MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL PARA AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO ENTRE ENRIJECEDORES NA DEFLEXÃO DE PLACAS FINAS DE AÇO QUANDO SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME

por

Milton Cesar Bastos Portela Junior

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica

Rio Grande, agosto, 2019

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL PARA AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO ENTRE ENRIJECEDORES NA DEFLEXÃO DE PLACAS FINAS DE AÇO QUANDO SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME

Por

Milton Cesar Bastos Portela Junior
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Co-orientador: Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Eduardo Costa Couto	UFPel
Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos	PPGEO/FURG
Prof. Dr. Liércio André Isoldi	PPGEO/FURG
Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real	PPGEO/FURG
Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira	PPGEO/FURG

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 23 de agosto de 2019

“SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL PARA AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO ENTRE ENRIJECEDORES NA DEFLEXÃO DE PLACAS FINAS DE AÇO QUANDO SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME”

Milton Cesar Bastos Portela Junior

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de:

MESTRE EM ENGENHARIA OCEÂNICA

Tendo sido aprovada em sua forma final pela Coordenação de Pós Graduação em Engenharia Oceânica

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do PPGEO/FURG

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Orientador – PPGEO/FURG

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Coorientador – PPGEO/FURG

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira
Membro Interno – PPGEO/FURG

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
Membro Interno – PPGEO/FURG

Prof. Dr. Eduardo Costa Couto
Membro Externo – UFPel

Dedico este trabalho há todas pessoas que de algum modo me apoiaram nesta jornada, incluindo as mais importantes e presentes na minha vida, meus pais Milton Cesar Bastos Portela e Roselaine Lopes Porciúncula e também minha noiva Clarissa Geannichini Rodrigues.

Milton Cesar Bastos Portela Junior

AGRADECIMENTOS

A Universidade Federal do Rio Grande (FURG), me possibilitando mais esta oportunidade de retornar nesta belíssima instituição e também ampliar o meu conhecimento;

Ao professor e orientador Dr. Liércio André Isoldi pela sua dedicação e seus ensinamentos, que propiciaram uma segurança durante o aprendizado e desenvolvimento do projeto de Mestrado.

Ao professor e co-orientador Dr. Elizaldo Domingues dos Santos pelos ensinamentos passado em suas aulas e também nos momentos de dúvidas durante o projeto de Mestrado;

Aos professores Dr. Mauro de Vasconcelos Real e Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira pelas aulas ministradas e transferência dos seus conhecimentos e por se disporem a participar da comissão de avaliação;

Ao professor Dr. Eduardo Costa Couto da UFPel por se disporem a participar da comissão de avaliação;

Aos demais professores do curso de pós-graduação, a qual me deram a oportunidade de aprender com seus conhecimentos;

Aos colegas que tive oportunidade de conhecer e trocar informações, principalmente aqueles que estavam ali dispostos no auxilio desta caminhada;

À minha família, principalmente aos meus pais Milton e Roselaine e minha noiva Clarissa pelo apoio, dedicação e principalmente por compreenderem minha ausência em diversos momentos durante este período.

RESUMO

Placas finas de aço com enrijecedores são elementos estruturais amplamente empregados na engenharia, especialmente em estruturas navais e *offshore*. São componentes capazes de resistir mecanicamente a consideráveis esforços possuindo um peso relativamente baixo. A presente pesquisa analisou numericamente o comportamento mecânico de placas finas de aço submetidas à carregamento transversal, com seus quatro lados simplesmente apoiados e contendo enrijecedores longitudinais N_{ls} e transversais N_{ts}, formando configurações P(N_{ls},N_{ts}) iguais à P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3). Através do método Design Construtal e da técnica de busca exaustiva, foram definidas as dimensões e as posições para os enrijecedores da placa enrijecida para otimizar a deflexão. O volume total de aço usado na placa enrijecida com dimensões de 2 metros de comprimento e 1 metro de largura foi sempre o mesmo, mantendo para a soma do volume de todos os enrijecedores uma proporção igual ao volume da placa. Visando minimizar a deflexão máxima e no ponto central das placas, os enrijecedores são posicionados em diferentes regiões e também considerando diferentes valores para o grau de liberdade h_s/t_s (razão entre a altura do enrijecedor h_s com sua espessura t_s). Os resultados foram comparados entre si e, com isso, determinou-se qual configuração geométrica, entre todas as placas analisadas, apresentou o melhor comportamento mecânico em relação à deflexão. Esse estudo foi realizado através de um modelo computacional baseado no Método dos Elementos Finitos, utilizando o software ANSYS®. A partir dos resultados numéricos foi possível avaliar e definir a influência do espaçamento de enrijecedores no comportamento mecânico quanto a deflexão de uma placa fina de aço enrijecida sob carregamento transversal uniforme. Concluindo que a placa otimizada encontra-se na maior razão h_s/t_s e com os enrijecedores posicionados com espaçamentos iguais para cada sentido longitudinal e transversal.

Palavras-chaves: Placa com enrijecedores; Simulação numérica; Design Construtal; Deflexão em placas; Enrijecedores excêntricos.

ABSTRACT

Thin steel plates with stiffeners are structural elements widely employed in engineering, especially in naval and offshore structures. They are components capable of mechanically resisting considerable loads having a relatively low weight. The present research numerically analyzed the mechanical behavior of thin steel plates subjected to bending, with its four edges simply supported and containing longitudinal N_{ls} and transversal N_{ts} stiffeners, forming P(N_{ls},N_{ts}) configuration equal to P(2,2), P(2,3), P(3,2) and P(3,3). Through the Constructal Design method and Exhaustive search technique, the dimensions and positions of stiffeners were defined in stiffened plate to optimize the deflection. The total steel volume used in the stiffened plate with dimensions of 2 meters of length and 1 meter of width was always the same, maintaining for the sum of the stiffeners volume a proportion equal to the plate volume. In order to minimize the maximum and central point deflections of the stiffened plates, the stiffeners were positioned in different locations and also considering different values for the degree of freedom h_s/t_s (ratio between the height (h_s) and thickness (t_s) of the stiffeners). The results were compared to each other and, therefore, it was determined which geometric configuration, among all analyzed plates, presented the best mechanical behavior in relation to the deflection. This study was carried out using a computational model based on the Finite Element Method using ANSYS® software. From the numerical results, it was possible to evaluate and define the influence of stiffener spacing on the mechanical behavior of the deflection of a thin steel plate stiffened under uniform transverse loading. Concluding that the optimized plate is in the highest ratio hs/ts and with the stiffeners positioned with equal spacing for each longitudinal and transversal direction.

Keywords: Plate with stiffener; Numerical simulation; Constructal Design; Plate deflection; Eccentric stiffeners.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a – Comprimento da placa [m]

b – Largura da placa [m]

B – Rigidez torcional efetiva da placa ortotrópica [N.m]

D – Rigidez à flexão da placa [N.m]

D_x – Rigidez à flexão da placa, na direção x [N.m]

D_y – Rigidez à flexão da placa, na direção y [N.m]

E – Módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) [Pa]

$\vec{f}$ – Vetor das forças nodais

F_z – Força de cisalhamento transversal na direção z [N.m]

G – Módulo de elasticidade transversal [Pa]

h – Altura da placa [m]

h_s – Altura do enrijecedor [m]

k^2 – Fator de correção de cisalhamento

k_x – Curvatura da placa na direção x

k_y – Curvatura da placa na direção y

$|k|$ – Matriz de rigidez;

L – Menor dimensão lateral da placa [m]

m – Número de componentes [un]

m_x – Momento fletor que atua no plano médio por unidade de comprimento em x [N.m/m]

M_x – Momento fletor em x [N.m]

m_{xy} – Momento torçor distribuído atuante no plano ortogonal ao eixo x [N.m/m]

M_{xy} – Momento torçor atuante no plano ortogonal ao eixo x [N.m]

m_y – Momento fletor que atua no plano médio por unidade de comprimento em y [N.m/m]

M_y – Momento fletor em y [N.m]

m_{yx} – Momento torçor distribuído atuante no plano ortogonal ao eixo y [N.m/m]

M_{yx} – Momento torçor atuante no plano ortogonal ao eixo y [N.m]

N_{ls} – Número de enrijecedores na direção longitudinal [un]

N_{ts} – Número de enrijecedores na direção transversal [un]

p_z – Carga distribuída aplicada à placa na direção z [N/m²]

$\vec{q}$ – Vetor da força

q_x – Força de cisalhamento transversal que atua no plano médio por unidade de comprimento em x

[N/m]

Q_x – Força de cisalhamento transversal em x [N]

q_x^* – Força suplementar de Kirchhoff por unidade de comprimento em x [N/m]

Q_x^* – Força de Kirchhoff em x [N]

q_y – Força de cisalhamento transversal que atua no plano médio por unidade de comprimento em y [N/m]

Q_y – Força de cisalhamento transversal em y [N]

q_y^* – Força suplementar de Kirchhoff por unidade de comprimento em y [N/m]

Q_y^* – Força de Kirchhoff em y [N]

R – Valor verdadeiro

R_0 – Força localizada de canto [N]

R^2 – Coeficiente de determinação do ajuste de curva

S_l – Espaçamento entre enrijecedores longitudinais [m]

S_t – Espaçamento entre enrijecedores transversais [m]

t – Espessura da placa [m]

t_s – Espessura do enrijecedor [m]

u – Componentes de deslocamento na direção x [m]

$\vec{u}$ – Vetor dos deslocamentos nodais;

U_z – Deslocamento transversal na placa [m]

v – Componentes de deslocamento na direção y [m]

x – Direção x dos eixos cartesianos [m]

X – Sentido positivo dos eixos coordenados x

w – Componentes de deslocamento na direção z [m]

W – Deflexão transversal na placa

y – Direção y dos eixos cartesianos [m]

Y – Sentido positivo dos eixos coordenados y

z – Direção z dos eixos cartesianos [m]

Z – Sentido positivo dos eixos coordenados z

ε_x – Deformação normal na direção do eixo x

ε_y – Deformação normal na direção do eixo y

y_{xy} – Deformação no plano XY

σ_x – Tensão normal na direção do eixo x [Pa]

σ_y – Tensão normal na direção do eixo y [Pa]

σ_z – Tensão normal na direção do eixo z [Pa]

τ_{xy} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo x na direção y [Pa]

τ_{yx} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo y na direção x [Pa]

∇– Operador diferencial delta

φ – Fator de correção de cisalhamento

v_x – Esforço cortante por unidade de comprimento que atua no plano normal ao eixo cartesiano X [N/m^2]

v_y – Esforço cortante por unidade de comprimento que atua no plano normal ao eixo cartesiano Y [N/m^2]

ω_x – Rotação da seção normal à superfície média na direção x

ω_y – Rotação da seção normal à superfície média na direção y

ν – Coeficiente de Poisson

ϕ – Fração volumétrica da placa de referência

ζ– Empenamento da placa

LISTA DE ABREVIATURAS

APDL	ANSYS *Parametric Design Language*
CCS	Condição de Contorno de Simetria
MDC	Método Design Construtal
MEF	Métodos de Elementos Finitos
PVC	Problema de Valor de Contorno

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa de mestrado discorre sobre modelagem computacional de placas finas com enrijecedores que possuem ampla aplicação na Engenharia Marítima nas áreas de estruturas e equipamentos oceânicos.

Na indústria naval e oceânica as placas finas produzidas em aço são componentes muito comuns, como exemplo são empregados nos conveses e fundo de casco de navios ou também em painéis e plataformas de estruturas *offshore* (REAL e ISOLDI, 2010).

A afirmação que a espessura de uma placa é pequena se torna válida quando comparada com as suas demais dimensões. Estas placas possuem capacidade de suportar carregamentos transversais, mas podem desenvolver deformações significativas devido à flexão (MENDONÇA, 2005). Então cada vez mais se faz necessário aumentar a rigidez destas placas, uma possibilidade é aplicar elementos estruturais como os enrijecedores, reforços fixados nas placas posicionados nas direções transversal e/ou longitudinal.

Nesta pesquisa as placas definidas para as análises realizadas têm o volume total mantido constante, o volume total foi estabelecido por uma placa de referência (sem enrijecedores) e que dará origem as diferentes configurações de placas enrijecida através da sua redistribuição formando uma placa com menor espessura e os enrijecedores, sendo assim definido o volume total da placa de referência igual ao volume das placas enrijecidas.

As placas enrijecidas foram submetidas à flexão e sua análise se deu através da abordagem computacional com variação de parâmetros de geometria e posição dos enrijecedores, para buscar uma otimização na deflexão ocorrida na placa. Para definição da variação dos enrijecedores será utilizada a teoria Construtal, que quando utilizada em problemas de engenharia é conhecida como Design Construtal.

Os modelos computacionais para a placa de referência e a placa enrijecida foram criadas no ANSYS@, um software de engenharia que tem como base o Método dos Elementos Finitos (MEF). Após parametrização com os dados de entrada e a execução do programa, o software retorna as deflexões como dados de saída. Com os resultados para as configurações de placas estabelecidas através da teoria do Design Construtal é possível de forma comparativa mensurar o desempenho mecânico obtendo assim uma análise dos resultados para otimização da deflexão.

Então sabendo que as placas de aço sem enrijecedor possuem uma capacidade de resistir mecanicamente aos esforços de flexão com um peso que pode ser considerado relativamente baixo, esta pesquisa pretende calcular, averiguar e viabilizar um aumento desta capacidade de carga sem modificar o peso das chapas.

Tendo em vista, a evolução tecnológica dos dias atuais e com o aumento da capacidade de processamento dos computadores torna-se viável aplicar os métodos de simulação numérica (método de aproximações), possibilitando a utilização de modelos cada vez mais fiéis representando a estrutura de forma realista.

Considerando a indústria moderna 4.0 (informatizada), a competitividade de mercado principalmente com relação à redução de custo na execução dos projetos estruturais e também a necessidade de aumento de produtividade no desenvolvimento, acabam tornando imprescindível a utilização de softwares para realização de cálculos e dimensionamentos das estruturas.

1.1. Estado da Arte

A bastante tempo são estudas placas finas submetidas a flexão e grande parte destas informações encontram-se definidas em livros clássicos de autores como Timoshenko e Szilard.

Uma pesquisa utilizada como base para verificação do modelo computacional foi a de Rossow e Ibrahimkhail (1978) que realizaram um estudo em placas enrijecidas com reforços concêntricos e excêntricos e aplicaram através dos elementos finitos o método das restrições em análises estáticas. Por meio de considerações cinemáticas realizadas, expressaram o campo de deslocamento dos enrijecedores em termos dos deslocamentos da superfície média da placa. Na análise por meio dos elementos finitos, o método das restrições tem uma característica distinta, a possibilidade de utilizar elementos baseados em polinômios complexos de ordem arbitraria. O método baseia-se no teorema da mínima energia potencial, matematicamente é minimizar a energia potencial de um problema de estrutura elástica com seu conjunto de restrições. A matriz de rigidez da estrutura composta foi obtida para polinômios de aproximação de qualquer ordem, sobrepondo a energia de deformação da placa e dos enrijecedores. Dois exemplos numéricos foram solucionados pelo método das restrições, sendo uma placa quadrada com apenas um enrijecedor conforme Fig. 1.1 e uma placa retangular com dois enrijecedores posicionados um na longitudinal e outro na transversal conforme Fig. 1.2, nas análises foram utilizados dois elementos triangulares para modelar um quarto da placa e empregados polinômios de aproximação variando da ordem 4 até 9.

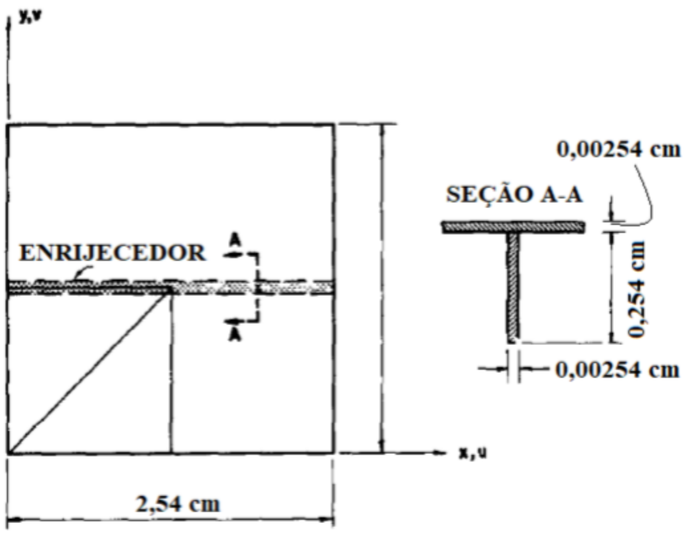


Figura 1.1: Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor
(Fonte: Adaptada de ROSSOW e IBRAHIMKHAIL, 1978)

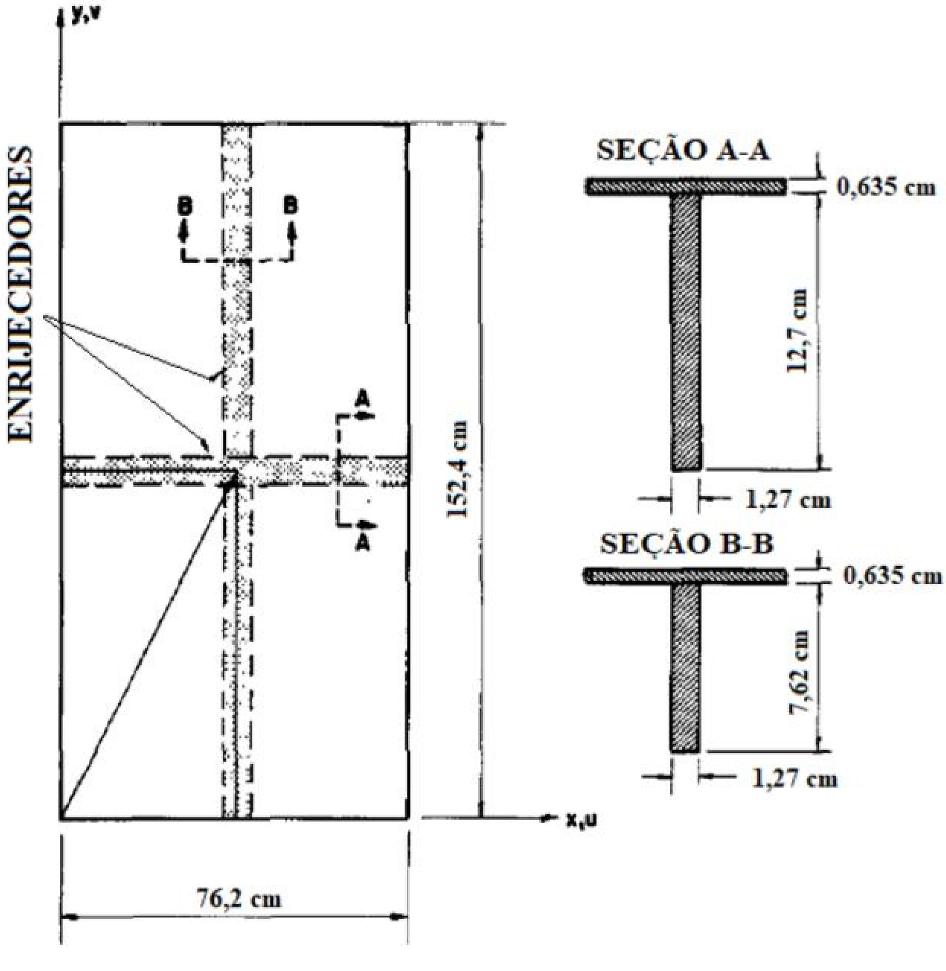


Figura .2: Placa retangular com dois enrijecedores posicionados um na longitudinal e outro na transversal (Fonte: Adaptada de ROSSOW e IBRAHIMKHAIL, 1978)

As soluções foram desenvolvidas computacionalmente através dos softwares NASTRAN@ e STRUDL@, os resultados numéricos confirmaram que para o método das restrições elementos formulados de alta ordem podem fornecer bons resultados com poucos elementos e graus de liberdade, quando estes comparados às analises com elementos de baixa ordem.

Tanaka e Bercin (1997) aplicaram o método dos elementos de contorno para analisar placas enrijecidas quanto à flexão elástica e essa metodologia foi aplicada a uma placa quadrada com um enrijecedor concêntrico central estudada por Rossow e Ibrahimkhail (1978). Em sua formulação, para tornar a análise aplicável em placas suportadas por vigas de seção transversal arbitrárias abertas ou fechadas foi necessário a inclusão das rigidezes de flexão e torção, além da excentricidade nas placas enrijecidas. Para realizar a integração através da função de interpolação definidas em sub-regiões do domínio denominadas elementos de contorno que posteriormente foram somadas, teve que ser obtido as equações integrais de contorno para placa, expressado o momento normal e a força de cisalhamento em termos da deflexão e a inclinação em um contorno enrijecido.

Placas enrijecidas sob carregamento transversal foram analisadas por Bedair (1997) pelo método da programação sequencial quadrática, as configurações de placas utilizadas no estudo foram iguais às analisadas por Rossow e Ibrahimkhail (1978), uma placa quadrada com um enrijecedor central e outra placa retangular com dois enrijecedores em cruz e ambas com os reforços concêntricos e excêntricos. Então, a estrutura idealizada foi uma placa conectada de forma rígida a vigas enrijecidoras e a energia de deformação obtida em termos de funções generalizadas de deslocamento dentro e fora do plano com seus coeficientes como variáveis de projeto. Para determinar a magnitude desses coeficientes que minimizam o potencial total de energia do sistema foi utilizada a programação sequencial quadrática.

Sapountzakis e Katsikadelis publicaram um artigo sobre placas reforçadas por vigas, aplicaram uma metodologia que considerava os esforços e deformações no plano da placa e axiais nas vigas, avaliando as regiões da interface de união entre os enrijecedores e a placa. O cálculo dos esforços de cisalhamento foram parâmetros importantes para o projeto. A solução das equações diferenciais do problema foi alcançada por meio do método da equação análoga e para verificar a eficácia foi analisado um exemplo de uma placa retangular simplesmente apoiada com um enrijecedor central, também de seção transversal retangular, simulada com enrijecedores de diferentes alturas. Os resultados se mostraram com uma deflexão transversal bem menor comparado com outras abordagens, apontando um aumento da rigidez nesta placa enrijecida quando implementadas as considerações desse artigo (SAPOUNTZAKIS e KATSIKADELIS, 2000).

Silva utilizou o método de elementos finitos e o software ANSYS@, para estudar numericamente a influência da excentricidade no acoplamento entre laje (considerada como uma placa) e vigas (consideradas como enrijecedores) para pavimentos de poucas vigas, pois normalmente os estudos relacionam lajes nervuradas com o espaçamento reduzido entre vigas que chegam a uma redução da metade em relação aos deslocamentos da laje. Três modelos são mostrados na Fig. 1.3 e foram abordados na avaliação do efeito da excentricidade, sendo um modelo concêntrico, um com o topo dos enrijecedores ao fundo da placa e outro com o topo dos enrijecedores posicionadas no topo da placa.

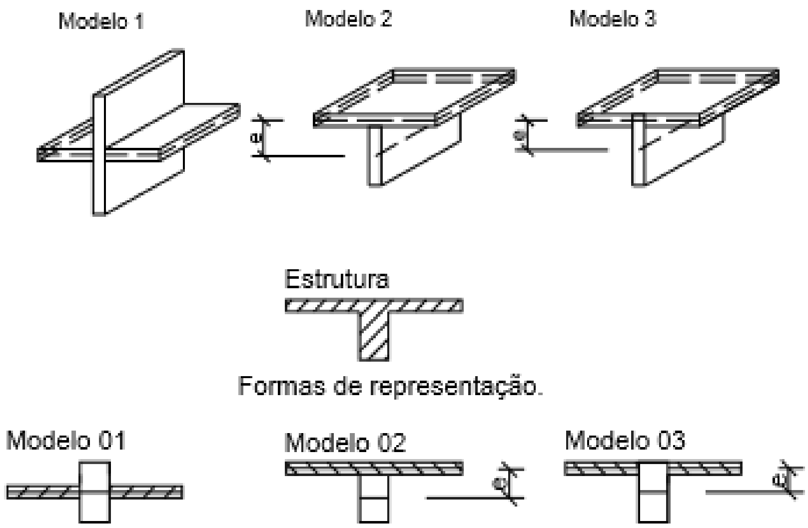


Figura 1.3: Representação dos modelos das excentricidades (Fonte: SILVA, 2010)

Para avaliação da excentricidade foi utilizado uma placa quadrada enrijecida e foram retirados os enrijecedores pouco a pouco para analisar os deslocamentos e esforços. Os deslocamentos e as tensões apresentaram reduções apreciáveis em todos os casos, principalmente para os deslocamentos com relação ao modelo concêntrico, o segundo e terceiro modelo chegaram a reduziram respectivamente 293% e 229%. Desconsiderar a excentricidade em ligação placa-enrijecedor constituída por enrijecedores muito espaçados, levam a resultados superestimados de deslocamentos e tensões, através desta análise é possível uma redução até mesmo de custos na estrutura. Um fator de simples implementação, a análise de excentricidade não acarreta em custo de processamento e melhora a representação do modelo estrutural analisado (SILVA, 2010).

Singh (2013) observou que estruturas criadas pela natureza indicam, na maioria dos casos, que a robustez e a rigidez não dependem apenas do material, mas também de sua forma. Este fato foi notado há muito tempo por alguns observadores que resultou na criação de elementos estruturais artificiais com alta capacidade de suporte, principalmente devido à sua forma, tais como vigas, arcos e cascas. Adicionando esses elementos para enrijecer à placa complica a análise e várias suposições devem ser aplicadas para facilitar uma solução ao problema. Então, estudou um modelo de simulação para análise estática de grande deflexão em placas finas retangulares com enrijecedores e submetida à carregamento transversal. A formulação matemática é baseada na forma variacional do princípio de energia, onde os campos de deslocamento assumem uma combinação linear finita de funções ortogonais admissíveis, satisfazendo as condições de flexão e membrana correspondentes da placa. Uma não-linearidade geométrica foi incorporada através da consideração da relação não-linear de deslocamento-deformação, o conjunto não linear resultante de equações governantes foi resolvido através de um procedimento numérico envolvendo o método de substituição direta usando o parâmetro de relaxamento. O trabalho computacional foi realizado num domínio quadrado normalizado, que é dividido em subdomínios que dependem do número, orientação e localização dos enrijecedores. Desenvolvida pela técnica de decomposição de domínio a introdução de um número adequado de pontos de computação em torno da localização dos enrijecedores e limites da placa. A validação do presente método e a técnica de solução foram realizadas com sucesso com os resultados disponíveis na literatura mostrando boa concordância. Vários resultados foram apresentados usando diferentes tipos de enrijecedores ligados à placa e também para a variação da localização dos mesmos. Os resultados demonstram que para diferentes graus de não-linearidade estes correspondem a diferentes limites de flexão e para análise de placas retangulares com enrijecedores com perfil T invertido ou com perfil retangular, a placa com o enrijecedor de perfil T invertido apresenta a melhor rigidez ou resistência contra a deflexão.

Silva et al (2015) analisaram numericamente o comportamento mecânico de uma placa fina de aço sob flexão, engastada nos quatro lados, inicialmente sem enrijecedores, sendo esta utilizada como referência e também seus valores máximos de deslocamento transversal e de tensão de von Mises. Na sequência, enrijecedores foram incorporados à placa através do Método Design Construtal (MDC), o volume de todas as placas será o mesmo e a placa enrijecida terá metade desse volume destinado a placa e outra metade nos enrijecedores. Também foi considerado o grau de liberdade que relaciona à altura do enrijecedor com sua espessura. Para obter os resultados, um modelo computacional baseado no MEF foi desenvolvido no software ANSYS® e nele contemplado as características citadas. Então, com o objetivo de minimizar o deslocamento transversal e a tensão máxima, foram comparados os resultados das placas com enrijecedores entre si e com a placa sem enrijecedores. Os resultados obtidos indicaram que é possível melhorar significativamente o comportamento mecânico de uma placa fina de aço com enrijecedores sob flexão através do emprego do MDC.

Singh, Duggal e Pal (2015) trataram do comportamento de placas enrijecidas submetidas a diferentes condições de carga. Utilizaram o MEF para modelar e analisar as placas enrijecidas. A deflexão máxima no centro da placa referência foi verificada com os resultados relatados. Um estudo paramétrico foi realizado estimando a deflexão máxima e a tensão nas placas isotrópicas, variando a geometria do enrijecedor e mantendo o volume constante do material. Então concluiu-se que para a geometria dos enrijecedores pode recomendar-se uma espessura aproximadamente igual à espessura da placa, um comprimento de 65% a 75% da largura da placa e uma altura de 4 a 6 vezes maior que sua espessura.

Placas com geometria quadrada e retangular contendo enrijecedores concêntricos e excêntricos, foram analisadas por Hosseini e Soltani quanto à flexão usando o método de colocação sem malha. Determinada as equações governantes de placas e vigas, pelas teorias de placa de Mindlin e de vigas de Timoshenko respectivamente com as matrizes de rigidez da placa e das vigas separadamente. As matrizes de rigidez da placa e das vigas foram combinadas usando equações de transformação para chegar numa matriz de rigidez total. Por ter uma independência da malha, torna-se um processo de implementação mais simples quando comparado a outros métodos numéricos. Foi utilizado um método de interpolação de ponto radial, para produção das funções de interpolação sem malha. Além do mais, a função de base radial multiquadrática foi empregada para interpolações pontuais. Para soluções com uma maior precisão e estabilidade foram usados polinômios com funções de base radial, em seus exemplos a precisão aceitável pode ser visualizada quanto ao método empregado na análise de placas enrijecidas (HOSSEINI e SOLTANI, 2017).

Estruturas de placas finas de aço com enrijecedores foram estudadas por Troina utilizando a simulação numérica, a fim de determinar relações geométricas ótimas para minimizar os deslocamentos transversais nestas placas enrijecidas quando submetidas a esforços transversais uniformemente distribuídos. Para gerar as diferentes configurações geométricas foram aplicados o MDC e a técnica de otimização por Busca Exaustiva. As soluções numéricas foram obtidas através do software *ANSYS*®, que usa a metodologia MEF na resolução de problemas estruturais, e os modelos utilizados nas análises foram construídos com os elementos finitos SHELL93 sendo bidimensional e SOLID95 sendo tridimensional. Uma placa de referência serviu como base para gerar todas as demais geometrias de placas, e a construção das placas enrijecidas foram resultado da transformação de parte do material da espessura da placa de referência em enrijecedores longitudinais e transversais (TROINA, 2017).

Ramos et al. (2018) por meio de modelos computacionais realizaram uma análise numérica sobre o comportamento mecânico de chapas finas de aço, baseada no MEF e utilizando o ANSYS®. O modelo inicial estudado foi uma placa quadrada de aço sem enrijecedores, simplesmente apoiada nas quatro bordas e submetida uma carga aplicada transversal e uniforme, foi analisado seu deslocamento transversal máximo e adotado como referência. A placa de referência serviu para criar as diferentes configurações geométricas das placas enrijecidas sendo proposto uma variação do número de enrijecedores e também da razão entre a altura e a espessura dos enrijecedores, com o objetivo de determinar a configuração geométrica que minimize a deflexão máxima das placas com enrijecedores. Os resultados obtidos indicaram que é possível melhorar o comportamento mecânico relacionado ao deslocamento transversal da placa quando as configurações geométricas das placas enrijecidas são comparadas com a placa de referência que não possui enrijecedor mas mantém o volume igual das demais configurações de placas enrijecidas analisadas.

Em artigo, Amaral et al. (2019), apresentaram estudo sobre modelagem computacional de placas enrijecidas submetidas a uma carga transversal uniformemente distribuída, permitindo a análise numérica de deslocamentos e tensões. Desenvolvido no software ANSYS®, o modelo computacional baseia-se no MEF e utiliza o elemento finito SHELL281. O modelo elaborado considera a condição de contorno de simetria (CCS) que possibilita utilizar um quarto da placa enrijecida permitindo reduzir o tempo de processamento computacional em relação à simulação da placa completa e utilizando modelo com CCS possibilita implementar malhas mais refinadas. Objetivando verificar o modelo computacional e avaliar sua acurácia com relação aos resultados do modelo que considera a placa toda, foram realizadas análises comparativas de deflexão e de tensão. A verificação do modelo foi realizada através da solução independente de malha, obtida pelo teste de convergência de malha. Os resultados de deslocamento e tensão obtidos por meio do modelo numérico utilizando a CCS demonstraram uma boa precisão em relação ao modelo computacional da placa completa, tanto na verificação quanto no comparativo dos resultados entre a placa inteira e um quarto de placa.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Geral

Gerar dados técnicos permitindo avaliar o comportamento estático de enrijecedores longitudinais e transversais em placas finas de aço quando estas submetidas a uma carga transversal. Também otimizar geometricamente o espaçamento destes enrijecedores nas placas visando a minimização das deflexões, aliando a modelagem computacional, o Método Design Construtal e a técnica de Busca Exaustiva. O material da placa enrijecida foi considerado isotrópico e elástico linear.

1.2.2. Objetivo Específico

Os objetivos específicos estão citados em tópicos detalhados e demonstram quais são os resultados do desenvolvimento desta pesquisa.

- Avaliar a influência do posicionamento dos enrijecedores ao longo da placa nos sentidos transversais e longitudinais. Sendo espaçados com distâncias iguais ou diferentes referente ao espaçamento entre enrijecedores e do enrijecedor até a borda da placa.
- Avaliar a influência da relação de altura/espessura do enrijecedor com relação à deflexão nas placas enrijecidas.
- Analisar o comportamento da deflexão no ponto central da placa definindo a configuração ótima para cada variação de placa (quantidade de enrijecedores, posição e relação de altura e espessura).
- Analisar o comportamento da deflexão máxima na placa definindo a configuração ótima para cada variação de placa (quantidade de enrijecedores, posição e relação de altura e espessura).
- Analisar concomitantemente o comportamento de ambas deflexões central e máxima em busca da otimização geométrica multiobjectivo, definindo a configuração ótima para cada variação de placa (quantidade de enrijecedores, posição e relação de altura e espessura).

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Na engenharia são comuns estruturas de placas enrijecidas que apresentam uma grande relação entre rigidez estrutural e peso, um exemplo são as estruturas de navios. Uma das maneiras de se confeccionar essas placas é através da colocação de perfis soldados dispostos na longitudinal e/ou na transversal, com isso é possível dar uma maior capacidade ao conjunto para resistir às combinações de carregamentos como momento de flexão, torção, etc (TROINA, 2017).

Conveses e anteparos são exemplos de estruturas utilizadas em casco de navios, compostas de painéis rígidos, os quais utilizam placas com enrijecedores para suportar forças geradas pela pressão da água (OKUMOTO, 2009).

Na indústria naval e oceânica que envolvem conveses, fundo de cascos de navios, painéis e plataformas de estruturas *offshore*, são empregadas placas finas de aço (REAL e ISOLDI, 2010).

Para entender placa fina, deve-se entender a classificação das placas que são enquadradas quanto à relação da sua espessura t com a menor dimensão lateral (L), gerando uma classificação conforme os seguintes intervalos: (SZILARD, 2004)

- Para $\left(\frac{t}{L} < \frac{1}{50}\right)$, considera-se membrana ou placa muito fina praticamente sem rigidez à flexão, e suportam às cargas externas através de forças axiais e de cisalhamento central.
- Para $\left(\frac{1}{50} < \frac{t}{L} < \frac{1}{10}\right)$, considera-se placa rígida ou placa fina com rigidez à flexão, e suportam as cargas externas através de momentos internos de flexão e torção aliados a forças de cisalhamento transversal.
- Para $\left(\frac{1}{10} < \frac{t}{L} < \frac{1}{5}\right)$, considera-se para placas moderadamente espessas, e estas são similares em vários aspectos às placas finas, no entanto com uma importante diferença que deve ser considerada a influência das deformações de cisalhamento transversal.
- Para $\left(\frac{t}{L} > \frac{1}{5}\right)$, considera-se placas espessas, e são analisadas através do estado tridimensional de tensões em meios contínuos.

Uma das soluções empregadas para esses problemas mais complexos, tais como os regidos pelas equações diferenciais ordinárias e parciais e que constituem problemas de valores iniciais e de contorno, pode ser a modelagem computacional. Para resolução de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais pode se utilizar o MEF, um dos métodos numérico adaptados à implementação computacional. Do ponto de vista do custo computacional, esse método é atrativo por transformar as equações diferenciais em sistemas lineares e também possui flexibilidade em representar geometrias complexas (CANATO, 2007).

2.1. Teoria de Placas Finas

Placas são componentes estruturais tridimensionais, compostos por duas superfícies planas e retas, distanciadas entre si por uma distância designada de espessura. Quando esta espessura se torna muito pequena ao ser comparada as demais dimensões da placa, como largura e comprimento, apresentando um valor menor que um décimo do valor da menor dimensão lateral da placa, pode-se afirmar que se trata de estruturas classificadas como placa fina (SZILARD, 2004). Tipicamente as placas suportam carregamentos transversais, desenvolvendo deformações de flexão (MENDONÇA, 2005).

Considerando a mecânica dos meios contínuos o material pode apresentar comportamentos elásticos e não elásticos. Para esta abordagem de placas será considerado o comportamento do material homogêneo e elástico, consequentemente as relações entre tensões e deformações são regidas pela Lei de Hooke. No regime de pequenas deformações e deslocamentos, o comportamento de placas finas de material elástico linear pode ser interpretado através de uma equação diferencial governante e a teoria de placas finas para pequenos deslocamentos possui a colaboração de Bernoulli, Lagrange, Navier, Poisson, Saint-Venant e as contribuições de Kirchhoff e Love sendo estas as mais relevantes para o desenvolvimento deste estudo (SZILARD, 2004).

2.1.1. Equação diferencial governante em termos da deflexão

Teoria clássica para pequena deflexão

A teoria clássica trata o problema de placas submetidas a carregamentos transversais e condições de contorno diversas com uma abordagem mais simplificada, seguindo as hipóteses de Kirchhoff e Love. O conceito para carregamento transversal consiste naquele carregamento que atua na direção normal à superfície da placa causando sua deflexão transversal. Sendo assim, para estes casos de placas de pequena espessura a análise pode ser realizada a partir das formulações bidimensionais obtidas por Kirchhoff-Love que convergem os resultados com ótima confiança dos dados gerados e reduzem as complicações matemáticas, evitando uma análise estrutural mais completa, sendo necessário uma solução de equações diferenciais tridimensionais da teoria da elasticidade (SZILARD, 2004).

Então com as hipóteses simplificativas descritas a seguir, assumidas por Kirchhoff e Love, permite tratar placas finas com pequenos deslocamentos como placa de comportamento linear geométrico.

- Material da placa homogêneo, isotrópico e linear-elástico;
- Placa inicialmente plana e o plano médio não sofrendo deformação durante a flexão;
- Espessura deve ser constante e concomitantemente ter a menor dimensão lateral da placa com no mínimo dez vezes a espessura;
- Deflexões transversais W (x,y) da placa são pequenas quando comparadas com a espessura, sendo considerada como deflexão máxima o valor de um décimo da espessura;
- Inclinações do plano médio da placa (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade;
- Seções planas e normais ao plano médio da placa antes da sua deformação permanecem planas e normais ao plano médio após a deformação;
- A tensão normal σ_z na direção transversal à placa pode ser desprezada.

