir o valor igual a 0,5 as deflexões aumentam. Portanto, um valor intermediário para a razão *c/a* e *d/b* conduz a melhores resultados quanto às deflexões.

5.2.2 Enrijecedores Trapezoidais - Etapa II

Com base nos resultados apresentados na Etapa I, definiu-se que a base menor dos enrijecedores trapezoidais terá metade do comprimento maior. Sendo assim, considerou-se a base maior c = 1000 mm e a base menor d = 500 mm. As demais dimensões foram as mesmas consideradas na Etapa I, com comprimento a = 2000 mm, largura b = 1000 mm e espessura dos enrijecedores t_s = 19,21 mm.

Teste de convergência de malha para etapa II

Novamente, considerando o critério de refinamento de malha apresentado na Tab. 5.1 foi realizado um teste de independência adotando a geometria de placa com enrijecedores trapezoidais mais complexa, $P_T(6,6)$ com altura h_s = 48,075 mm. Conforme Fig. 5.27, nota-se que a partir da malha M_3 com elementos de tamanho 25 mm (ver Fig. 5.28) os valores de deflexão mantiveram-se constantes, sendo essa a malha independente, a qual sofreu um refinamento adicional de 10% para garantir uma margem de precisão. Dessa forma a malha final foi configurada por elementos de 22,5 mm, totalizando 12.475 elementos finitos.

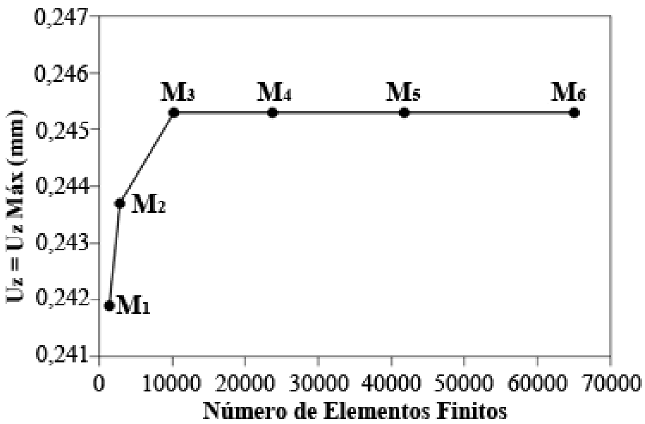


Figura 5.27 - Teste de convergência de malha para Etapa II

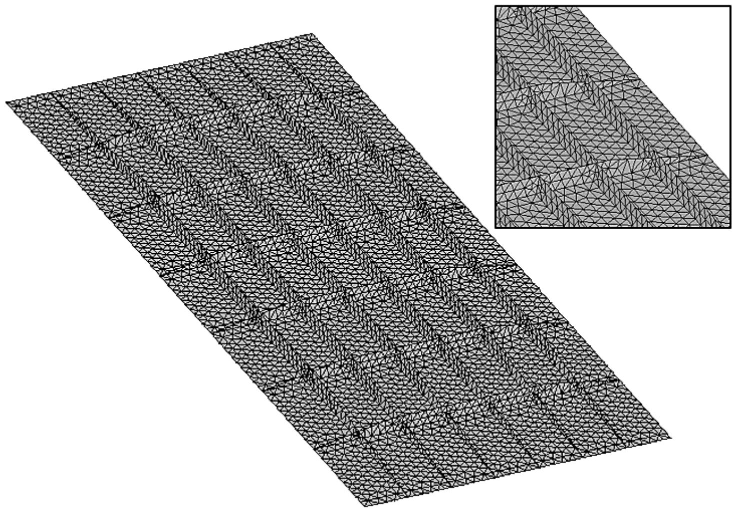


Figura 5.28 - Malha independente: Placa $P_T(6,6)$ com h_s = 48,075

Análise dos resultados para etapa II

Os resultados para as deflexões centrais U_z e máximas $U_{z\text{Máx}}$ são apresentados em forma de gráfico de colunas na sequência das Figs. 5.29 até 5.33. Dessa forma, foi possível analisar o comportamento das placas com enrijecedores trapezoidais em relação às respectivas placas com enrijecedores retangulares orientados em 0°, ou seja, aquelas com mesmo número de enrijecedores e espessura t_s = 19,21 mm (analisadas no Estudo de Caso I). Cabe destacar que os enrijecedores trapezoidais foram sempre considerados nas direções longitudinal e transversal às bordas da placa, ou seja, também orientados em 0°.

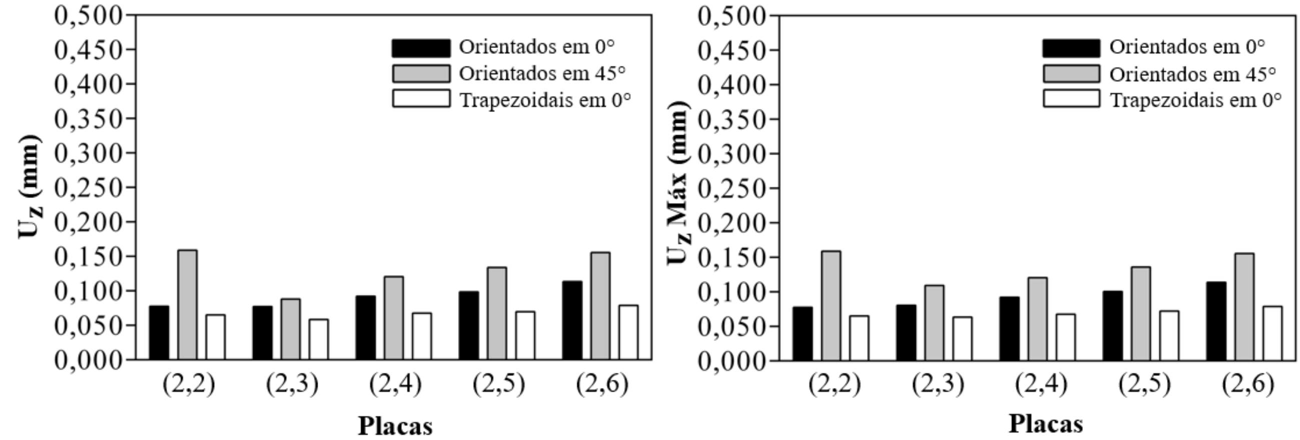


Figura 5.29 - Grupo A: Comparação de resultados para enrijecedores trapezoidais

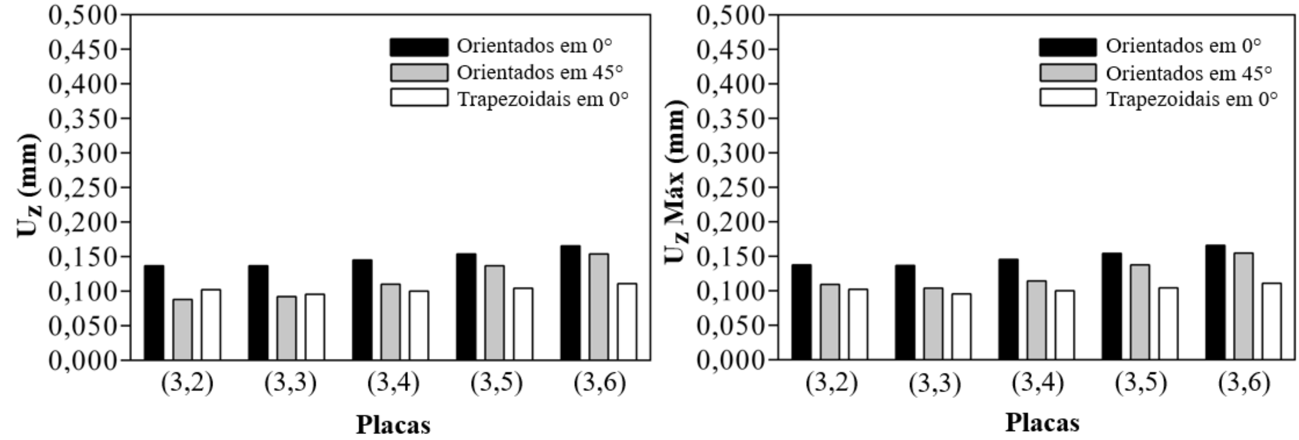


Figura 5.30 - Grupo B: Comparação de resultados para enrijecedores trapezoidais

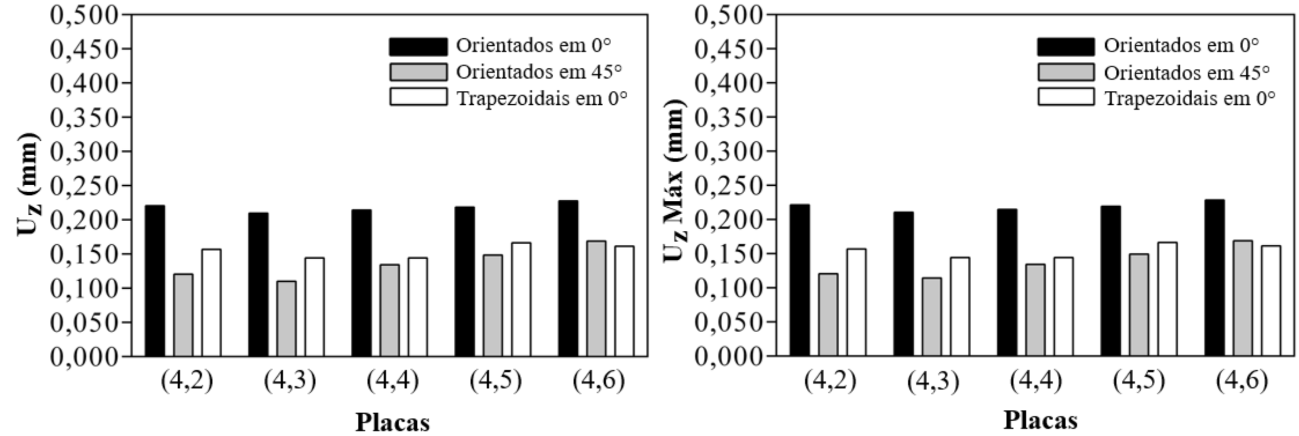


Figura 5.31 - Grupo C: Comparação de resultados para enrijecedores trapezoidais

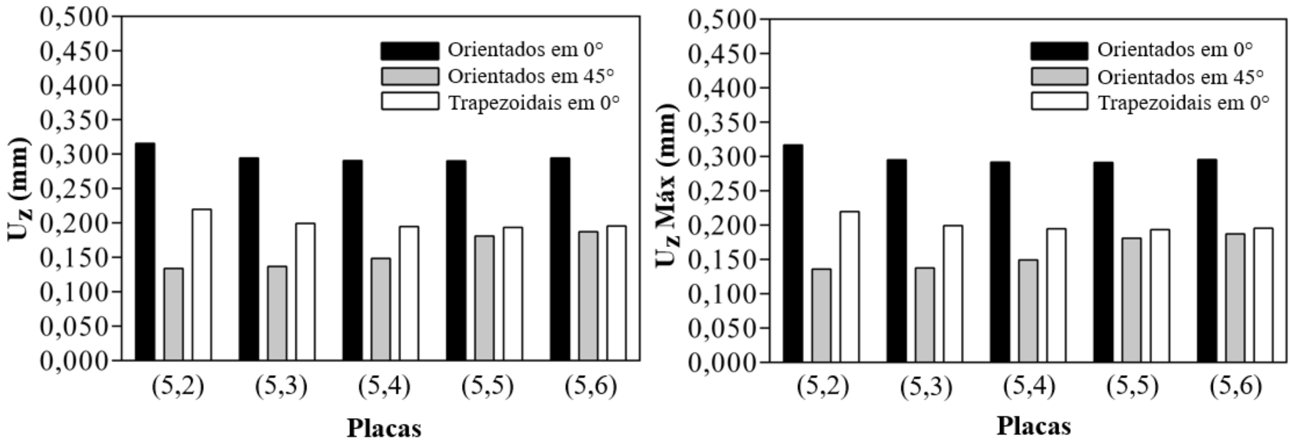


Figura 5.32 - Grupo D: Comparação de resultados para enrijecedores trapezoidais

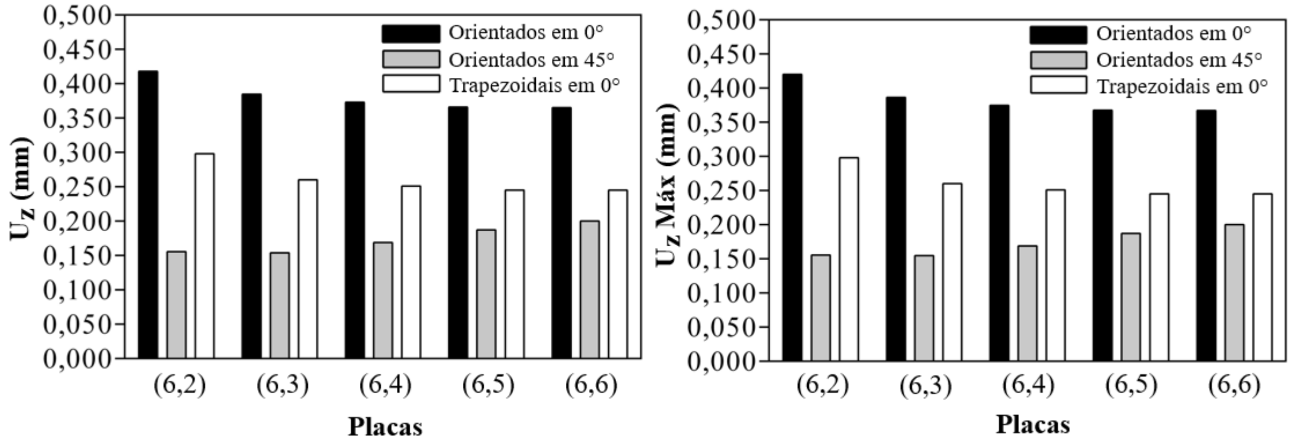


Figura 5.33 - Grupo E: Comparação de resultados para enrijecedores trapezoidais

Como primeira observação baseada nas Figs. 5.29 até 5.33, percebe-se uma melhora significativa do comportamento mecânico em relação às deflexões comparando a placa de referência com o melhor resultado de placa com enrijecedores trapezoidais $P_T(2,3)$, atingindo uma redução de 91,57 % para a deflexão central e 90,9% para deflexão máxima.

Foi possível notar também que todos os resultados de placas com enrijecedores trapezoidais foram melhores quando comparados com os enrijecedores retangulares orientados em 0°. Entretanto, comparando as placas com enrijecedores trapezoidais com as placas com enrijecedores retangulares orientados em 45° os resultados foram superiores apenas para os arranjos do grupo A e do grupo B.

Comparando a placa $P_T(2,3)$, que apresentou melhor resultado, com a respectiva placa com enrijecedores retangulares orientados em 0° P(2,3), tem-se uma redução a favor da placa com enrijecedores trapezoidais na ordem de 24,13% para a deflexão central e 21,36% para a deflexão máxima. Contudo, ao comparar a placa $P_T(2,3)$ com a placa P'(2,3), a mesma apresentou redução de 33,56% para a deflexão central e 42,1% para a máxima. As configurações deformadas das placas com melhor desempenho podem ser observadas na Fig. 5.34.

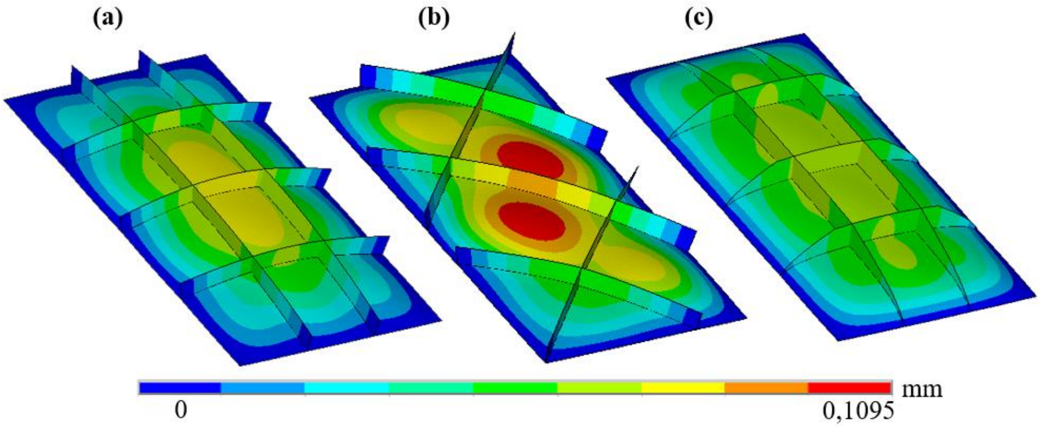


Figura 5.34 - Configurações deformadas: (a) P(2,3) ; (b) P'(2,3) ; (c) P_T(2,3).

Tratando-se de diferenças percentuais entre as deflexões, a maior registrada entre placas com enrijecedores trapezoidais e placas com enrijecedores retangulares orientados em 0° foram para as placas P_T(5,6) e P(5,6), onde a placa com enrijecedores trapezoidais mostrou redução de 33,55% para deflexão central e 33,86%. No entanto, no comparativo entre as placas com enrijecedores trapezoidais e retangulares orientados em 45°, as maiores diferenças percentuais foram a favor dos enrijecedores retangulares orientados em 45°, onde a placa P'(6,2) em comparação com a placa P_T(6,2) apresentou redução de 47,75% para deflexão central e máxima.

Em linhas gerais, percebe-se que os enrijecedores trapezoidais mostram-se superiores quanto à redução das deflexões quando comparados aos enrijecedores retangulares orientados em 0°, e em alguns casos quando comparados com os enrijecedores orientados em 45°.

6 CONCLUSÕES

Utilizando modelos computacionais de acordo com o método Design Construtal, foi possível realizar uma análise relacionada às deflexões em placas retangulares enrijecidas pela variação de diversos parâmetros geométricos, orientação e geometria de enrijecedores, que incluem enrijecedores retangulares orientados em 0° e 45°, assim como, enrijecedores trapezoidais.

Primeiramente pode-se concluir que transformar uma parcela de material de uma placa não reforçada em enrijecedores melhora, consideravelmente, o comportamento mecânico, reduzindo as deflexões. Além disso, foi possível atestar que as deflexões centrais e máximas nem sempre são iguais devido à distribuição dos enrijecedores no plano das placas. Isso ocorre geralmente nos arranjos que tem pelo menos um enrijecedor cruzando o centro da placa, o que nestes casos, faz com que a deflexão central seja menor do que a deflexão máxima.

Além disso, observou-se a expressiva influência de h_s/t_s (razão entre altura e espessura dos enrijecedores) na rigidez das placas, tanto para os enrijecedores orientados em 0° (não inclinados), quanto para aqueles com orientação em 45° (inclinados), bem como, percebeu-se que um número maior de enrijecedores para ambas as orientações, não necessariamente reduz as deflexões.

Quanto à orientação dos enrijecedores, os resultados mostraram que em grande parte dos arranjos, orientá-los em 45° pode ser mais vantajoso em comparação com a orientação de 0°, podendo alcançar reduções significativas nas deflexões, principalmente para as frações volumétricas ϕ iguais a 0,1, 0,2 e 0,3. Por exemplo, as placas P(6,2) com h_s/t_s = 28,331 e P'(6,2) com h_s/t_s = 42,650 para ϕ = 0,1, onde a placa com enrijecedores orientados em 45° mostrou redução de 60,8% na deflexão central e máxima.

Para enrijecedores trapezoidais, concluiu-se que seu melhor desempenho quanto à redução das deflexões foi quando a base menor dos enrijecedores apresentava metade do comprimento da base maior. Fundamentado nesse resultado, após a configuração de diversos arranjos, foi possível notar que os enrijecedores trapezoidais apresentaram considerável melhora no comportamento mecânico das placas, embora haja necessidade de ampliar-se o estudo para obtenção de respostas mais conclusivas.

Em comparação com os enrijecedores retangulares com orientação em 0°, os trapezoidais mostram-se mais eficazes em todas as simulações realizadas atingindo reduções nas deflexões centrais e máximas em alguns casos maiores do que 30%. Entretanto, ao comparar com os enrijecedores orientados em 45°, os enrijecedores trapezoidais mostram-se mais vantajosos em apenas alguns arranjos.

Portanto, conclui-se que o método Design Construtal associado à modelagem computacional e à técnica de Busca Exaustiva é uma excelente ferramenta para a análise do comportamento mecânico de placas. Além disso, fica notória a influência positiva que a geometria e a orientação dos enrijecedores provoca na rigidez das placas, demostrando a relevância desse tipo de estudo.

6.1 Proposta de continuidade

Em trabalhos futuros podem ser consideradas as seguintes propostas:

1. Considerar diferentes frações volumétricas ϕ, com valores intermediários aos valores considerados nesta dissertação, bem como, outras condições de contorno.
2. Considerar outras orientações de enrijecedores retangulares.
3. Ampliar a análise de enrijecedores trapezoidais aplicando o método Design Construtal, variando os valores de ϕ, assim como, o número de enrijecedores e os valores de h_s/t_s.
4. Analisar a influência de enrijecedores trapezoidais em diferentes orientações.
5. Aplicar o método Design Construtal para investigar o comportamento de placas com enrijecedores com diferentes geometrias de seção transversal, tais como, perfis em I, T ou bulbo.
6. Considerar as propostas acima quanto à influência de tensões provenientes do carregamento transversal uniforme.
7. Realizar análise não-linear, visando determinar a tensão última, envolvendo alguma das propostas acima.

6.2 Produção Intelectual

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho alguns resultados foram publicados em diferentes formatos, conforme apresentado abaixo:

6.2.1 Publicação em periódicos

1. Método design construtal aplicado à avaliação geométrica de placas retangulares com enrijecedores inclinados submetidas à carregamento transversal uniforme. **Revista de Tecnologia de Ourinho (RETEC)**, v.11, p. 51-64, 2018.
2. Constructal design applied to geometrical evaluation of rectangular plates with inclined stiffeners subjected to uniform transverse load. **Research on Engineering Structures and Materials (RESM)**, 2019, (aceito para publicação).

6.2.2 Trabalhos completos em anais de congressos

1. Modelagem computacional e método design construtal aplicados à avaliação geométrica de placas retangulares submetidas à carregamento transversal uniforme com enrijecedores trapezoidais**. XXI Encontro Nacional de Modelagem Computacional e**

IX Encontro de Ciências e Tecnologia de Materiais, 2018, Búzios - RJ. http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/enmc-ectm/issue/view/229

2. Método design construtal aplicado à avaliação geométrica de placas retangulares com enrijecedores inclinados submetidos à carregamento transversal uniforme. **VIII Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica e VIII Conferência Sul em Modelagem Computacional, 2018, Rio Grande – RS**. https://mcsulsemengo2018.weebly.com/publicaccedilatildeo-dos-trabalhos aceitos.html

6.2.3 Resumos expandidos em anais de congressos

1. Constructal design applied to the geometric evaluation of steel plates subjected to uniform transverse load with rectangular and trapezoidal stiffeners. **Constructal Law & Second Law Conference, 2019, Porto Alegre – RS**.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMANTE, D. A. M. C, 2006. **Imperfeições de fabricação na construção naval e offshore**. Trabalho de conclusão de Curso em Engenharia Naval, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

ANSYS Inc., **ANSYS User's Manual: Analysis Systems**, 2012.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado – Vol. II**, Dunas, Rio Grande, 2014.

CEMBRA, 2012. **O Brasil e o mar no século XXI** – **Relatório aos tomadores de decisão do País**. Centro de Excelência para o Mar Brasileiro, Rio de Janeiro.

BANAI, L.; PEDATZUR O. Computer Implementation of an Orthotropic Plate Model for Quick Estimation of the Maximum Deflection of Stiffened Plates. **Ships and Offshore Structures**, v. 1, n. 4, p. 323–333, 2010. (doi: 10.1533/saos.2005.0135).

BEJAN, A.; LORENTE, S. Constructal Theory of generation of configuration in nature and engineering. **Journal of Applied Physics**, v. 100, p. 01-27, 2006.

BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory**. Wiley, Hoboken, 2008.

BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in Nature: How the Constructal Law governs evolution in biology, physics, technology, and social organizations**. Doubleday, New York, 2012.

BERNARDINHO, B. N. S.,2016. **Aplicação da teoria de placas na análise de estruturas offshore**. Rio de Janeiro. Projeto de graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

CUNHA, M. L.; TROINA, G. S.; DOS SANTOS, E. D.; ROCHA, L. A. O.; ISOLDI, L. A. Computational Modeling and Constructal Design Method Applied to the Geometric Optimization of Stiffened Steel Plates Subjected to Uniform Transverse Load. **Engineering Structures and Materials**, 2018. (doi: http://dx.doi.org/10.17515/resm2017.18st1118).

DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A.; GOMES, M. N.; ROCHA, L. A. O. The Constructal Design Applied to Renewable Energy Systems. In: Eduardo Rincón-Mejía; Alejandro de las Heras (Org.). **Sustainable Energy Technologies**. 1ed.Boca Raton: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2017, v. 1, p. 63-87.

FERNANDES, G. R. A BEM Formulation for Linear Bending Analysis of Plates Reinforced by Beams Considering Different Materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, p. 1132-1140, 2009.

FILHO, A. V. **Elementos Finitos – A Base da Tecnologia CAE**. Érica, Taubaté, São Paulo, Brasil, 2000.

GEORGE, P. L. **Automatic Mesh Generation: Application to Finite Elements Method**. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1991.

GHAVAMI, K.; KHEDMATI, M. R. Nonlinear large deflection analysis of stiffened plates. **Finite Element Analysis - Applications in Mechanical Engineering**, Dr. Farzad Ebrahimi (Ed.), InTech, 2012. (doi: 10.5772/48368).

HAFTKA R. T; GÜRDAL Z. **Elements of structural optimization.** Solid Mechanics and Its Applications, v.11, Springer, 1992. (doi: 10.1007/978-94-011-2550-5).

HASAN, M. M. Optimum Design of Stiffened Square Plates for Longitudinal and Square Ribs. **Al-Khwarizmi Engineering Journal**, v. 3, n. 3, p. 13-30, 2007.

KHOURY, R.; HARDER, D.W. **Numerical Methods and Modelling for Engineering**. Springer, 2016.

LIMA, J. P., 2016. **Análise numérica da flambagem de placas finas de aço com enrijecedores através do método design construtal**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Oceânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. Springer, New York, 2006.

MANRIQUE, L. J. C., 1989. **Colapso de painéis planos enrijecidos**. Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MARCELIN, J. L. Genetic Optimization of Stiffened Plates and Shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 54, p. 1079–1088, 2001.

MUKHOPADHYAY, M. Stiffened plate plane stress elements for the analysis of ships' structures. **Computers & Structures**, v.13, p. 563-573, 1981.

MARINHO, I. J. P., 2002. **Projeto ótimo de estruturas metálicas de arquibancadas reutilizáveis via ANSYS**. Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Civil, Pontíficia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

OKUMOTO, Y.; TAKEDA, Y.; MANO, M.; OKADA, T. **Design of Ship Hull Structures - A Practical Guide for Engineers**. Springer, Heidelberg, 2009.