Consideradas as hipóteses na equação diferencial governante da placa, a Fig. 2.1 mostra os parâmetros geométricos de uma placa, o sistema de coordenadas adotado e o carregamento em sua superfície para um problema bidimensional de placas.

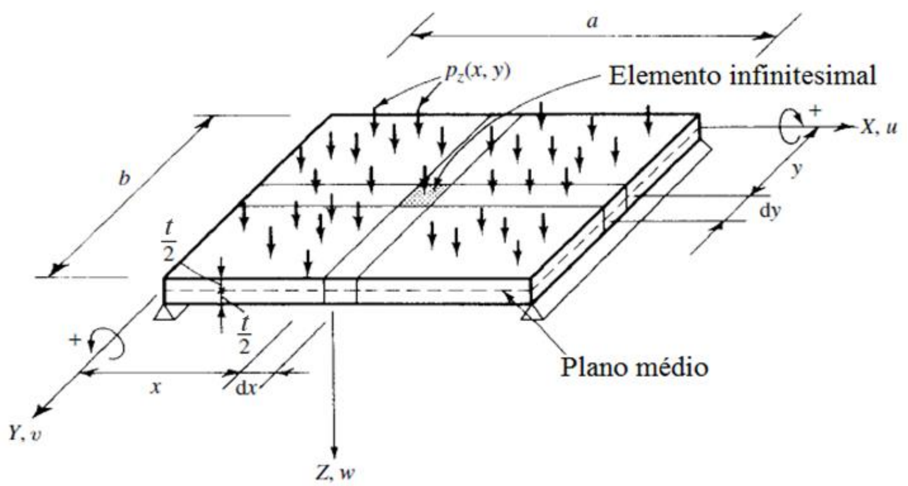


Figura 2.1: Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado
(Fonte: SZILARD, 2004)

A aplicação das equações da elasticidade permitem encontrar as tensões e a equação de governo que irá relacionar os deslocamentos com as forças externas, mas para isso devem ser obtidas as deformações através das hipóteses simplificativas, sendo um conjunto de hipóteses cinemáticas sobre a deformação de uma placa sob flexão permitindo relacionar as deformações com os deslocamentos (MINDLIN, 1951; REISSNER, 1945).

Na Fig. 2.2 é apresentado o estado de tensão de um elemento infinitesimal extraído do interior da placa fina, mostrando as tensões que surgem para equilibrar o corpo resistindo aos esforços externos sob os quais a placa pode ser submetida.

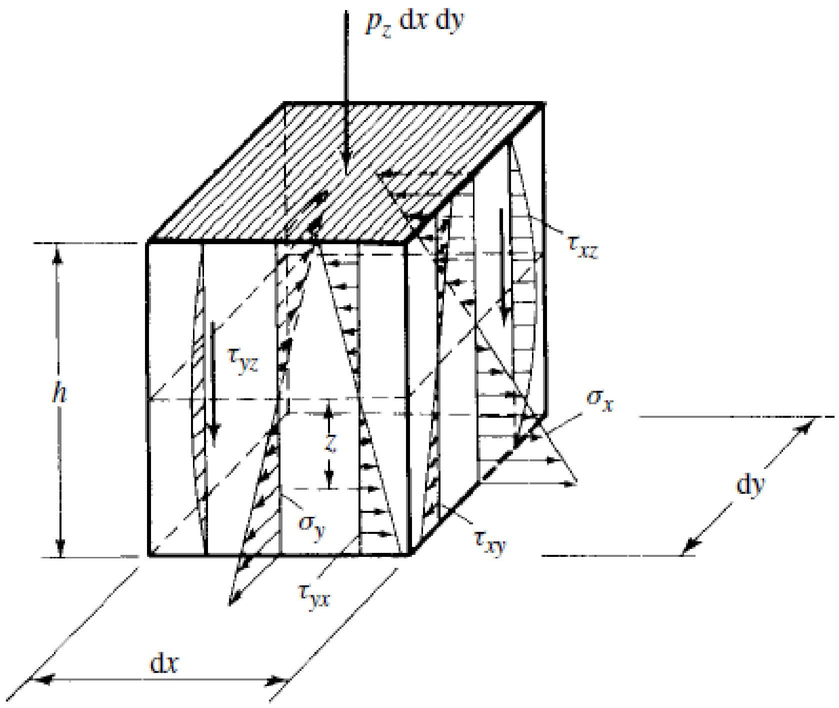


Figura 2.2: Elemento infinitesimal de uma placa fina e suas tensões (Fonte: SZILARD, 2004)

Esforços internos

Considerando um elemento infinitesimal retirado da placa sujeito apenas esforços laterais, para analisar num sistema de coordenadas cartesianas, sendo convencionados os componentes de deslocamento u, v e w e os componentes de forças internas e externas considerados positivos quando apontarem para o sentido positivo dos eixos coordenados X, Y e Z. O equilíbrio de forças e momentos para o elemento infinitesimal da Fig. 2.3 pode ser realizado de maneira similar ao da teoria elementar de vigas (SZILARD, 2004).

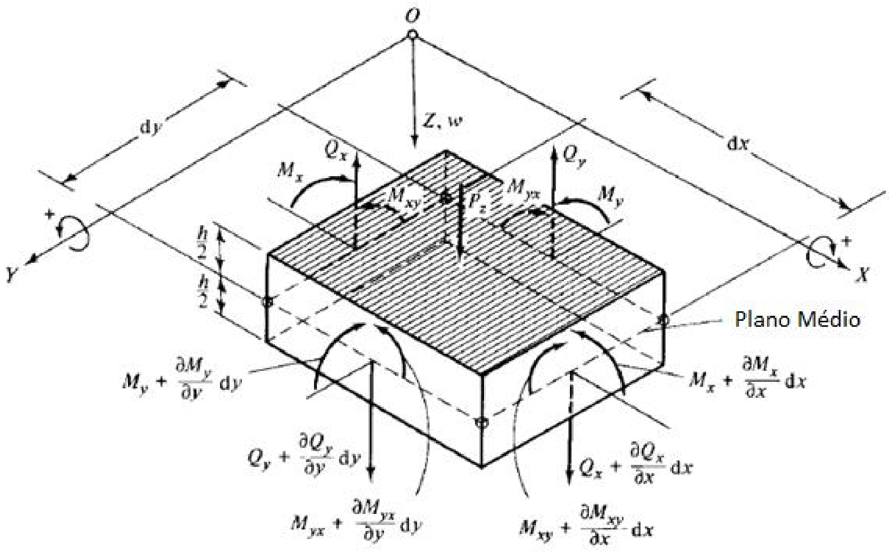


Figura 2.3: Esforços resultantes em um elemento de placa (Fonte: Adaptado de SZILARD, 2004)

O comportamento mecânico de uma placa fina pode ser considerado semelhante ao comportamento de uma malha de vigas bidimensional. Considerando p_z uma carga externa e esta carga sendo equilibrado pela ação dos esforços cortantes Q_x e Q_y e momentos fletores M_x e M_y. Assim, a diferença entre elementos estruturais é dada por esforços internos como os momentos torçores M_{xy} e M_{yx} que contribuem para a resistência do carregamento externo (SZLARD, 2004).

Sabendo que a placa está somente sobre a ação de esforços laterais e partindo das equações de equilíbrio fundamentais, podem ser empregadas as Eq. (2.1) (SZILARD, 2004):

$$\sum M_x = 0 \; ; \; \sum M_y = 0 \; ; \; \sum F_z = 0 \tag{2.1}$$

Apresentado na Fig. 2.4 o estado de equilíbrio atuante no plano médio sob a ação de uma carga distribuída p_z, sabendo que na teoria de placa os esforços solicitantes atuam no plano médio por unidade de comprimento, os esforços distribuídos são definidos como q_x, q_y, m_x, m_y, m_{xy} e m_{yx} diferenciando dos esforços citados anteriormente (SZILARD, 2004).

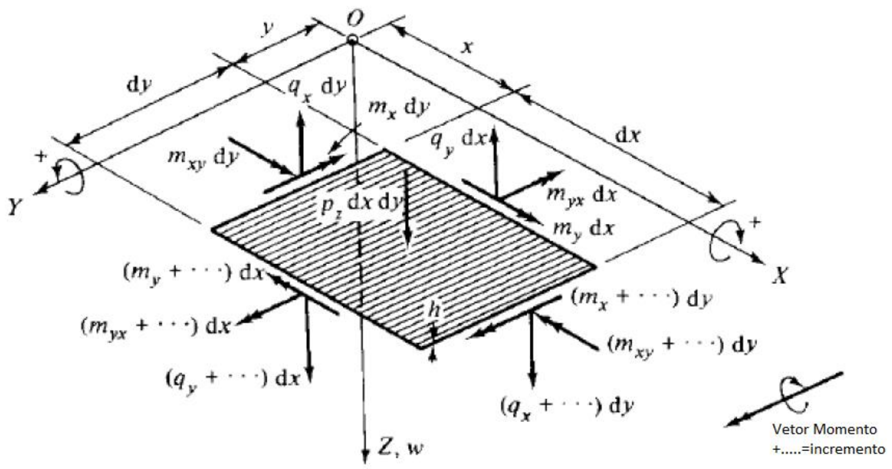


Figura 2.4: Estado de equilíbrio atuante no plano médio (Fonte: SZILARD, 2004)

Iniciando o equilíbrio de momentos em torno do eixo coordenado *Y*, utilizando as equações fundamentais de equilíbrio e realizando o somatório dos momentos, tem-se:

$$\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - m_{yx} dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy \, \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \tag{2.2}$$

Realizando a expansão e a simplificação da Eq. (2.2), posterior desprezando o termo $1/2 \left(\partial q_x / \partial x\right) (dx)^2 dy$ tem-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dydx - q_x dxdy = 0 \tag{2.3}$$

dividindo a Eq. (2.3) por $dxdy$ obtém-se o esforço cortante:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \tag{2.4}$$

De forma análoga calcula-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo *X*, supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento, obtém-se:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \tag{2.5}$$

Realizando o equilíbrio de forças em torno do eixo *Z*, obtém-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dxdy + p_z dxdy = 0 \tag{2.6}$$

efetuando a divisão por $dxdy$, obtém-se:

$$-p_z = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \tag{2.7}$$

Agora, substituindo as Eqs. (2.5) e (2.6) na Eq. (2.7), e descrevendo que $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se a equação cujos momentos de flexão e de torção são funções das componentes de deslocamento u, *v* e w.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \tag{2.8}$$

Relação deformação-deslocamentos

A relação entre a deformação e o deslocamento de placas finas mantém-se conforme as hipóteses simplificativas, esta relação é possível ser observada na Fig. 2.5 a qual se refere inicialmente a seção transversal da placa paralela ao eixo coordenado *X* e posteriormente à placa fletida (SZILARD, 2004).

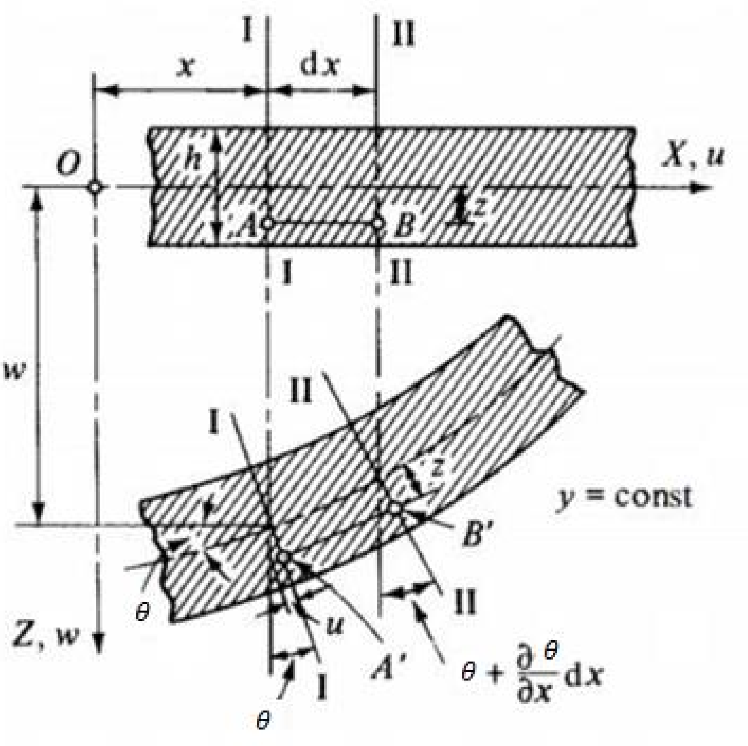


Figura 2.5: Flexão da placa na coordenada *X* (Fonte: SZILARD, 2004)

Determinado o deslocamento axial *u* evidenciado entre os pontos, *A-A`* e *B-B`*, pela expressão:

$$u = -z_{\theta} = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.9}$$

De maneira equivalente, o deslocamento axial *v* é determinado pela expressão:

$$v = -z_{\theta} = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.10}$$

Substituindo a Eq. (2.9) do deslocamento axial *u* na relação deformação-deslocamento do eixo *x*, obtém–se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial \theta}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

De forma equivalente, substituindo a Eq. (2.10) do deslocamento axial *v* na relação deformação-deslocamento do eixo *y*, obtém–se:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -z\frac{\partial \theta}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.12}$$

A deformação-deslocamento no plano *XY*, por cisalhamento pode ser associada aos deslocamentos axiais *u* e *v*, obtendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.13}$$

Substituindo as Eqs. (2.9) e (2.10) na Eq. (2.13)

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.14}$$

As equações (2.11) a (2.14) expressam as deformações em qualquer ponto da placa.

Por conseguinte, a curvatura da placa nas direções *X* e *Y* pode ser determinada através das equações:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.15}$$

$$k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.16}$$

e o empenamento da placa pode ser determinado através da equação:

$$\zeta = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.17}$$

Relação tensão-deslocamentos

A relação entre tensão e deslocamento para placas finas pode ser observada na Fig. 2.6 após aplicada as hipóteses simplificativas, a qual mostra um estado de tensões de uma lamina localizada a uma distância *z* do seu plano médio.

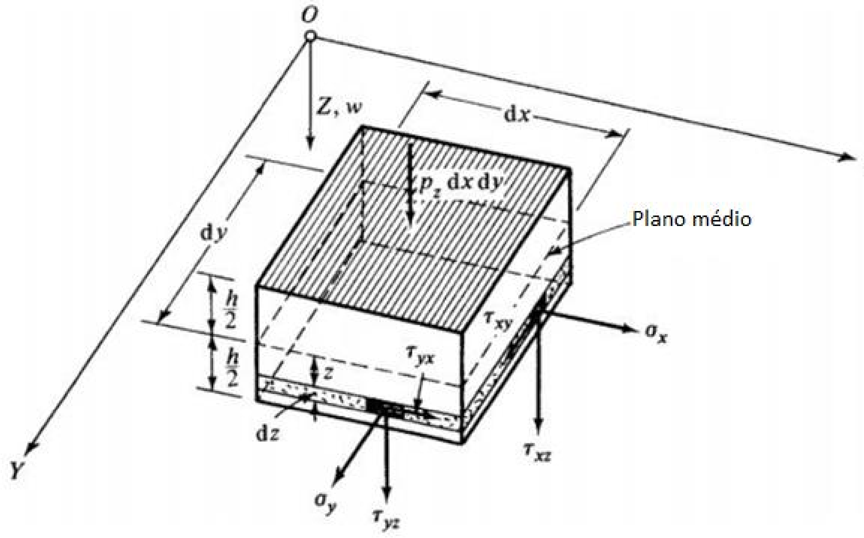


Figura 2.6: Estado de tensões de um elemento de placa (Fonte: Adaptado de SZILARD, 2004)

Empregando a Lei de Hooke em um estado de tensões, pode-se determinar as componentes de tensão do plano *xoy* pelas deformações

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-v^2}\left(\varepsilon_x + v\varepsilon_y\right) \tag{2.18}$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-v^2}\left(\varepsilon_y + v\varepsilon_x\right) \tag{2.19}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xy} \tag{2.20}$$

onde: *E* é o módulo de Young ou módulo de elasticidade; *G* é o módulo de elasticidade transversal ou módulo transversal; e v é o coeficiente de Poisson.

As tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} não podem ser determinadas através da Lei de Hooke, devido às hipóteses simplificativas. Para aplicação da Teoria de Placas Finas pode ser desprezar estas tensões de cisalhamento, apenas aparentam uma inconsistência conceitual da análise.

Substituindo as Eqs. (2.11) e (2.12) na Eq. (2.18) e também na Eq. (2.19), obtém-se respectivamente a tensão normal na direção *x* e a tensão normal na direção *y*:

$$\sigma_x = -\frac{E_Z}{1-v^2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2}\right) \tag{2.21}$$

$$\sigma_y = -\frac{E_Z}{1-v^2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}\right) \tag{2.22}$$

e substituindo a Eq. (2.14) na Eq. (2.20), obtém-se a tensão de cisalhamento no plano *x*-*y*:

$$\tau_{xy} = -\frac{E_Z}{2(1+v)}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y}\right) \tag{2.23}$$

Considerando a simetria do tensor das tensões, tem-se: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Relação esforço solicitante-deslocamento

A relação entre esforço solicitante e deslocamento para placas finas, considera os momentos fletores por unidade de comprimento nas direções *x* e *y*, sendo m_x e m_y definidos através da integração do produto das tensões normais ao longo da espessura pela distância dita *z* até o plano médio, de maneira similar a Teoria de Vigas.

$$m_x = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \tag{2.24}$$

$$m_y = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \tag{2.25}$$

Analogamente definem-se os momentos fletores m_{xy} e m_{yx} através da integração do produto das tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} pela distância até o plano médio.

$$m_{xy} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \tag{2.26}$$

$$m_{yx} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \tag{2.27}$$

Logo, devido à simetria do tensor das tensões τ_{xy}=τ_{yx}, temos $m_{xy} = m_{yx}$.

Substituindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.24), a Eq. (2.22) na Eq. (2.25) e realizando sua integração ao longo da espessura da placa, desenvolve-se as relações esforço solicitante-deslocamento para placas finas:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(k_x + vk_y\right) \tag{2.28}$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -D\left(k_y + vk_x\right) \tag{2.29}$$

Também substituindo a Eq. (2.23) nas Eqs. (2.26) e (2.27), e realizando sua integração ao longo da espessura da placa, desenvolvem-se as relações esforço solicitante-deslocamento para placas finas:

$$m_{xy} = -(1-v)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = -(1-v)Dx \tag{2.30}$$

Relacionada à rigidez à flexão, descrita por *D*, com a rigidez de uma viga com largura unitária determinada por *EI*, pode se concluir que devido ao efeito do coeficiente de Poisson (*v*) a placa irá ter uma rigidez maior.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \tag{2.31}$$

Determinando uma equação diferencial para deflexão *W* considerando uma placa fina, de material elástico, regime com pequenos deslocamentos e sob carregamento transversal, se dá através da substituição das Eqs. (2.28), (2.29) e (2.30) na Eq. (2.8):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D} \tag{2.32}$$

A determinação da função w (x,y) é resolvida através da resolução da Eq. (2.32), satisfazendo as condições de contorno do problema, situação de um carregamento transversal em que a placa fina está submetida.

Aplicando o operador diferencial de segunda ordem - Laplaciano e desconsiderando a última parcela (z), temos:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{2.33}$$

Reescrevendo a Eq. (2.32) em função do operador, temos:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_z \tag{2.34}$$

Podem ser definidos os esforços cortantes através do deslocamento transversal w, baseado nesta condição determina-se a expressão para os esforços substituindo as Eqs. (2.28), (2.29) e (2.30) nas Eqs. (2.4) e (2.5):

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 W \tag{2.35}$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 W \tag{2.36}$$

2.1.2. Condição de Contorno

A solução completa para uma placa somente se dará quando o campo de deslocamento w (x,y) satisfizer a Eq. (2.32), um problema de valor de contorno (PVC), e também as condições de contorno que a placa está sujeita sejam satisfeitas. Como a Eq. (2.32) é de quarta ordem, ela necessita de duas condições de contorno por bordo.

Para problemas de flexão de placas as condições de contorno podem ser de esforços internos ou deslocamentos. As condições de esforços internos são estáticas e envolvem os momentos de flexão torção e forças de cisalhamento transversal. E as condições de deslocamento, chamadas de condições de contorno geométricas, envolvem a deflexão lateral da placa ou a rotação do seu plano médio. Na Fig. 2.7 são ilustradas as principais condições de contorno para uma placa sob flexão.

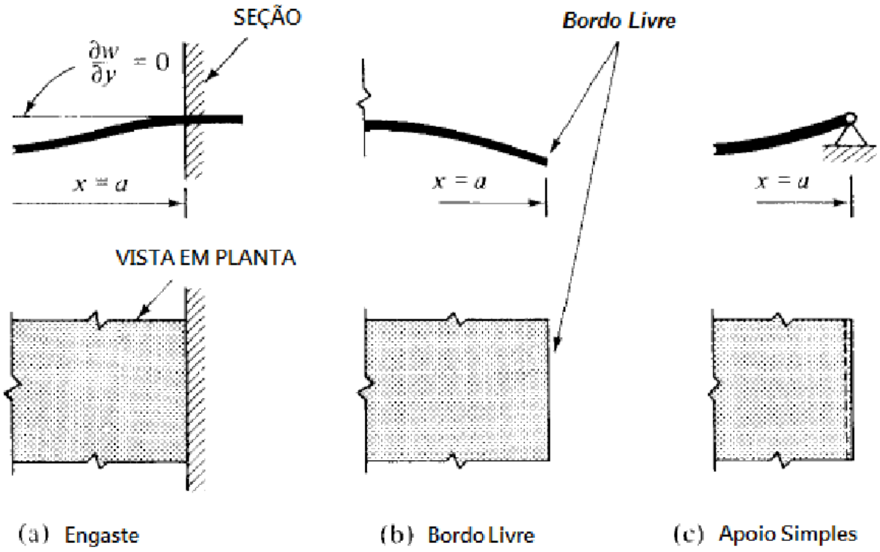


Figura 2.7: Principais condições de contorno para placas (Fonte: SZILARD, 2004).

Condições de Contorno Estáticas

Quando os esforços internos satisfazem às equações de restrição, esse é um caso de condições de contorno estáticas. Exemplificando através de uma placa retangular de dimensões a e b definindo hipoteticamente seus bordos como livres, sendo nulo o esforço cortante e o momento fletor quando em bordos livres, pode se definir as expressões para ambas as forças como igualadas a zero, representando matematicamente estas condições por:

$$(m_x)_x = 0, \qquad (v_x)_x = 0 \qquad em\; x = 0\; e\; x = a \tag{2.37}$$

$$(m_y)_y = 0, \qquad (v_y)_y = 0 \qquad em\; y = 0\; e\; y = b \tag{2.38}$$

onde v_x e v_y representam os esforços cortantes por unidade de comprimento que atuam nos planos normais aos eixos cartesianos X e Y, respectivamente.

Deve ser ressaltado que o esforço cortante que ocorre em um bordo da placa, de forma genérica, consiste em duas componentes: – devido aos esforços de cisalhamento transversal q_x e q_y; – devido ao efeito dos momentos torcionais m_{xy} e m_{yx}. As chamadas forças suplementares de Kirchhoff q_x^* e q_y^*, por unidade de comprimento, que contribuem para o esforço cortante total no bordo da placa, são obtidas através da transformação dos momentos torcionais m_{xy} e m_{yx} em conjugados equivalentes. Analisando a Fig. 2.8 pode se perceber as forças de Kirchhoff Q_x^* e Q_y^* que deram origem pela transformação dos momentos torcionais em conjugados equivalentes, os incrementos são determinados pela expansão em série de Taylor truncada na primeira ordem e observa-se que entre elementos infinitesimais e adjacentes uma parcela de esforço cortante adicional se cancela, restando o incremento de primeira ordem. Dividindo esse incremento pelo comprimento do elemento infinitesimal obtêm-se as forças suplementares de cisalhamento q_x^* e q_y^* conforme as equações descritas abaixo.

$$Q_x^* = m_{xy}\frac{dy}{dy} = m_{xy} \quad e \quad Q_x^* + \frac{\partial Q_x^*}{\partial y}dy = \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy\right)\frac{dy}{dy} \tag{2.39}$$

$$Q_y^* = m_{yx}\frac{dx}{dx} = m_{yx} \quad e \quad Q_y^* + \frac{\partial Q_y^*}{\partial x}dx = \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}dx\right)\frac{dx}{dx} \tag{2.40}$$

$$q_x^* = \frac{Q_x^* + \frac{\partial Q_x^*}{\partial y}dy - Q_x^*}{dy} = \frac{\partial Q_x^*}{\partial y} = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \tag{2.41}$$

$$q_y^* = \frac{Q_y^* + \frac{\partial Q_y^*}{\partial x}dx - Q_y^*}{dx} = \frac{\partial Q_y^*}{\partial x} = \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} \tag{2.42}$$

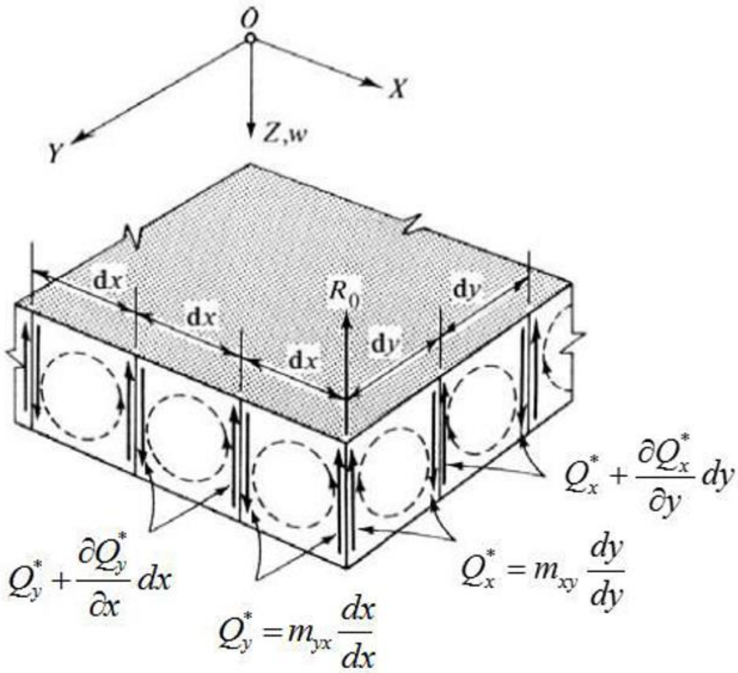


Figura 2.8: Cisalhamento devido aos momentos torcionais (Fonte: SZILARD, 2004).

Então, os esforços cortantes totais nos bordos livres de uma placa são dados por:

$$v_x = q_x + q_x^* = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \tag{2.43}$$

$$v_y = q_y + q_y^* = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} \tag{2.44}$$

Finalmente, considerando as Eqs. (2.43) e (2.44), as condições de contorno para o caso de bordo livre dadas pelas Eqs. (2.37) e (2.38) passam a ser expressas de forma mais detalhada por:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x = 0, \qquad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-v)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_x = 0 \qquad em\, x = 0\; e\; x = a \tag{2.45}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_x = 0, \qquad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-v)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_x = 0 \qquad em\, y = 0\; e\; y = b \tag{2.46}$$

Condições de Contorno Geométricas

Conhecer os deslocamentos e inclinações dos bordos da placa é um exemplo de condição de contorno geométrica. Considerando uma placa retangular totalmente engastada de dimensões a e b, que as deflexões e as inclinações nos seus bordos são nulas. Pode-se descrever essas condições de contorno através das expressões:

$$(w)_x = 0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x = 0 \qquad em\, x = 0\; e\; x = a \tag{2.47}$$

$$(w)_y = 0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = 0 \qquad em\, y = 0\; e\; y = b \tag{2.48}$$

Condições de Contorno Mistas

Envolvem ambas as condições de contorno citadas anteriormente, com relação aos esforços internos e também com relação aos deslocamentos. Um exemplo de condição de contorno mista, é uma placa retangular de dimensões *a* e *b*, apoiadas nos quatro bordos, com o tipo de apoio simples, que impõem em todas as bordas deslocamentos e momentos fletores nulos. Considerando esta condição, as expressões são representadas por:

$$(w)_x = 0, \qquad (m_x)_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x = 0 \qquad em\, x = 0\; e\; x = a \tag{2.49}$$

$$(w)_y = 0, \qquad (m_y)_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y = 0 \qquad em\, y = 0\; e\; y = b \tag{2.50}$$

Nas análises de placas simplesmente apoiadas também são importantes os efeitos dos esforços suplementares de cisalhamento de Kirchhoff, já discutidos para bordos livres. Em específico para os casos de placas retangulares, os esforços adicionais originam indesejadas forças nos cantos da estrutura e também contribuem para o esforço cortante total nos bordos.

Omitidas por conjugados que equivalem aos momentos torcionais, as forças suplementares de cisalhamento de Kirchhoff são somadas nos vértices da placa e responsáveis pelo surgimento das forças de canto, mostradas nas Figs. 2.8 e 2.9 por R_0, dadas por:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2D(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.51}$$

Nas placas simplesmente apoiadas devem ser previstas as fixações dos vértices. Caso não previstas, pode ocorrer o levantamento dessa estrutura devido à força de canto mostrada na Fig. 2.9. Pensando em aplicações práticas, em alguns casos podem ocorrer falhas locais, sendo necessários reforços a fim de evitar essas falhas.

Porém deve ser ressaltado que quando dois bordos adjacentes estão livres e como nesses bordos não existem momentos torcionais, o canto da placa localizado nesta intersecção não sofre ação de forças localizada, sendo $R_0 = 0$. De forma análoga não existe força de canto no vértice da intersecção de dois bordos adjacentes quando engastados, devido a seus momentos torcionais serem nulos resultado das suas inclinações serem nulas.

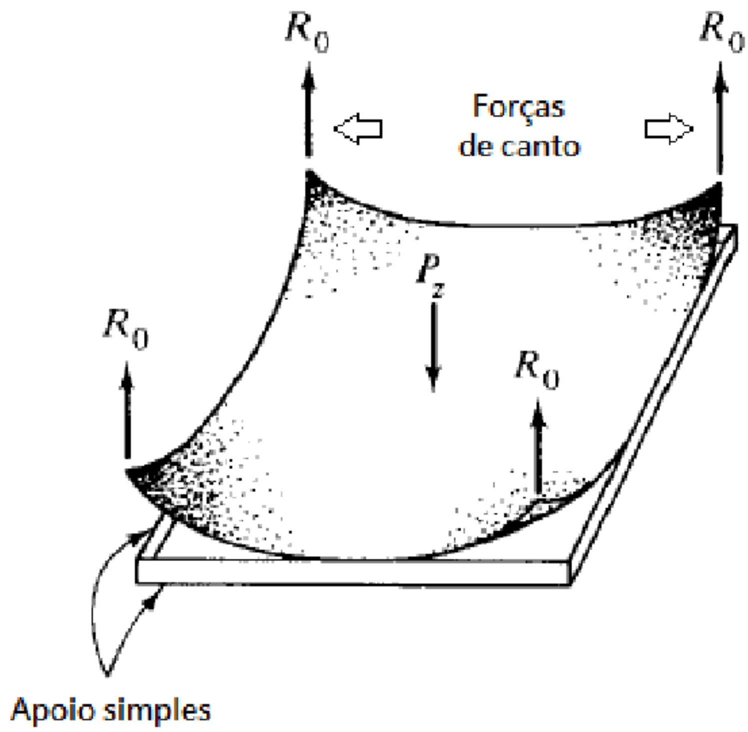


Figura 2.9: Forças de canto em uma placa apoiada (Fonte: SZILARD, 2004).

2.2. Placas com enrijecedores

A análise de placas enrijecidas pode ser dividida em três grandes categorias como: modelo de grelhas, placa ortotrópica e sistema de placa-viga (SALOMON, 2000).

Uma placa enrijecida pode ser idealizada como grelha, segundo Salomon (2000), ela requer uma largura efetiva com uma variação de 50% a 80% do espaçamento entre os reforços, conforme mostrado na Fig. 2.10. Essa largura efetiva é a porção da placa que juntamente com a seção transversal do enrijecedor, é utilizada para calcular à torção nas direções longitudinal e transversal da placa e os momentos de inércia e rigidezes à flexão. O método descrito apresenta erros quando comparado a valores experimentais, que normalmente para deflexões ficam em até 5%.

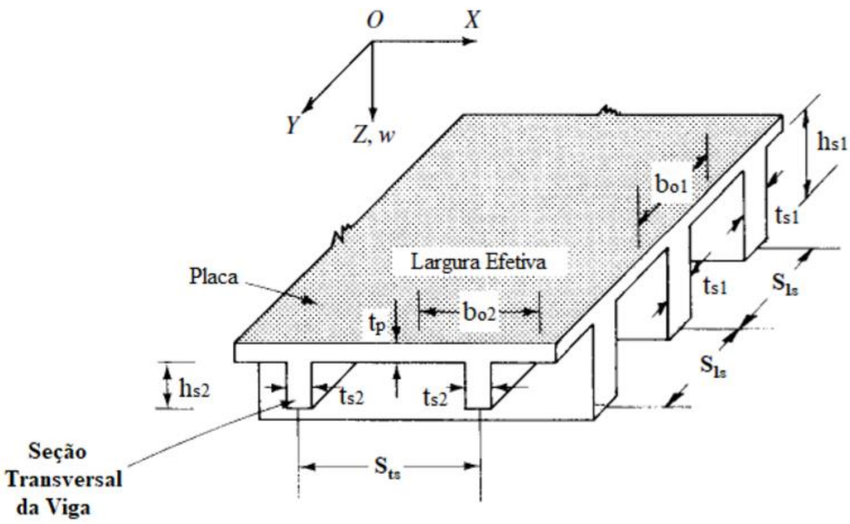


Figura 2.10: Placa enrijecida por vigas ortogonais (Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

Agora para o modelo de placa ortotrópica, quando as propriedades estruturais diferem em duas direções ortogonais, a ideia básica se dá através da conversão da placa enrijecida numa placa ortotrópica equivalente com uma única espessura e sem enrijecedores. A equação governante Eq. (2.52) para o problema de placas ortotrópicas é similar à teoria de placas finas de Kirchhoff, porém assumindo quatro constantes elásticas (E_x, E_y, ν_x, ν_y) para relacionar a tensão-deformação nas duas direções principais (eixos de coordenadas x e y).

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z(x, y) \tag{2.52}$$

onde D_x e D_y são as rigidezes à flexão nas direções x e y, enquanto B é a rigidez torcional efetiva da placa ortotrópica (SALOMON, 2000).

Para uma análise em placa enrijecida a aplicação do modelo de placas ortotrópica requer determinar as propriedades seccionais D_x, D_y e B através de expressões ou quando possível por testes diretos devido à complexidade da tarefa. Entretanto, Szilard (2004) e Timoshenko e Krieger (1959) já demonstraram que baseados em algumas considerações analíticas é permitido introduzir razoáveis aproximações para os cálculos dessas rigidezes para as placas reforçadas por perfis ortogonais retangulares.

Dados experimentais apontam resultados com boa concordância para casos de reforços relativamente pequenos, próximos e espaçados uniformemente, quando aplicada a idealização de placa ortotrópica em placas reforçadas com enrijecedores (SZILARD, 2004).

Agora serão vistas as análises que se encontram mais próximas do verdadeiro comportamento do problema físico para placas enrijecidas, estas placas são tratadas como um sistema placa e viga (reforço). Porém esse tipo de problema se torna difícil resolver de forma analítica, mas com o auxílio da computação a solução desses modelos pode ser realizada através dos métodos numéricos, entre eles o MEF o mais eficaz para soluções numéricas para esse tipo de problema. As pesquisas continuam e seguem com esforços aplicados no sentido de buscar desenvolvimento de modelos de elementos finitos precisos e eficientes para placas reforçadas com enrijecedores (SALOMON, 2000).

2.3. Teorias de Placas

Neste tópico serão conhecidas algumas teorias de placas contendo as hipóteses de Reissner e Mindlin, pois os conceitos destas teorias devem ser conhecidos, tendo em vista que o elemento SHELL281 que será visto a seguir utiliza estas hipóteses.

2.3.1. Teoria de Reissner

A teoria de Reissner assume uma variação linear do campo de deformações ao longo da espessura da placa, introduzindo uma influência de deformação por cisalhamento transversal. Sendo assim, conforme a placa flexiona as seções transversais planas mostradas na Fig. 2.11, mesmo permanecendo planas, não permanecem perpendiculares à superfície média depois da deformação como descrito na teoria clássica de placas finas. Agora nas rotações ω_x e ω_y das seções normais à superfície média calculada leva em consideração o efeito de distorção ocasionado pela deformação por cisalhamento.

$$\omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6}{5Gt} q_x \tag{2.53}$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6}{5Gt} q_y \tag{2.54}$$

onde temos G como módulo de cisalhamento transversal e t a espessura da placa.

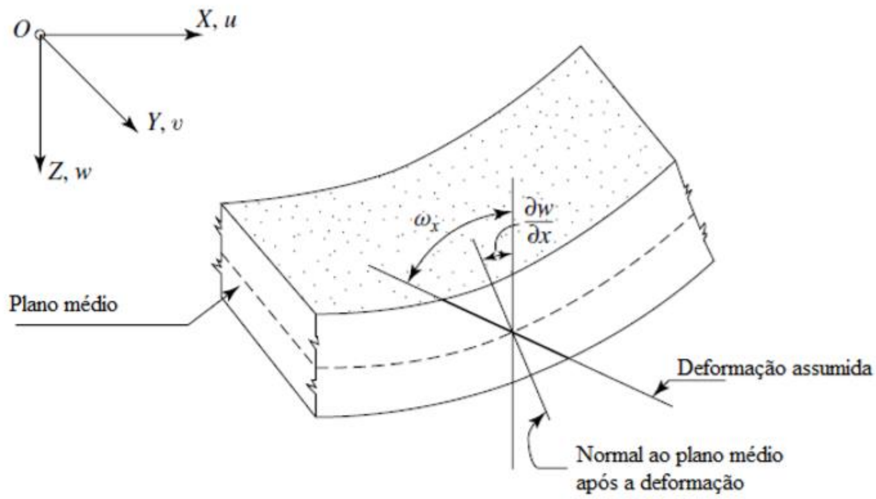


Figura 2.11: Seção transversal assumida pelas teorias de Reissner e Mindlin
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

A formulação de Reissner é alcançada após aplicar o teorema de Castigliano do mínimo trabalho empregando tensões como variáveis, fornecendo simultaneamente três equações diferenciais, tais como descritas:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_z - \frac{t^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu}\,\nabla^2\, p_z \tag{2.55}$$

$$q_x = -D\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} + \frac{t^2}{10}\,\nabla^2\, q_x - \frac{t^2}{10}\frac{1}{1-\nu}\,\frac{\partial p_z}{\partial x} \tag{2.56}$$

$$q_y = -D\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} + \frac{t^2}{10}\,\nabla^2\, q_y - \frac{t^2}{10}\frac{1}{1-\nu}\,\frac{\partial p_z}{\partial y} \tag{2.57}$$

As equações diferenciais governantes Eqs. (2.55), (2.56) e (2.57) representam um problema de integração de sexta ordem, deste modo devem ser necessárias mutuamente três condições de contorno independentes para satisfazer cada borda da placa. Pois para os casos da teoria clássica de placas finas, são necessárias apenas duas condições de contorno para cada borda, devido as forças suplementares de Kirchhoff que transformam os momentos torcionais m_{xy} e m_{yx} em conjugados equivalentes (Szilard, 2004).