OROZCO, J. C. G.,2009. **Contribuição ao Estudo de Painéis Reforçados: Comparação entre o Método Da Chapa Ortotrópica e o Método Dos Elementos Finitos.** Dissertação de mestrado em Engenharia Naval e Oceânica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

PENG, L. X.; KITIPORNCHAI, S.; LIEW, K. M. Analysis of Rectangular Stiffened Plates Under Uniform Lateral Load Based on FSDT and Element-Free Galerkin Method. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 47, p. 251–276, 2005.

RAMASWAMY, R. S. B.,1999. **Optimal Design of Stiffened Plates.** Dissertação de Mestrado em Ciência Aplicada, Instituto de Estudos Aeroespaciais, Universidade de Toronto, Toronto, Canadá.

RAPPAZ, M.; BELLET, M.; DEVILLE, M. **Numerical Modeling in Materials Science and Engineering**. Springer, Heidelberg, Germany, 2010.

REIS, A. H. Constructal theory: from engineering to physics, and how systems flow develop shape and structure. **Applied Mechanics Reviews,** v. 59, p. 269-281, 2006.

ROSSOW, M. P.; IBRAHIMKHAIL, A. K. Constraint Method Analysis of Stiffened Plates. **Computers & Structures**, v. 8, p. 51- 60, 1978.

SALOMON, A., 2000. **An Evaluation of Finite Element Models of Stiffened Plates.** Department of Ocean Engineering, Degree of Master of Science in Naval Architecture and Marine Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

SAPOUNTZAKIS, E. J.; KATSIKADELIS, J. T. Analysis of Plates Reinforced with Beams. **Computational Mechanics**, v. 26, p. 66-74, 2000.

SCHADE, H.A. The Orthogonally Stiffened Plate Under Uniform Lateral Load. **Journal of Applied Mechanics**, v.7(4), p. 139-158, 1940.

SCHADE, H.A. Design Curves for Cross-Stiffened Plating Under Uniform Bending Load. **Transactions: Society of Naval Architects and Marine Engineers**, v. 49, p. 154-182, 1941.

SCHADE, H.A. The Effective Breadth of Stiffened Plating Under Bending Loads. **Transactions: Society of Naval Architects and Marine Engineers**, v. 59, p. 127-141, 1951.

SHANMUGAM, N. E.; DONGQI, ZHU.; CHOO, Y.S.; AROCKIASWAMY, M. Experimental Studies on Stiffened Plates Under In-Plane Load and Lateral Pressure. **Thin-Walled Structures**, v. 80, p. 22-31, 2014.

SILVA, H. B. S., 2010. **Análise Numérica da Influência da Excentricidade na Ligação Placa-Viga em Pavimentos Usuais de Edifícios**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de São Carlos.

SINGH, A.,2013. **Analysis of Stiffened Rectangular Plate.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Nacional de Tecnologia, Rourkela, Odisha, Índia.

SINGH, D. K.; DUGGAL S. K.; PAL, P. Analysis of Stiffened Plates using FEM – A Parametric Study. **International Research Journal of Engineering and Technology**, v. 2, n. 4, p. 1650-1656, 2015.

SINGH, R. R.; PAL, P. Analysis of stiffened isotropic and composite plate. **International Research Journal of Engineering and Technology**, v. 3, n. 2, 2016.

SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Edusp, São Paulo, 2003.

STEINHAUSER, M. O. **Computational Multiscale Modeling of Fluids and Solids**. Springer, Freiburg, Germany, 2007.

SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.

TACREDI. T. P.,2008. **Otimização Multidisciplinar Distribuída Aplicada a Projetos de Engenharia**. Tese de Doutorado em Engenharia Naval e Oceânica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

TANAKA, M.; BERCIN, A. N. Static bending analysis of stiffened plates using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 21, p. 147-154, 1998.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; OIDA, S. A Boundary Element Method Applied to the Elastostatic Bending Problem of Beam-stiffened Plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, p. 751-758, 2000.

THOMPSON, M. K.; THOMPSON, J. M. **ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis**. Elsevier, Kidlington, United Kingdom, 2017.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw Hill, 1959.

TROINA, G. S.,2017. **Modelagem Computacional e Método Design Construtal Aplicados à Otimização Geométrica de Placas Finas de Aço com Enrijecedores Submetidas a Carregamento Transversal Uniforme.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Oceânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.

UGURAL, A. C. **Stresses in beams, plates, and shells**. 3. ed. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2010.

VAN DO, V. N.; LEE C. Nonlinear Analyses of FGM Plates in Bending by Using Aa Modified Radial Point Interpolation Mesh-Free Method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 57, p. 1-20, 2018.

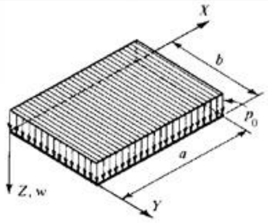
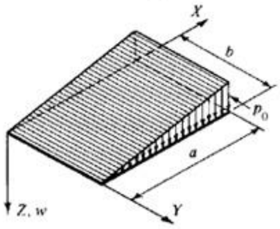
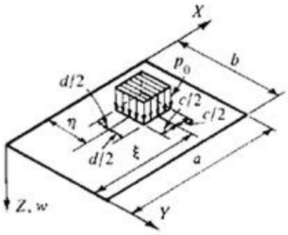
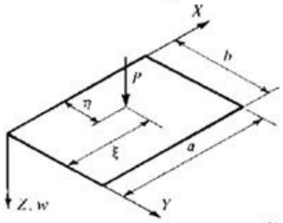
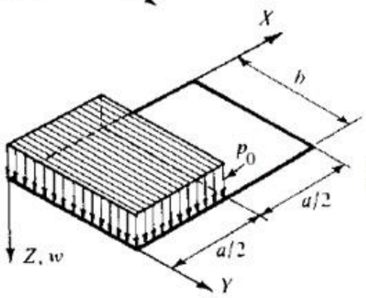
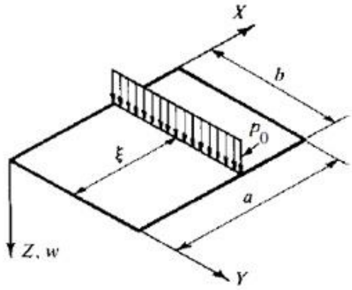
VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications**. The Pennsylvania State University, University Park. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Elsevier, Rio de Janeiro, Brasil, 2011.

YOUSIF, M. V.; NAIEF, N. K. M.; HAMAD, Y. M. Optimum Height of Plate Stiffener under Pressure Effect. **The 1st Regional Conference of Eng. Sci. NUCEJ Spatial ISSUE**, v.11, n .3, p. 459-468, 2008.

YASUHISA, Y.; YU, T.; MASAKI, M.; TETSUO, O. **Design of Ship Hull Structures: A Practical Guide for Engineers**. Springer. Takaya, Yokohama, and Tokyo, 2009.

APÊNDICE A – Tabela de expansão de cargas transversais $p_z(x,y)$ em série trgonométrica dupla

Carga	Coeficientes de expansão
	$P_{mn} = \dfrac{16p_0}{\pi^2 mn}$ para $m, n = 1, 3, 5, \ldots$
	$P_{mn} = -\dfrac{8p_0 \cos m\pi}{\pi^2 mn}$ para $m, n = 1, 2, 3, \ldots$
	$P_{mn} = \dfrac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin\dfrac{m\pi\xi}{a} \sin\dfrac{n\pi\eta}{b} \times \sin\dfrac{m\pi c}{2a} \sin\dfrac{n\pi d}{2b}$ para $m, n = 1, 2, 3, \ldots$
	$P_{mn} = \dfrac{4P}{ab} \sin\dfrac{m\pi\xi}{a} \sin\dfrac{n\pi\eta}{b}$ para $m, n = 1, 2, 3, \ldots$
	$P_{mn} = \begin{cases} \dfrac{8p_0}{\pi^2 mn} & \text{para } m, n = 1, 3, 5, \ldots \\ \dfrac{16p_0}{\pi^2 mn} & \text{para } \begin{cases} m = 2, 6, 10, \ldots \\ n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \end{cases}$
	$P_{mn} = \dfrac{8p_0}{\pi a n} \sin\dfrac{m\pi\xi}{a}$ para $\begin{cases} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

A. 1 - Tabela de expansão de cargas transversais em série trigonométrica dupla de Fourier (Fonte: Adaptada Szilard, 2004)

APÊNDICE B - Solução da placa apresentada em 3.31 pelo método de Navier

E = 210 Gpa

v = 0,3

a = 1 m

b = 2 m

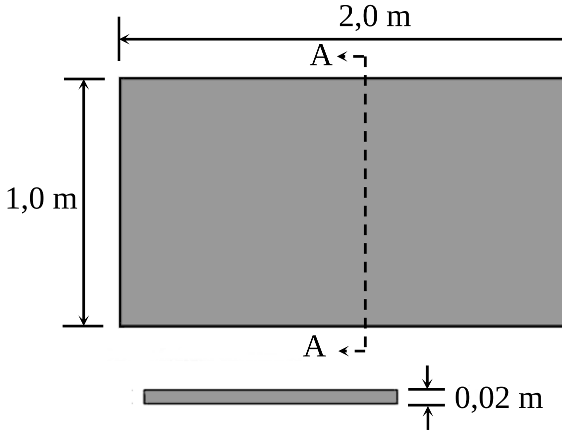
t = 0,02 m

q = 10 kN/m²

k = 20

x = 0,5 m

y = 1 m



a) Considerando as equações abaixo :

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$p_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b}$$

b) Subistituindo as equações acima $w(x,y)$ e $p_z(x,y)$ na equação governante de placas chega-se:

$$W_{mn} = \frac{p_{mn}}{D\pi^4\left[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)\right]^2}$$

onde p_{mn} é o coeficiente de expansão para placa com carregamento transversal uniforme apresentado no Apêndice A:

$$p_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn}$$

c) A equação dos que representa a deflexão transversal fica da seguinte forma

$$w(x,y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \frac{p_{mn}}{\left[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)\right]^2} sin \frac{m\pi x}{a} sin \frac{n\pi y}{b}$$

d) Calculando a rigidez:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - v^2)} = \frac{210 \text{ x } 10^6 . \ 0{,}02^3}{12(1 - 0{,}2^2)} = 153{,}846$$

e) Substituindo D e p_{mn} em $w(x,y)$ e solucionando-a para os valores de x e y que representam as coordenadas do centro da placa:

$$w(x,y) = \frac{1}{153{,}846\pi^4} \sum_{m=1}^{20} \sum_{n=1}^{20} \frac{\frac{16.10}{\pi^2 mn}}{\left[(m^2/1^2) + (n^2/2^2)\right]^2} sin \frac{m\pi 0{,}5}{1} sin \frac{n\pi 1}{2}$$

$w(x,y)$ = 0,000658 m ou 0,658 mm

APÊNDICE C - Solução da placa apresentada em 3.31 por energia potencial mínima (método de Rayleigh-Ritz)

E = 210 Gpa

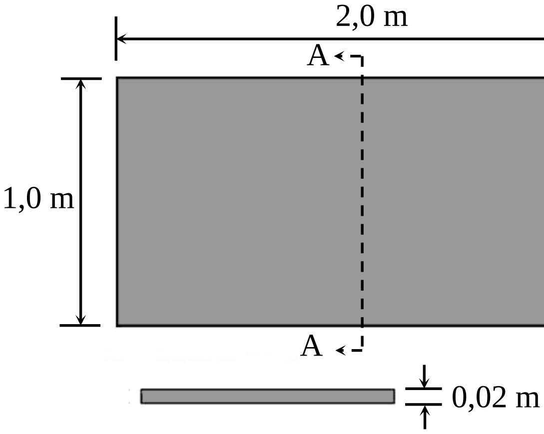
v = 0,3

a = 1 m

b = 2 m

t = 0,02 m

q = 10 kN/m²



a) Dada a equação da energia potencial da placa:

$$\Pi = \iint_A \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - p_z w \right] \right\} dxdy$$

b) Calculando a rigidez:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-v^2)} = \frac{210 \text{ x } 10^6 .\ 0{,}02^3}{12(1-0{,}2^2)} = 153{,}846$$

c) Adotadas as funções que satisfazem as condições de contorno:

$$w_1(x) = 1 - \left(\frac{2x}{a} - 1 \right)^2 \qquad w_2(x) = 1 - \left(\frac{2x}{a} - 1 \right)^4$$

$$w_1(y) = 1 - \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \qquad w_2(y) = 1 - \left(\frac{2x}{b} - 1 \right)^4$$

$$\widetilde{w}(x,y) = C_1 . w_1(x) . w_1(y) + C_2 . w_1(x) . w_2(y) + C_3 . w_2(x) . w_1(y) + C_4 . w_2(x) . w_2(y)$$

d) Substituindo a função $\widetilde{w}(x,y)$ na equação da energia potencial total:

$$\Pi = \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - p_z \tilde{w} \right] \right\} dxdy$$

e) Aplicando a primeira derivada:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_1} = \frac{357306}{23} C_1 + \frac{557011}{30} C_2 + \frac{135033}{5} C_3 + \frac{127231}{4} C_4 - \frac{80}{9} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_2} = \frac{557011}{30} C_1 + \frac{131157}{5} C_2 + \frac{127231}{4} C_3 + \frac{127231}{3} C_4 - \frac{32}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_3} = \frac{135033}{5} C_1 + \frac{127231}{4} C_2 + \frac{167991}{2} C_3 + \frac{291521}{3} C_4 - \frac{32}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_4} = \frac{127231}{4} C_1 + \frac{127231}{3} C_2 + \frac{291521}{3} C_3 + \frac{239973}{2} C_4 - \frac{64}{5} = 0$$

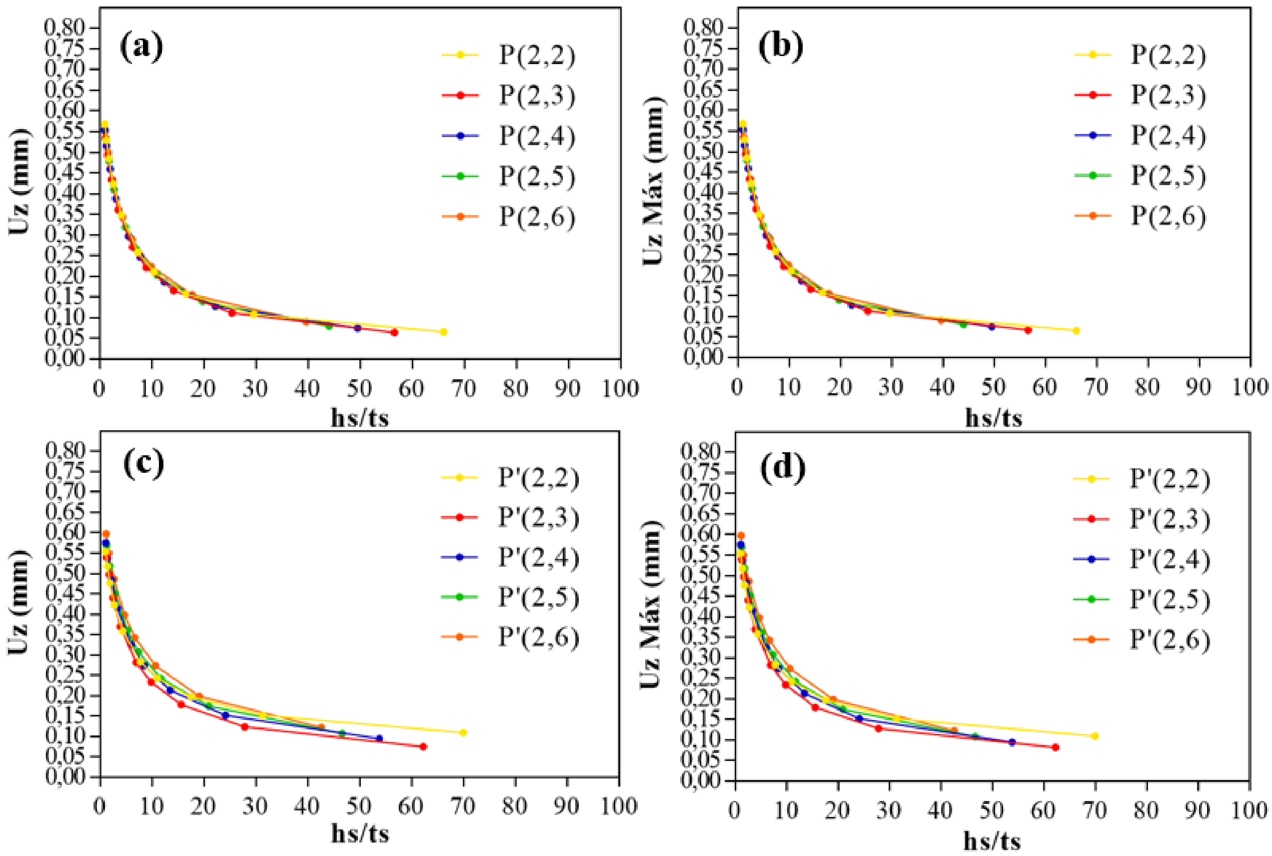
f) Resolvendo o sistema acima chega-se aos coeficientes:

$C_1 = 8{,}32 \text{ x}10^{-4}$ $C_2 = -3{,}039 \text{ x}10^{-5}$ $C_3 = -1{,}536 \text{ x}10^{-4}$ $C_4 = 2{,}128\text{x}10^{-5}$

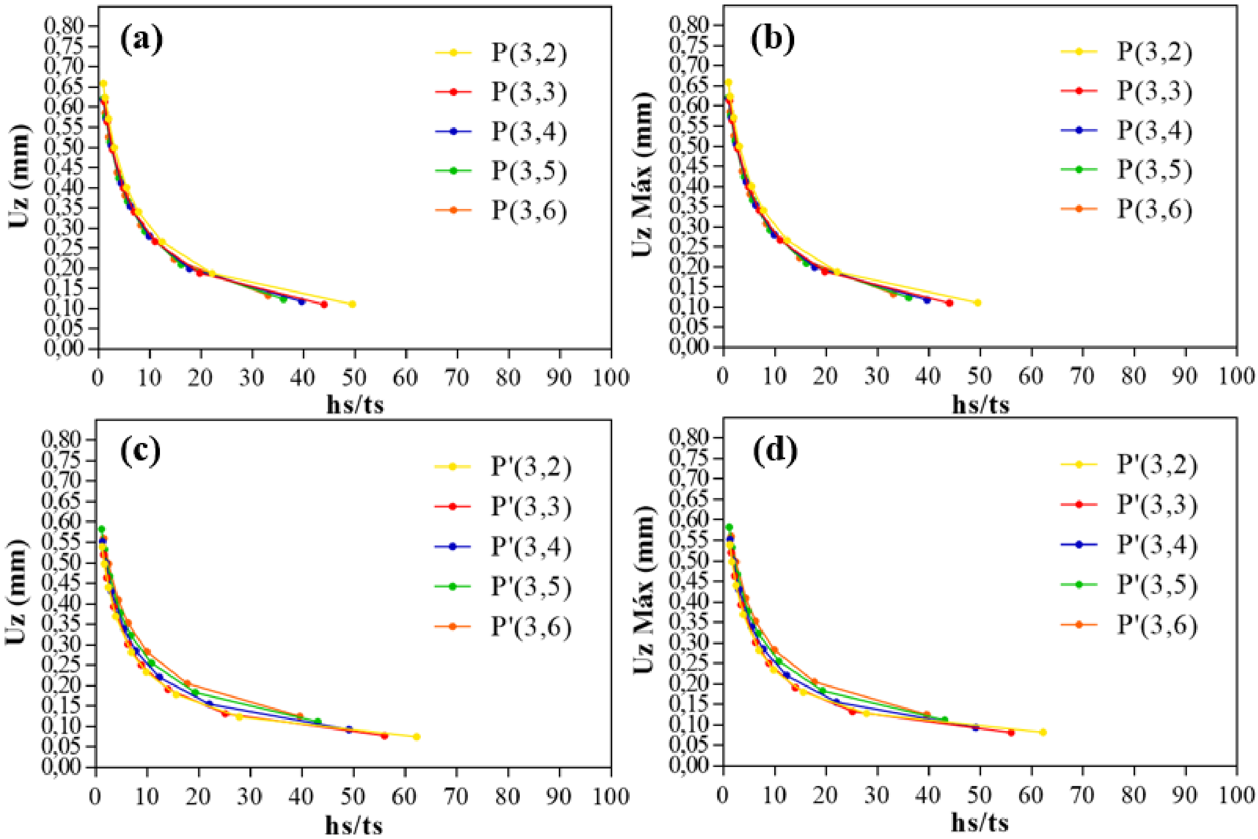
g) Substituindo os coeficientes na função $\tilde{w}(x,y)$ encontra-se o deslocamento aproximado no centro da placa:

$$\tilde{w}(x,y) = 0{,}00066929 \text{ m ou } 0{,}66929 \text{ mm}$$

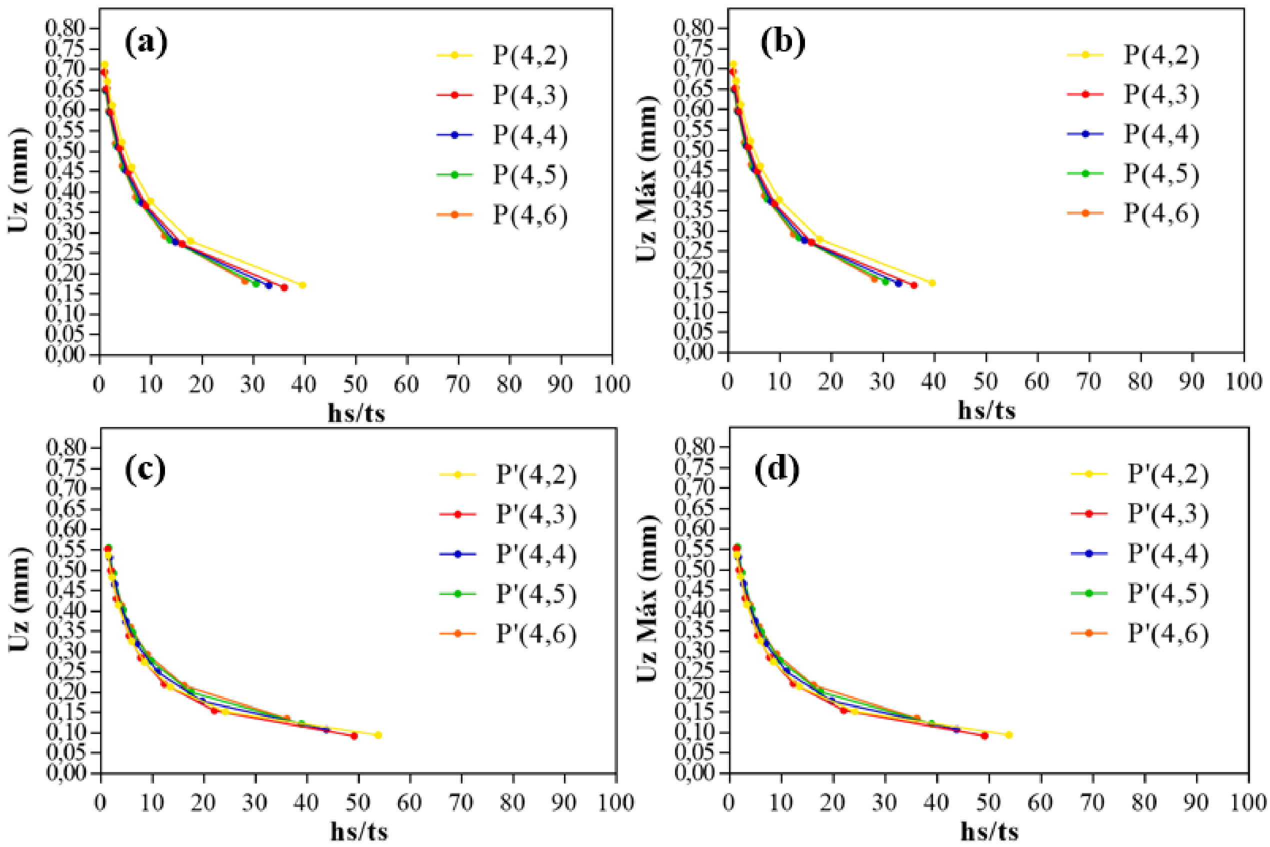
APÊNDICE D - Gráficos para deflexão central U_z e máxima $U_{zMáx}$ em função de h_s/t_s para ϕ = 0,1; 0,2; 0,4 e 0,5.



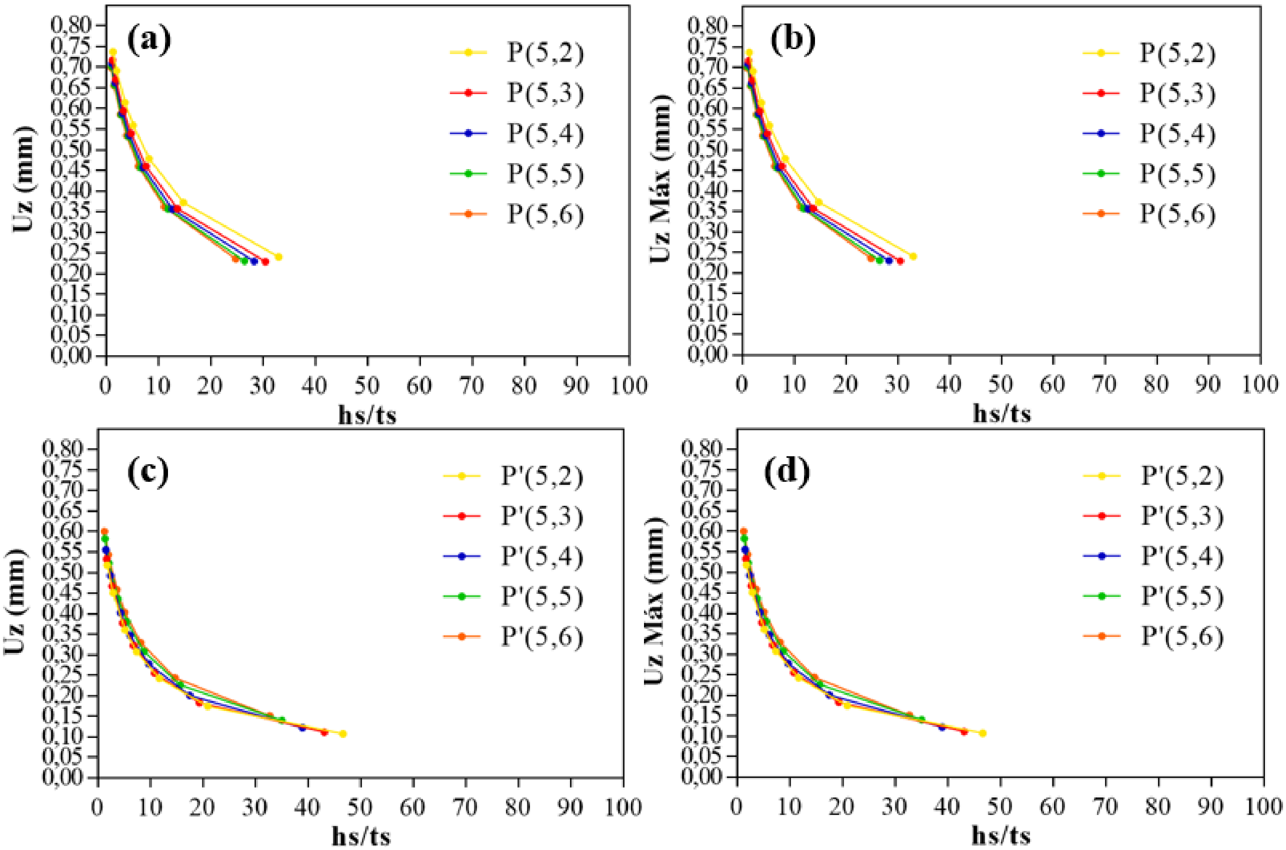
C. 1- ϕ = 0,1 - Grupo A - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