2.3.2. Teoria de Mindlin

A teoria de Mindlin é conhecida como a teoria da deformação de primeira ordem, baseada em deslocamentos como variáveis, ela traz soluções para problemas de placas utilizando alguns pressupostos cinemáticos para os deslocamentos no plano:

$$u = z\omega_x(x, y) \tag{2.58}$$

$$v = z\omega_y(x, y) \tag{2.59}$$

onde ω_x (x,y) e ω_y (x,y) representam as rotações do plano médio.

A teoria de Mindlin e a teoria de Reissner são idênticas quanto à suposição transversal assumida que foi visualizada na Fig. 2.11. Uma vez que as Eqs. (2.58) e (2.59) geram valores constantes tanto para as deformações de cisalhamento transversais, quanto para as correspondentes distribuições de tensões, e uma vez que a distribuição real da tensão para placas será parabólica, essa suposição ira ficar incorreta e não vai satisfazer a condição de tensão nula nas superfícies superior e inferior da placa. Devido a este fato, torna-se necessário a utilização de um fator de correção de cisalhamento (SZILARD, 2004).

Então, Mindlin aplica o teorema da mínima energia potencial para obter as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$k^2 Gt(\nabla^2 w + \varphi) + p_z(x, y) = 0 \tag{2.60}$$

$$\frac{D}{2}\left[(1 - v)\nabla^2 \omega_x + (1 + v)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] - k^2 Gt\left(\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.61}$$

$$\frac{D}{2}\left[(1 - v)\nabla^2 \omega_y + (1 + v)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - k^2 Gt\left(\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.62}$$

onde k^2 é o fator de correção de cisalhamento e φ é dado por:

$$\varphi = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \tag{2.63}$$

2.3.3. Teoria de Reissner-Mindlin

As teorias baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin são denominadas teorias de primeira ordem, teorias de ordem superior e teorias de camadas discretas (SORIANO, 2003).

Como já visto, na teoria clássica são desprezadas as deformações de esforço cortante, ou seja, considerando-se um segmento de reta normal à superfície média da placa, este segmento permanece retilíneo e normal a esta superfície, mesmo após a deformação da estrutura. Quando considerado algumas hipóteses definidas por Reissner-Mindlin, este mesmo segmento de reta permanecerá retilíneo, porém não mais continuará normal à superfície média da placa, haverá, portanto, uma deformação por cisalhamento provocando uma rotação deste segmento. Já nas teorias de ordem superior, são adotadas leis polinomiais não lineares que definem o encurvamento deste segmento de reta após a deformação da estrutura da placa, desenvolvendo um modelo matemático mais próximo da realidade do sistema físico (SORIANO, 2003).

Citado também por Ota (2016) em dissertação, as teorias de placas desenvolvida por Reissner (1945) e Mindlin (1951) que incluem os efeitos das deformações por força cortante. Enquanto a teoria de Mindlin baseada nos deslocamentos impostos, a teoria de Reissner está baseada nas tensões impostas. Nessa teoria, com a intenção de eliminar a inconsistência no contorno da teoria de Kirchhoff, é possível definir para cada ponto da fronteira três condições de contorno ao invés de duas como na teoria clássica.

O modelo da placa de Reissner-Mindlin em comparação ao modelo de Kirchhoff, tem como diferença a inclusão da teoria desenvolvida por Reissner referente aos efeitos da deformação de cisalhamento e da pressão normal assumindo distribuição de tensão de cisalhamento uniforme através da espessura da placa e Mindlin também melhorou o efeito de deformação de cisalhamento, a da inércia rotativa. Quanto a derivação dos deslocamentos Mindlin trata como variáveis primárias. Como já visto foi necessário introduzir um fator de correção para explicar a previsão de distribuição uniforme de tensão de cisalhamento. As teorias de placas de Reissner e Mindlin receberam grande atenção nos últimos anos para a formulação de elementos finitos confiáveis e eficientes para placas finas. Já que em ambas as teorias os deslocamentos e rotações são independentes e a continuidade de inclinação não é necessária, os desenvolvimentos dos elementos finitos são grandemente facilitados. A aplicação direta dessas teorias de ordem mais elevada a elementos finitos de placa fina, no entanto, frequentemente induziu o chamado comportamento de travamento de cisalhamento (SZILARD, 2004).

O fenômeno de travamento de cisalhamento (*shear locking*) pode resultar em valores incorretos para as deformações. Podendo ocorrer em formulações desenvolvidas para placas que consideram a deformação por cortante e o parâmetro dependente é a espessura t. Sendo uma espessura muito pequena, tendendo a zero, esses efeitos de travamento podem surgir acarretando baixas taxas de convergência e por consequência gerando falsos resultados. Os elementos de placa de Reissner-Mindlin de baixa ordem com integração completa propiciam o travamento de cisalhamento, quando a espessura t tende a zero, as soluções analíticas dos modelos de placas tendem à teoria de placas de Kirchhoff e a solução de elementos finitos é forçada a satisfazer às hipóteses de Kirchhoff, nas quais a deformação por cortante é nula, então quando o elemento não é capaz de apresentar deformações cisalhantes nulas, ocorre o travamento. Esse fenômeno é atribuído a elementos cuja formulação é baseada em deslocamentos. A solução pode convergir mesmo com o travamento de cisalhamento, porém de forma muito mais lenta. Com o refino da malha ou usando funções de interpolação do elemento de ordens mais altas é possível evitar o travamento, mas esta ação eleva o tempo de processamento exigido para a análise (Ota, 2016).

2.4. Método Design Construtal

De acordo com Bejan e Lorente (2008), o MDC pode ser empregado para a obtenção de formas geométricas ótimas de sistemas submetidos a alguma espécie de fluxo e para a determinação das configurações geométricas desta pesquisa também serão necessários conhecimentos com esse embasamento que teve início com a Teoria Construtal, teoria criada por Adrian Bejan em 1997, que possui uma visualização mental dos sistemas de fluxo animados ou inanimados e seguem um princípio físico fundamental que é a Lei Construtal. Sua primeira aplicação se deu em uma filosofia para solução geométrica, para o arrefecimento de um condutor eletrônico, esse estudo teve uma importância significativa, sendo o ponto de partida para aplicação da Teoria Construtal em problemas de engenharia e outros ramos da ciência (BEJAN, 1997; BEJAN, 2000).

A Teoria Construtal resumidamente explica como é a geração de estruturas submetidas a alguma espécie de fluxo e que são vistas em qualquer lugar na natureza (secção transversal de rios, pulmões, movimentação de massas na atmosfera, tecidos vascularizados, entre outros), que podem ser fundamentadas através de um princípio físico do acesso aos fluxos no tempo (BEJAN, 2000).

A Lei Construtal foi o primeiro princípio da física responsável pelo projeto e evolução dos sistemas de fluxo/escoamento, sustentando que a forma e estrutura surgem para facilitar esse fluxo/escoamento. Os fenômenos que na natureza ocorrem espontaneamente refletem essa tendência, permitindo que os fluxos ocorram com mais facilidade (REIS e GAMA, 2010).

Na natureza, essa forma e estrutura dos sistemas de fluxo animados ou inanimados se adaptam de forma a proporcionar o seu melhor fluxo global, distribuindo otimamente as imperfeições existentes no sistema, independente se os sistemas são animados ou inanimados (BEJAN e ZANE, 2012).

O método utilizado para aplicação da Lei Construtal para engenharia é denominado de Design Construtal, sendo esse um método que relaciona os graus de liberdade, restrições globais e função objetivo buscando a geometria ótima satisfazendo um melhor desempenho quando submetido a alguma espécie de fluxo/escoamento, devendo este ser maleável (BEJAN e ZANE, 2012).

O Design Construtal tem seu fluxo maleável e a geometria deduzida a partir de um princípio de maximização do desempenho global. Sendo assim a sua geometria deve ser submetida a restrições globais e possuem uma variação de acordo com seus graus de liberdade. Para aplicar o método de Design Construtal na otimização geométrica de um sistema físico será necessário um objetivo (saber a grandeza a ser otimizada como vazão mássica, potência, fluxo de tensões, energia, etc.), graus de liberdade (parâmetros geométricos que variam ao logo do processo) e restrições geométricas (parâmetros constantes ao longo do processo) (BEJAN, 2000).

O MDC guia o projetista no tempo, na direção de arquiteturas de fluxo ou escoamento (fluidos, calor, tensões) que possuam maior desempenho global em condições de acesso específicas. Deve-se ter em mente que a arquitetura descoberta para um conjunto de condições se refere à configuração Construtal apenas para estas condições específicas, pois para outro conjunto de condições, ter-se-á nova configuração Construtal. Ou seja, a configuração Construtal não é universal, não representa a solução para todos os problemas de design, o que é universal é a Lei Construtal e não apenas um de seus designs (BEJAN e LORENTE, 2008).

2.5. Busca Exaustiva

A técnica de Busca Exaustiva, por sua simplicidade, torna-se um bom método para realizar um processo de otimização, sendo um método de pesquisa funcional e útil. Utilizado em situações com ausência de conhecimento e que gera bons resultados através de uma busca sistêmica, baseada em algum algoritmo, analisa possíveis soluções geradas sucessivamente até encontrar uma solução admissível ou até mesmo quando o número máximo de tentativas chegue a um nível estipulado. Mesmo a Busca Exaustiva sendo pouco sofisticada, tem como vantagem a capacidade de pesquisar qualquer função, mesmo com comportamento complexo, irregular ou descontinuo. No seu procedimento não há nenhuma suposição sobre a característica da função e necessita de apenas um intervalo de análise (KHOURY E HARDER, 2016).

2.6. Modelagem Computacional

Grande parte dos problemas de engenharia estrutural são governados por equações diferenciais e as solução dessas equações fornecem resultado com certa precisão. Para os problemas que envolvem geometrias, carregamentos e condições de contorno simples são possíveis as soluções analíticas, mas para problemas mais complexos a modelagem computacional pode ser aplicada por oferecer boas soluções, ainda que estas soluções sejam fruto de métodos numéricos aproximados (BLAUWENDRAAD, 2010).

Modelos computacionais para simulação podem ser considerados como um modelo virtual descrevendo o sistema real. Os modelos simulados em computador apresentam potencial no fornecimento de resultados precisos, e quando analisados estatisticamente suas informações irão auxiliar em tomadas de decisões. Este processo é considerado uma aproximação da realidade, sendo construído baseado em hipóteses, suposições, simplificações, e com isso está acompanhado por uma parcela de erros que devem ser atentamente analisadas e consideradas durante as tomadas de decisões (TANEMBAUM, 2001).

A construção do modelo computacional tem etapas importantes de definição do problema até a obtenção e análise dos resultados realizados através da simulação numérica, estas etapas se dividem em pré-processamento, o processamento, e o pós-processamento (VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995).

Detalhamento das principais etapas da simulação numérica a serem realizadas:

- Pré-processamento: define-se a geometria do domínio computacional, o tipo do elemento, determina-se as constantes como as propriedades do material, a divisão do domínio em número finito de subdomínios (malha), as condições de contorno e as cargas atuantes;
- Processamento: efetivamente realiza-se a simulação numérica, obtendo a solução das equações diferenciais, a qual demanda um tempo de processamento principalmente em função do refino da malha definida e do tipo de análise;
- Pós-processamento: realiza-se a leitura e análise dos resultados obtidos no processamento (VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995; TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997).

A Mecânica Computacional estuda os fenômenos físicos por meio de abordagem envolvendo as áreas da engenharia, matemática e ciências computacionais. Esse fenômeno físico estudado é representado por um sistema de equações parciais diferenciais, transformando o problema de engenharia para equações matemática, após o sistema de equações é aproximado através de um método de discretização, onde transforma o problema da matemática num problema de matemática aplicada e ciência da computação. Por fim obtém-se os resultados da simulação que podem ser comparados com o fenômeno físico (DEVLOO, 2005).

Com relação às placas finas, para avaliar numericamente seu comportamento quanto suas deflexões, é necessário a representação de um sistema de equações diferenciais parciais através do método de discretização e que possam ser resolvidas numericamente. O MEF é um método de discretização e também bastante empregado em análise numérica dessas estruturas (BLAUWENDRAAD, 2010).

2.6.1. Método dos Elementos Finitos

O MEF é um procedimento numérico de ampla aplicação na análise de problemas de engenharia, normalmente aplicado nos problemas que de alguma forma são mais complexos para terem sua resolução através de algum dos métodos analíticos clássicos de modo satisfatório (COOK, MALKUS e PLESHA, 1989; SEGERLIND, 1984).

O método de análise de elementos finitos requer as principais etapas descritas abaixo (MADENCI e GUVEN, 2006):

- Discretização do domínio em um número de elementos finitos de subdomínios (elementos);
- Seleção de funções de interpolação;
- Desenvolvimento da matriz de elementos para o subdomínio (elementos);
- Montagem das matrizes de elementos para cada subdomínio para obter a matriz global para todo o domínio;
- Imposição das condições de contorno;
- Solução de equações;
- Cálculos adicionais (se desejado)

O MEF possui sua metodologia baseada na decomposição do domínio de um problema de integração em finitos subdomínios denominados elementos finitos conforme mostrado na Fig. 2.12, cuja sua solução sistemática será montada a partir do emprego de métodos residuais variacionais ou ponderados. Sendo assim, o problema é reduzido a um número finito de incógnitas, transformando o meio contínuo em discreto, em malha de elementos finitos, onde os pontos de intersecção das linhas dessa malha denominam-se nós. Portanto, o comportamento de cada elemento e/ou malha de elementos tem uma condição de forma mais aproximada ao contínuo original, o problema que ocorre na prática (SZILARD, 2004).

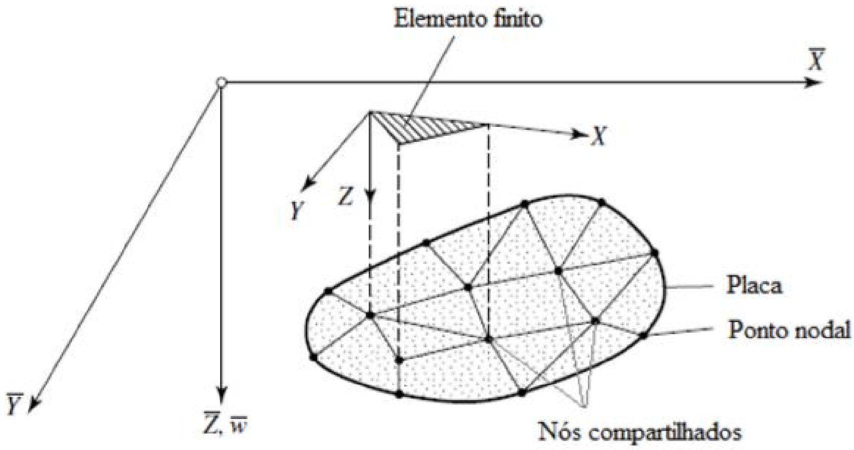


Figura 2.12: Divisão do domínio em subdomínios (elementos finitos)
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

O domínio pode ser discretizado em elementos de linha, área ou volume dependendo da geometria e das características físicas do problema a ser solucionado. Cada elemento é definido por uma sequência de nós identificado por um número específico, e alguns nós são compartilhados entre elementos garantindo a conectividade do modelo computacional. Na Fig. 2.13 são mostrados os elementos aplicados no MEF mais frequentemente.

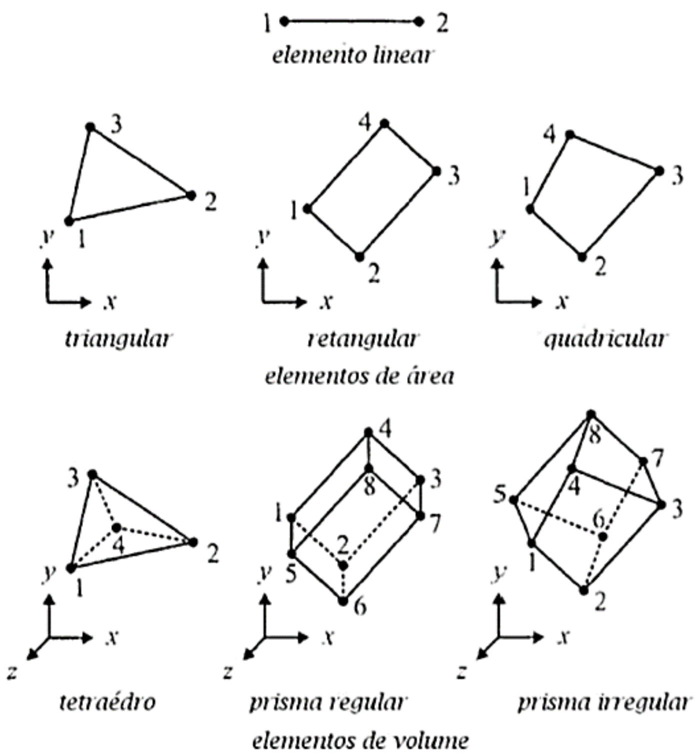


Figura 2.13: Geometrias de elementos do MEF (Fonte: MADENCI e GUVEN, 2006)

Durante à discretização do domínio computacional, erros de aproximação ocorrem e são inerentes ao método numérico (TEIXEIRA et al, 2009). Segundo Madenci e Guven (2006), a capacidade de discretizar um domínio irregular com elementos finitos torna o método uma ferramenta de análise valiosa e prática para a solução de problemas de contorno que surgem na engenharia.

O modelo de deslocamentos do MEF pode-se arbitrar um campo de deslocamentos nodais obtendo uma interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes e substituindo-a pela interação de forças nodais entre elementos. Sendo assim, substitui-se o equilíbrio infinitesimal considerado no modelo matemático de meio contínuo, pelo equilíbrio de cada elemento finito isoladamente, trocando as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas de equilíbrio. O sistema de equações de equilíbrio da malha de elementos é obtido a partir das equações algébricas de cada elemento. Então, esse sistema global permite a determinação da solução em termos dos deslocamentos nodais após a introdução das condições de vinculação ao meio externo (ASSAN, 2003; SORIANO, 2003).

2.6.2. Simulação numérica com Software ANSYS®

Citado na dissertação de Troina (2017), a metodologia numérica foi criada como uma proposta para solucionar uma ampla gama de problemas de engenharia através de programas computacionais. Com a constante melhora no desempenho dos computadores, o software é frequentemente atualizado para alcançar melhorias nos seus resultados e atender novas demandas e recursos aos usuários.

O módulo *Mechanical* APDL do software ANSYS®, desenvolvido para análises estruturais que incluem análise estática (linear e não-linear), modal, espectral, dinâmica e de flambagem. Utiliza como base para realizar os cálculos o MEF, onde nas diversas análises os deslocamentos nodais são as variáveis primárias calculadas, enquanto que as demais grandezas como deformações, tensões e forças de reação serão derivadas desses valores de deslocamentos previamente calculados levando em consideração todo o domínio computacional. Desenvolvido por ANSYS® Inc., companhia especializada em programas de simulação numérica para engenharia (ANSYS, 2009).

A discretização de um modelo matemático definida pelo MEF, deverá manter a representação da geometria, a condição de contorno e a carga imposta conforme o problema físico. Sua solução ocorrerá a partir da montagem da matriz global dos elementos, permitindo a obtenção dos valores de deslocamento e tensão sofridos por cada elemento, através de uma solução nodal. Nos casos que abrangem problemas com comportamento linear elástico, tem-se representada na Eq. (2.64) a matriz global. (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 2000).

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & \cdots & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{Bmatrix} \tag{2.64}$$

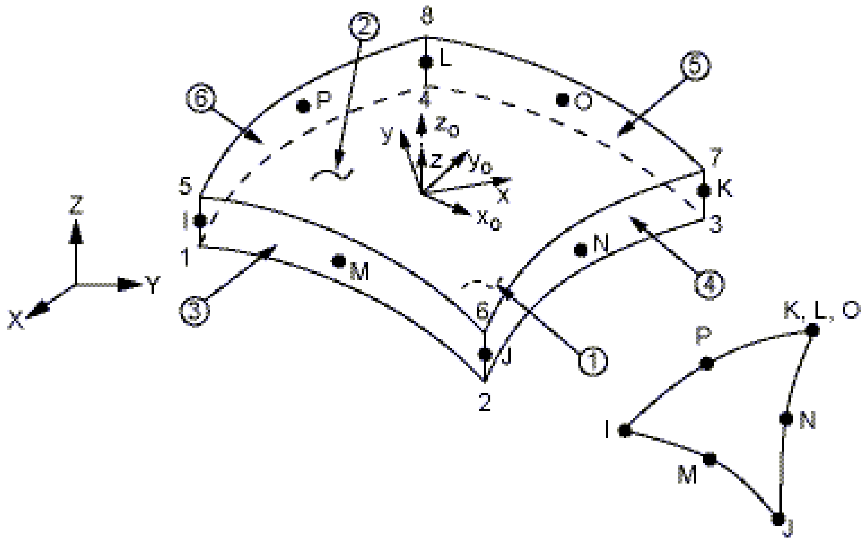
onde: $\vec{q}$ = vetor da força; m = número de componentes de força a serem consideradas em cada nó; $|k|$ = matriz de rigidez; $\vec{u}$ = vetor dos deslocamentos nodais; e $\vec{f}$ = vetor das forças nodais requeridas para equilibrar qualquer carga concentrada ou distribuída atuando sobre o domínio computacional discretizado.

A análise estática é uma das análises estruturais disponíveis no ANSYS®, sendo aquela em que despreza os efeitos dinâmicos. Para o caso específico da análise linear elástica, as não-linearidades como plasticidade, grandes deformações, grandes deslocamentos, superfícies de contato, fluência mecânica, entre outras, não são levados em conta. Tem como seu principal objetivo a quantificação da magnitude dos esforços internos e também dos deslocamentos que aparecem nos sistemas estruturais quando submetidos a um carregamento arbitrário, desprezando-se o efeito das forças de inércia e das forças de amortecimento (MARINHO, 2002).

Comportamento do elemento SHELL281 no ANSYS®

Um dos principais elementos do ANSYS@ que possibilita bons resultados para realizar análises de estruturas do tipo placa ou casca finas a moderadamente espessas, e adequado para rotação linear e grande e/ou aplicações não lineares de grande tensão é o elemento SHELL281, este possui oito nós com seis graus de liberdade em cada nó, sendo eles de translação nos eixos x, y e z e rotações nos eixos x, y e z, além de incluir em sua formulação matemática, as hipóteses de Reissner-Mindlin (ANSYS®, 2015).

A geometria descrita na Fig. 2.14 mostra os locais dos nós e o sistema de coordenadas do elemento que é definido por informações de seção de casca e por oito nós (*I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* e *P*). Um elemento de forma triangular pode ser formado definindo o mesmo número de nó para os nós *K*, *L* e *O*.



xo = elemento eixo *x* se a orientação do elemento não for fornecida.
x = elemento eixo *x* se a orientação do elemento for fornecida.

Figura 2.14: Geometria elemento SHELL281 (Fonte: ANSYS®, 2015)

Na modelagem de placas enrijecidas com o elemento SHELL93 era necessária uma correção específica na representação dos enrijecedores, conforme mostrado na Fig. 2.15 uma região de sobreposição na união entre a placa e o enrijecedor. A sobreposição é gerada por que a modelagem considera somente a superfície média da placa para a formação das estruturas, sendo necessário um ajuste para tornar a altura do enrijecedor conforme o modelo físico, devendo ser realizado um incremento da altura do enrijecedor no valor da metade da espessura da placa (LIMA, 2016).

Essa correção com relação ao elemento SHELL281 já pode ser realizada durante a parametrização do modelo computacional no software ANSYS@, que permite selecionar a superfície contato entre placa e enrijecedor, não sendo necessariamente a escolha da superfície média da placa. O conhecimento das informações de Lima (2016) formou a base para este entendimento.

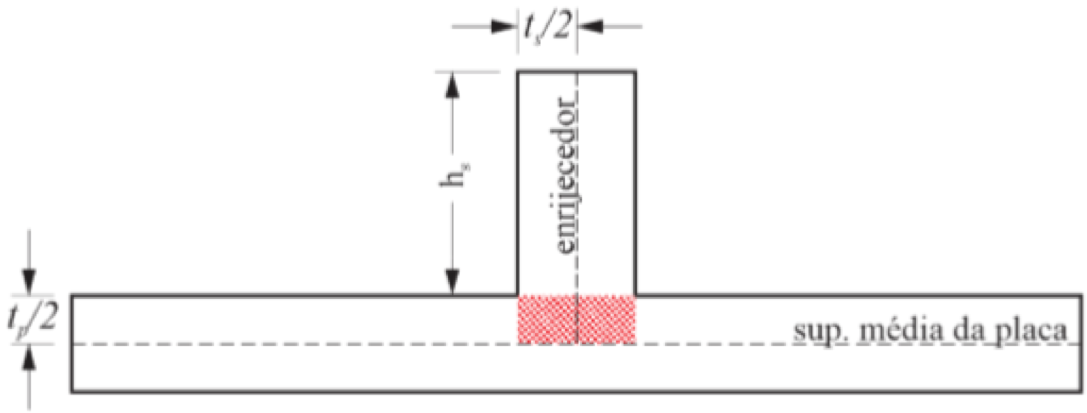


Figura 2.15: Modelagem de placa enrijecida utilizando elemento finito SHELL93 (Fonte: LIMA, 2016)

2.6.3. Verificação do modelo numérico-computacional

Num projeto torna-se fundamental à obtenção de resultados coerentes ao sistema analisado, então o modelo computacional deve ter uma forte relação com o sistema real. Para isso, são inevitáveis testes de verificação do modelo computacional que certificam o modelo conceitual, se sua transcrição foi realizada de forma adequada para uma linguagem de simulação ou programação, além de permitir adquirir confiança na utilização do modelo desenvolvido para o sistema. (DA SILVA, 2006).

De acordo com Versteeg e Malalasekera (2007) verificação é o processo de quantificar o erro numérico, que mede quanto o modelo matemático foi bem resolvido numericamente, sem ter o fenômeno real como objetivo, sendo um processo puramente matemático. Comparando os resultados numéricos obtidos com o modelo computacional a ser verificado com soluções numéricas ou com outras soluções analíticas.

3. METODOLOGIA

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa visa otimizar à deflexão que ocorre em placas enrijecidas quando submetidas a carga transversal uniforme e essa otimização será determinada através da simulação numérica, da metodologia de Design Construtal, da técnica de Busca Exaustiva e do embasamento teórico de placas finas. O fluxograma descrito na Fig. 3.1 mostra as macrodefinições que facilitaram o entendimento da metodologia aplicada.

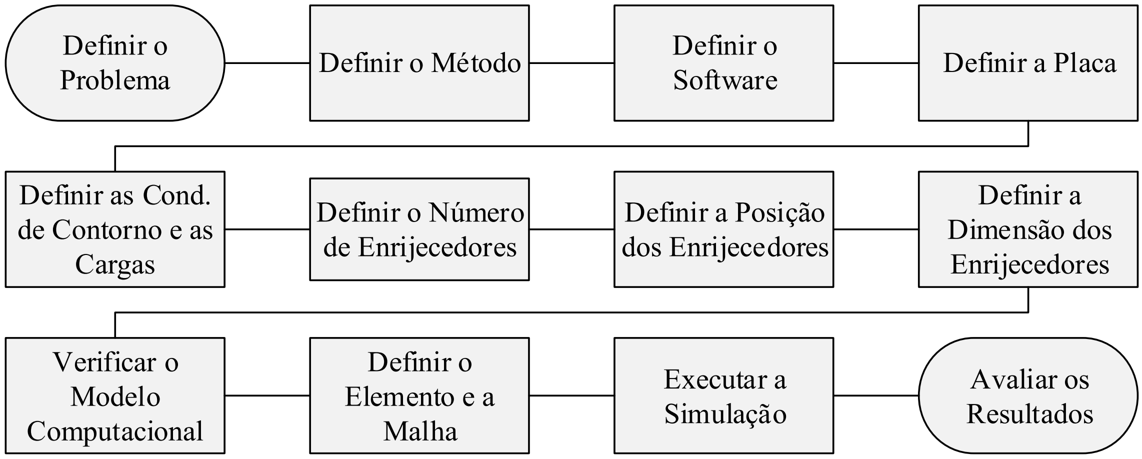


Figura 3.1: Fluxograma da metodologia de desenvolvimento da pesquisa

O problema analisa a influência do espaçamento de enrijecedores na deflexão de placas finas, quando submetidas a carregamento transversal uniforme. O regime para esta análise foi considerado linear-elástico e o material isotrópico. O MEF, que transforma o meio contínuo em discreto, permitiu resolver o problema utilizando a simulação numérica, realizada através do software ANSYS® que disponibiliza essa fermenta no módulo *Mechanical* APDL.

A placa com enrijecedores é o principal elemento desta análise, que foi definida através de uma placa de referência que não possuía enrijecedores e com dimensões de comprimento, largura e espessura, respectivamente, iguais a 2,00 m, 1,00 m e 0,02 m, valores utilizados idem aos definidos na pesquisa realizada por Troina (2017). Para análise da pesquisa a espessura da placa foi definida em 50% da espessura da placa de referência (ϕ = 0,5), sendo explicada em seguida durante a definição dos enrijecedores que fazem parte da placa enrijecida alvo desta pesquisa. O material utilizado foi o aço A-36, que possui módulo de elasticidade igual a 200 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3 (HIBBELER, 2009).

A condição de contorno definida para a placa enrijecida apresenta apoios simples nos quatro bordos e pontuais nos vértices, ambos necessários para evitar o movimento de corpo rígido da placa devido a deslocamentos na direção dos eixos x e y. A carga aplicada sobre essa placa ocorre ao longo da superfície superior e é definida com o valor de 10 kPa.

Após foi realizada a definição das geometrias dos enrijecedores com base nas dimensões da placa de referência e posterior a formação das configurações das placas enrijecidas contendo enrijecedores alocados tanto na transversal quanto na longitudinal.

Com o auxílio do MDC, foi definido que o volume total de material dos enrijecedores de cada configuração de placa fosse constante, também foi definido que seu comprimento acompanhasse as dimensões da placa, quando o enrijecedor estiver posicionado na transversal o seu comprimento é definido pela largura da placa de referência e quando posicionado na longitudinal o seu comprimento é definido pelo comprimento da placa de referência. O volume destinado ao enrijecedor considera um percentual de 50% do volume da placa de referência (ϕ = 0,5), restando os outros 50% do volume para espessura da placa, descrevendo que o volume de aço da placa enrijecida é igual ao volume da placa de referência, idem aos valores definidos na pesquisa realizada por Troina (2017) que estudou placas finas com os enrijecedor dispostos em posições simétricas.

Sendo assim, a construção das geometrias dos enrijecedores foi subdividida em três passos, sendo o primeiro a definição do número de enrijecedores utilizados para o reforço da placa nas direções longitudinal (N_{ls}) e transversal (N_{ts}), sendo então escolhido para esta pesquisa uma configuração de placa P(N_{ls},N_{ts}) igual a P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3). O segundo passo foi a definição das posições longitudinais e transversais, definindo espaçamentos iguais ou diferentes para cada configuração de placa, a Fig. 3.2 ilustra a definição geral e a Tab. 3.1 mostra a distância transversal (S_t) e à distância longitudinal (S_l) entre os enrijecedores. Por fim, o terceiro passo foi a determinação das dimensões dos enrijecedores, com o volume total dos enrijecedores já estabelecido ϕ = 0,5, definiu-se para espessura dos enrijecedores os valores de dimensões normatizadas de espessura comercial de chapas variando de 1/8”, 3/16”, 1/4”, 5/16”, 3/8”, 1/2”, 5/8”, 3/4”, 7/8”, 1”, 1.1/4”, 1.1/2”, 1.5/8”, 1.3/4”, 2”, 2.1/4”, 2.1/2”, 3”, sendo assim, para cada espessura de enrijecedor, a restrição de volume de material implicou em valores determinados para a altura do reforço, o que deu origem a um outro parâmetro denominado h_s/t_s, que trata da razão entre a altura do enrijecedor e a sua espessura, sendo estes valores de h_s/t_s apresentados na Tab. 3.2 e idem à dissertação de Troina (2017), também foram retiradas as configurações que possuíram altura de enrijecedor maior que 0,3 m ou uma relação hs/ts com valor menor que 1.

Na Fig. 3.3 é mostrado um resumo das configurações dos enrijecedores, a partir do ϕ = 0,5 e nas Figs. 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 são apresentadas a relação geométrica h_s/t_s e as posições dos enrijecedores, listando todas as configurações a serem estudadas nesta dissertação através de simulações numéricas.

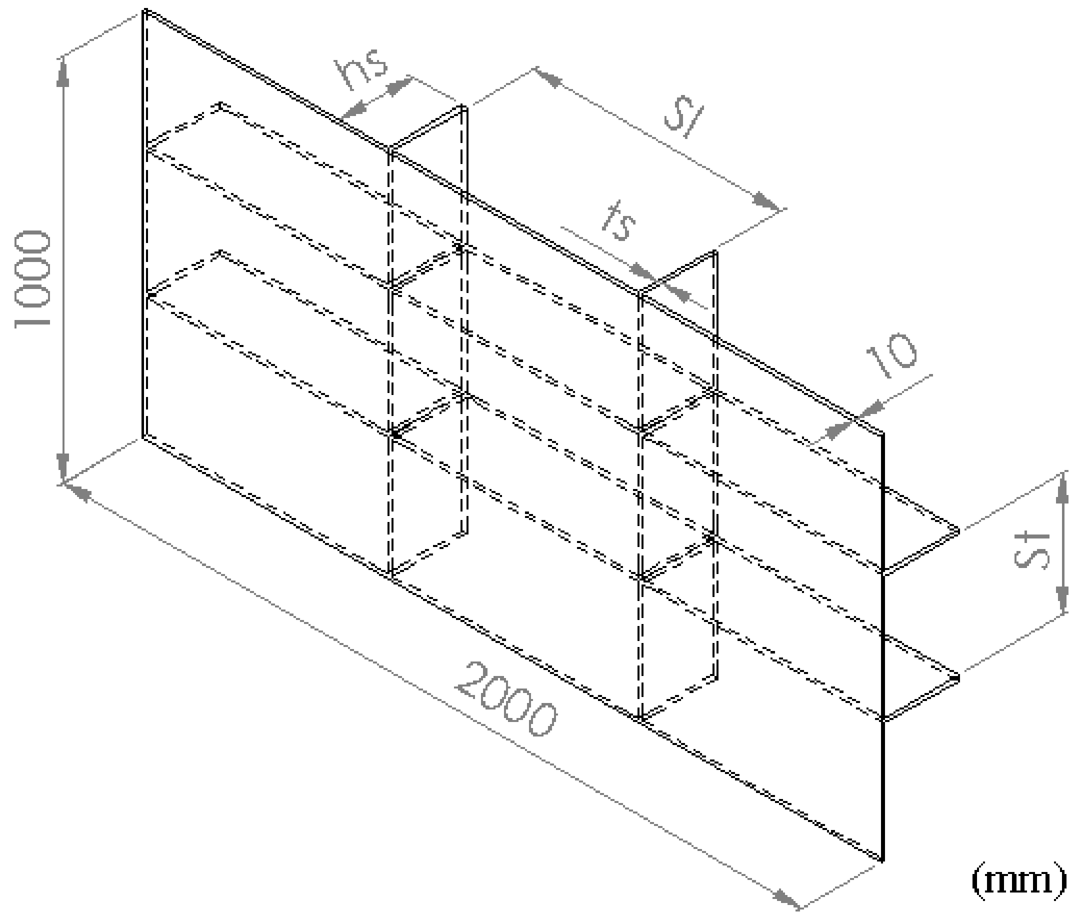


Figura 3.2: Configuração geral da posição dos enrijecedores (S_l e S_t)

Tabela 3.1: Tabela com as distâncias transversais e longitudinais dos enrijecedores

	P(2,2)		P(2,3)		P(3,2)		P(3,3)	
Espaçamentos	S_t (mm)	S_l (mm)	S_t (mm)	S_l (mm)	S_t (mm)	S_l (mm)	S_t (mm)	S_l (mm)
Diferentes ↑	555,56	1111,11	555,56	1333,33	666,67	1111,11	666,67	1333,33
	444,44	888,89	444,44	1166,67	583,33	888,89	583,33	1166,67
Iguais —	333,33	666,67	333,33	1000,00	500,00	666,67	500,00	1000,00
Diferentes ↓	222,22	444,44	222,22	833,33	416,67	444,44	416,67	833,33
	111,11	222,22	111,11	666,67	333,33	222,22	333,33	666,67

Tabela 3.2: Tabela com os valores de razão h_s/t_s

h_s/t_s para P(2,2)										
20,84	13,33	9,15	6,87	5,26	3,37	2,36	2,01	1,73	1,34	1,06
h_s/t_s para P(2,3)										
17,91	11,46	7,87	5,91	4,53	2,90	2,03	1,74	1,50	1,16	-
h_s/t_s para P(3,2)										
27,72	15,65	10,01	6,87	5,16	3,95	2,53	1,77	1,51	1,31	1,01
h_s/t_s para P(3,3)										
35,00	24,70	13,96	8,93	6,14	4,61	3,53	2,27	1,59	1,36	1,17

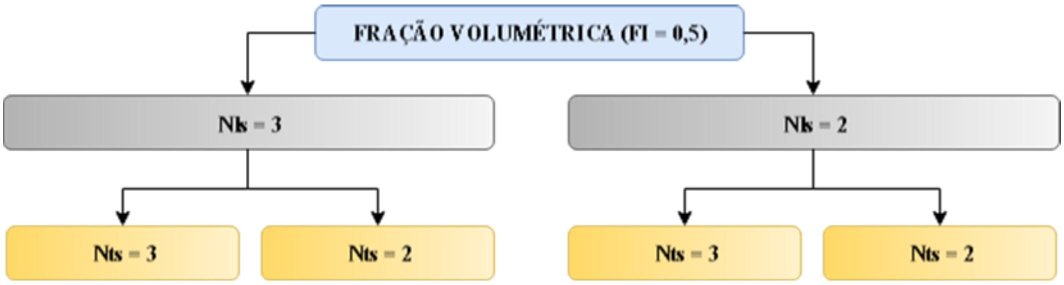


Figura 3.3: Configurações geométricas para as placas enrijecidas.