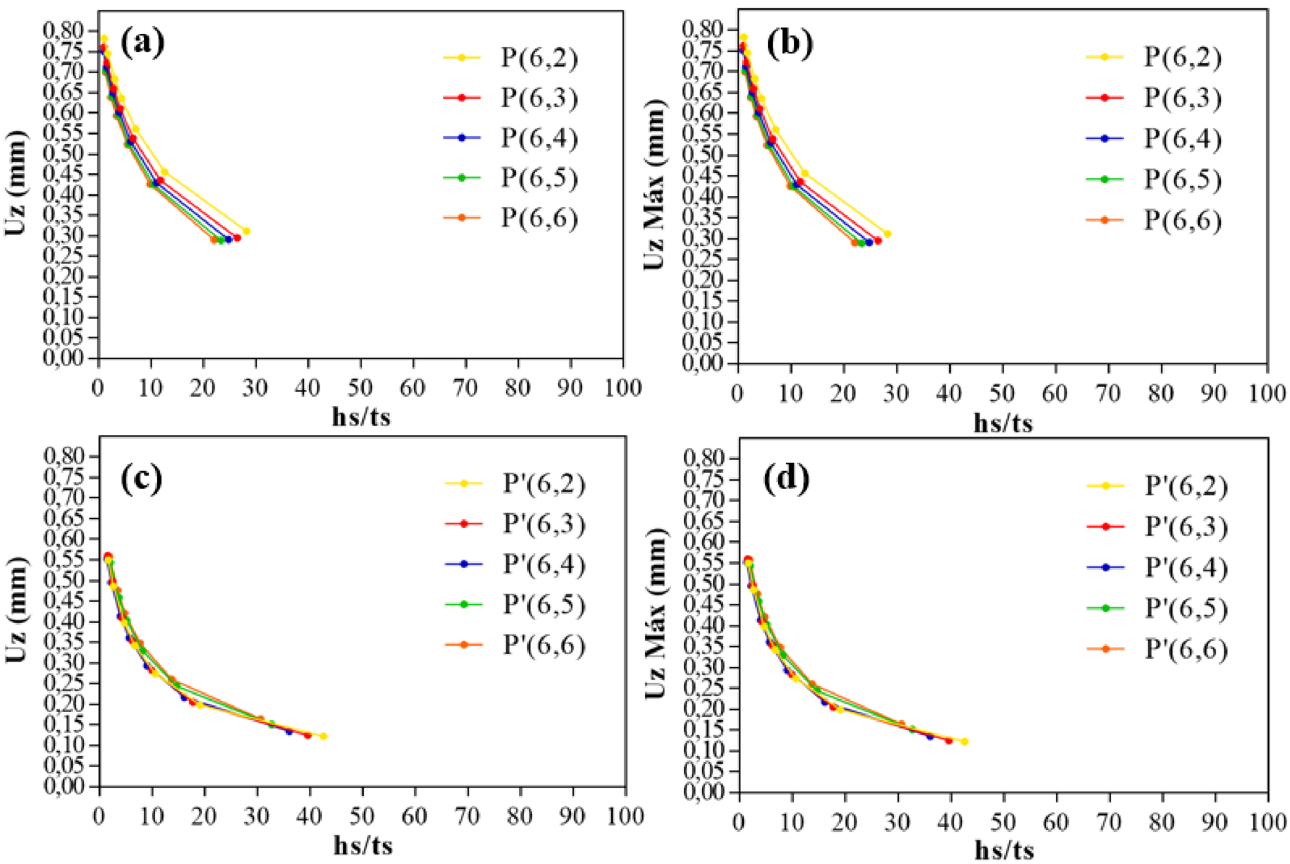
C. 2 - ϕ = 0,1 - Grupo B - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



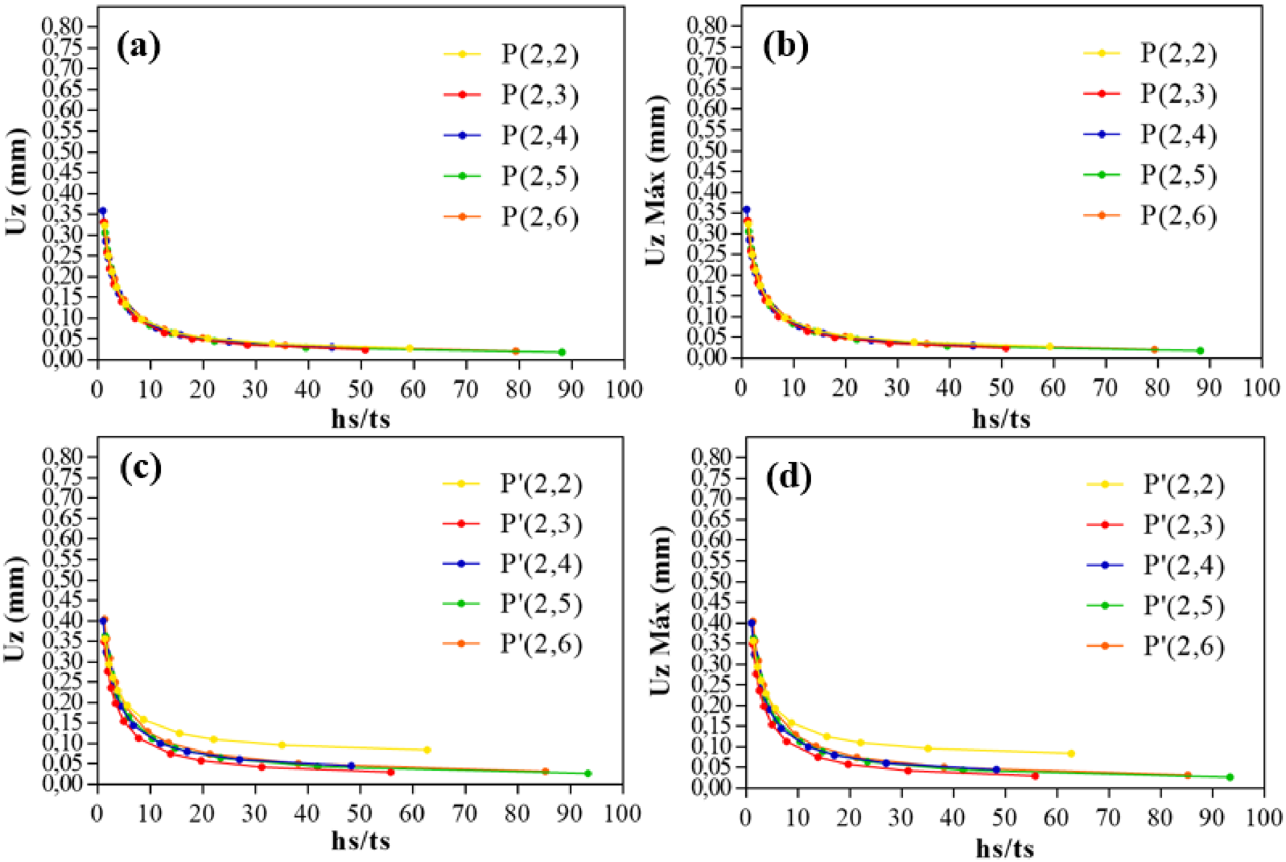
C. 3 - ϕ = 0,1 - Grupo C - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



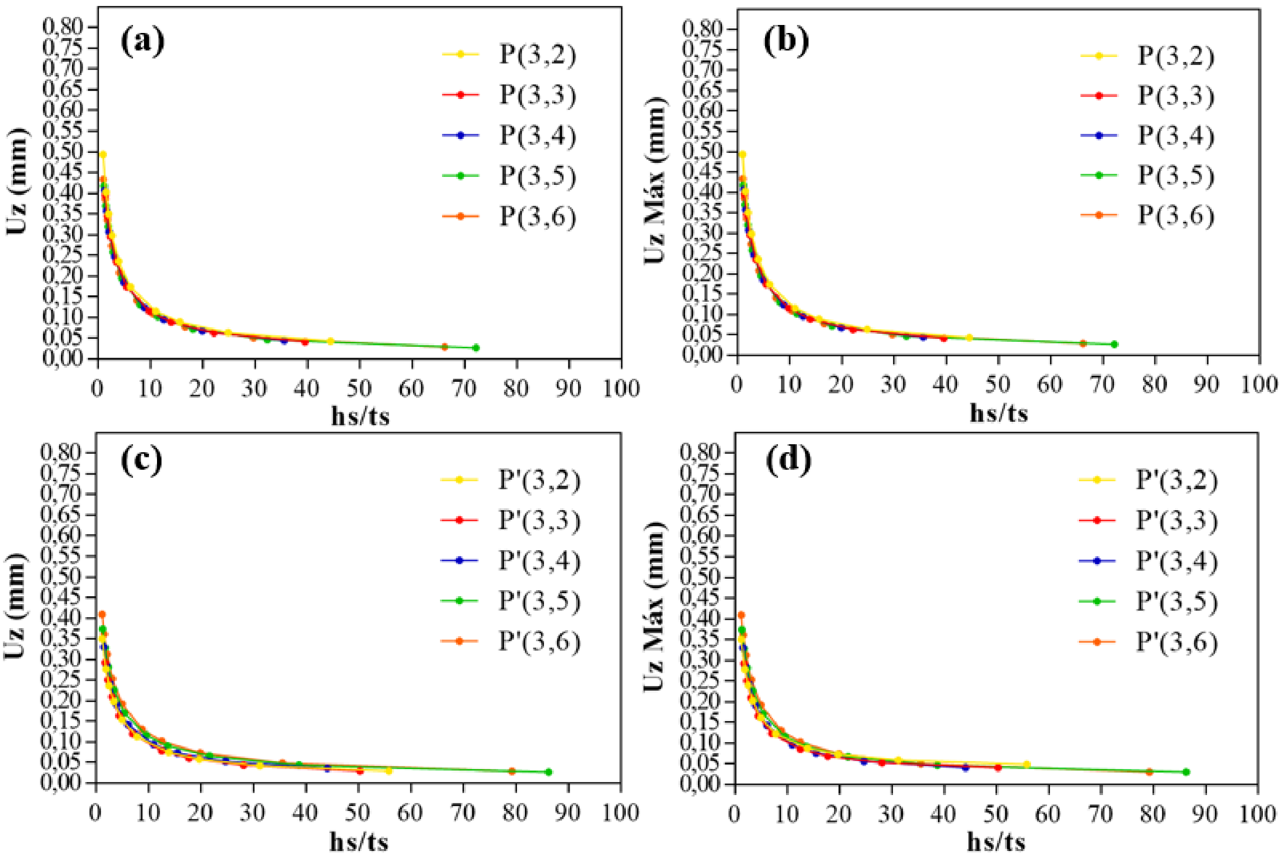
C. 4 - ϕ = 0,1 - Grupo D - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



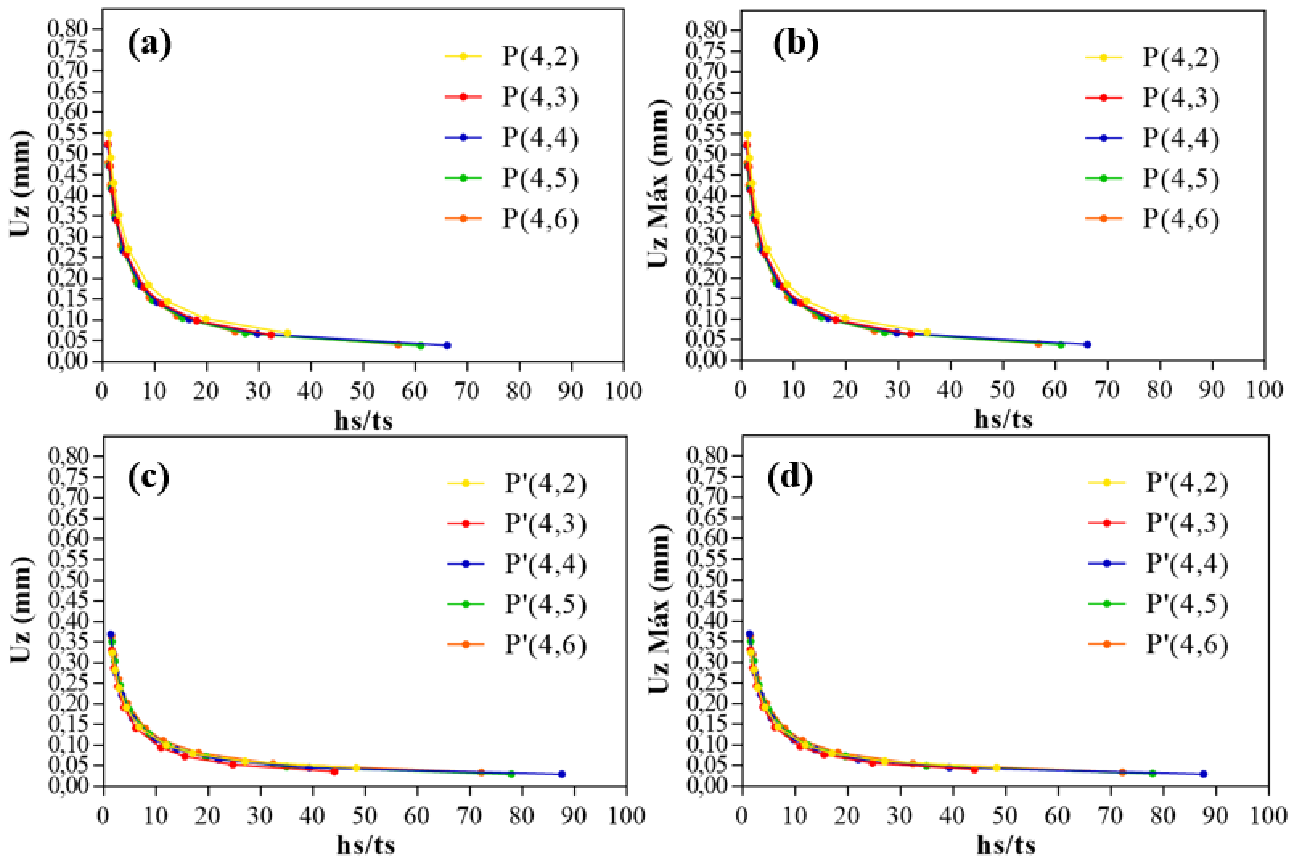
C. 5 - ϕ = 0,1 - Grupo E - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



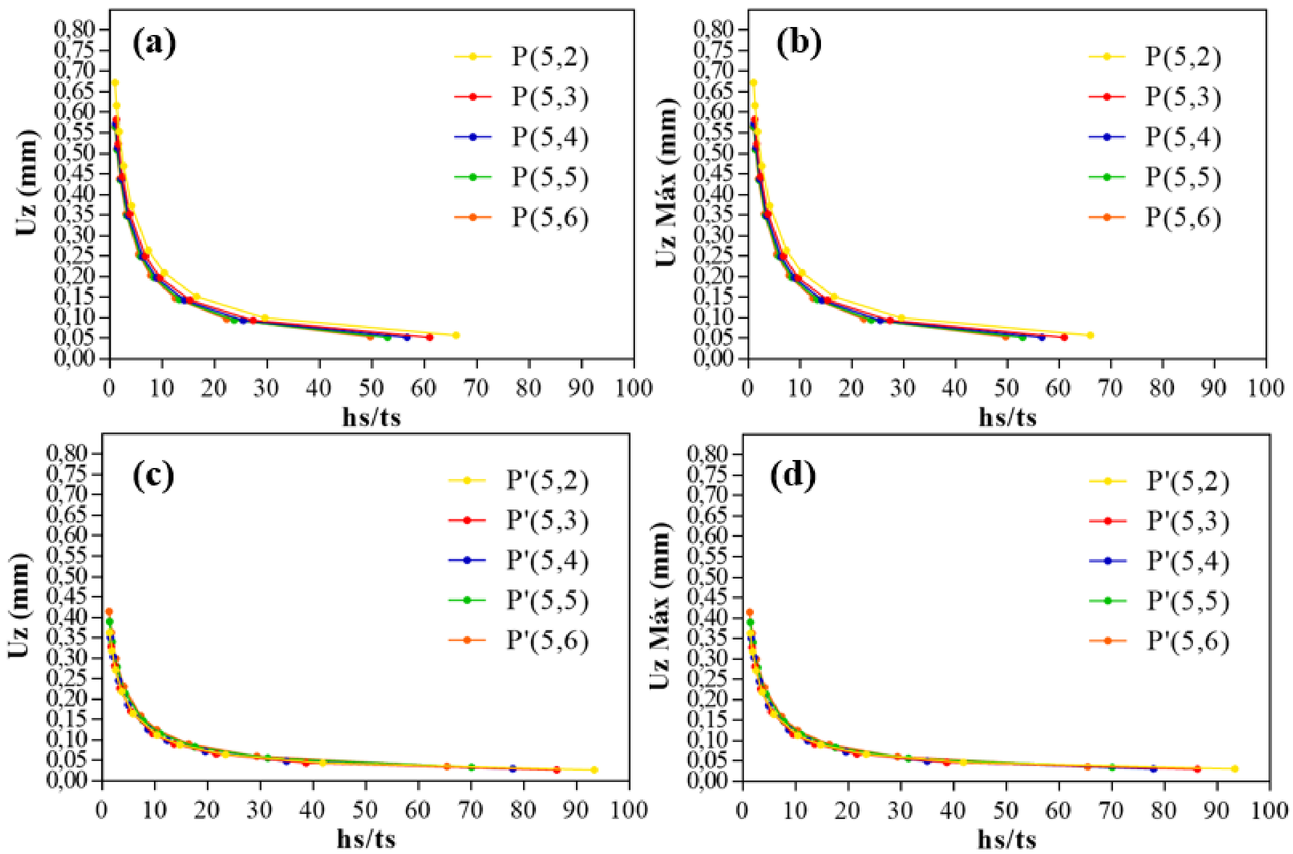
C. 6 - ϕ = 0,2 - Grupo A - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



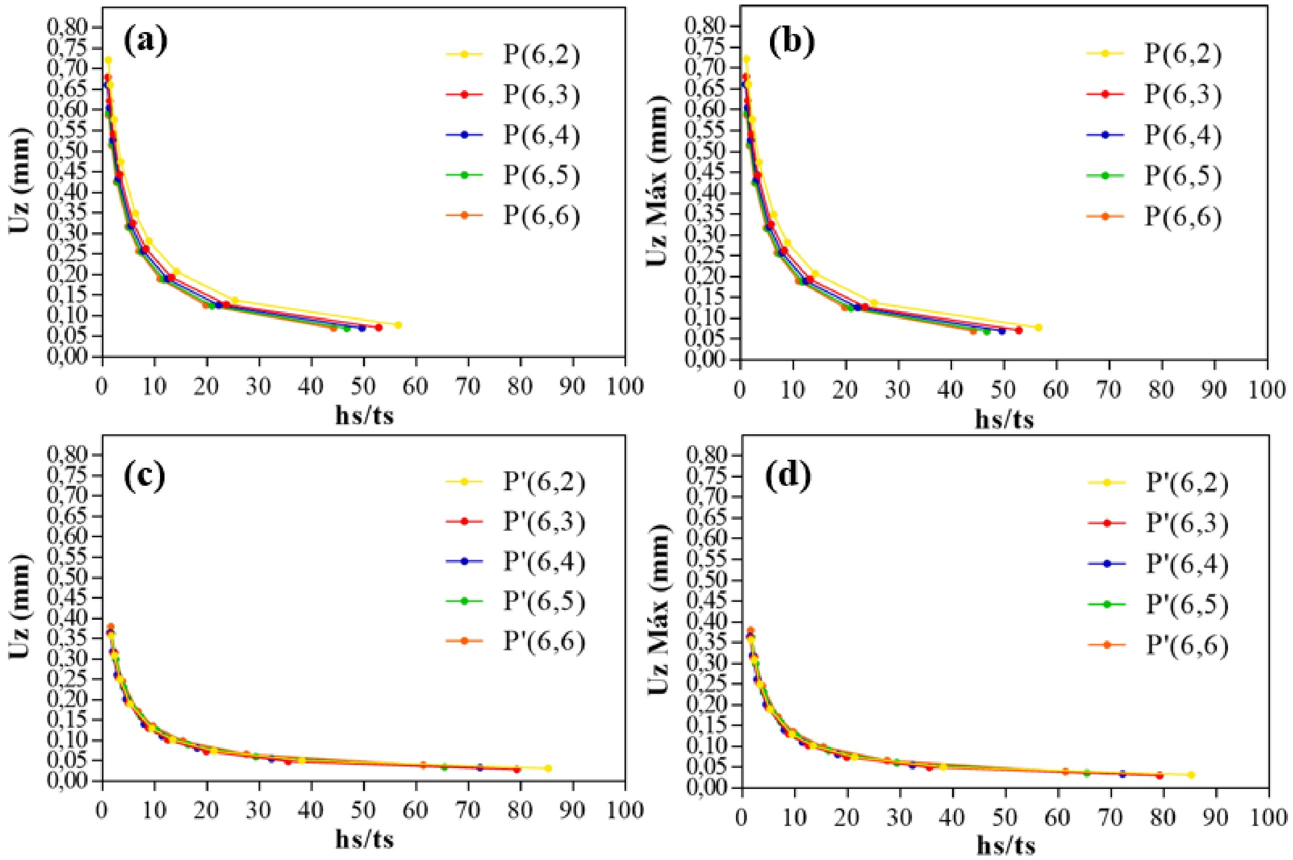
C. 7 - ϕ = 0,2 - Grupo B - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



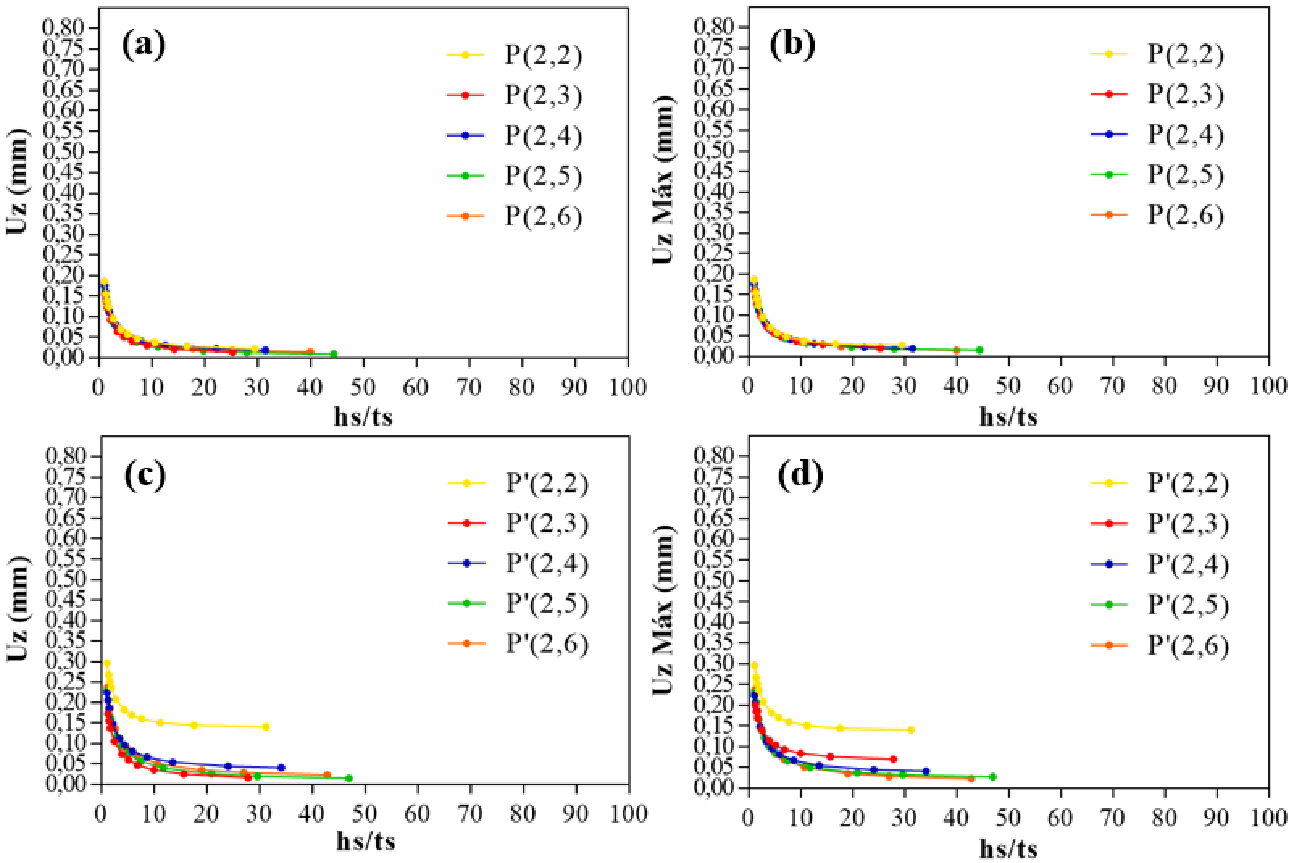
C. 8 - ϕ = 0,2 - Grupo C - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