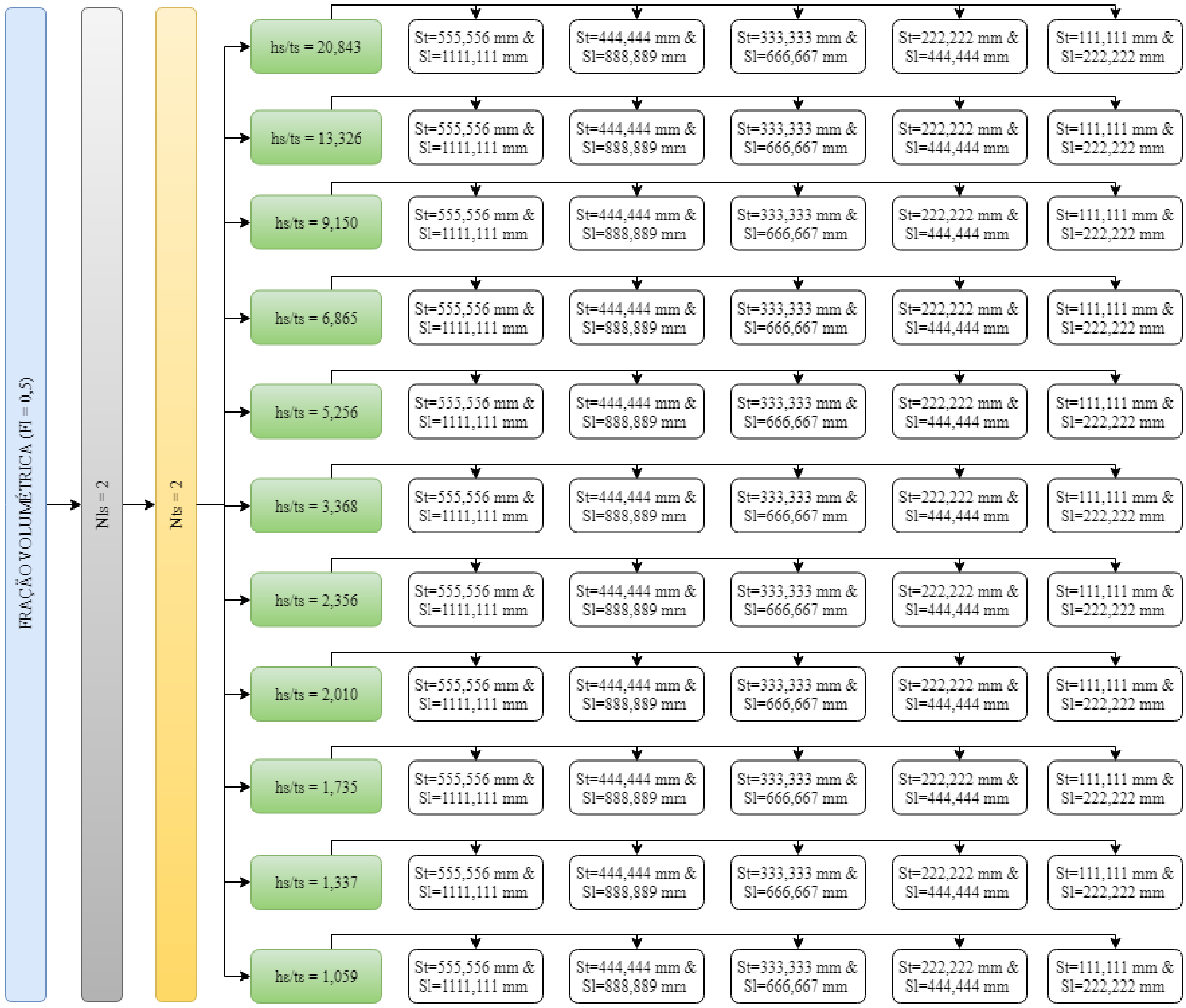


Figura 3.4: Configurações geométricas hs/ts para a placa enrijecida P(2,2).

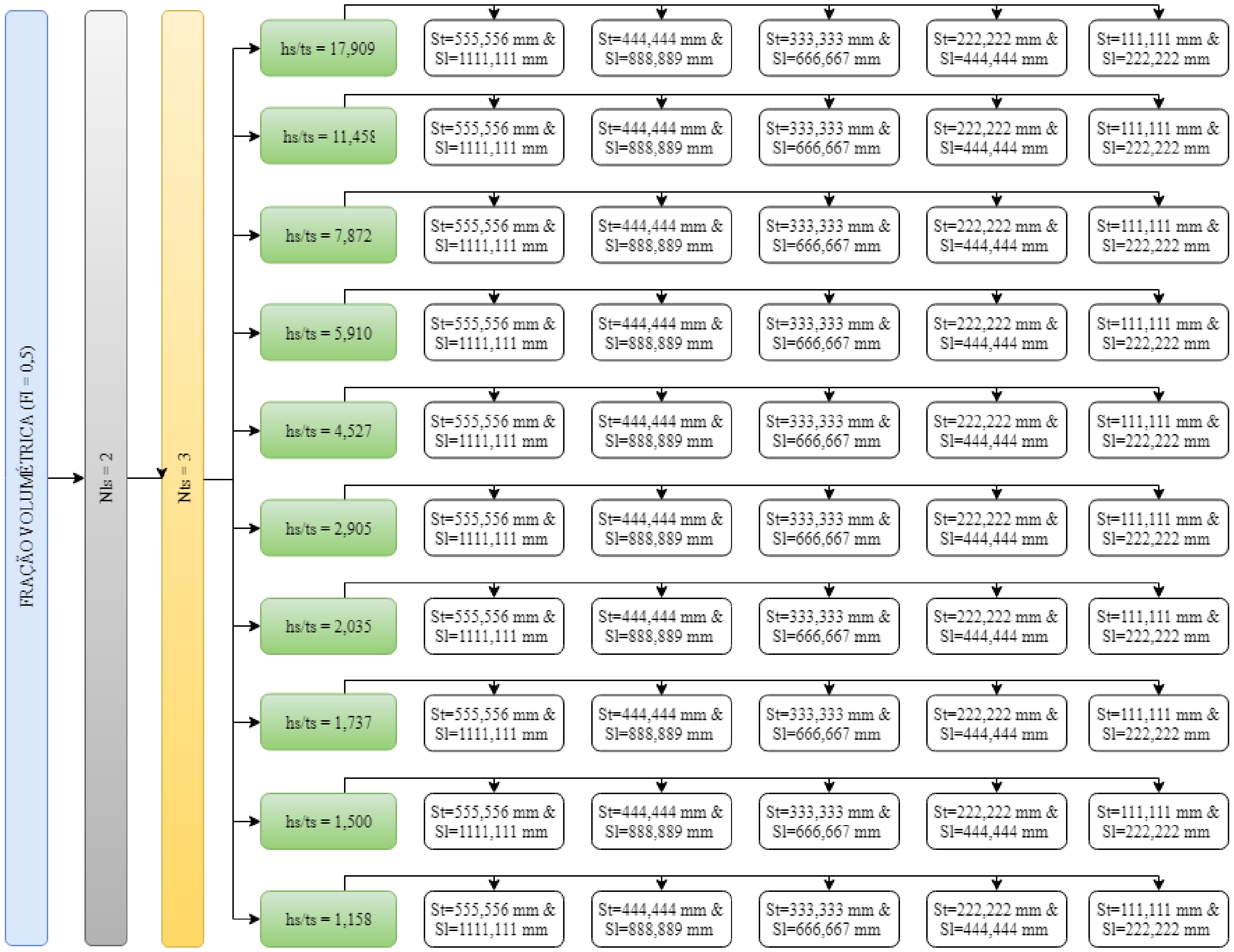


Figura 3.5: Configurações geométricas hs/ts para a placa enrijecida P(2,3).

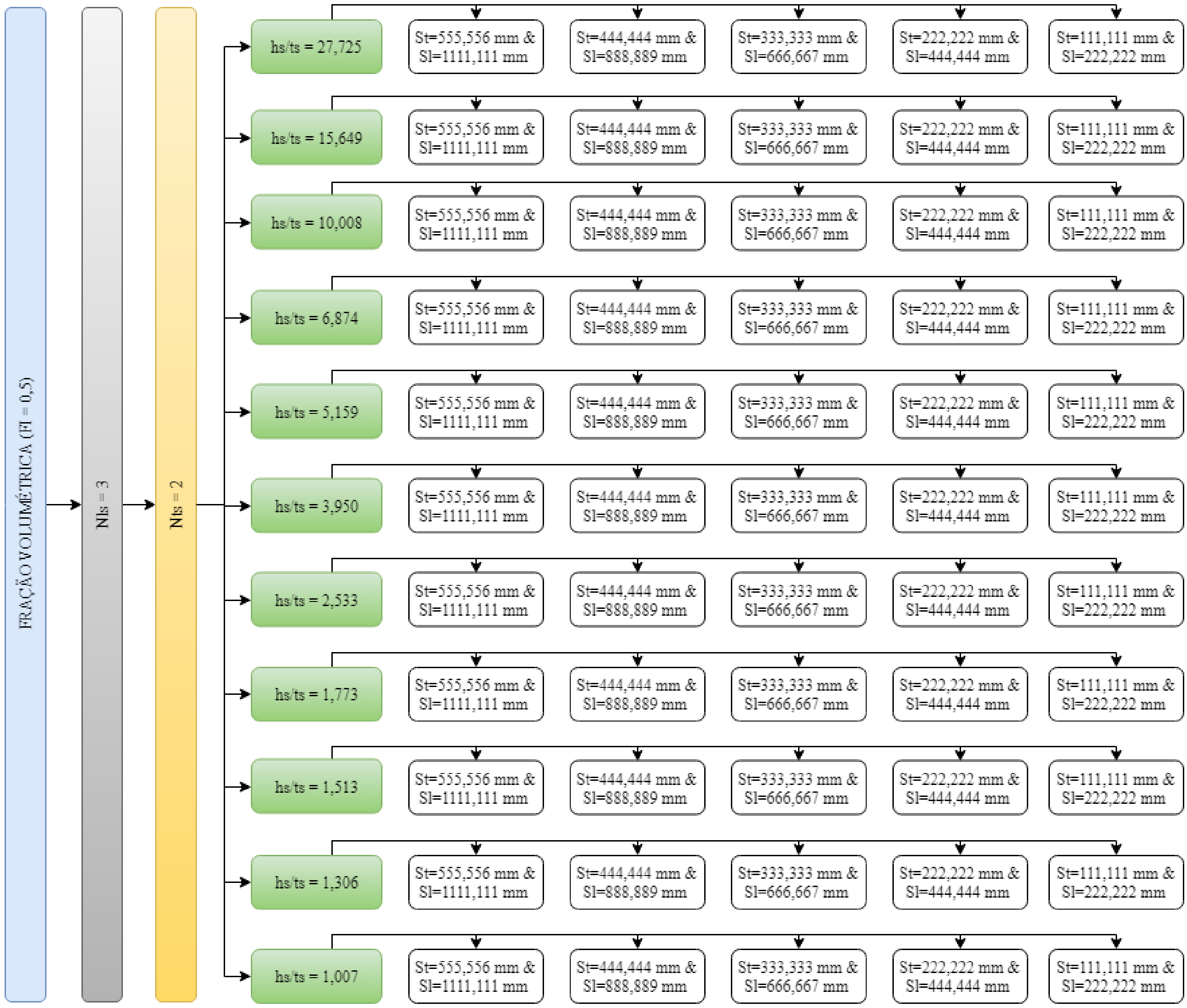


Figura 3.6: Configurações geométricas hs/ts para a placa enrijecida P(3,2).

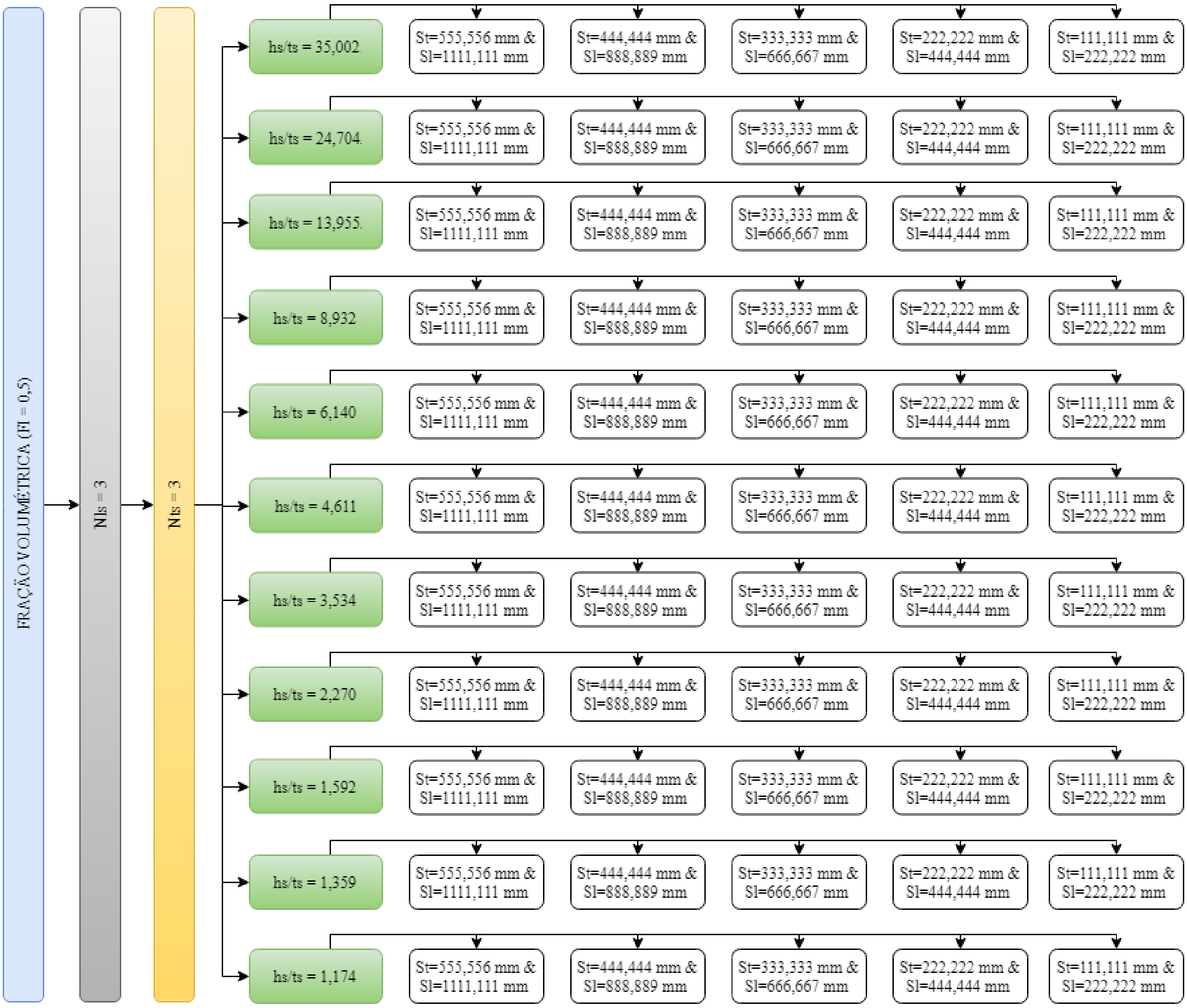


Figura 3.7: Configurações geométricas h_s/t_s para a placa enrijecida P(3,3).

Para o processo de simulação numérica, a verificação do modelo computacional é de extrema importância para obtenção de resultados coerentes, sendo fundamental sua aplicação antes de prosseguir com qualquer desenvolvimento e uma das maneiras de realizar é através da comparação dos resultados obtidos com os resultados da literatura.

O procedimento de verificação ocorreu em duas etapas, sendo a primeira etapa através da comparação dos resultados desenvolvidos com modelos computacionais utilizando o elemento finito bidimensional SHELL281 com os resultados obtidos de pesquisas publicadas contendo soluções analíticas e simulações numéricas. Na segunda etapa será verificado os resultados de algumas simulações realizadas por Troina (2017) que são idênticas às simulações simétricas desta pesquisa.

Quanto à malha, utilizada para as simulações com o elemento SHELL281 foi definida em formato regular quadrado. Além disso, foi também realizado um teste de convergência de malha, como pode ser visto graficamente na Fig. 3.8, para definir a malha considerada independente, ou seja, aquela com grau de refinamento suficiente para não interferir na exatidão dos resultados, sendo esta malha independente definida como aquela que apresentou um valor de diferença percentual, inferior a 0,1%, em relação ao resultado de deslocamento (U_z) obtido pela malha imediatamente anterior. Os resultados são apresentados na Tab. 3.3.

Para realização do teste de independência de malha foi simulada uma placa enrijecida com configuração P(2,2) (S_l = 222,22 mm, S_t = 111,11 mm e h_s/t_s = 20,84), submetida a uma força distribuída de 10 kPa (mesma força aplicada nas demais configurações), desta maneira definiu-se a malha independente como sendo a malha M4, com tamanho da aresta do elemento de 12,5 mm. A malha escolhida não apresentou restrições quanto ao tempo de processamento, não sendo necessário optar por uma malha inferior que também apresentou resultados com boa concordância.

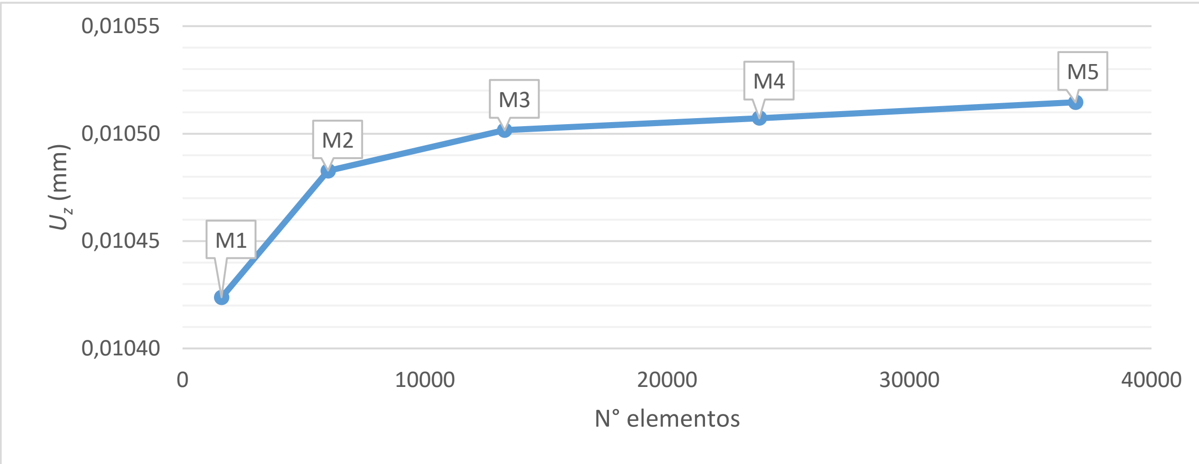


Figura 3.8: Análise de independência da malha

Tabela 3.3: Parâmetros de independência de malha

Malha	Tamanho da aresta do Elemento (mm)	Número de Elementos	Deflexão Centro da Placa (mm)	Diferença
M1	50,00	1605	0,0104237	-
M2	25,00	6005	0,0104827	0,56%
M3	16,67	13298	0,0105016	0,18%
M4	**12,50**	**23814**	**0,0105072**	**0,05%**
M5	10,00	36864	0,0105146	0,07%

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta pesquisa, são apresentados os resultados para quatro configurações de placas enrijecidas, sendo elas P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3) estruturadas conforme descrito na metodologia. Os resultados possibilitaram o entendimento do regime de deflexão nas diferentes configurações das placas enrijecidas quando submetidas à atuação de uma carga uniformemente distribuída.

Antes, iniciou-se a verificação do modelo computacional com os casos de placas sem e com enrijecedores, sendo analisados modelos de placas quadrada sem enrijecedor, placas quadrada e retangular com enrijecedor central e longitudinal e placa retangular com dois enrijecedores ortogonais. Para todas estas simulações descritas abaixo foram consideradas o ajuste na altura dos enrijecedores conforme descrito no referencial teórico.

- ✓ Caso 01: Verificação de placa quadrada sem enrijecedores

A verificação de modelo computacional foi iniciada através da simulação numérica do caso mais simples de forma que possibilitou comparar os resultados simulados também com os analíticos, sendo assim a placa descrita será fina, quadrada com dimensões do lado e da espessura, respectivamente, iguais a 1,414 m e 0,02 m e sem enrijecedor, suas condições de contorno são simplesmente apoiadas nas quatro bordas (U_z = 0) e impostas restrições nas direções X e Y, necessárias para evitar o movimento de corpo rígido. A placa é constituída com um material de módulo de elasticidade E = 210 GPa e coeficiente de Poisson ν = 0,3. Na direção ortogonal ao plano médio da placa foi aplicado uma carga distribuída de 10 kN/m².

A solução numérica foi realizada através da modelagem com o elemento finito SHELL281, após obtenção da independência de malha mostrada graficamente na Fig. 4.1 o resultado obtido da Fig. 4.2 foi comparado com o resultado da solução analítica analisada por Timoshenko e Krieger (1959) e o resultado da simulação com o elemento SOLID95 realizada pelo Troina (2017), mostrada na Tab. 4.1.

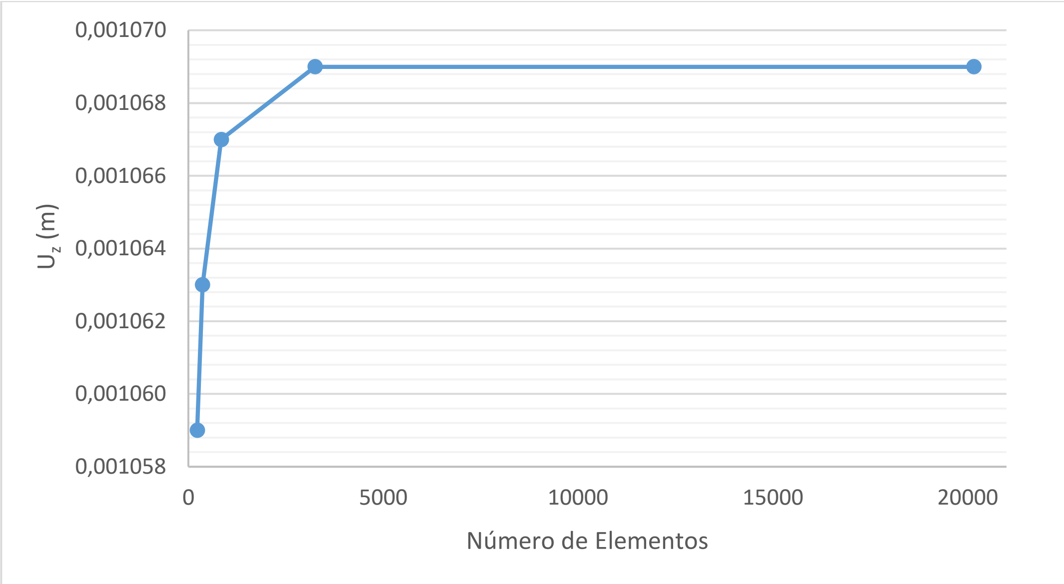


Figura 4.1: Convergência de malha Caso 01 da placa quadrada sem enrijecedor

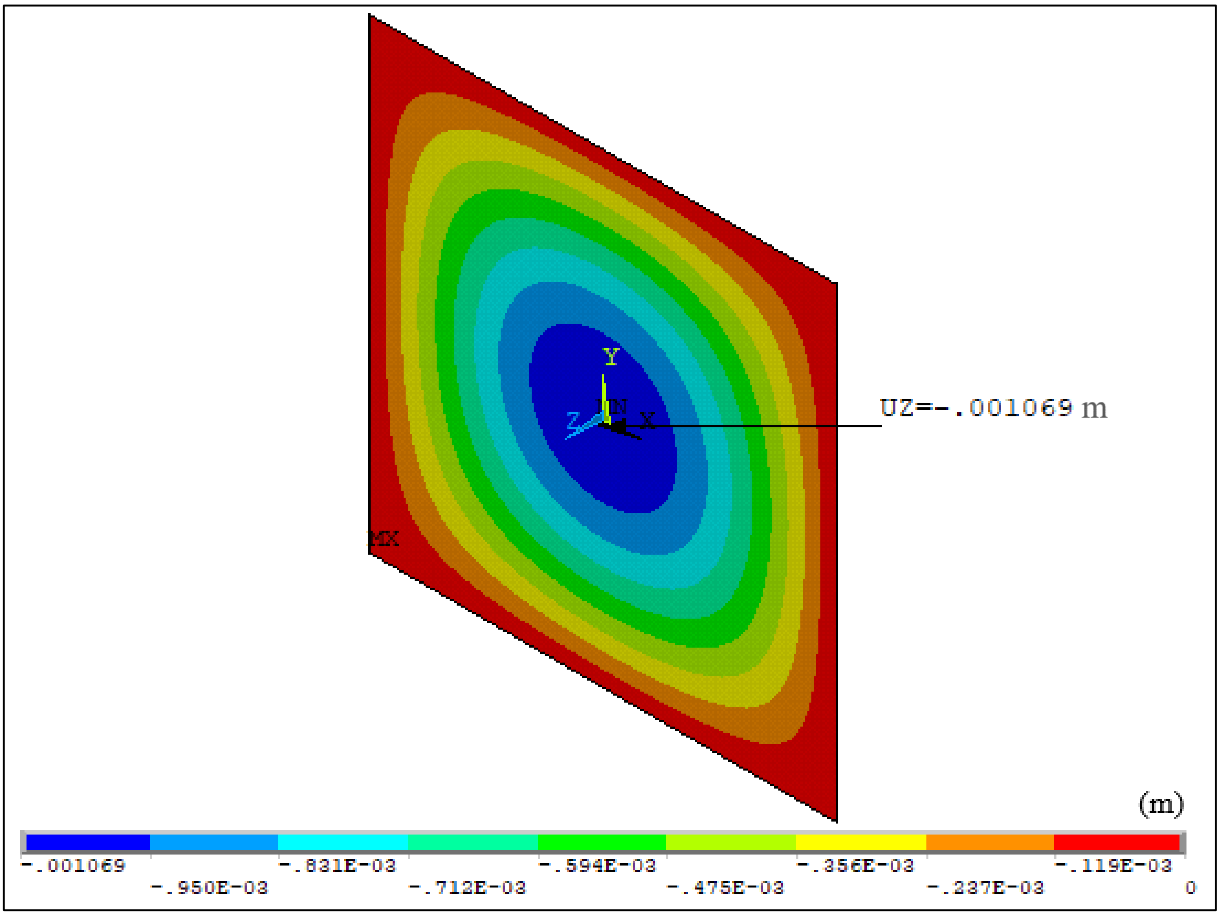


Figura 4.2: Deslocamento central da placa quadrada sem enrijecedor - U_z central

Tabela 4.1: Tabela comparativa entre os resultados da placa quadrada sem enrijecedor

Placa Enrijecida	SHELL 281	Troina (2017)	Timoshenko e Krieger (1959)*
U_z (m)	0,001069	0,001069	0,001055

* Solução analítica

Os resultados apresentados foram iguais para a solução numérica e próximos para a solução analítica, demonstrando a verificação para o Caso 01.

✓ Caso 02: Verificação de placa retangular sem enrijecedores

A verificação deste caso contempla a placa referência estabelecida nesta pesquisa, sem enrijecedor e conforme as dimensões já descritas, sendo elas 2,00 x 1,00 x 0,02 metros. As características do material, as condições de contorno, carregamento são utilizadas as mesmas do caso anterior.

Uma vez obtida a independência de malha mostrada graficamente na Fig. 4.3, é realizada a solução numérica com o elemento SHELL281 e o resultado mostrado na Fig. 4.4. A Tab. 4.2 além do resultado obtido, mostra também o resultado da solução analítica analisada obtida por Timoshenko e Krieger (1959) e o resultado da simulação com o elemento SOLID95 realizada pelo Troina (2017).

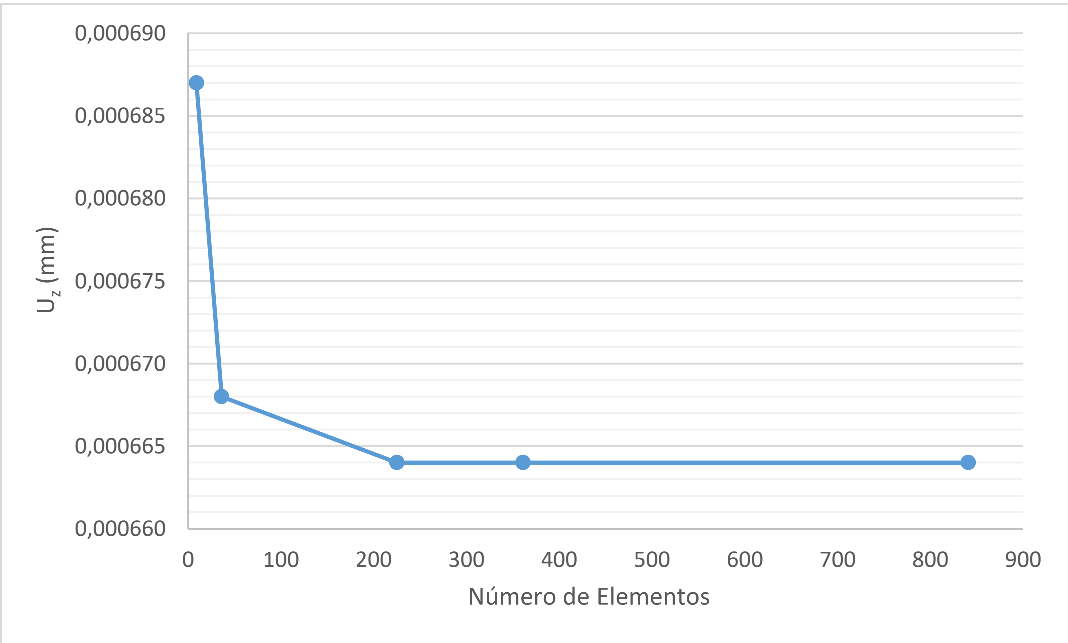


Figura 4.3: Convergência de malha Caso 02 da placa retangular sem enrijecedor

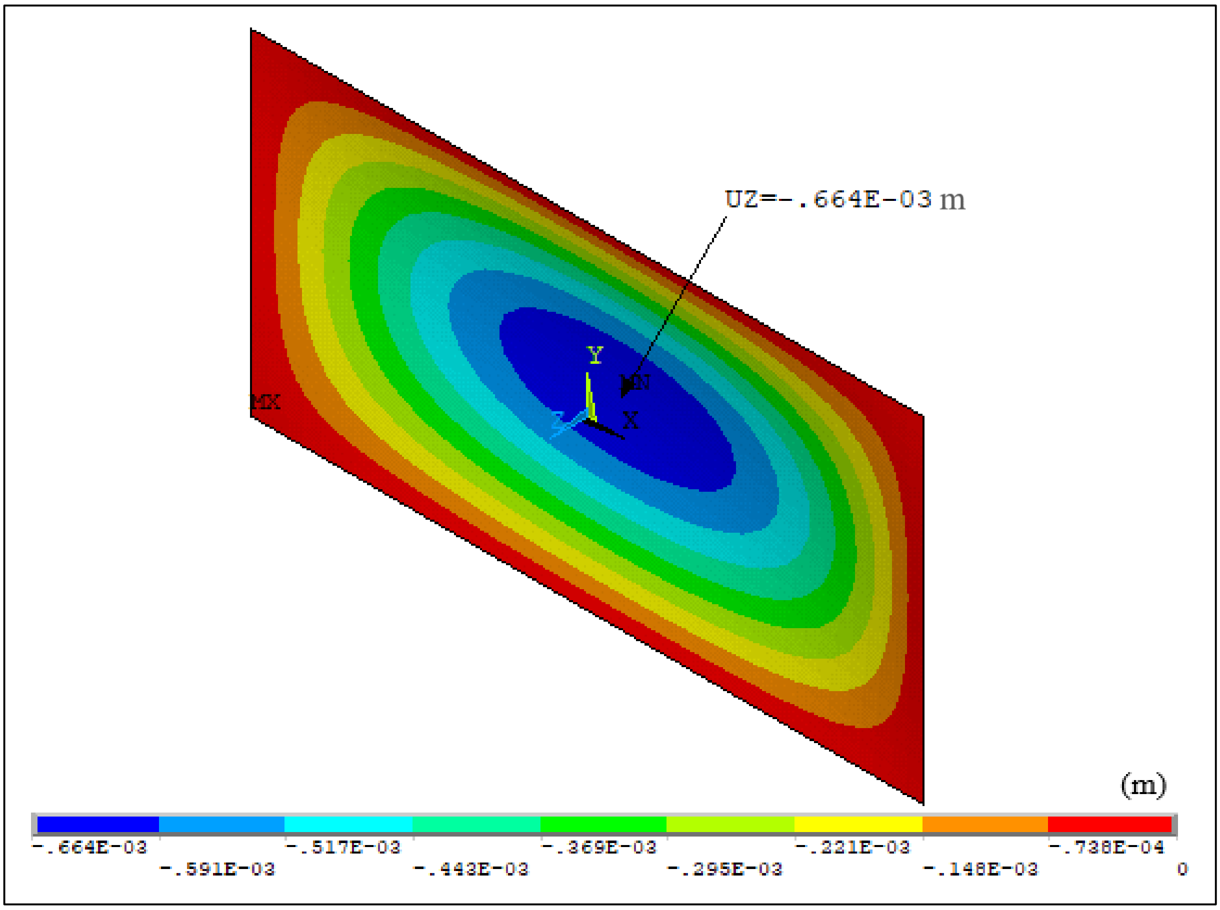


Figura 4.4: Deslocamento central da placa retangular sem enrijecedor - U_z central

Tabela 4.2: Tabela comparativa entre os resultados da placa retangular sem enrijecedor

Placa Enrijecida	SHELL 281	Troina (2017)	Timoshenko e Krieger (1959)*
U_z (mm)	0,664	0,662	0,658

* Solução analítica

Os resultados na tabela acima foram comparados e o resultado da simulação com elemento SHELL281 apresentou seu valor próximo ao resultado da solução numérica e da solução analítica com diferenças respectivamente de 0,002 mm e 0,006 mm.

- ✓ Caso 03: Verificação de placa quadrada com um enrijecedor central sentido longitudinal

Agora a verificação se dará pelo modelo computacional de placas enrijecidas, onde foi utilizado primeiramente um modelo publicado por Rossow e Ibrahimkhail (1978) e após publicado por Tanaka e Bercin (1997). Esse modelo apresenta as características de uma placa fina quadrada com um enrijecedor central, sendo a placa com dimensões do lado e da espessura, respectivamente, iguais a 2,54 cm e 0,0254 cm, o enrijecedor com altura de 0,254 cm e espessura 0,0254 cm, apoio simples em todas as suas quatro bordas na direção Z e pontos em X e Y para restrição do seu movimento de corpo rígido e o material que constitui essa placa possui módulo de elasticidade E = 11.721,09 kN/cm² e coeficiente de Poisson ν = 0,3. A carga distribuída que atua sobre a placa é igual a 0,000689 kN/cm². A configuração dessa placa também foi analisada nas dissertações de Silva (2010) e Troina (2017).

Cabe salientar que para todos os casos a serem comparados os métodos utilizados foram diferentes, conforme a evolução dos meios de análise para o mesmo tipo de problema. Então, Rossow e Ibrahimkhail (1978) utilizaram o método das restrições, Tanaka e Bercin (1997) utilizaram o método dos elementos de contorno, Silva (2010) utilizou o método dos elementos finitos, combinando elementos bidimensionais (SHELL63) para modelagem da placa com elementos de viga (BEAM44) para modelagem do enrijecedor e Troina (2017) o método dos elementos finitos utilizando o elemento SOLID95 para toda estrutura da placa enrijecida. O resultado para solução numérica desenvolvida nesta dissertação com o elemento tipo SHELL281, cuja convergência de malha é mostrada graficamente na Fig. 4.5, pode ser visualizado na Fig. 4.6 e os resultados da verificação encontram-se descritos na Tab. 4.3.