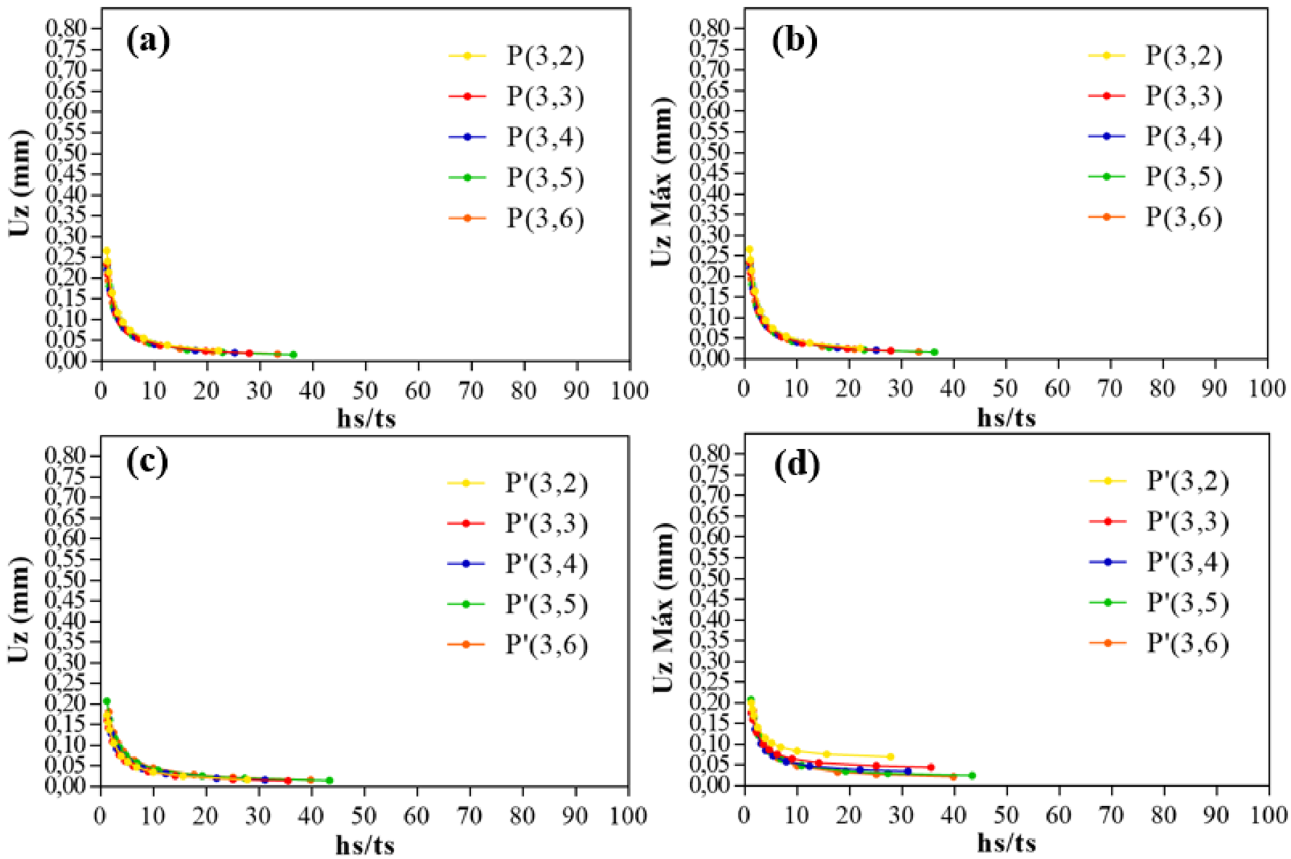
C. 9 - ϕ = 0,2 - Grupo D - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



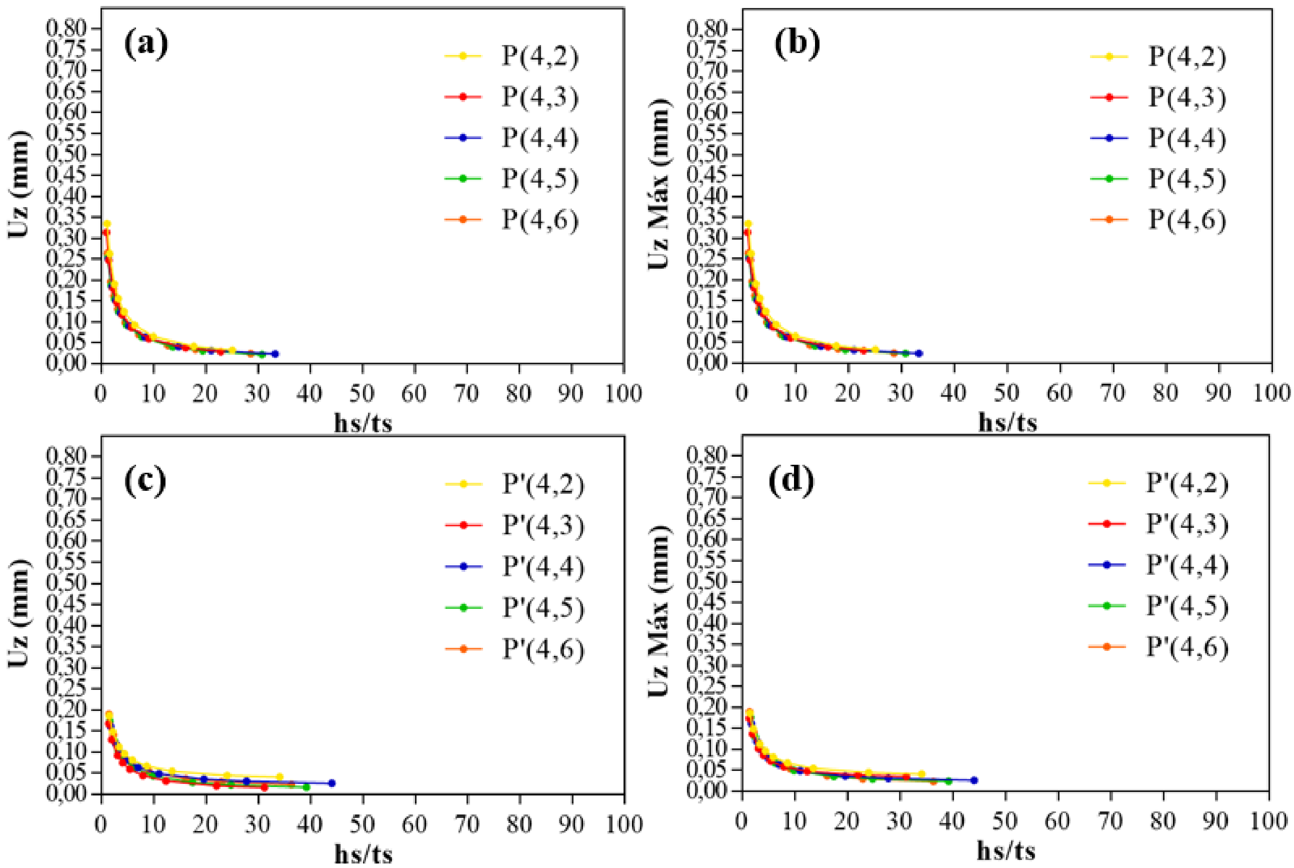
C. 10 - ϕ = 0,2 - Grupo E - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



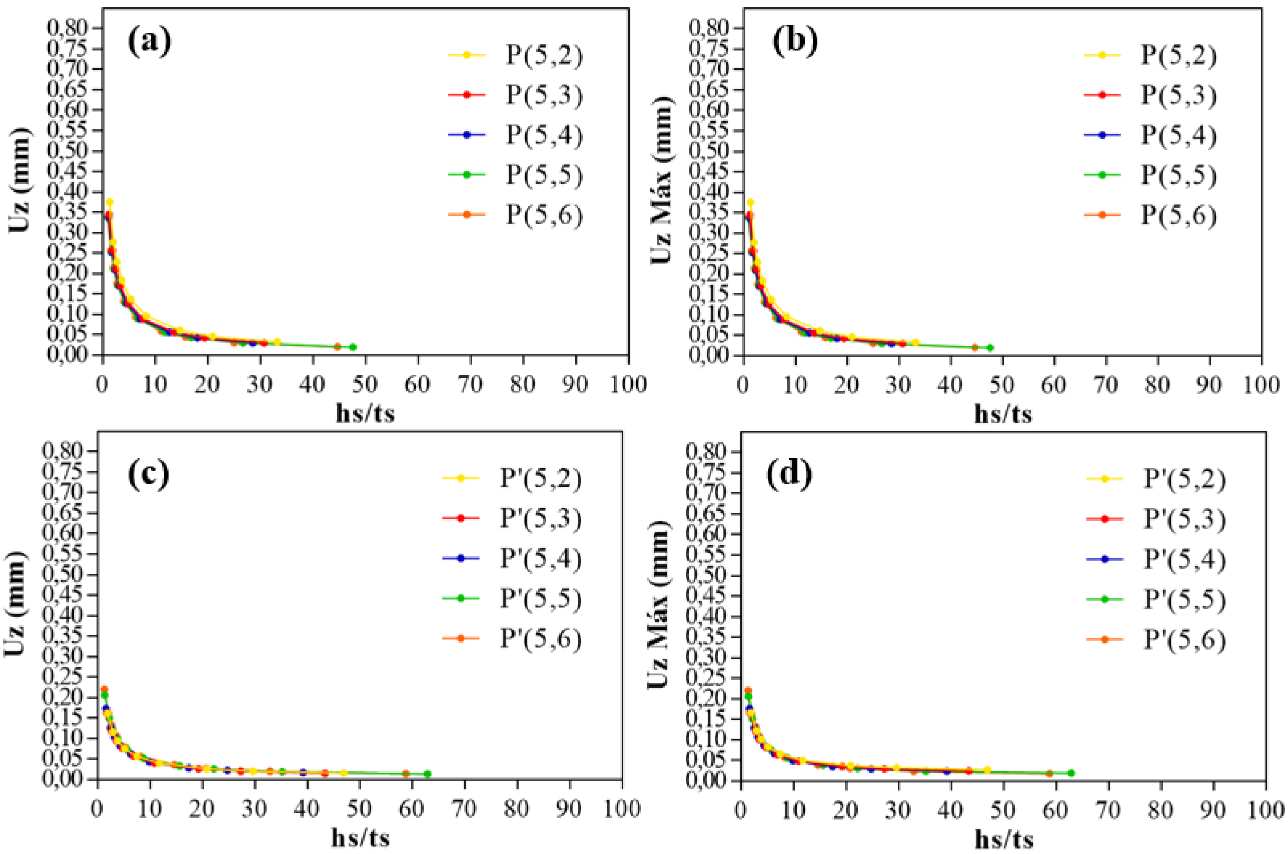
C. 11 - ϕ = 0,4 - Grupo A - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



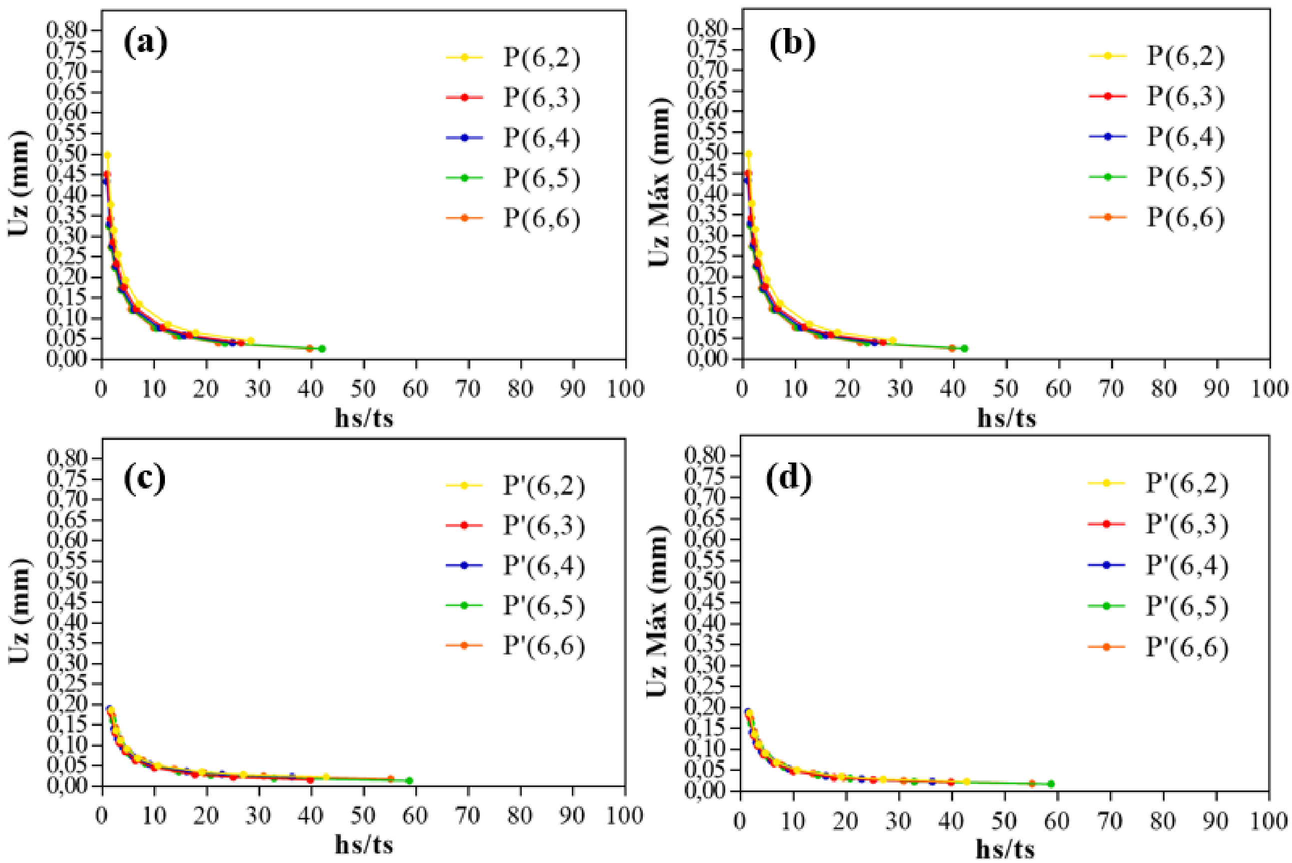
C. 12 - ϕ = 0,4 - Grupo B - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