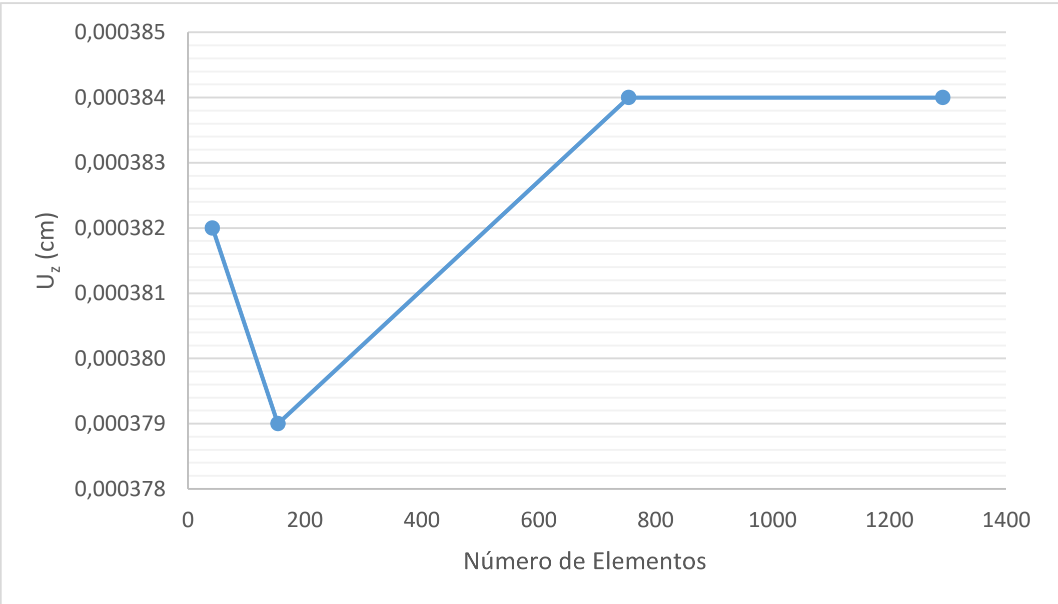


Figura 4.5: Convergência de malha Caso 03 - placa quadrada com enrijecedor central e longitudinal

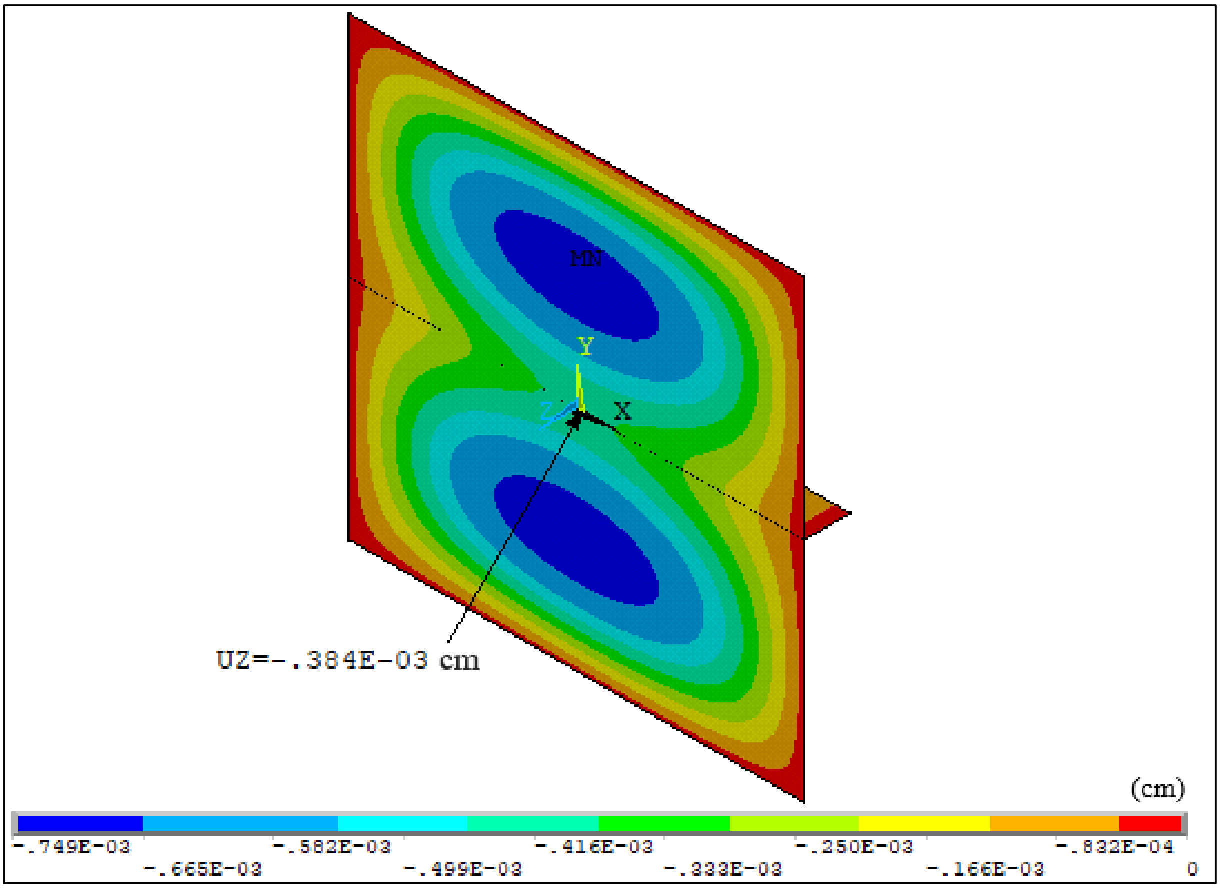


Figura 4.6: Deflexão placa quadrada com um enrijecedor - U_z central

Tabela 4.3: Tabela comparativa entre os resultados da placa quadrada com um enrijecedor

Placa Enrijecida	SHELL 281	Troina (2017)	Silva (2010)	Tanaka e Bercin (1997)	Rossow e Ibrahimkhail (1978)
U_z (mm)	0,0038	0,0038	0,0035	0,0031	0,0035

Os resultados apresentaram pequenas diferenças de valor para esta verificação do Caso 03, que mostra uma maior variação quantificada em 0,0007 mm. Também possibilitando verificar principalmente na pesquisa mais recente que utilizaram elementos finitos na solução, os resultados tiveram uma diferença máxima de 0,0003 mm.

✓ Caso 04: Verificação de placa retangular com um enrijecedor central e longitudinal

Além da placa quadrada, também foi realizado o estudo de verificação do modelo computacional de uma placa retangular com enrijecedor posicionado no centro e no sentido longitudinal, essa placa foi analisada pelo Silva (2010) e Troina (2017), ela mantém o mesmo tipo de apoio simples idem as definidas aos modelos anteriores. A placa possui dimensões de comprimento, largura e espessura, respectivamente, iguais a 18,0 m, 9,0 m e 0,2 m, recebe sobre ela uma força distribuída igual a 10 kN/m², o enrijecedor tem altura de 2 m e espessura de 1 m e o material de ambos possui módulo de elasticidade $E = 3{,}0.10^7$ kN/m² e coeficiente de Poisson ν = 0,154. A convergência de malha é apresentada graficamente na Fig. 4.7, o modelo analisado na Fig. 4.8 e os resultados da verificação estão na Tab. 4.4.

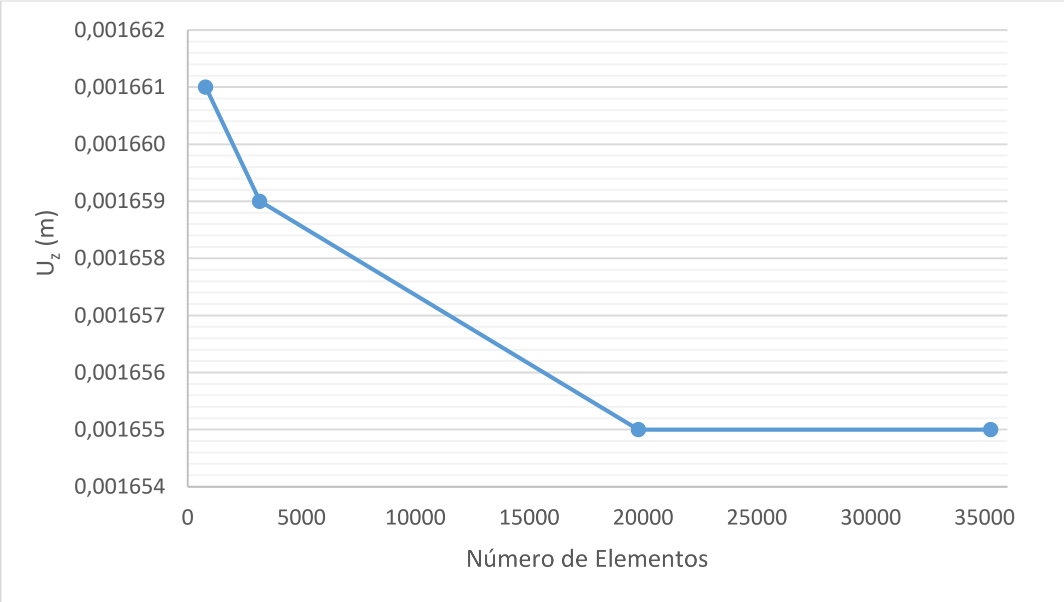


Figura 4.7: Convergência de malha Caso 04 - placa retangular com enrijecedor central e longitudinal

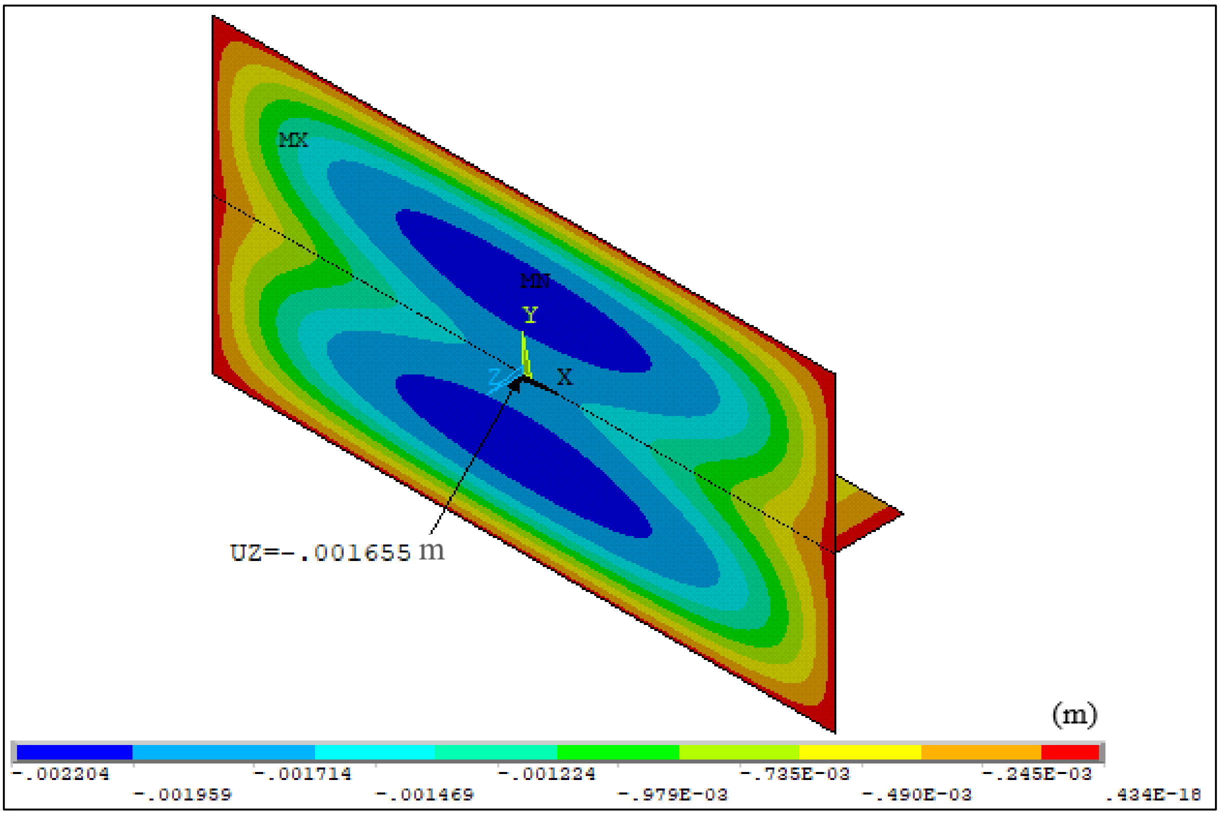


Figura 4.8: Deflexão placa retangular com um enrijecedor - U_z central

Tabela 4.4: Tabela comparativa entre os resultados da placa retangular com um enrijecedor

Placa Enrijecida	SHELL 281	Troina (2017)	Silva (2010)
U_z (m)	0,00166	0,00167	0,00160

Para o Caso 04, observa-se que os resultados tiveram uma diferença mínima de 0,00001 m para os resultados de Troina e máxima de 0,00006 m para Silva.

✓ Caso 05: Verificação de placa retangular com dois enrijecedores ortogonais

Finalizando a primeira etapa da verificação da modelagem computacional, foi utilizado um modelo publicado em pesquisas de Rossow e Ibrahimkhail (1978) que utilizou o método das restrições, por Bedair (1997) que realizou a análise através do método da programação sequencial quadrática, por Silva (2010) com o método dos elementos finitos adotando o elemento SHELL63 para a placa e o elemento BEAM44 para os enrijecedor e por Troina (2017) que também utilizou o método dos elementos finitos porém adotou o elemento SOLID95 para placa e enrijecedor. Esse modelo apresenta uma placa fina retangular com dois enrijecedores, sendo um no sentido longitudinal e outro transversal, ambos se cruzando no centro da placa.

No modelo de placa com dois enrijecedores, a placa possui dimensões de comprimento, largura e espessura, respectivamente, iguais a 152,4 cm, 76,2 cm e 0,635 cm, ambos enrijecedores possuem a mesma espessura de 1,27 cm, porém as alturas são diferentes: para o enrijecedor longitudinal é de 7,62 cm e para o enrijecedor transversal é de 12,7 cm. Nessa placa é aplicada ortogonal ao seu plano uma força distribuída igual a 0,006895 kN/cm², o material utilizado possui módulo de elasticidade E = 20.684,27 kN/cm² e coeficiente de Poisson ν = 0,3. E as condições de contorno se mantém as mesmas dos demais modelos pesquisados, sendo do tipo apoio simples.

O gráfico com a convergência de malha é apresentado na Fig. 4.9, o modelo analisado na Fig. 4.10 e os resultados da verificação estão na Tab. 4.5.

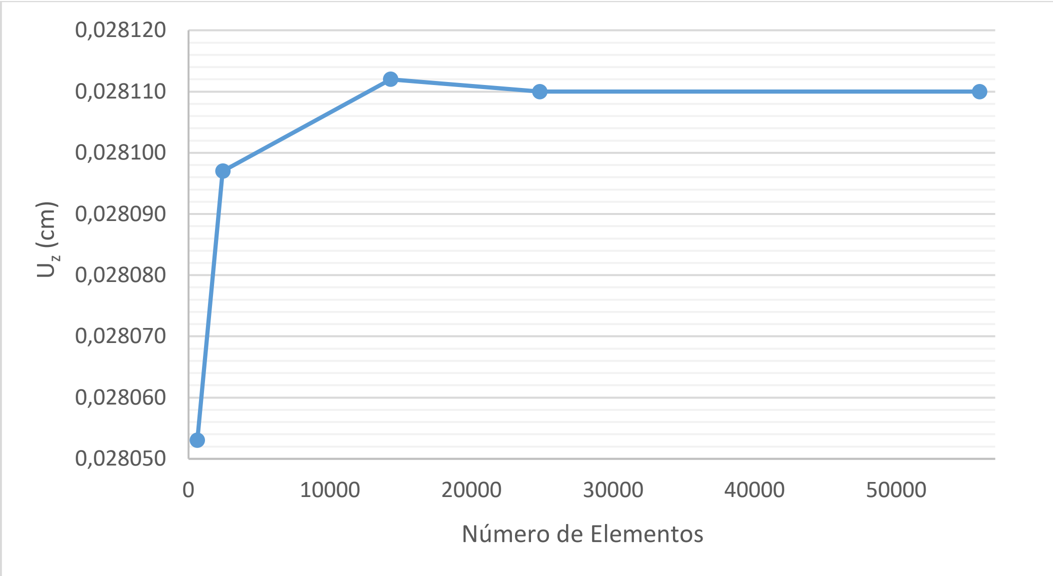


Figura 4.9: Convergência de malha Caso 05 - placa retangular com dois enrijecedores ortogonais

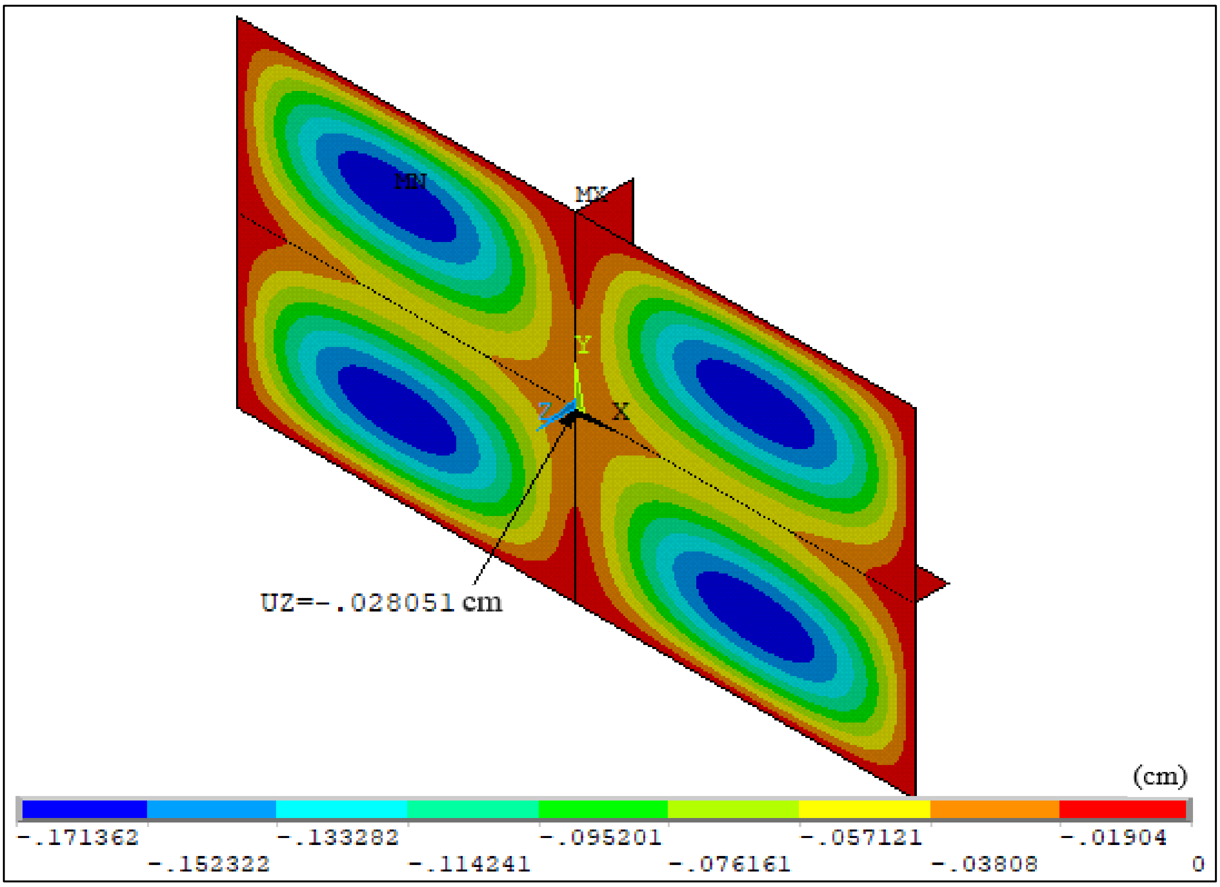


Figura 4.10: Deflexão placa retangular com dois enrijecedores - U_z central

Tabela 4.5: Tabela comparativa entre os resultados da placa retangular com dois enrijecedores

Placa Enrijecida	SHELL 281	Troina (2017)	Silva (2010)	Bedair (1997)	Rossow e Ibrahimkhail (1978)
U_z (cm)	0,02805	0,02781	0,02183	0,02032	0,02245

Os resultados apresentaram diferenças de valor justificáveis para esta verificação do Caso 05 devido aos modelos utilizados em cada análise, referente à literatura. Porém pode-se observar novamente na pesquisa mais recente que utilizou o MEF, que os resultados obtidos tiveram uma diferença de apenas 0,00024 cm.

Após foi a vez da segunda etapa de verificação do modelo computacional utilizando o modelo proposto nessa pesquisa de modo a avaliar se foi transcrito adequadamente para a linguagem da simulação numérica. O procedimento de verificação foi realizado por meio da comparação dos resultados de deflexão central de placas enrijecidas obtidos nos modelos aqui desenvolvidos com os resultados provenientes de pesquisas anteriormente publicadas. Troina (2017) já havia simulado placas com as mesmas dimensões e com enrijecedores na configuração simétrica para as placas P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3), ele utilizou um modelo computacional desenvolvido com o elemento 3D SOLID95, já para essa pesquisa foi utilizado o elemento 2D SHELL281. Os dados apresentados na Tab. 4.6 verificam o modelo computacional, mostrando sua eficácia ao fornecer resultados próximos apresentando diferenças de valores variando de 0,0018 mm para os menores valores simulados para deflexão até 0,0193 mm para os maiores valores.

Tabela 4.6: Tabela de verificação do modelo computacional da placa enrijecida P(2,2), S_l = 666,66 mm, S_t = 333,33 mm e h_s/t_s = 20,84.

Razão h_s/t_s	**U_z (mm) SHELL281 (Presente Estudo)**	**U_z (mm) SOLID95 (Troina, 2017)**	**Diferença (%)**
20,84	0,0275	0,0257	7
13,33	0,0330	0,0305	8
9,15	0,0393	0,0361	9
6,87	0,0457	0,0417	10
5,26	0,0533	0,0484	10
3,37	0,0703	0,0634	11
2,36	0,0894	0,0804	11
2,01	0,0999	0,0894	12
1,73	0,1107	0,0988	12
1,34	0,1333	0,1180	13
1,06	0,1574	0,1381	14

Após o modelo devidamente verificado, executaram-se as simulações numéricas das diferentes geometrias de placas enrijecidas a serem analisadas e, a partir daí, procedeu-se com o processo de busca dos resultados para avaliar a influências do espaçamento dos enrijecedores na deflexão das placas.

4.1. Análise da placa enrijecida P(2,2)

Os resultados obtidos nas simulações das placas com enrijecedores na configuração P(2,2) e suas variações são apresentados de duas maneiras, sendo uma análise no ponto central da placa e outra análise no ponto de maior deflexão. Após uma análise concomitante de ambas deflexões (no ponto central da placa e a máxima) considerando os pontos das curvas definidos para cada disposição dos enrijecedores em relação a razão h_s/t_s.

Realizada a primeira análise dos resultados destas simulações considerando a deflexão no ponto central da placa e com isso, foram geradas curvas para cada situação de espaçamento entre enrijecedores, que estão apresentadas graficamente na Fig. 4.11.

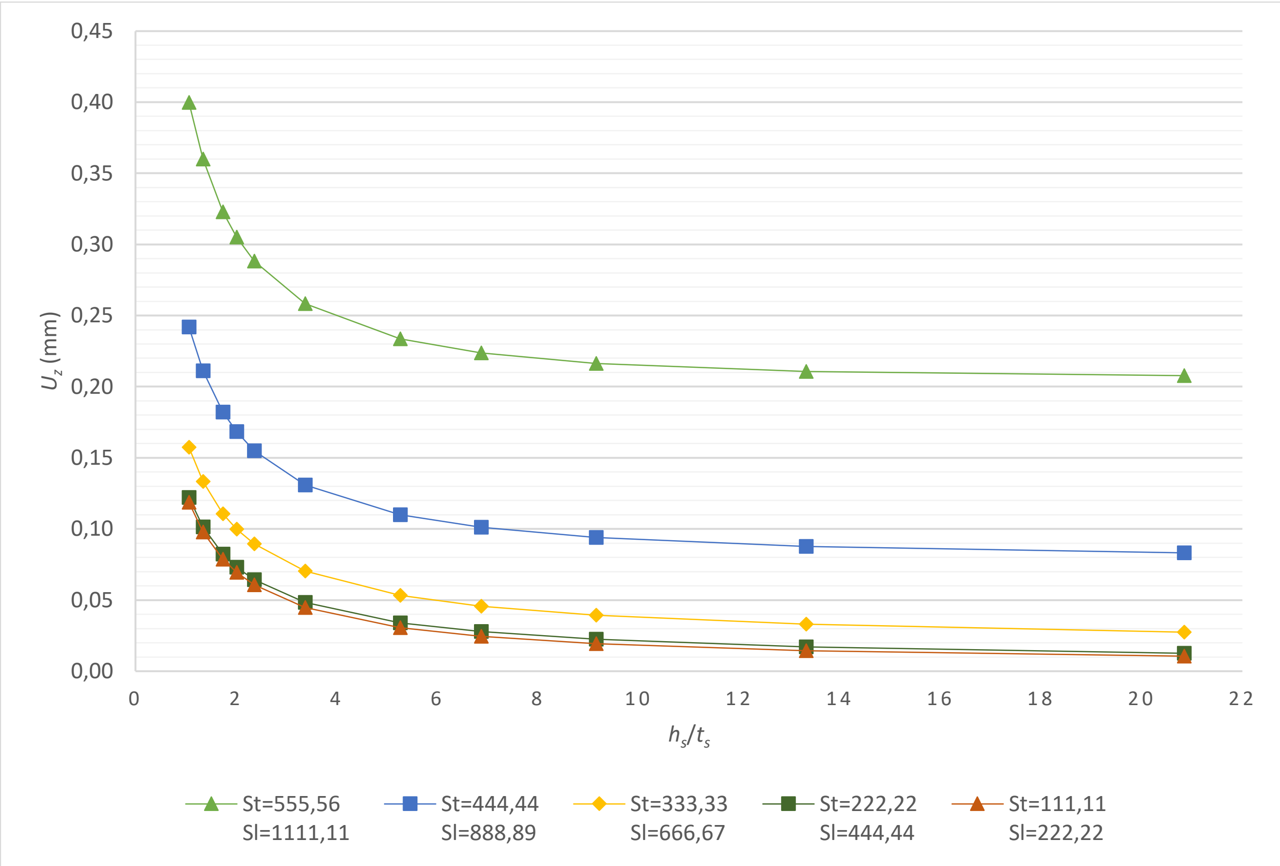


Figura 4.11: Resultados de deflexão no ponto central das placas enrijecidas P(2,2).

O gráfico da Fig. 4.11 mostra os valores de deslocamento no centro das placas enrijecidas para cada configuração de enrijecedor, quanto à posição S_l e S_t e à razão h_s/t_s. Analisando as curvas pode-se observar que ao ocorrer a variação no espaçamento dos enrijecedores, no sentido dos bordos para o centro da placa, ou seja, diminuindo os valores de S_l e S_t, reduz-se o valor de deslocamento no ponto central da placa, o que era esperado, esses valores otimizados da placa P(2,2) considerado por razão h_s/t_s são mostrados nas Figs. A.1 até A.11 e ocorrem nas posições dos enrijecedores de menor valor. Também quando analisado individualmente o parâmetro h_s/t_s do enrijecedor, observa-se que quanto maior o valor desta razão, maior é a altura do enrijecedor comparada com sua espessura, o que ocasiona em ganho de momento de inércia da sua seção transversal e, consequentemente, reduz o deslocamento no ponto central da placa.

Portanto, se a variação do espaçamento dos enrijecedores e a variação da razão h_s/t_s forem consideradas concomitantemente, é possível indicar que a melhor configuração geométrica de placa enrijecida para minimizar a deflexão central é aquela que possui o menor espaçamento S_l e S_t entre os enrijecedores e o maior valor da razão h_s/t_s. A Fig. 4.12 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(2,2) com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 222,22 mm, $(S_t)_o$ = 111,11 mm e a razão $(h_s/t_s)_o$ = 20,84, que resultaram no valor de deslocamento central minimizado de $(U_z)_m$ = 0,010507 mm.

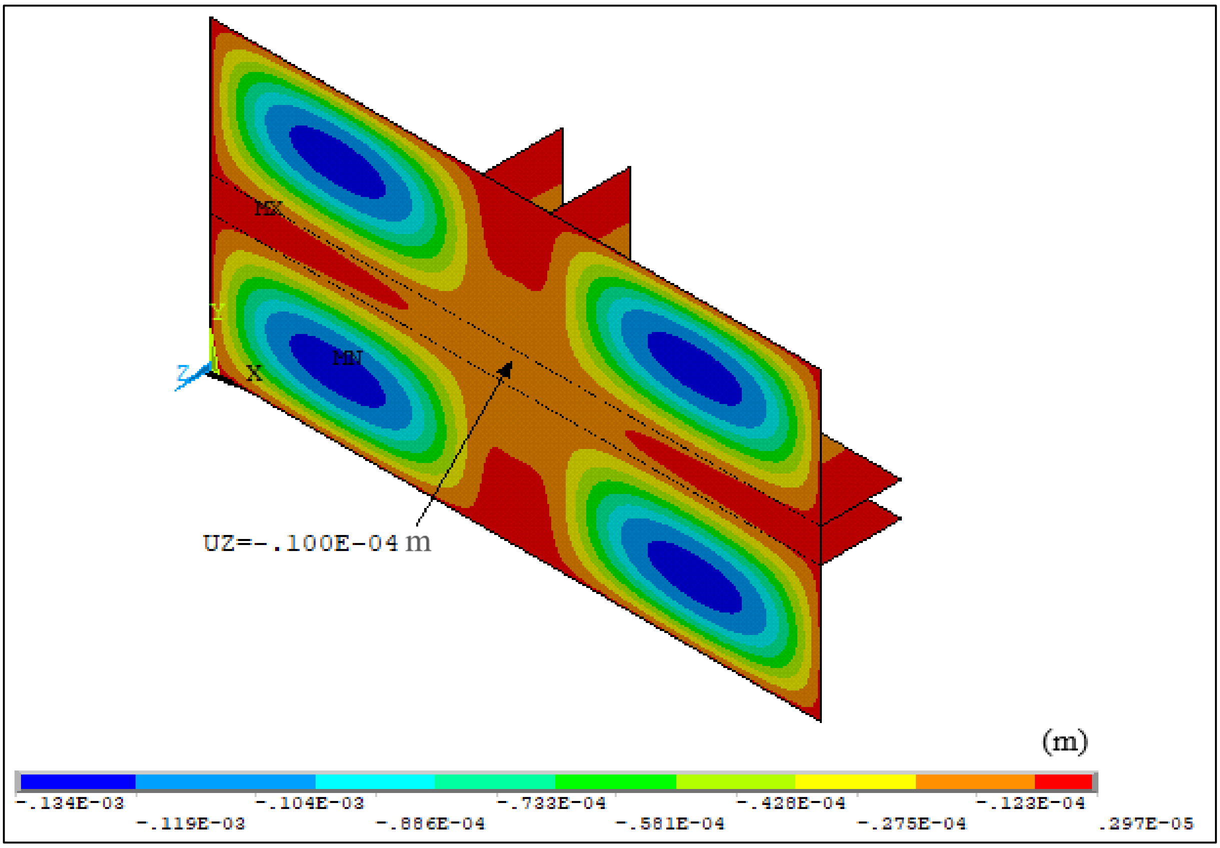


Figura 4.12: Deflexão P(2,2) com U_z central, h_s/t_s = 20,84, S_t = 111,11 mm e S_l = 222,22 mm

Em uma segunda análise, também foi avaliada a influência dos espaçamentos dos enrijecedores, bem como da razão h_s/t_s, no comportamento mecânico da placa enrijecida quanto à deflexão, porém agora avaliando o deslocamento máximo que pode ocorrer em qualquer ponto da estrutura. Na Fig. 4.13 são apresentados graficamente os resultados das simulações considerando esses pontos onde ocorrem estes deslocamentos máximos nas placas.

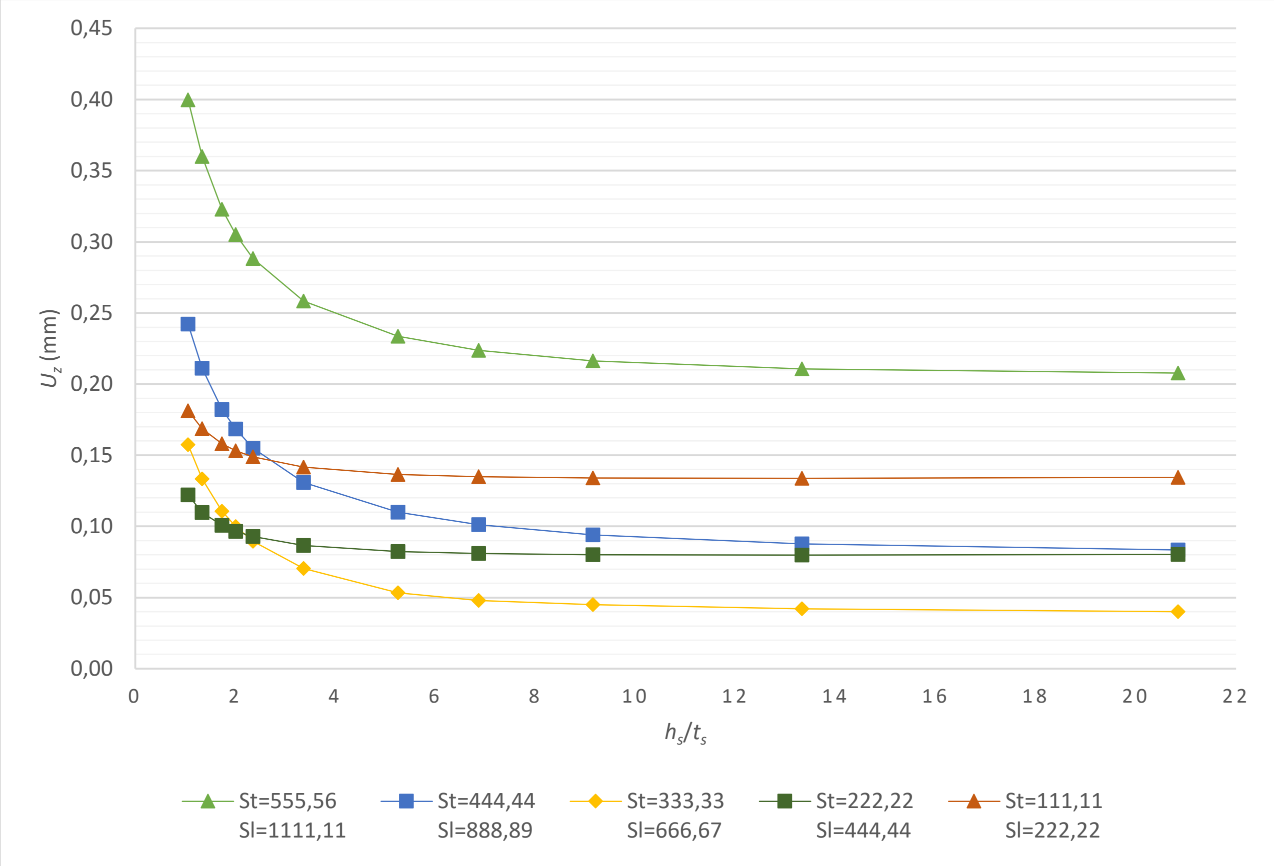


Figura 4.13: Resultados de deflexão máxima das placas enrijecidas P(2,2).

Analisando individualmente a influência da razão h_s/t_s do enrijecedor, observa-se no gráfico da Fig. 4.13 que os casos com o maior valor desta relação geram resultados de deflexão máxima menores. Já a comparação entre as curvas, considerando os diferentes espaçamentos entre enrijecedores, evidencia que para as razões h_s/t_s, aproximadamente entre 1 e 2, os menores valores de deslocamento máximo ocorrem para as placas que apresentam espaçamentos diferentes no caso S_l = 444,44 mm e S_t = 222,22 mm, enquanto que, para as razões acima de h_s/t_s = 2, os menores valores de deslocamento máximo ocorrem para as placas que apresentam enrijecedores dispostos com espaçamentos iguais sendo S_l = 666,67 mm e S_t = 333,33 mm. Os valores e as regiões de máximo deslocamento para cada placa otimizada considerando por razão h_s/t_s são mostrados nas Figs. B.1 até B.11 e variam os resultados otimizados conforme a posição dos enrijecedores entre espaçamentos diferentes ou iguais dependendo da razão h_s/t_s.

E analisando ambos parâmetros juntos é possível condicionar que para obter um resultado otimizado com o menor valor para o deslocamento máximo nesta configuração de placa P(2,2), devem ser levados em consideração o maior valor da razão h_s/t_s e o menor valor de deslocamento máximo que ocorre justamente na curva de espaçamentos iguais. A Fig. 4.14 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(2,2), com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 666,67 mm, $(S_t)_o$ = 333,33 mm e $(h_s/t_s)_o$ = 20,84, que resultaram no valor de deslocamento máximo minimizado de $(U_z)_m$ = 0,039968 mm.

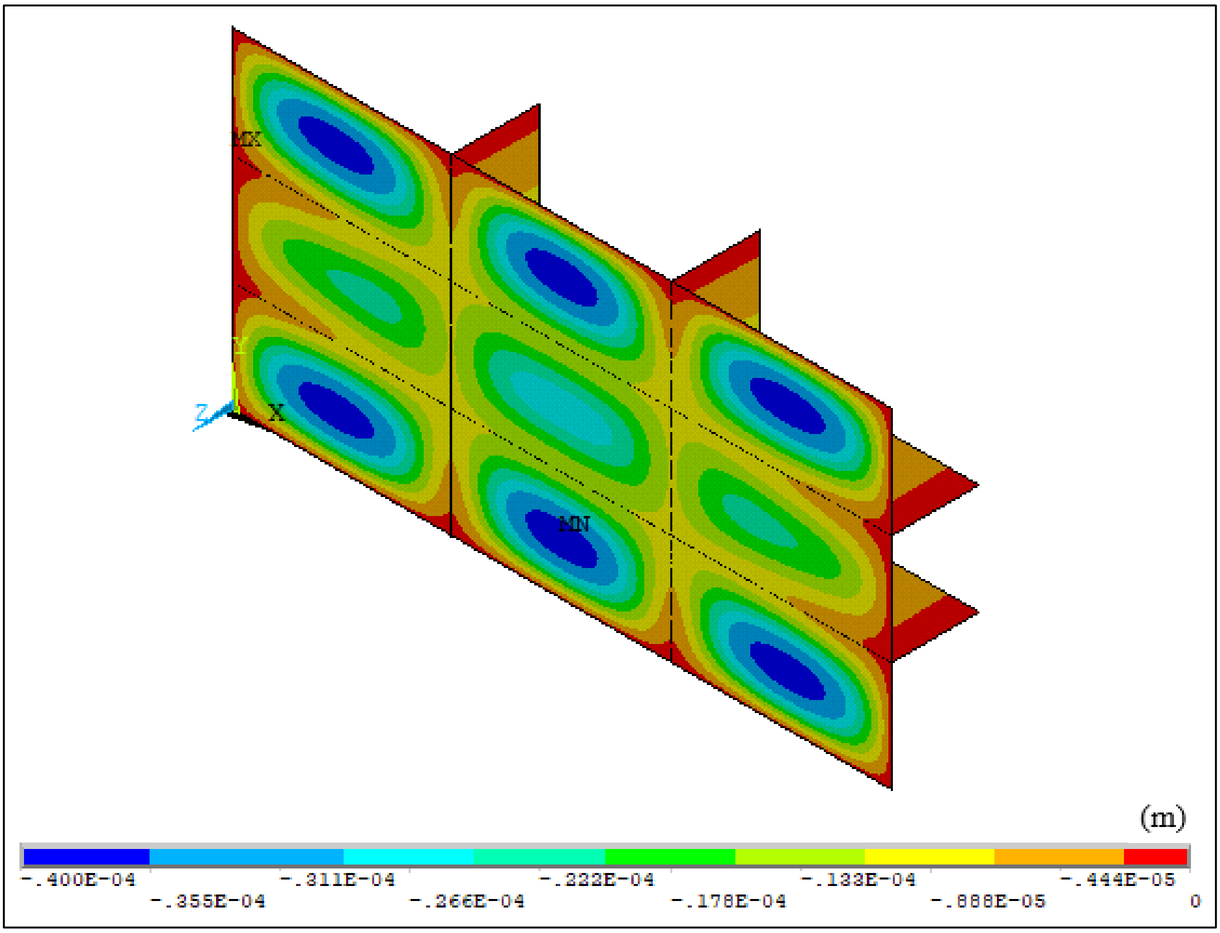


Figura 4.14: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 20,84, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,66 mm

O resultado otimizado para ambas deflexões no ponto central e no máximo obtidos da placa P(2,2) foram comparados com a placa de referência (sem enrijecedor) determinada na Fig. 4.4, sendo que a placa referência apresentou um resultado para U_z = 0,664 mm de valor maior que o resultado otimizado da placa P(2,2), significando que a placa enrijecida apresenta uma melhora no parâmetro deflexão tendo em vista que ambas placas possuem o mesmo volume apenas distribuído de forma diferente.

Após análise das deflexões considerando as curvas de disposição dos enrijecedores e variando a razão h_s/t_s, procedeu-se com uma análise concomitante de ambas deflexões, no ponto central da placa e a máxima, a partir de curvas com a mesma razão h_s/t_s e variando as posições dos enrijecedores, adicionando ainda um ajuste de curva de tendência polinomial para interligação dos pontos, ajustes estes que apresentaram uma ótima correlação definida por coeficientes de determinação (R^2) iguais a 1 (unidade).

Para isso, foram selecionadas as razões h_s/t_s = 1,06 (Fig. 4.15), h_s/t_s = 3,37 (Fig. 4.16), h_s/t_s = 5,26 (Fig. 4.17) e h_s/t_s = 20,84 (Fig. 4.18). O critério de otimização para essa situação foi definido como o ponto da curva que apresentou concomitantemente o menor valor para o deslocamento máximo e deslocamento central da placa para uma mesma razão h_s/t_s. Assim, observa-se que as geometrias ótimas tendem a ser aquelas cujos enrijecedores tem sua posição com espaçamentos iguais, se afastando dessa tendência apenas para razão h_s/t_s muito pequenas, aproximadamente entre 1 e 2, como pode ser visto na Fig. 4.14.

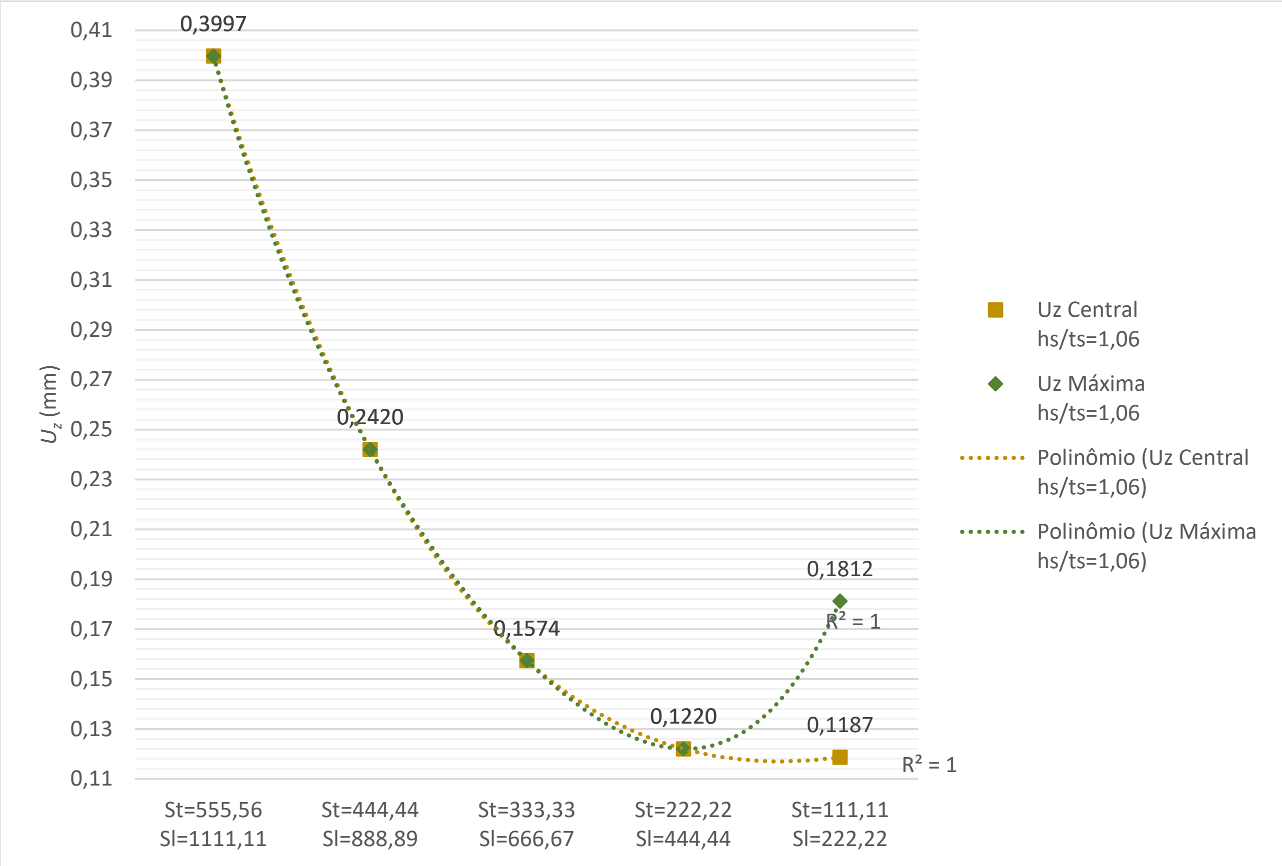


Figura 4.15: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,2) e h_s/t_s = 1,06.

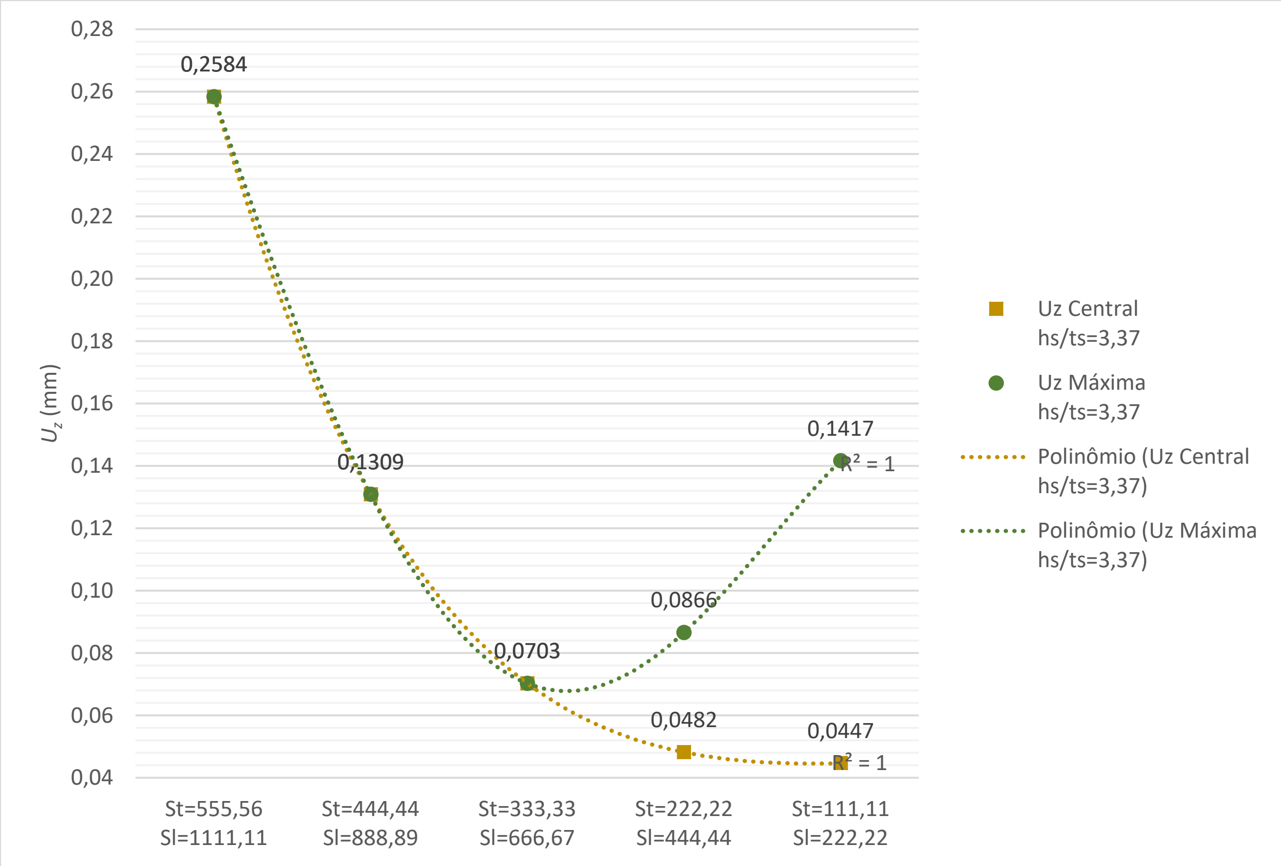


Figura 4.16: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,2) e h_s/t_s = 3,37.

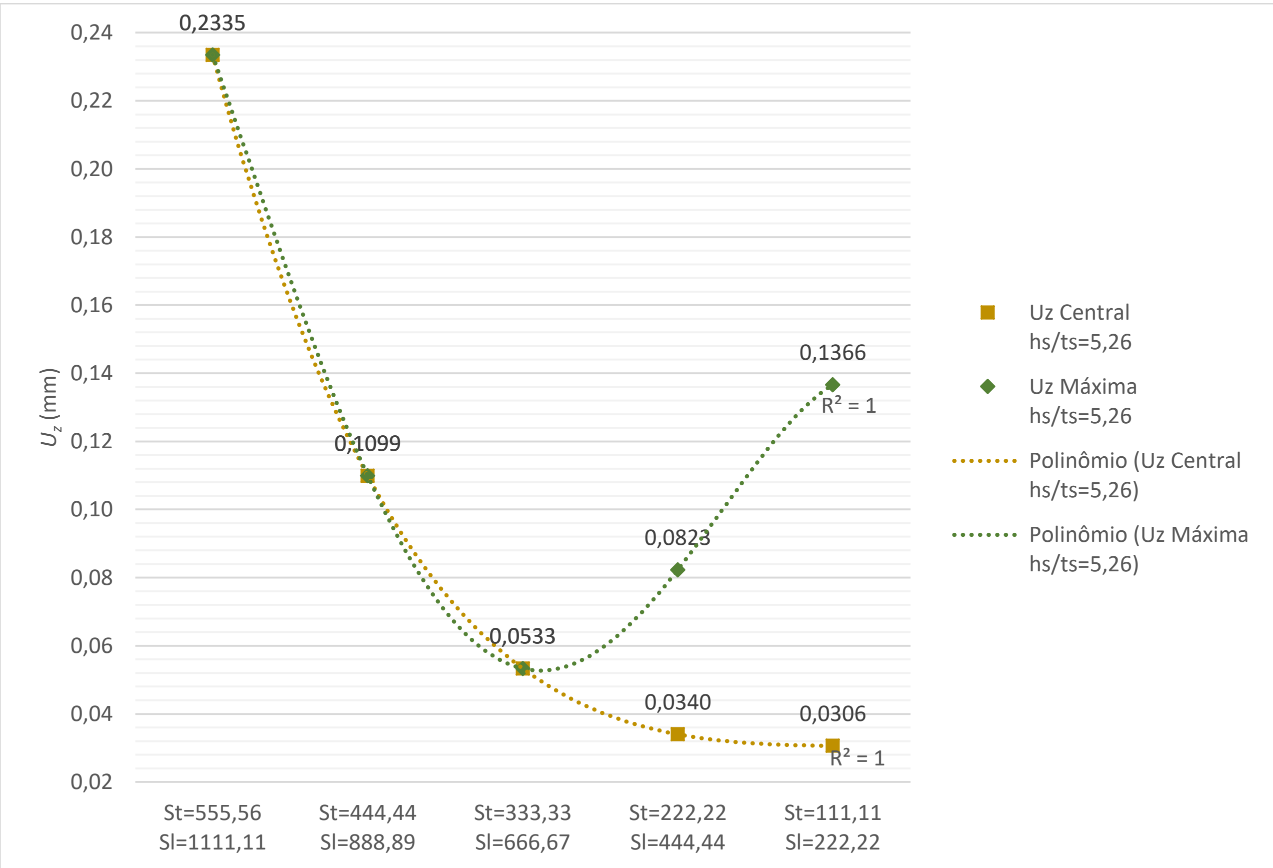


Figura 4.17: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,2) e h_s/t_s = 5,26.

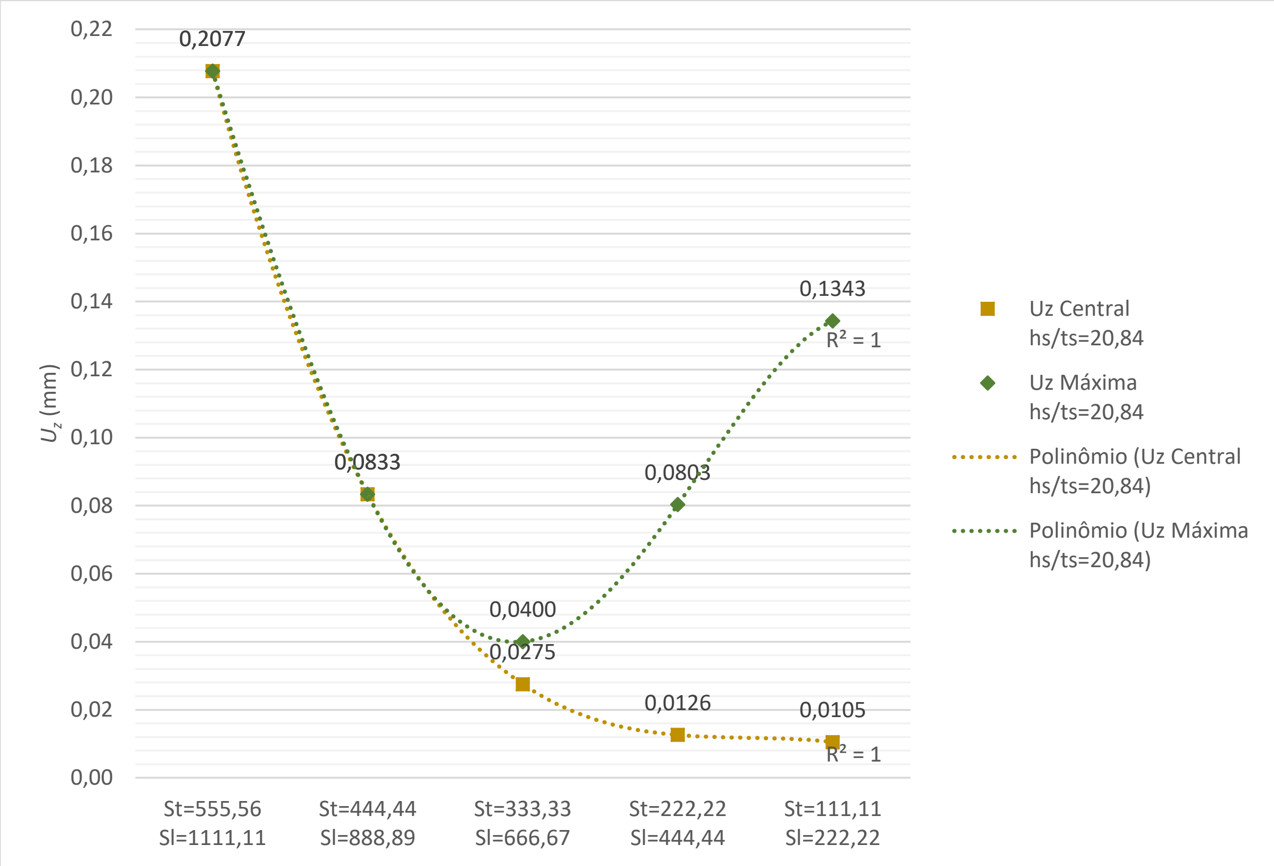


Figura 4.18: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,2) e h_s/t_s = 20,84.

4.2. Análise da placa enrijecida P(2,3)

Os resultados obtidos nas simulações das placas com enrijecedores na configuração P(2,3) e suas variações são apresentados idem ao anterior, uma análise no ponto central da placa e no ponto de maior deflexão, como também uma análise concomitante de ambas deflexões.

Realizada a análise dos resultados destas simulações considerando a deflexão no ponto central da placa, foram geradas curvas para cada situação de espaçamento entre enrijecedores e são apresentadas na Fig. 4.19.

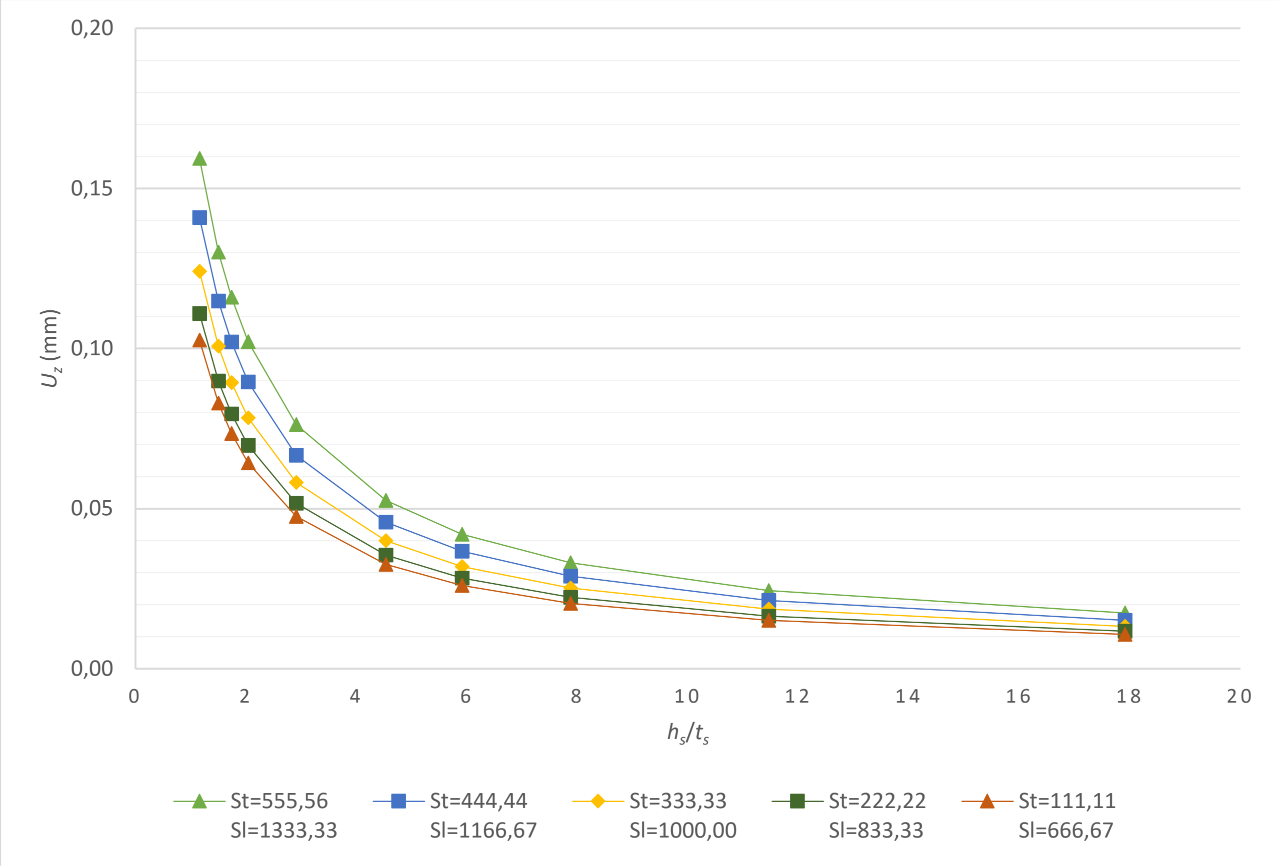


Figura 4.19: Resultados de deflexão central das placas enrijecidas P(2,3).

O gráfico da Fig. 4.19 referente à placa P(2,3), que possui como principal diferença da placa P(2,2) um enrijecedor central no sentido transversal, mostrando os valores de deslocamento no centro das configurações da placas enrijecidas, que variam também a posição S_l e S_t e a razão h_s/t_s. Com base na análise das curvas pode-se observar que diminuindo os valores de S_l e S_t, reduz-se o valor de deslocamento no ponto central da placa e quando aumenta o valor do parâmetro h_s/t_s do enrijecedor se reduz o deslocamento no ponto central da placa. A diferença que ocorre ao incrementar um enrijecedor central posicionado transversalmente é que as curvas tendem a ficarem próximas, e o parâmetro que gera uma influência maior no resultado é dado pela razão h_s/t_s. Nas figuras A.12 até A.21 são mostrados os valores otimizados da placa P(2,3) para cada razão h_s/t_s ocorrendo na menor posição S_l e S_t.

Avaliando concomitantemente as variações de espaçamento e a razão para altura e espessura, permitem definir a configuração geométrica otimizada para a placa enrijecida minimizando a deflexão no ponto central, ocorrendo para o menor valor de espaçamento S_l e S_t e o maior valor da razão h_s/t_s. A Fig. 4.20 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(2,3) com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 666,66 mm, $(S_t)_o$ = 111,11 mm e razão $(h_s/t_s)_o$ = 17,91, que resultaram no valor de deslocamento central minimizado de $(U_z)_m$ = 0,010637 mm.

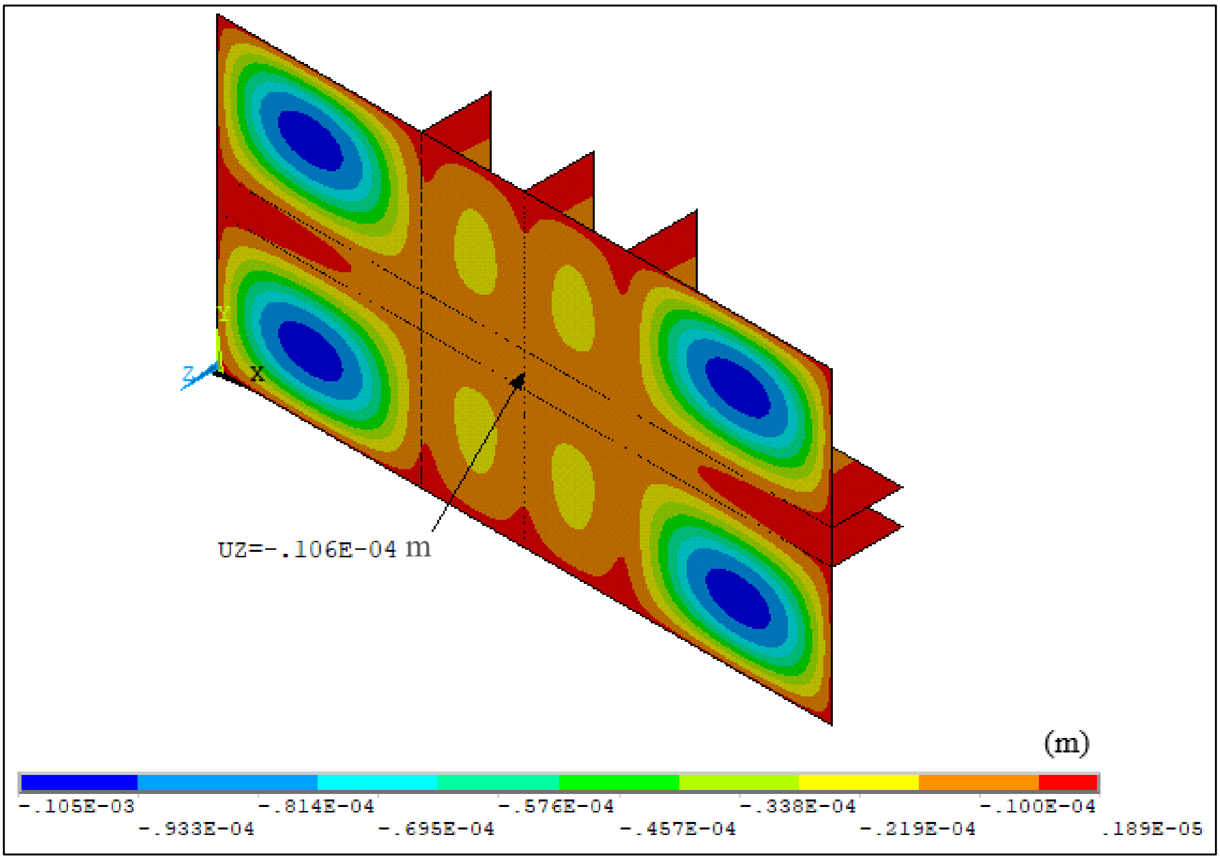


Figura 4.20: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 17,91, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,66 mm

Para placa P(2,3) também foi avaliando individualmente o deslocamento máximo, lembrando que pode ocorrer em qualquer ponto da estrutura, o gráfico da Fig, 4.21 apresenta os resultados das simulações considerando a influência dos espaçamentos dos enrijecedores e a razão h_s/t_s no comportamento mecânico da placa enrijecida quanto à sua deflexão.

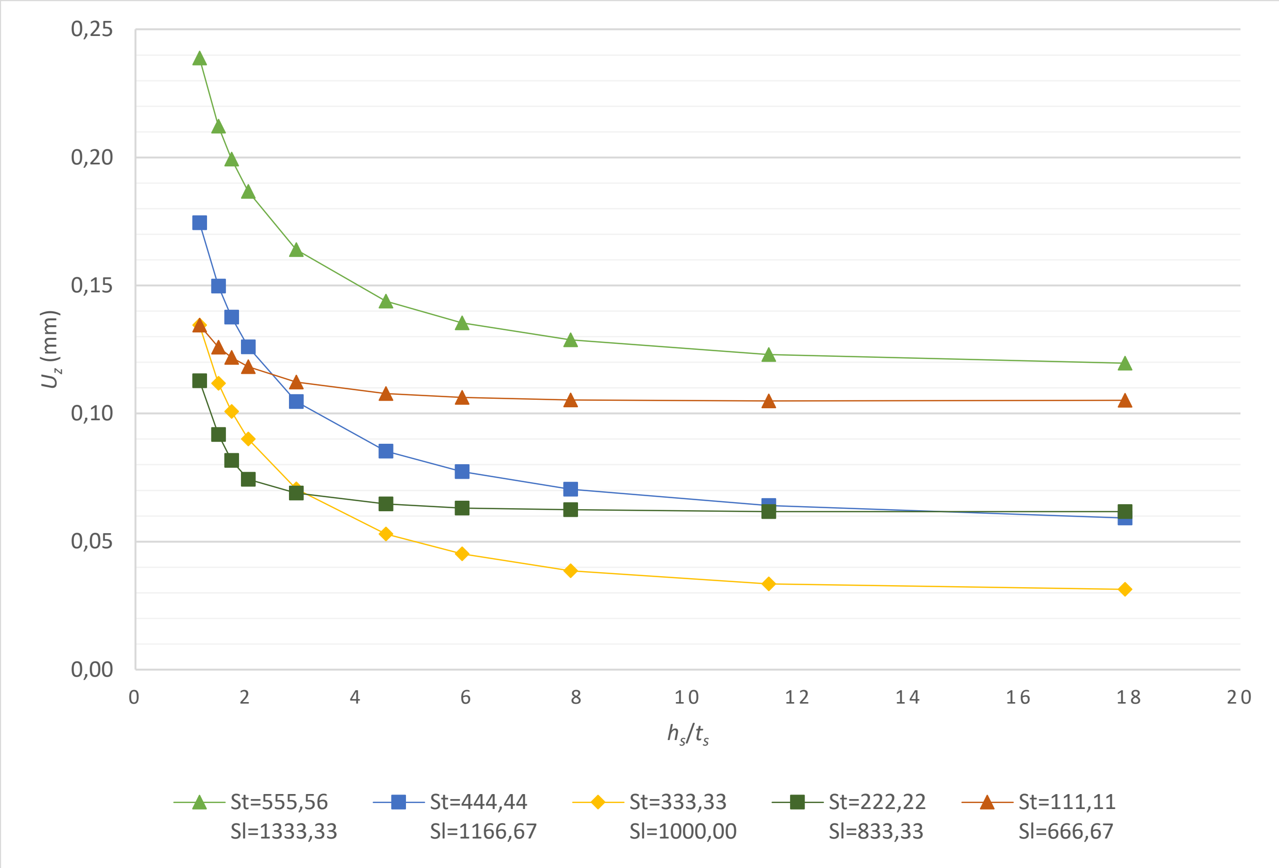


Figura 4.21: Resultados de deflexão máxima das placas enrijecidas P(2,3).

Analisando de modo individual a influência da razão h_s/t_s do enrijecedor, observa-se que os casos com o maior valor da razão geram menores resultados de deflexão máxima. Comparando as curvas e considerando os diferentes espaçamentos entre enrijecedores, evidencia que as razões h_s/t_s, aproximadamente entre 1 e 3 possuem seus menores valores de deslocamento máximo ocorrendo nas placas que apresentam os espaçamentos diferentes no caso S_l = 833,33 mm e S_t = 222,22 mm, enquanto para razões acima de h_s/t_s = 3, os menores valores de deslocamento máximo ocorrem nas placas que apresentam enrijecedores com espaçamentos iguais sendo S_l = 1000,00 mm e S_t = 333,33 mm. São mostrados nas Figs. B.12 até B.21, os valores e as regiões de máximo deslocamento para cada placa otimizada considerando por razão h_s/t_s, variando os resultados otimizados conforme a posição dos enrijecedores entre espaçamentos diferentes ou iguais dependendo da razão h_s/t_s.

Na análise de ambos parâmetros juntos novamente pode-se condicionar que para se obter um resultado otimizado para o deslocamento máximo, devem ser levados em consideração o maior valor da razão h_s/t_s e o menor valor de deslocamento máximo que ocorre na curva com espaçamentos iguais. A Fig. 4.22 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(2,3), com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 1000,00 mm, $(S_t)_o$ = 333,33 mm e $(h_s/t_s)_o$ = 17,91, que resultaram no valor de deslocamento máximo minimizado de $(U_z)_m$ = 0,031380 mm.

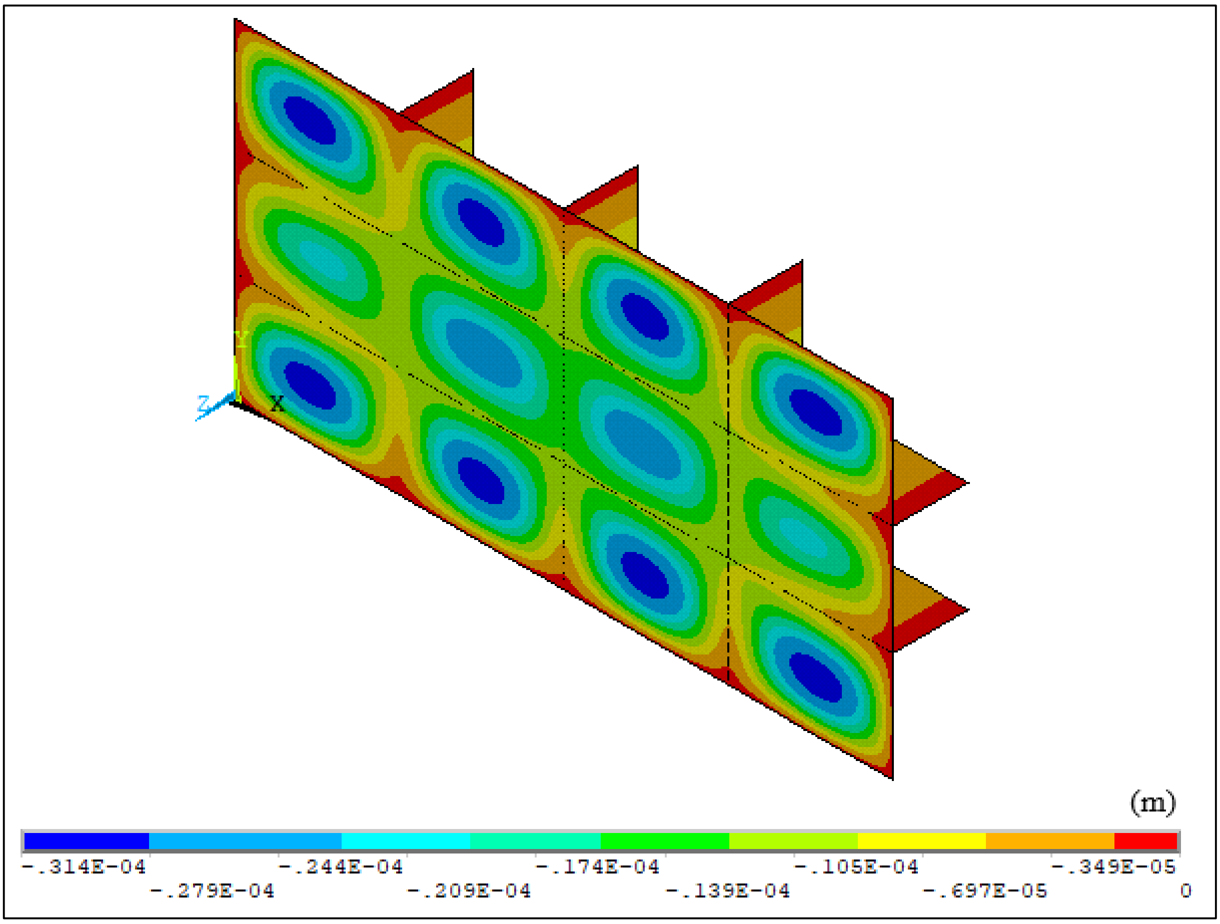


Figura 4.22: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 17,91, S_t = 333,33 mm e S_l = 1000,00 mm

De forma análoga a configuração anterior os resultados otimizados para ambas deflexões no ponto central e no máximo foram comparados com a placa de referência, Fig. 4.4, que também apresentou um resultado maior que o resultado otimizado desta placa, significando uma melhora no parâmetro de deflexão.

Após procedeu-se com a análise concomitante de ambas deflexões gerando gráficos de deflexão no ponto central e máxima a partir de curvas com a mesma razão h_s/t_s e variando as posições dos enrijecedores, adicionando um ajuste de curva de tendência polinomial (R^2 =1) para interligação dos pontos, análise realizada idêntica para placa P(2,2). E as razões selecionadas foram h_s/t_s = 1,16 (Fig. 4.23), h_s/t_s = 2,90 (Fig. 4.24), h_s/t_s = 4,53 (Fig. 4.25) e h_s/t_s = 17,91 (Fig. 4.26).

O critério de otimização para situação foi o ponto da curva que apresentou concomitantemente o menor valor para o deslocamento máximo e deslocamento central da placa sendo ambos relacionados a uma mesma razão h_s/t_s. Como observado anteriormente na placa P(2,2), na placa P(2,3) também ocorrem as geometrias ótimas quando os enrijecedores encontram-se com espaçamentos iguais, diferenciando-se nas razões h_s/t_s muito pequenas, aproximadamente entre 1 e 3, onde a geometria ótima ocorre nos espaçamentos diferentes quanto a posição dos enrijecedores e pode ser visto nas Figs. 4.23 e 4.24. Nos gráficos desta análise também permitiu constatar uma distância que ocorre entre as curvas, diferente da placa anterior que em determinados pontos das curvas se encontravam no gráfico, significando que ambos valores para os deslocamentos máximo e central eram iguais, não ocorrendo este encontro nas configuração P(2,3) que contém um enrijecedor transversal posicionado no centro da placa, existindo então uma diferença entre os valores dos deslocamentos máximo e o central para uma mesma razão h_s/t_s. Também foi observado o comportamento da curva para o deslocamento central dado para uma mesma razão h_s/t_s mostrando uma resposta praticamente linear.

Figura 4.23: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,3) e h_s/t_s = 1,16.

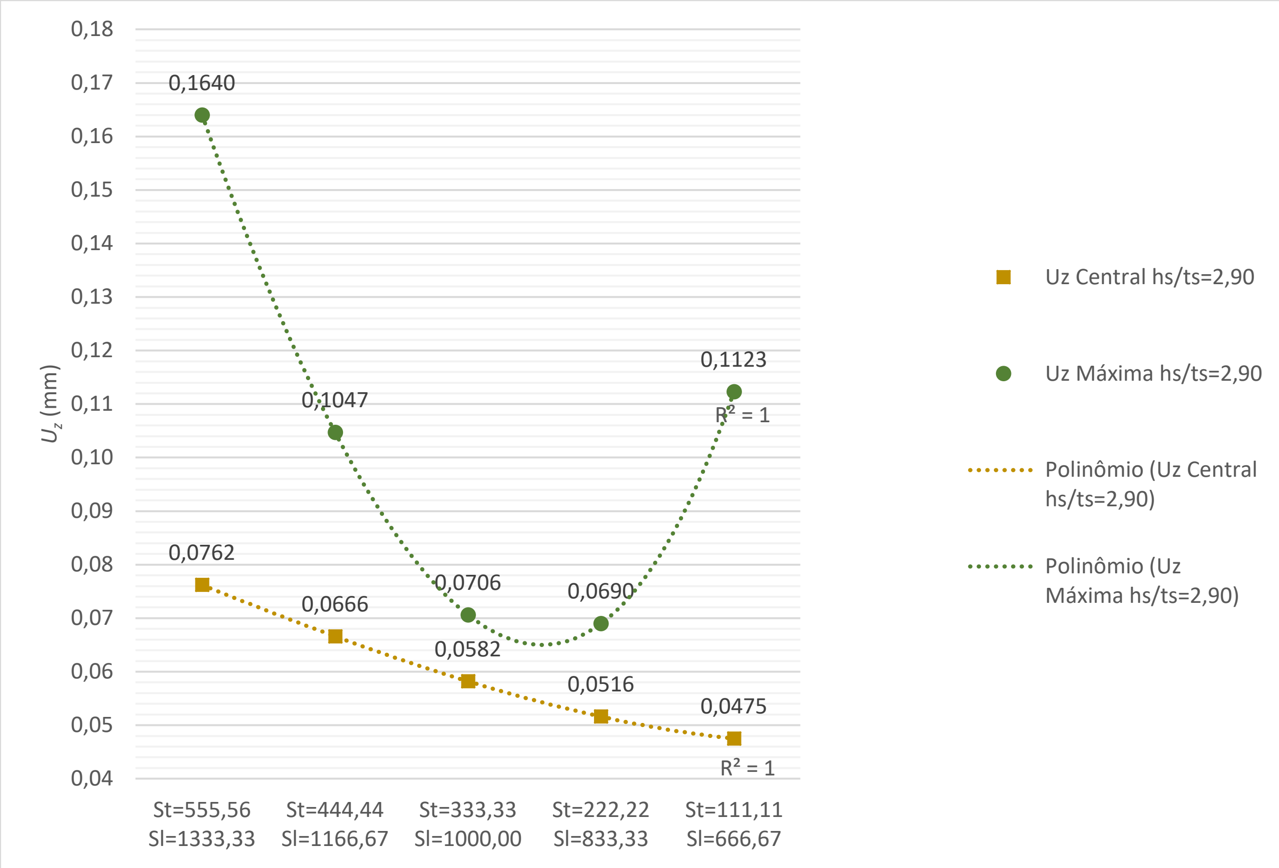


Figura 4.24: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,3) e h_s/t_s = 2,90.