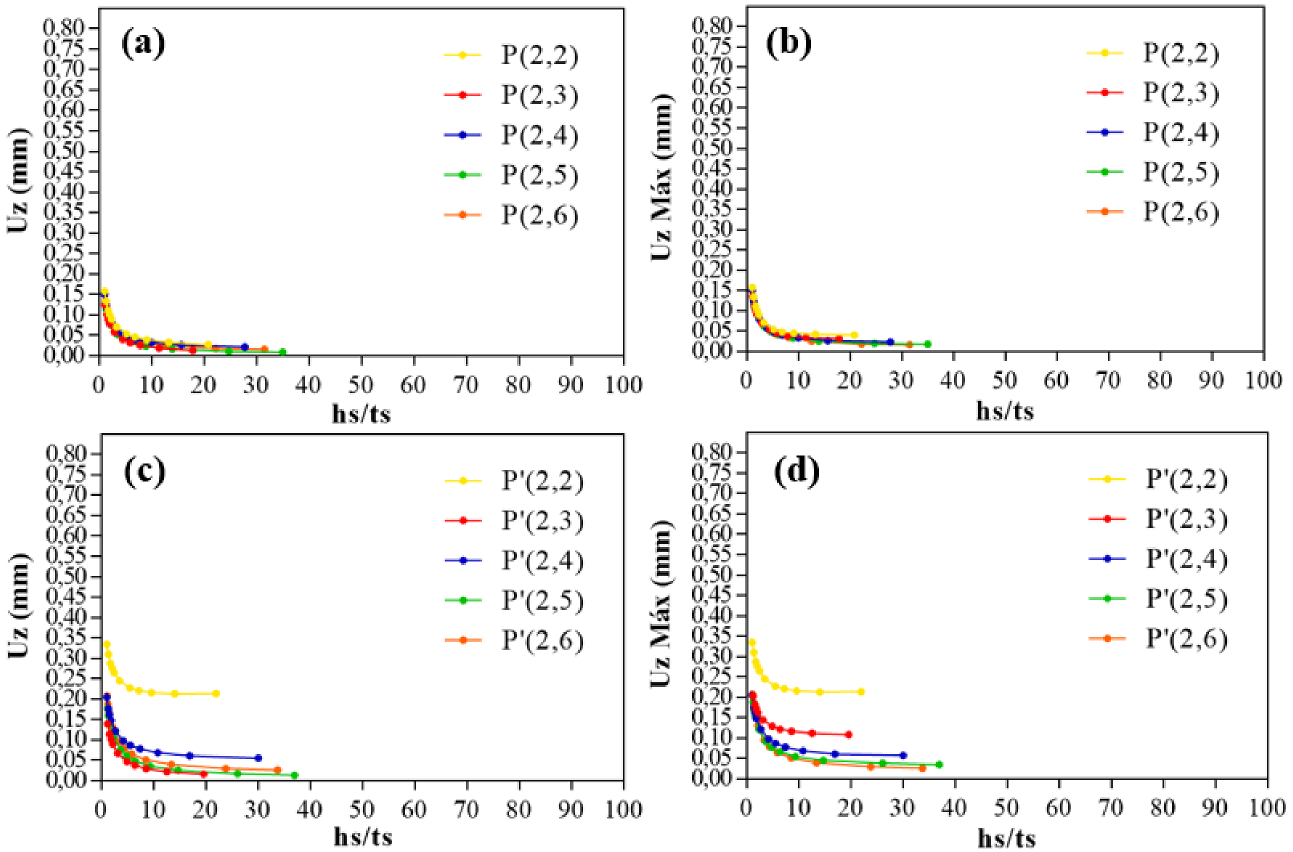
C. 13 - ϕ = 0,4 - Grupo C - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



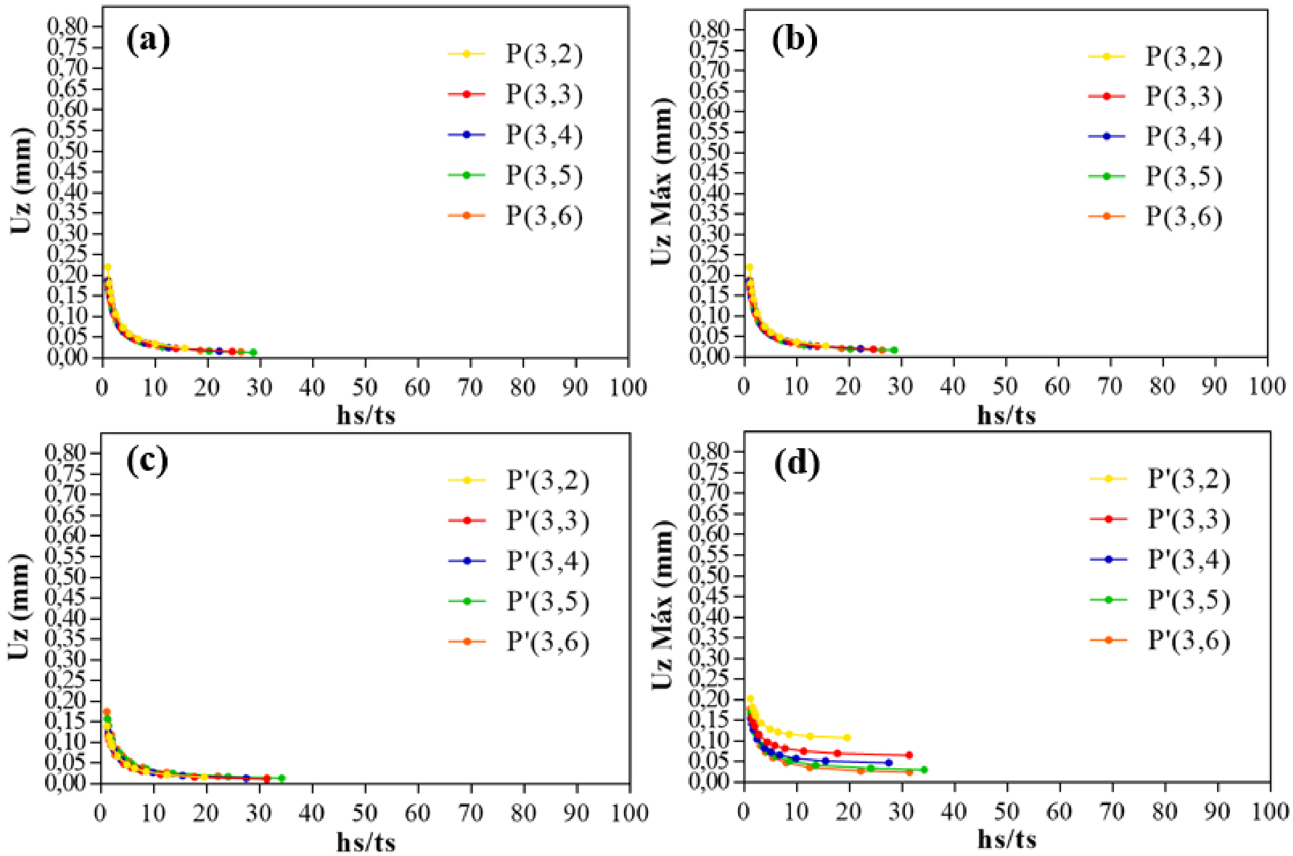
C. 14 - ϕ = 0,4 - Grupo D - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



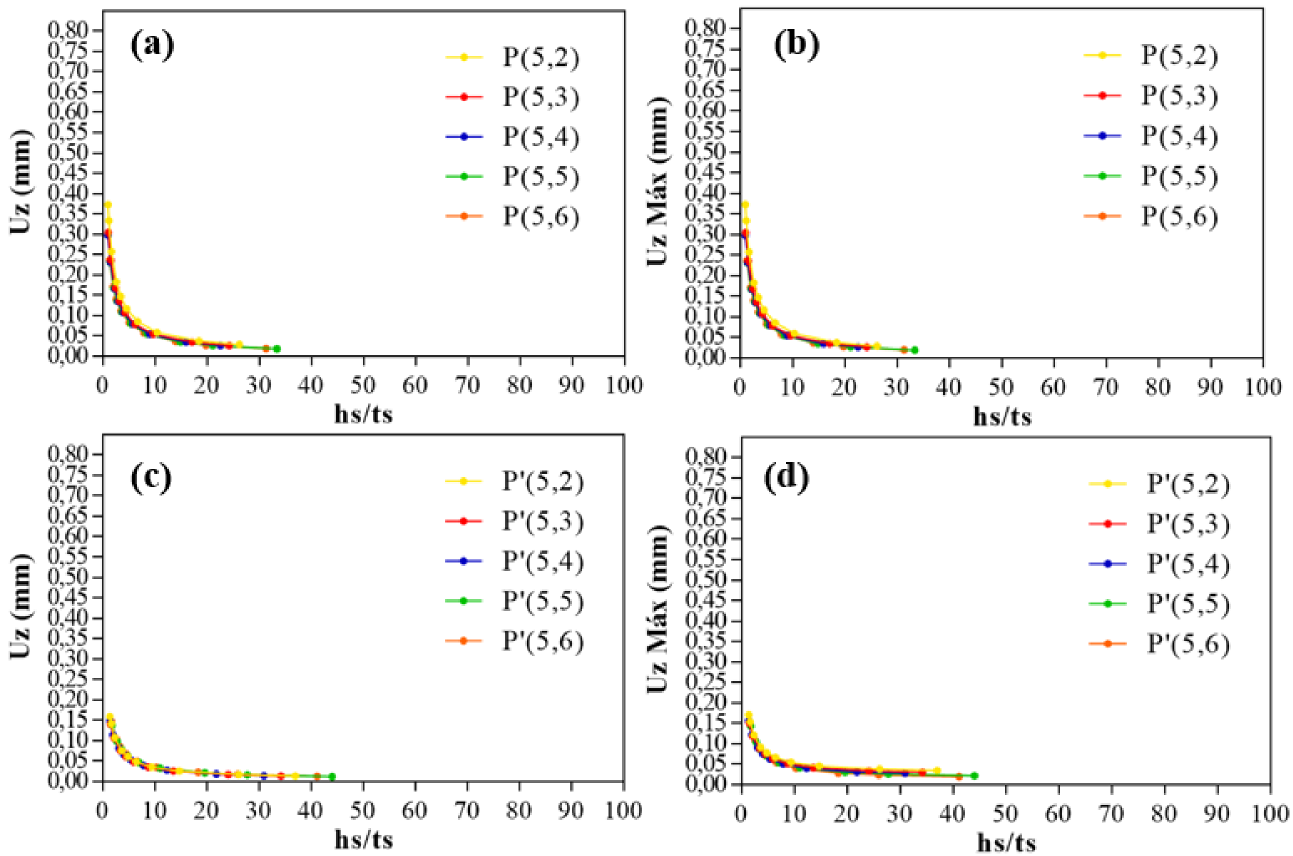
C. 15 - ϕ = 0,4 - Grupo E - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



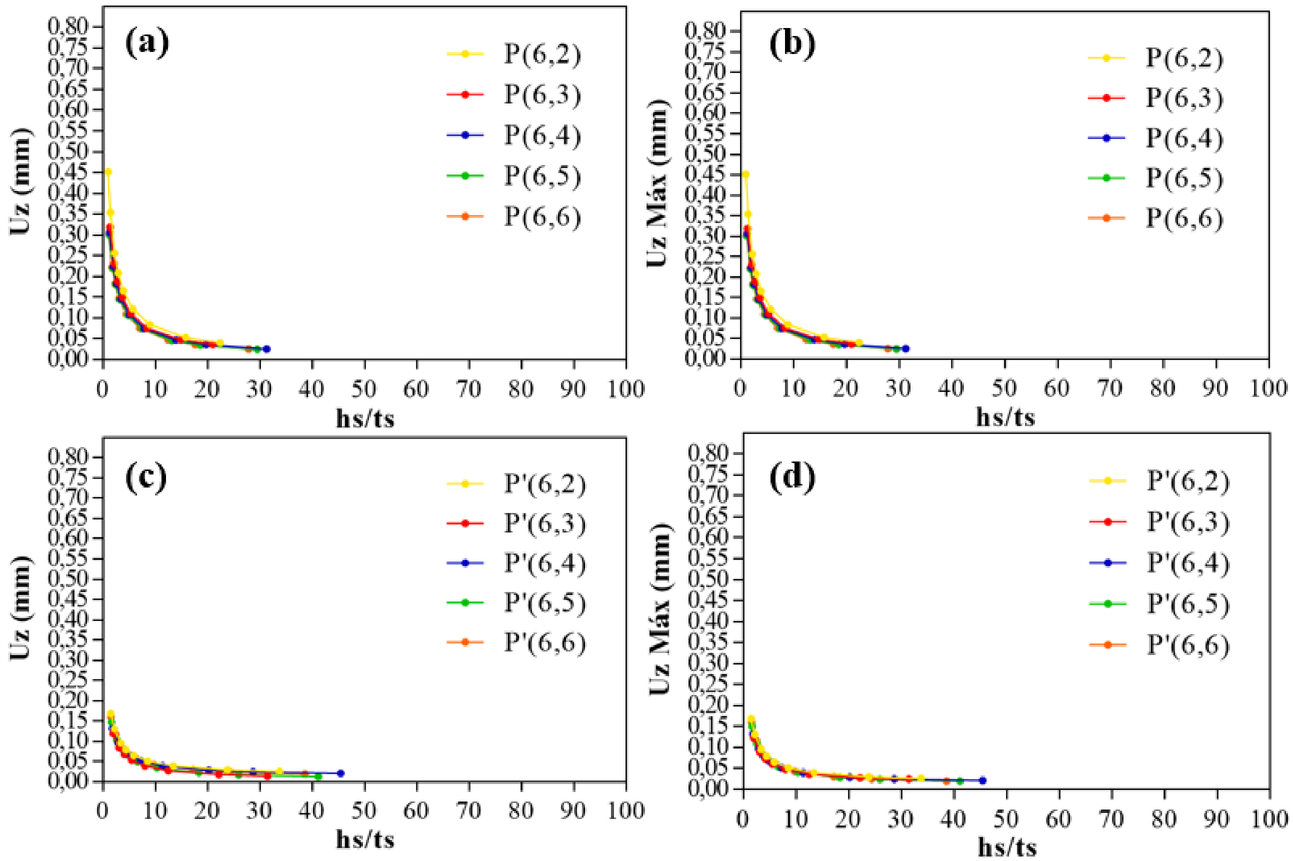
C. 16 - ϕ = 0,5 - Grupo A - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



C. 17 - ϕ = 0,5 - Grupo B - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



C. 18 - ϕ = 0,5 - Grupo C - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°



C. 19 - ϕ = 0,5 - Grupo E - Deflexões centrais e máximas – (a) e (b) enrijecedores orientados em 0°; (c) e (d) enrijecedores orientados em 45°