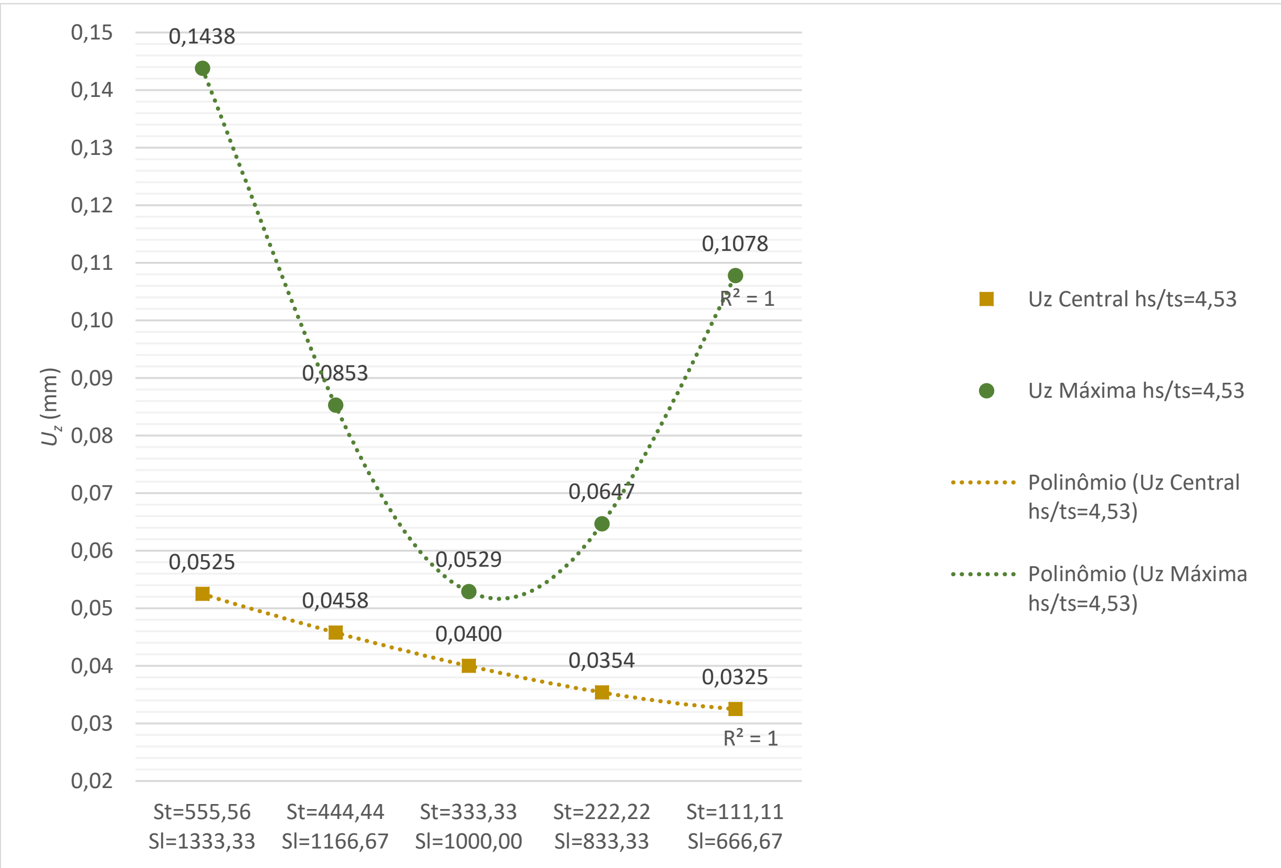


Figura 4.25: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,3) e h_s/t_s = 4,53.

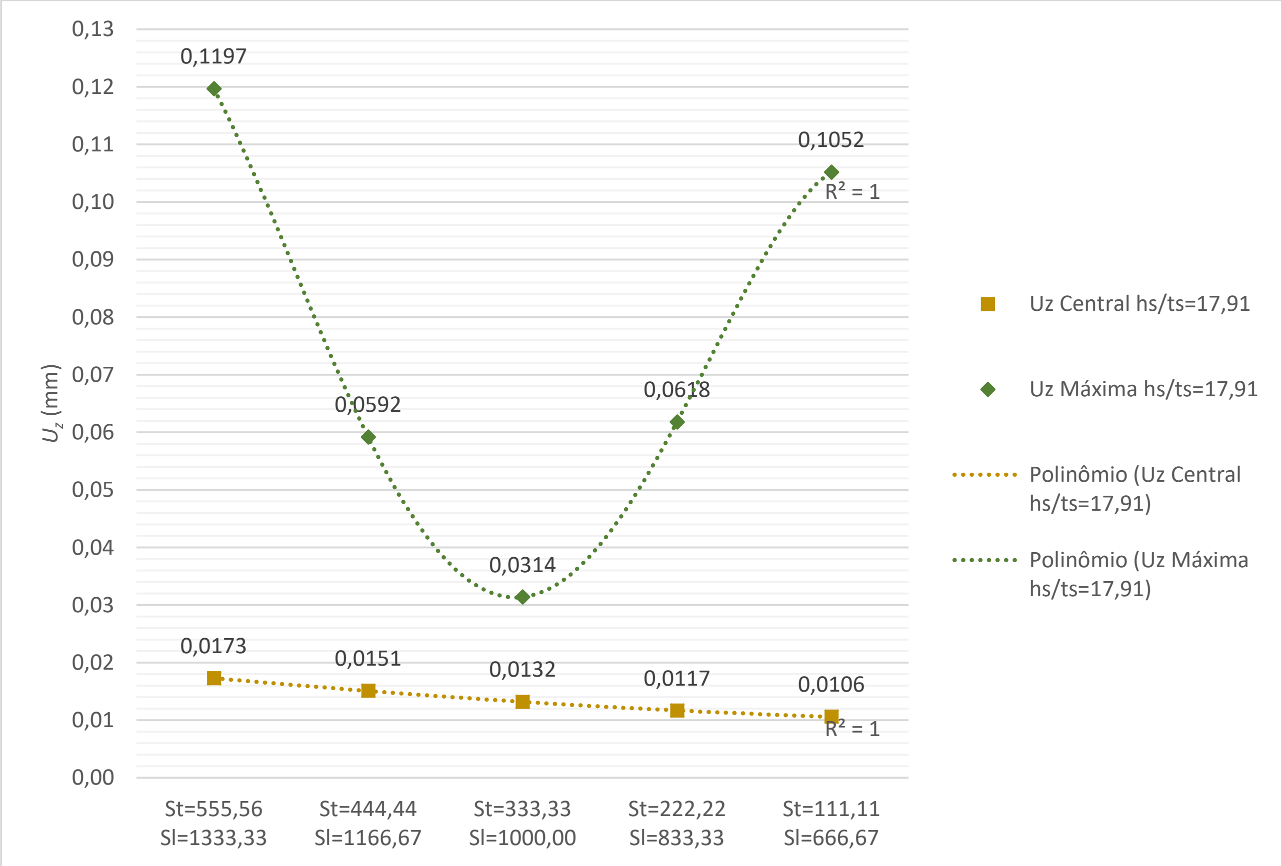


Figura 4.26: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(2,3) e h_s/t_s = 17,91.

4.3. Análise da placa enrijecida P(3,2)

Os resultados obtidos nas simulações das placas com enrijecedores na configuração P(3,2) e suas variações são apresentados idem aos demais, uma análise no ponto central da placa e no ponto de maior deflexão e também uma análise concomitante de ambas deflexões.

Realizado a análise dos resultados destas simulações considerando a deflexão no ponto central da placa, foram geradas curvas para cada situação de espaçamento entre enrijecedores, as quais estão apresentadas graficamente na Fig. 4.27.

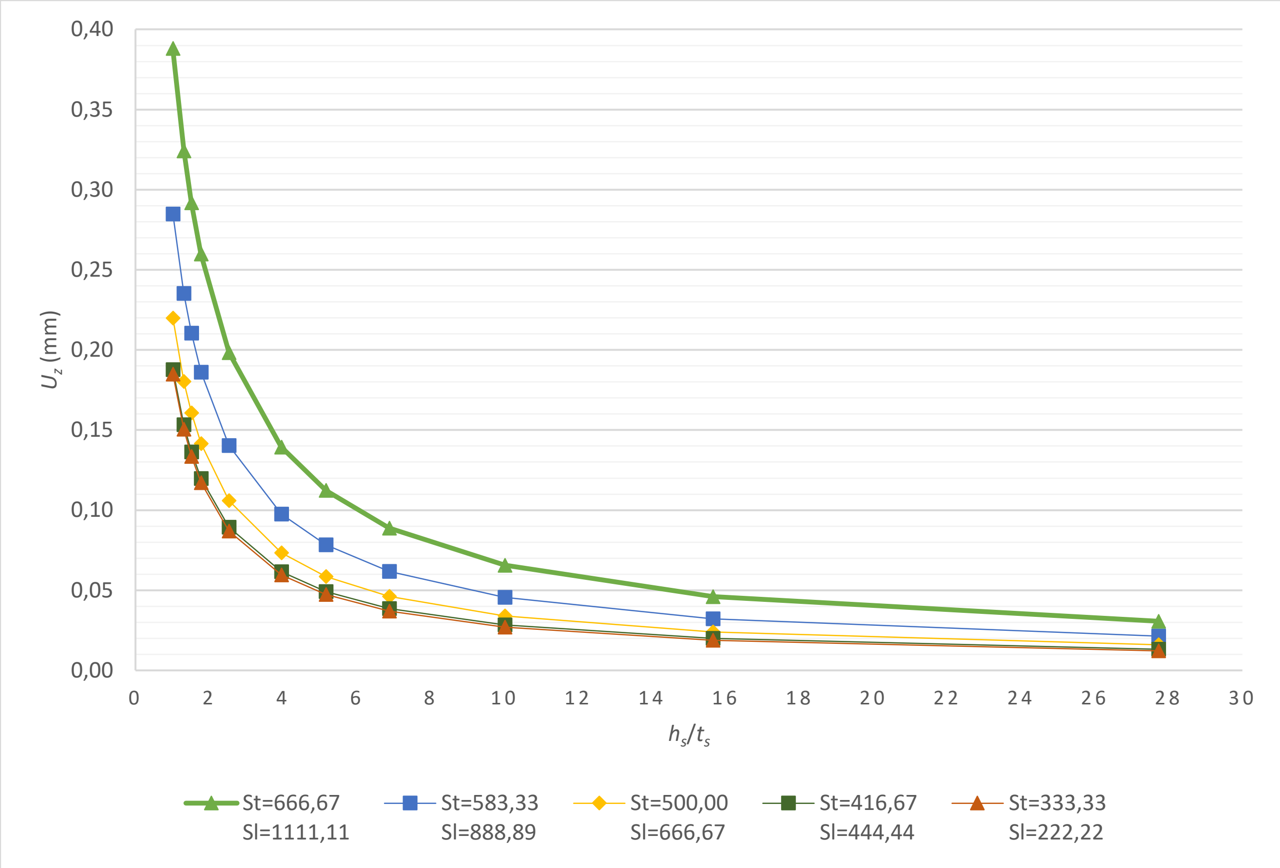


Figura 4.27: Resultados de deflexão central das placas enrijecidas P(3,2).

O gráfico da Fig. 4.27 referente à placa P(3,2) que contém um enrijecedor central agora no sentido longitudinal, também mostra os valores de deslocamento no centro das placas enrijecidas em relação às variações da posição S_l e S_t e da razão h_s/t_s. Idem às placas anteriores, pode-se observar com base na análise das curvas que diminuindo os valores de S_l e S_t e/ou utilizando um maior o valor de razão h_s/t_s do enrijecedor ocorre redução no deslocamento do ponto central da placa. O enrijecedor incrementado na longitudinal e no centro da placa apresenta características parecidas com o enrijecedor transversal da placa P(2,3), que é a tendência das curvas ficarem mais próximas. São apresentados os valores otimizados da placa P(3,2) por razão h_s/t_s nas Figs. A.23 até A.32 e conforme visto os mesmos ocorrem na menor posição S_l e S_t.

Por conseguinte, considerando concomitantemente as variações de espaçamento dos enrijecedores e a variação da razão h_s/t_s, permite indicar a melhor configuração geométrica de placa enrijecida para minimizar a deflexão central apresentando o menor espaçamento S_l e S_t e o maior valor da razão h_s/t_s. A Fig. 4.28 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(3,2) com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 222,22 mm, $(S_t)_o$ = 333,33 mm e razão $(h_s/t_s)_o$ = 27,72, que resultaram no valor de deslocamento central minimizado de $(U_z)_m$ = 0,012241 mm.

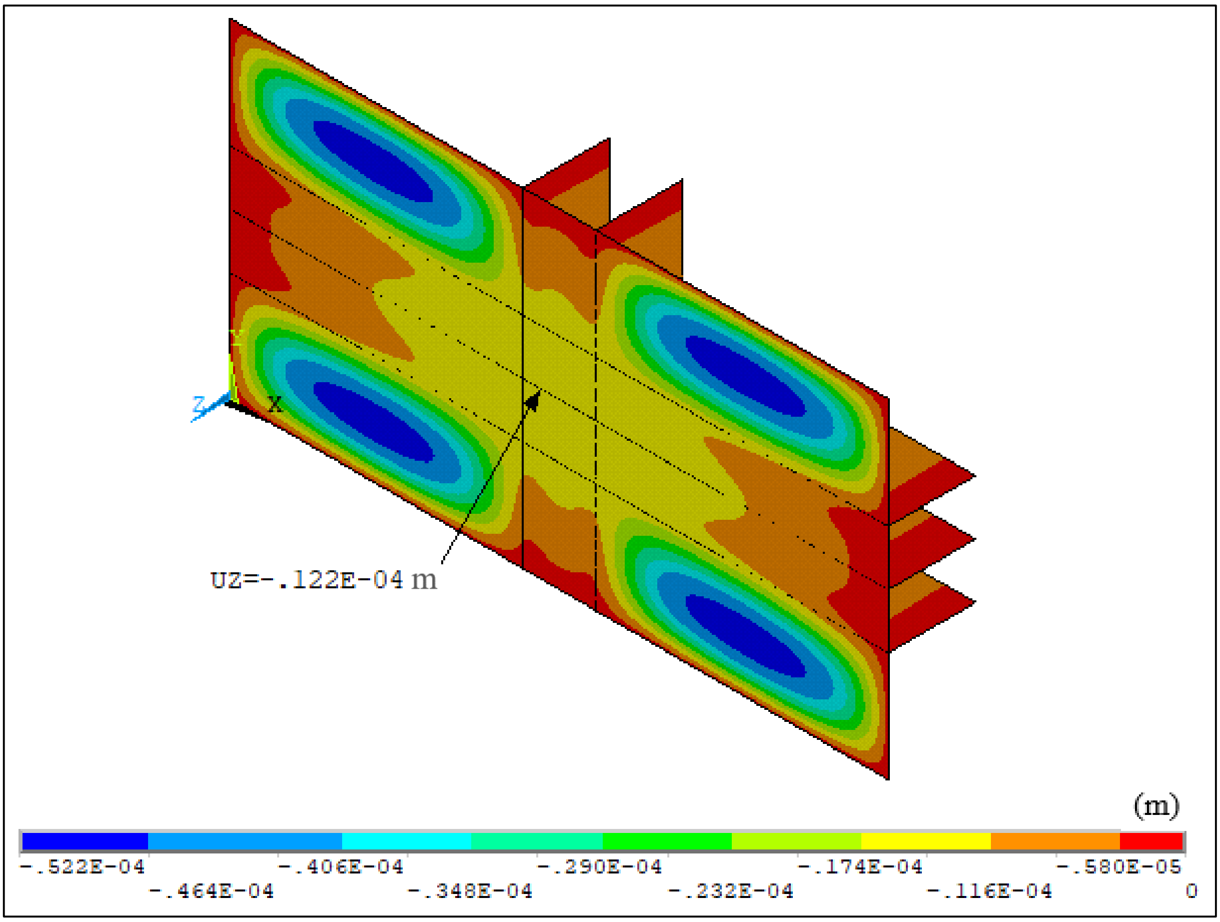


Figura 4.28: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 27,72, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

Já para avaliação da influência dos espaçamentos dos enrijecedores S_l e S_t e da razão h_s/t_s, no comportamento mecânico da placa enrijecida quanto à deflexão considerando esses pontos onde ocorrem os deslocamentos máximos nas placas os resultados das simulações são apresentados graficamente na Fig. 4.29.

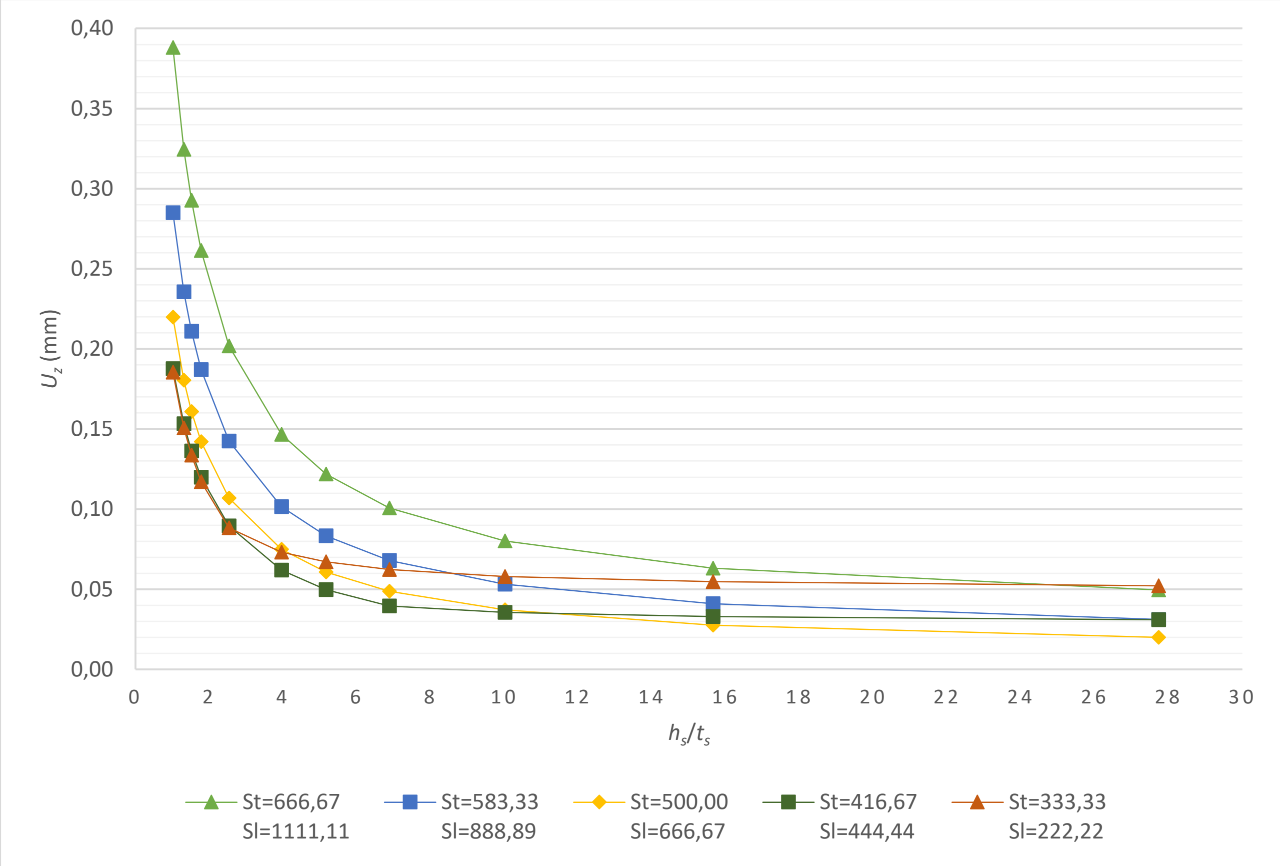


Figura 4.29: Resultados de deflexão máxima das placas enrijecidas P(3,2).

Avaliando individualmente a influência da razão h_s/t_s do enrijecedor, observa-se no gráfico da Fig. 4.29 que os casos com o maior valor desta relação geram resultados de deflexão máxima menores. Na comparação entre as curvas, considerando os diferentes espaçamentos entre enrijecedores, demonstra que para as razões h_s/t_s aproximadamente entre 1 e 10, os menores valores de deslocamento máximo ocorrem na condição de enrijecedores com espaçamentos diferentes, sendo em S_l = 222,22 mm e S_t = 333,33 mm para h_s/t_s variando entre 1 e 2 e S_l = 444,44 mm e S_t = 416,67 mm para h_s/t_s entre 2 e 10, e razões com h_s/t_s > 10, os menores valores ocorrem em placas que apresentam enrijecedores com espaçamentos iguais sendo S_l = 666,67 mm e S_t = 500,00 mm. Nas figuras B.22 até B.32 são mostrados os valores e as regiões de máximo deslocamento para cada placa otimizada considerando por razão h_s/t_s e conforme já visto os resultados ocorrem entre enrijecedores de espaçamentos diferentes ou iguais dependendo da razão h_s/t_s.

Para se obter o melhor resultado de otimização, deve ser levado em consideração ambos parâmetros, a maior razão h_s/t_s, que apresentou o menor valor de deslocamento máximo, juntamente com o espaçamento possível para este deslocamento máximo. A Fig. 4.30 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(3,2), com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 666,67 mm, $(S_t)_o$ = 500,00 mm e $(h_s/t_s)_o$ = 27,72, que resultaram no valor de deslocamento máximo minimizado de

$(U_z)_m$ = 0,019899 mm. Os resultados otimizados para esta placa também foram comparados com a placa de referência que como esperado apresentou uma menor deflexão.

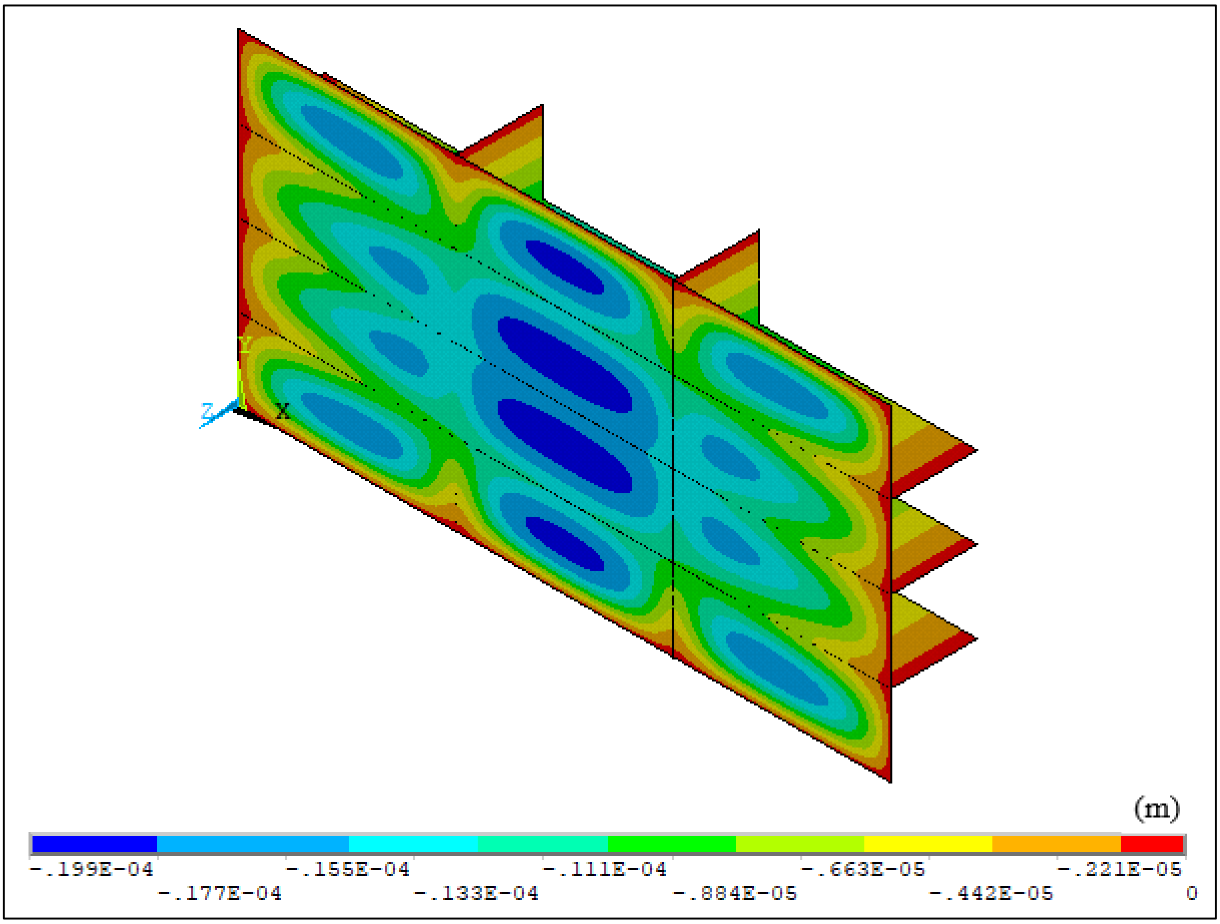


Figura 4.30: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 27,72, S_t = 666,67 mm e S_l = 500,00 mm

Na análise concomitante de ambas deflexões considerando os gráficos de deflexão central e máxima a partir de curvas geradas com a mesma razão h_s/t_s, variando as posições dos enrijecedores e adicionando um ajuste de curva de tendência polinomial (R^2 =1) para interligação dos pontos para as razões selecionadas h_s/t_s = 1,06 (Fig. 4.31), h_s/t_s = 3,37 (Fig. 4.32), h_s/t_s = 5,26 (Fig. 4.33) e h_s/t_s = 20,84 (Fig. 4.34), o critério de otimização foi novamente o ponto da curva que apresentou concomitantemente o menor valor para o deslocamento máximo e deslocamento central da placa relacionados a uma razão h_s/t_s. Como nas demais placas já vistas, as geometrias ótimas tendem a ser aquelas cujos enrijecedores estão dispostos com espaçamentos iguais em relação aos bordos da placa, entretanto nesta configuração P(3,2) para razões h_s/t_s entre 1 e 10 aproximadamente, as configurações otimizadas ocorrem nos enrijecedores com espaçamentos diferentes como pode ser visto nos gráficos das Figs. 4.31, 4.32 e 4.33. Também pode ser visto nos gráficos abaixo, que as curvas plotadas para as deflexões máxima e ponto central para os casos com razões h_s/t_s de valores menores se sobrepõem, tendo seus valores iguais ou muito próximos, e à medida que essa razão h_s/t_s

aumenta essas curvas vão mudando até não ocorrer nenhuma coincidência entre os valores das deflexões máxima e ponto central.

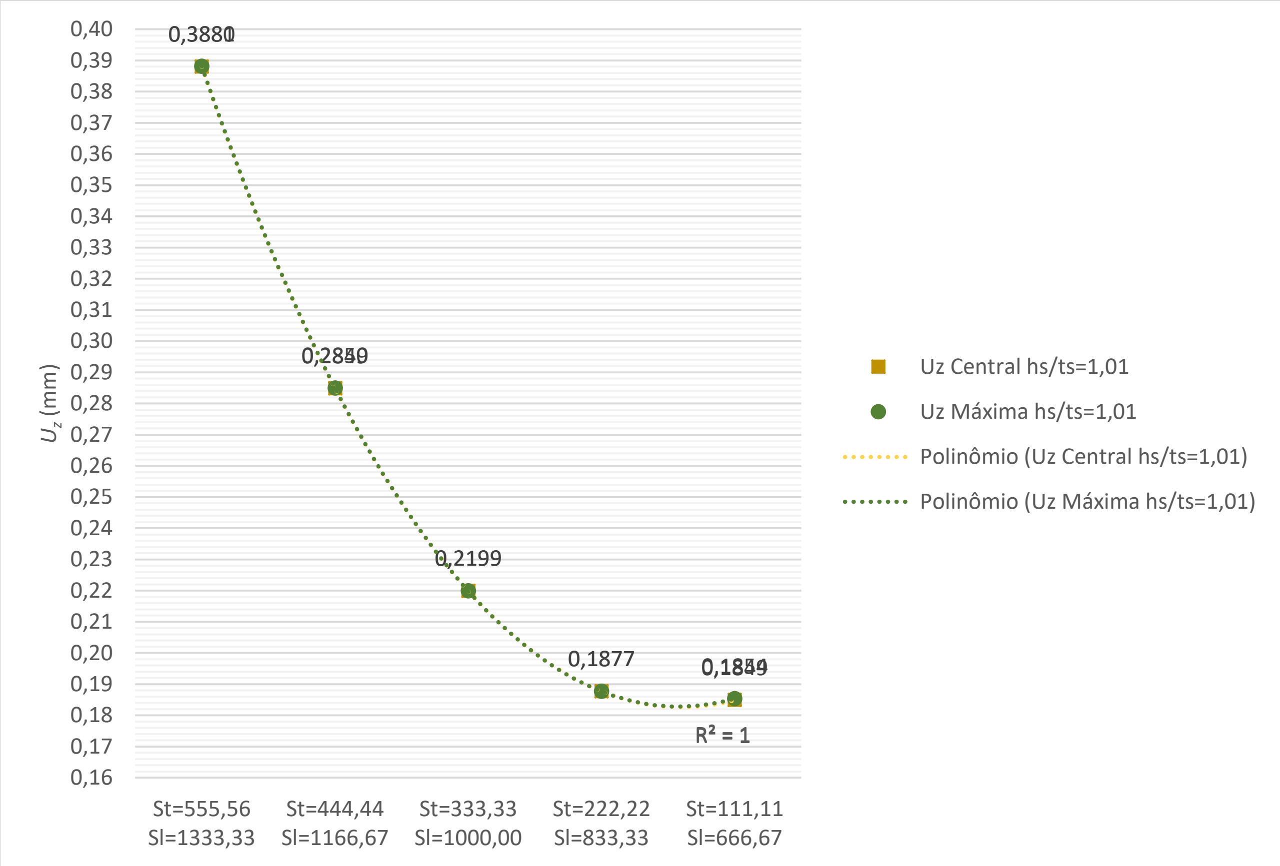


Figura 4.31: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,2) e h_s/t_s = 1,01.

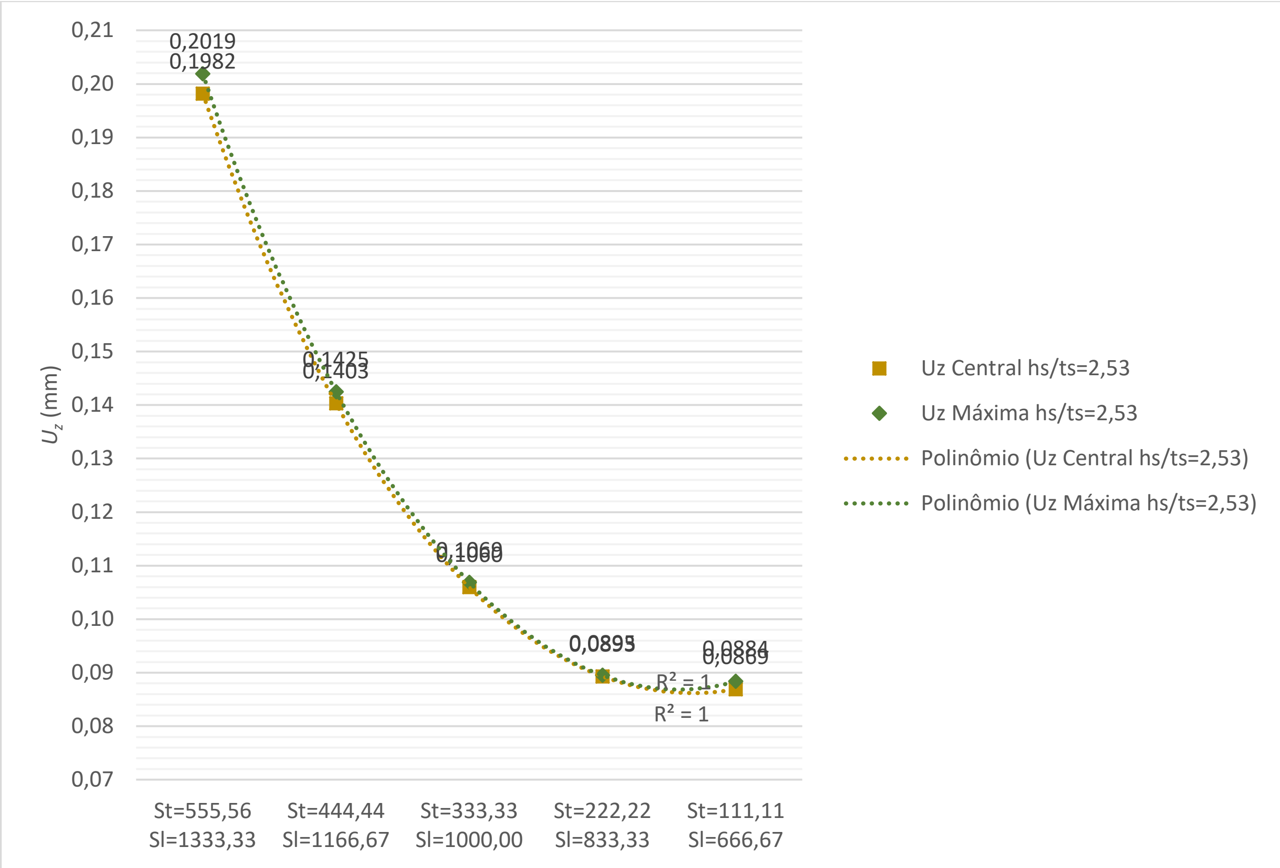


Figura 4.32: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,2) e h_s/t_s = 2,53.

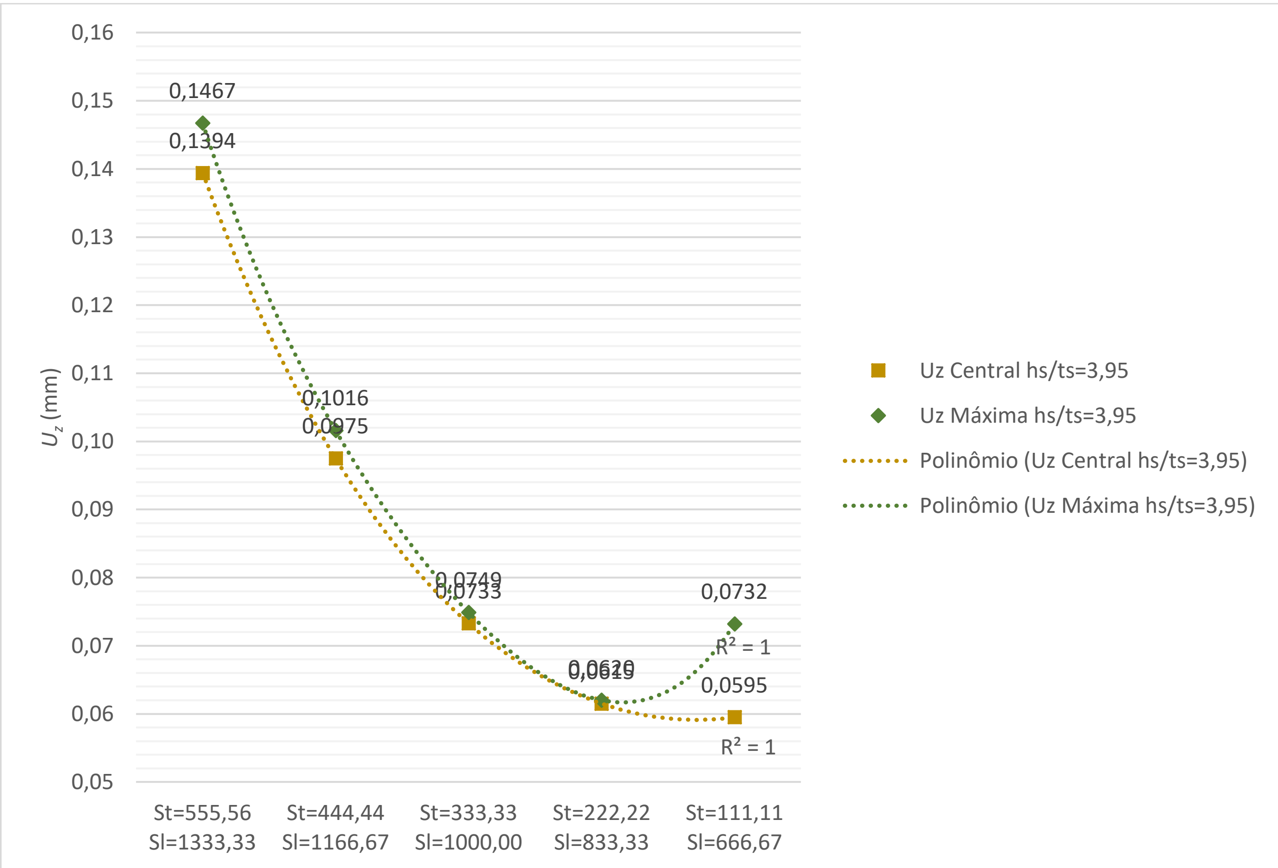


Figura 4.33: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,2) e h_s/t_s = 3,95.

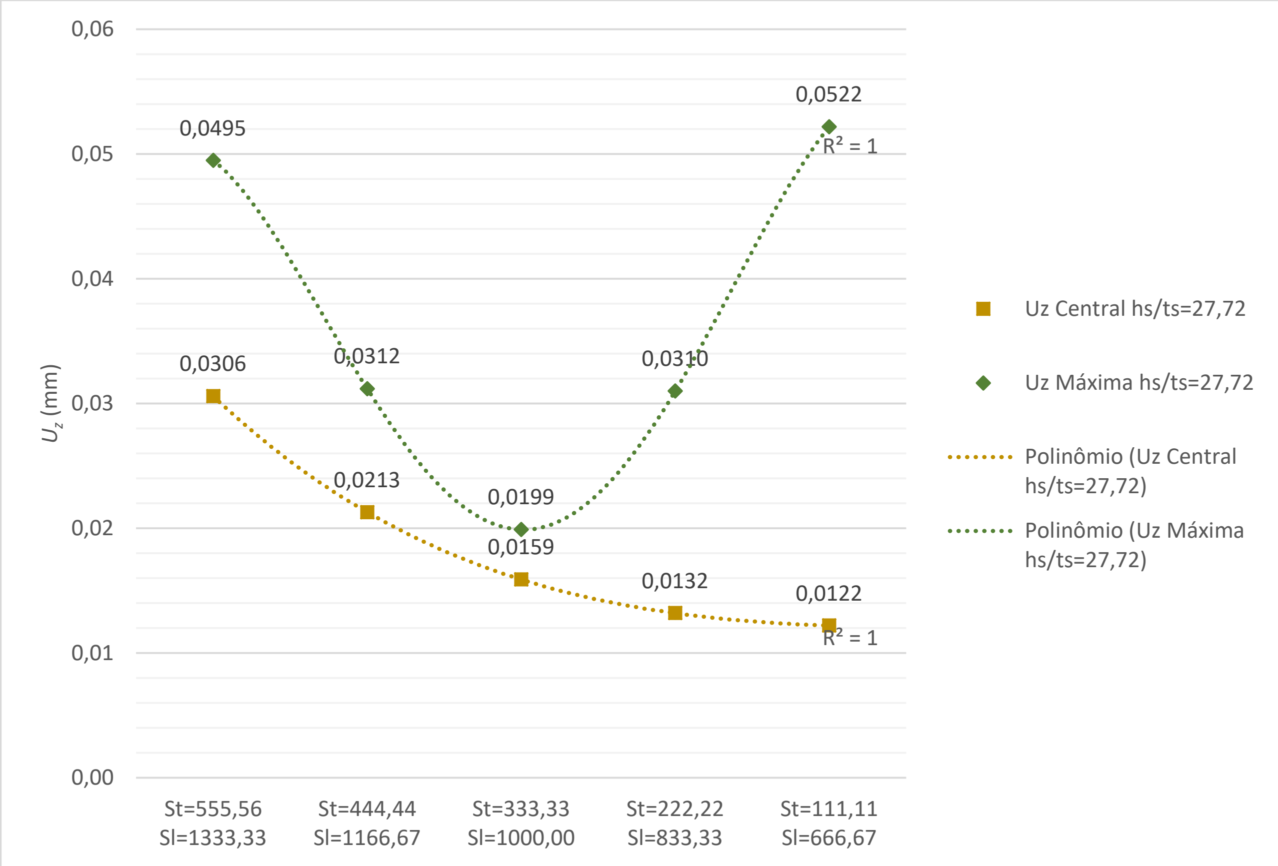


Figura 4.34: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,2) e h_s/t_s = 27,72.

4.4. Análise da placa enrijecida P(3,3)

Os resultados obtidos nas simulações das placas com enrijecedores na configuração P(3,3) que possui como principal diferença dois enrijecedores centrais, sendo um no sentido transversal e outro no sentido longitudinal e suas variações são apresentados idem aos demais, uma análise no ponto central da placa e no ponto de maior deflexão e também uma análise concomitante de ambas deflexões.

Realizada a análise dos resultados destas simulações considerando a deflexão no ponto central da placa, foram geradas curvas para cada situação de espaçamento entre enrijecedores, as quais estão apresentadas graficamente na Fig. 4.35.

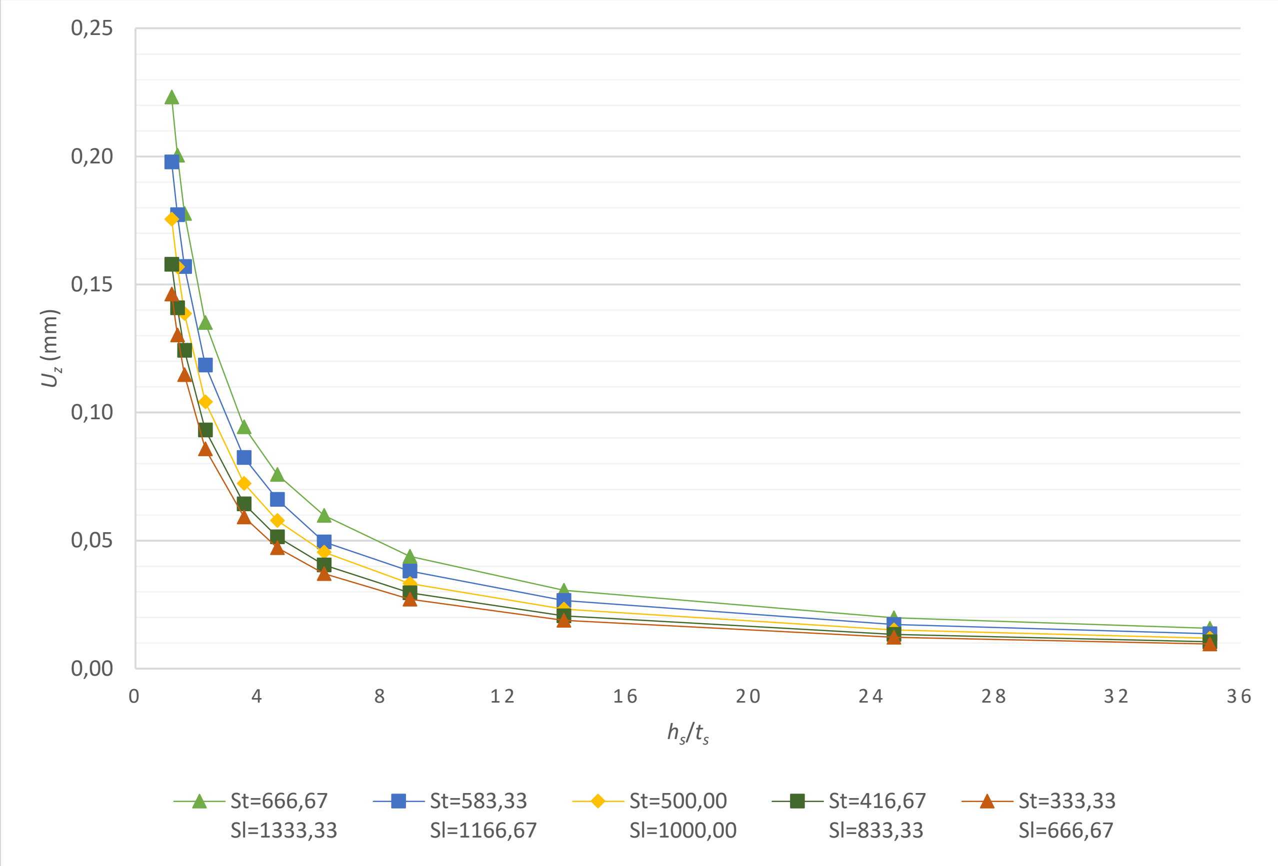


Figura 4.35: Resultados de deflexão central das placas enrijecidas P(3,3).

O gráfico da Fig. 4.35 referente as configurações de placa P(3,3) que possuem enrijecedores centrais, tanto na transversal quanto na longitudinal, mostra o valor de deslocamento no centro da placa enrijecida para as variações da posição S_l e S_t e da razão h_s/t_s. Através da análise das curvas, de modo idêntico aos anteriores, pode-se observar que diminuindo os valores de S_l e S_t e/ou aumentando o valor do parâmetro h_s/t_s, ambos produzem o efeito de redução do deslocamento no ponto central da placa, porém a diferença da placa P(3,3) com relação as demais foi a evidencia da relevância no parâmetro h_s/t_s com relação a variação da posição S_l e S_t gerando uma influência maior no resultado, conforme descritas nas curvas mais próximas. Nas figuras A.33 até A.43 são mostrados os valores otimizados por razão h_s/t_s e que ocorrem na menor posição S_l e S_t.

Agora avaliando concomitantemente as variações S_l, S_t e h_s/t_s, que possibilita a indicação da melhor configuração geométrica para placa enrijecida com a deflexão central minimizada que se encontra no menor espaçamento S_l e S_t e no maior valor da razão h_s/t_s. A Fig. 4.36 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(3,3) com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 666,67 mm, $(S_t)_o$ = 333,33 mm e razão $(h_s/t_s)_o$ = 35,00, que resultaram no valor de deslocamento central minimizado de $(U_z)_m$ = 0,009557 mm.

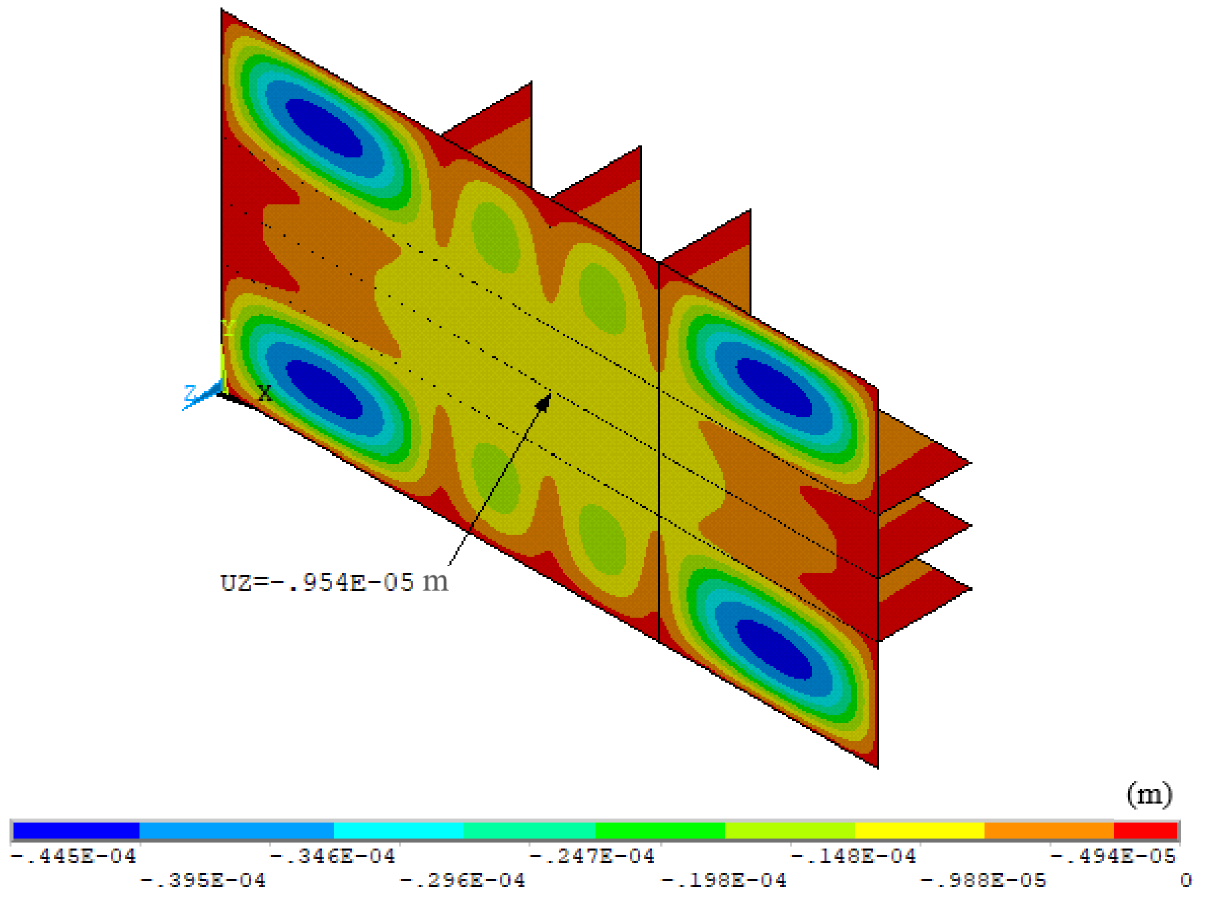


Figura 4.36: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 35,00, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

Em outra análise foi avaliado o deslocamento máximo da placa enrijecida, através da influência dos espaçamentos dos enrijecedores e da razão h_s/t_s, relembrando que este deslocamento pode ocorrer em qualquer ponto da estrutura. No gráfico da Fig. 4.37 são apresentados os resultados das simulações considerando os pontos que apresentam os deslocamentos máximos nas placas.

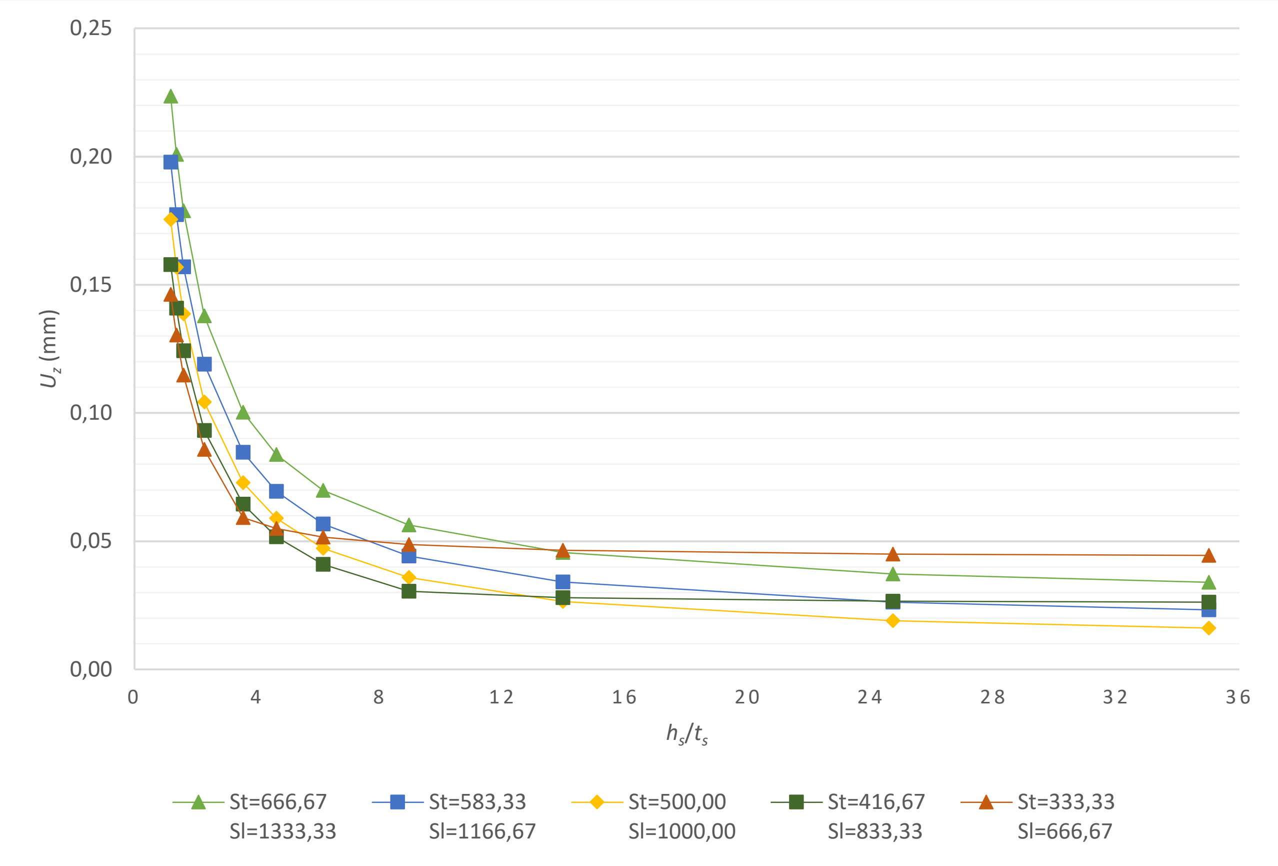


Figura 4.37: Resultados de deflexão máxima das placas enrijecidas P(3,3).

Uma análise individual sobre a influência da razão h_s/t_s do enrijecedor, mostra no gráfico da Fig. 4.37 o menor resultado para deflexão máxima acontecendo no maior valor desta razão. Quando a comparação se dá entre as curvas que representam os diferentes espaçamentos entre enrijecedores, evidencia que para as razões h_s/t_s, aproximadamente entre 1 e 12, os menores valores de deslocamento máximo ocorrem para as placas que apresentam espaçamentos diferentes, no caso para razões h_s/t_s com variação de 1 até 4 temos S_l = 666,67 mm e S_t = 333,33 mm e para variação entre 4 e 12 temos S_l = 833,33 mm e S_t = 416,67 mm, enquanto que, para as razões acima de h_s/t_s = 12, os menores valores de deslocamento máximo ocorrem para as placas que apresentam enrijecedores com espaçamentos iguais sendo S_l = 1000,00 mm e S_t = 500,00 mm. São mostrados nas Figs. B.33 até B.43 como nas configurações de placas anteriores os valores e as regiões de máximo deslocamento para cada placa otimizada.

Na análise de ambos os parâmetros de espaçamento e razão para se obter um melhor resultado de otimização, será levado em consideração a maior razão h_s/t_s, que apresentou o menor valor de deslocamento máximo, juntamente com o espaçamento possível para este deslocamento máximo. A Fig. 4.38 apresenta a distribuição de deflexões da placa enrijecida P(3,3), com os parâmetros otimizados $(S_l)_o$ = 1000,00 mm, $(S_t)_o$ = 500,00 mm e $(h_s/t_s)_o$ = 35,00, que resultaram no valor de deslocamento máximo minimizado de $(U_z)_m$ = 0,016102 mm. Pode se afirmar que a configuração P(3,3) também apresentou uma deflexão menor comparada com a placa de referência.

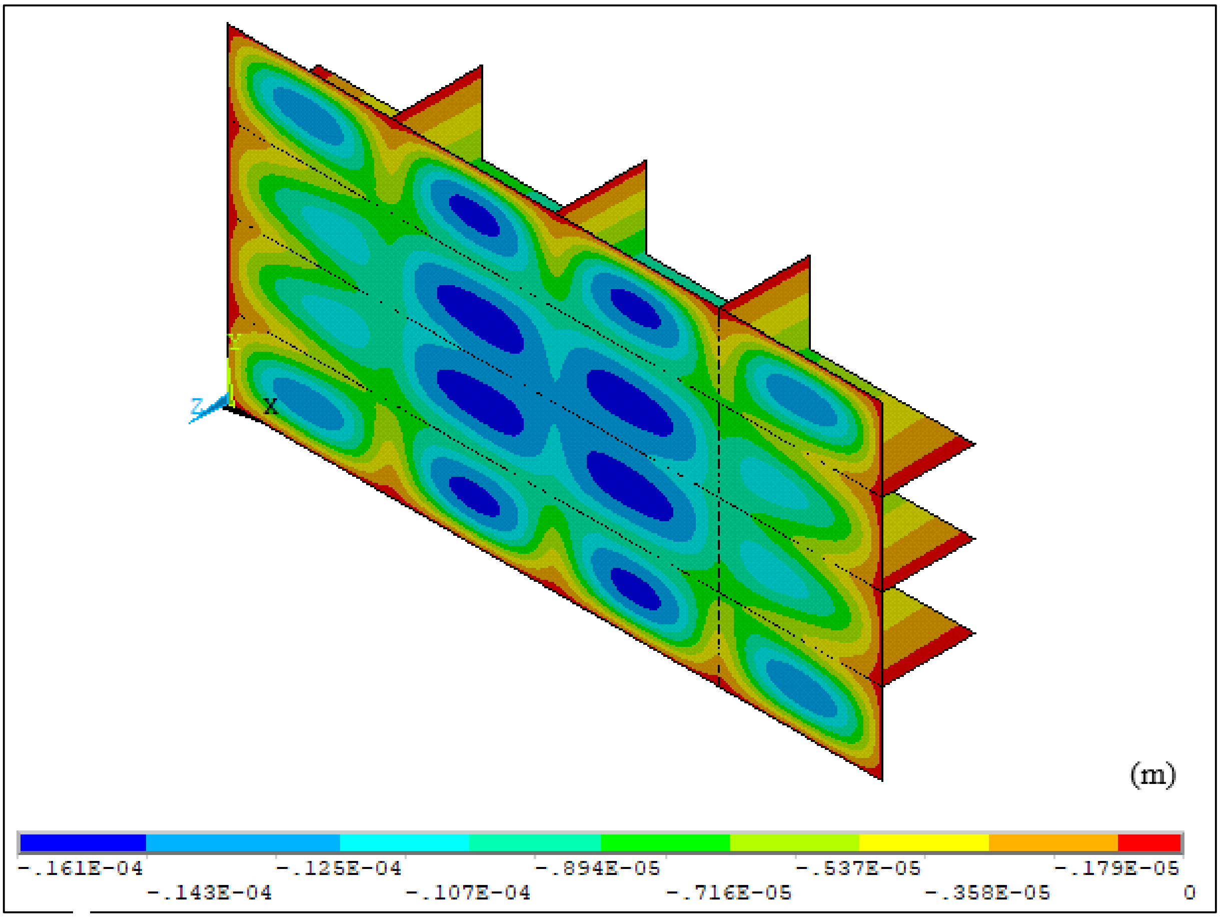


Figura 4.38: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, $h_s/t_s = 35{,}00$, S_t = 500,00 mm e S_l = 1000,00 mm

Para as configurações da placa P(3,3) também foi procedida com a análise concomitante de ambas deflexões conforme análises realizadas nas placas anteriores levando em consideração a deflexão central e máxima a partir de curvas com a mesma razão h_s/t_s, e as razões selecionadas para análise são h_s/t_s = 1,17 (Fig. 4.39), h_s/t_s = 3,53 (Fig. 4.40), h_s/t_s = 4,61 (Fig. 4.41) e h_s/t_s = 35,00 (Fig. 4.42), o critério de otimização foi o mesmo, avaliando o ponto da curva que apresentou concomitantemente o menor valor para os deslocamento máximo e central da placa estando ambos relacionados a uma mesma razão h_s/t_s. Continua a constatação quanto as geometrias ótimas que tendem a ser aquelas cujos enrijecedores apresentam os espaçamentos iguais, contendo exceção idem aos resultados anteriores, neste caso para as razões h_s/t_s de valores entre 1 e 12, que apresentam sua geometria ótima nas configurações de espaçamentos diferentes, como pode ser visto nos gráficos das Figs. 4.39, 4.40 e 4.41. Os gráficos apresentados abaixo apresentam características das placas anteriores, as que apresentam a razões h_s/t_s menores prevalecem as características da placa P(3,2) referente as curva sobrepostas, já as que apresentam as razões h_s/t_s maiores prevalecem as características da placa P(2,3) salientando uma curva para a deflexão central com tendência a linearidade.

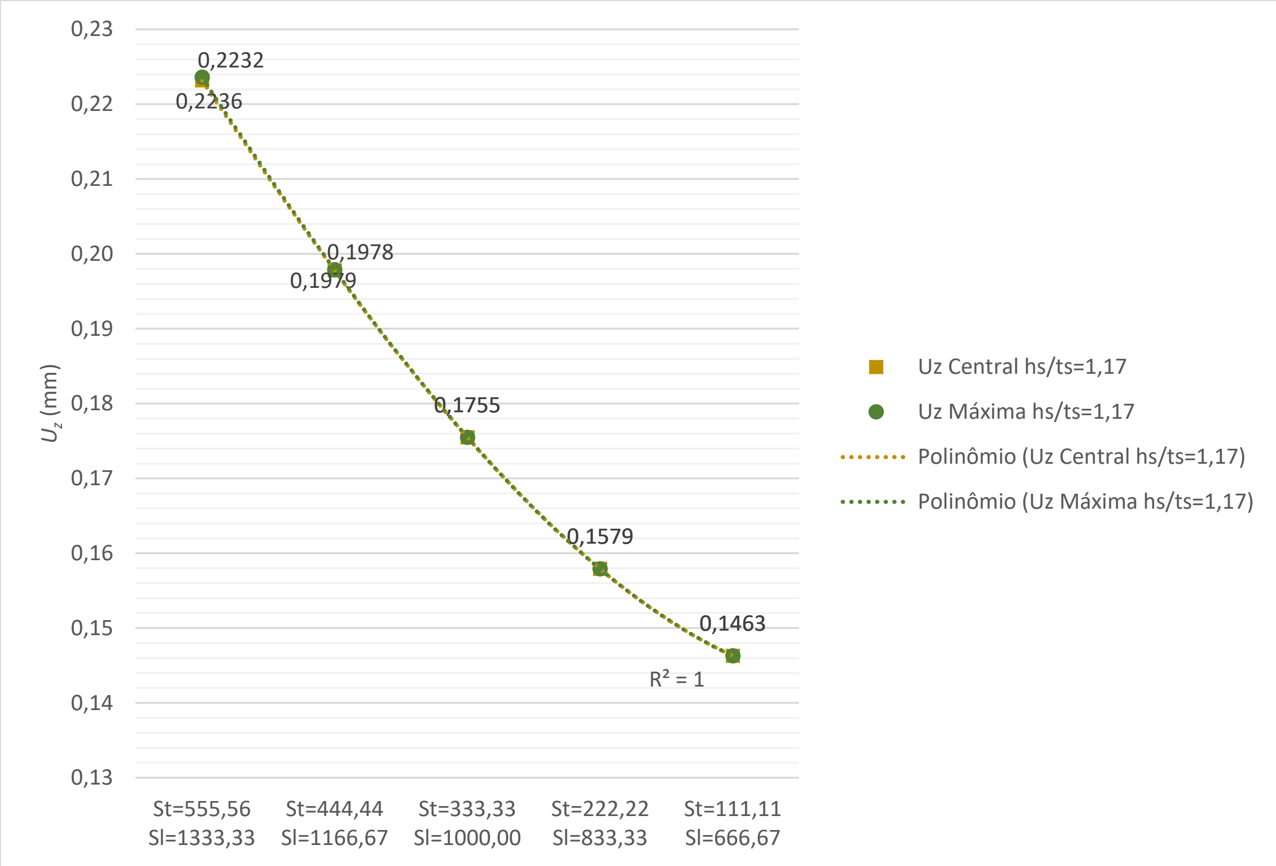


Figura 4.39: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,3) e h_s/t_s = 1,17.

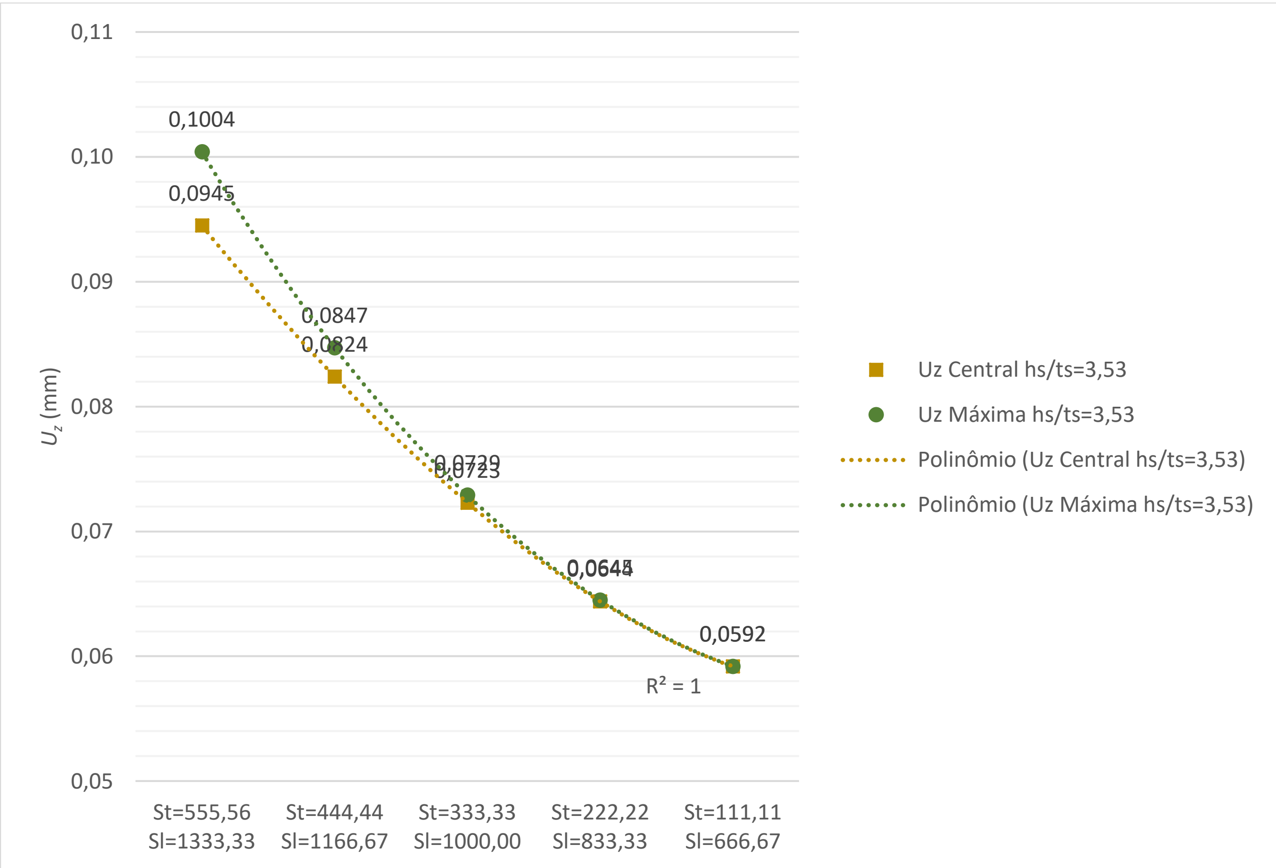


Figura 4.40: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,3) e h_s/t_s = 3,53.

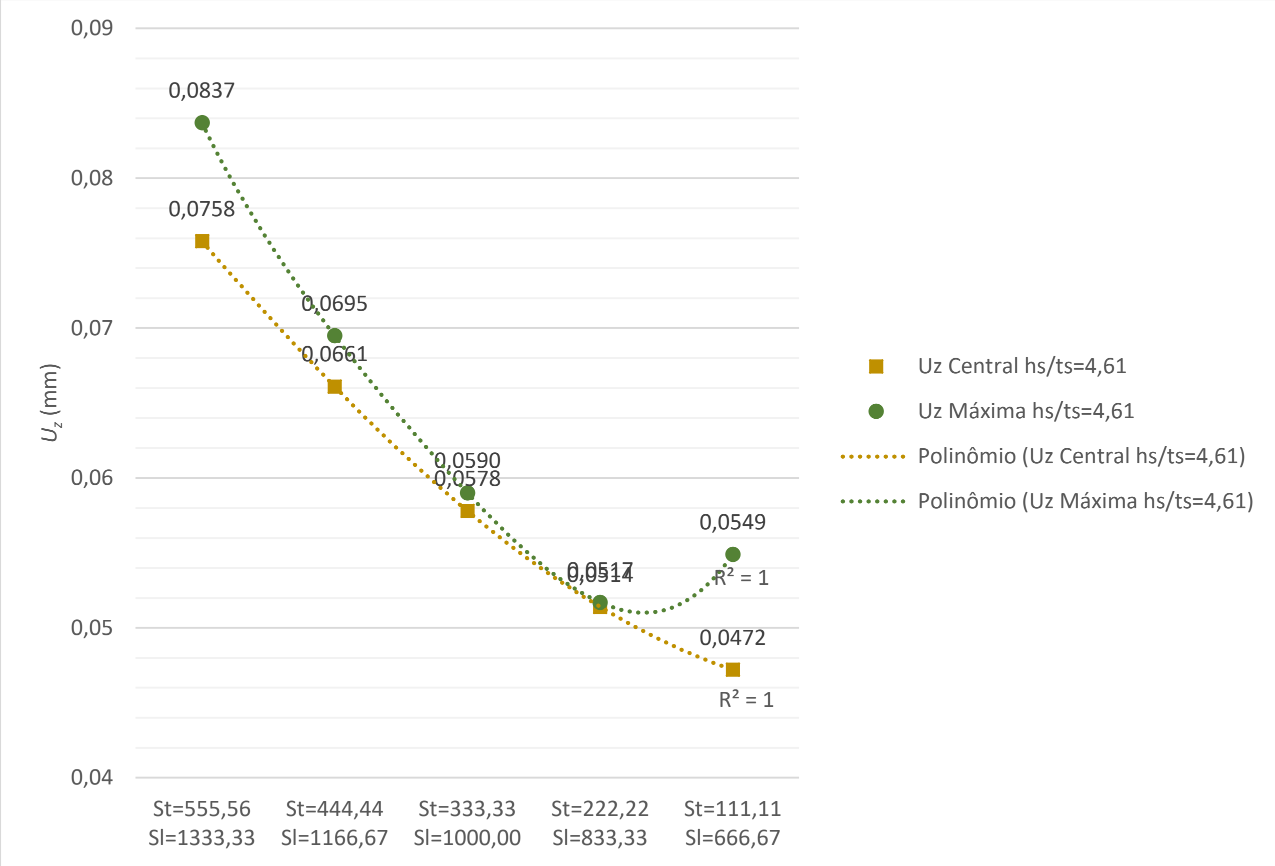


Figura 4.41: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,3) e h_s/t_s = 4,61.

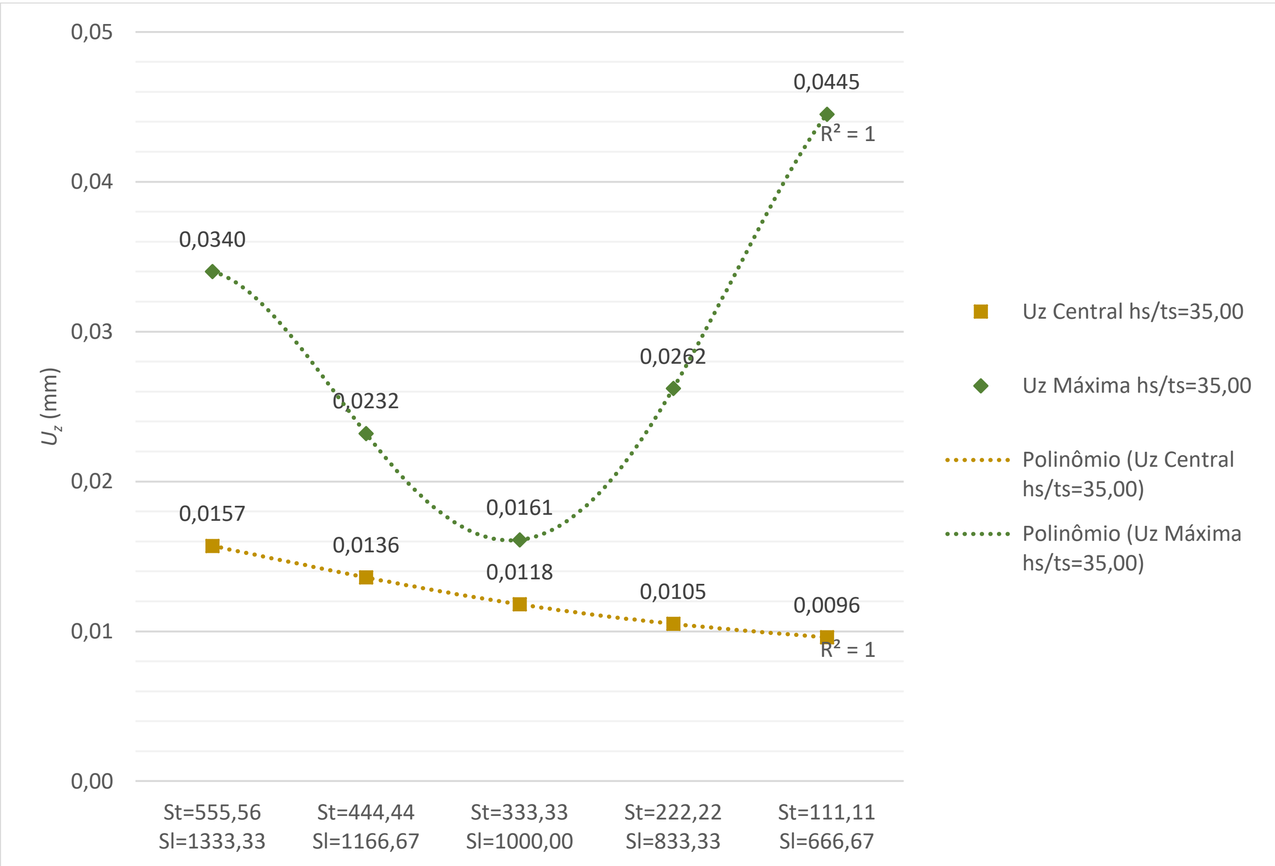


Figura 4.42: Resultados de U_z central e U_z máximo para placa enrijecida P(3,3) e h_s/t_s = 35,00.

5. CONCLUSÕES

Nesta pesquisa o comportamento mecânico da deflexão das placas enrijecidas e submetidas a um carregamento transversal foram numericamente estudados. Para isso, utilizou-se o MEF, via software ANSYS® e o MDC para definir as funções objetivos, as restrições e os graus de liberdade. A técnica de Busca Exaustiva foi usada, comparando as deflexões de todas as configurações geométricas propostas pelo MDC. A partir disso, os resultados indicaram as configurações otimizadas no comportamento mecânico de placas sob flexão, quando variado o espaçamento entre os enrijecedores (S_l e S_t) e também sua razão h_s/t_s.

Diante dos resultados obtidos nas simulações numéricas, possibilitando estruturar esta conclusão, que leva em consideração as configurações de placa P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3) com suas diferentes configurações de enrijecedores alterando a sua posição definida pelas distâncias S_l e S_t e sua geometria pela razão h_s/t_s, sendo estas definidas conforme metodologia.

Então, através da mudança de posição dos enrijecedores, saindo do regime de espaçamentos iguais, observou-se que para deslocamentos no centro da placa, os valores de S_l e S_t são diretamente proporcionais ao valor do deslocamento, apresentando melhores resultados para menores valores de S_l e S_t, tendendo a um resultado de limite mínimo de deslocamento no ponto central da placa. Quando avaliado a geometria dos enrijecedores, com relação ao deslocamento central da placa, é possível observar que o valor da razão h_s/t_s do enrijecedor é inversamente proporcional ao deslocamento, apresentando melhores resultados para maiores valores da razão h_s/t_s, tendendo a um resultado com limite mínimo de deslocamento no ponto central. Sendo assim, a configuração ótima para o deslocamento central da placa enrijecida ocorreu na placa P(3,3) que apresentou concomitantemente os menores espaçamentos S_l = 666,67 mm e S_t = 333,33 mm e a maior razão h_s/t_s = 35,00.

Ainda relacionado aos resultados de deslocamento no ponto central da placa e diante dos gráficos já apresentados, é possível concluir que ocorre uma proximidade dos pontos de deslocamentos entre as curvas representadas pelo espaçamento (S_l e S_t), quando há o acréscimo de um enrijecedor central que pode ser no sentido longitudinal, transversal ou em ambos. A proximidade das curvas, principalmente nos pontos de maior razão, representa uma menor variação dos valores de deslocamento considerando uma mesma razão e alternando entre os valores de espaçamento e que devem ser comparadas por grupo de placas com a mesma quantidade de enrijecedores. Comparando as placas com configurações P(2,3) e P(3,2), tratando-se de uma placa retangular, fica evidenciado que os menores delta dos pontos das curvas estão apresentados na placa que foi acrescido o enrijecedor central na posição transversal.

No entanto, para o deslocamento máximo que pode ocorrer em qualquer ponto da placa, essa regra não é a mesma, pois depende principalmente do valor da razão h_s/t_s, os valores mínimos de deslocamento máximo podem ser encontrados na posição dos enrijecedores tanto com espaçamentos iguais S_l e S_t, quanto com espaçamentos diferentes. Como resultado, os maiores valores da razão h_s/t_s apresentam os menores deslocamentos máximos que ocorrem com enrijecedores dispostos na posição de espaçamentos iguais, já para os menores valores da razão h_s/t_s, os menores deslocamentos máximos foram encontrados nos enrijecedores dispostos em posição de espaçamentos diferentes sendo nos menores valores de S_l e S_t. A configuração ótima para o deslocamento máximo da placa enrijecida ocorreu na placa P(3,3) na maior razão determinada para a pesquisa h_s/t_s = 35,00 e posição dos enrijecedores com espaçamentos iguais, sendo S_l = 1000,00 mm e S_t = 500,00 mm, sendo esta também a configuração ótima da análise concomitante de ambas deflexões (ponto central da placa e máxima).

O efeito de proximidade nos pontos de deslocamentos entre as curvas representadas pelo espaçamento (S_l e S_t), também aparece nos gráficos dos resultados de menor valor para os deslocamentos máximos, como o volume de material é sempre o mesmo, as respostas gráficas mostraram claramente a importância de realizar uma avaliação geométrica. Principalmente em projetos que apresentem limitações na altura dos enrijecedores, pois é um parâmetro influenciável na decisão da posição dos enrijecedores.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a realização das seguintes pesquisas:

- Avaliação de outras configurações de placas, ampliando as combinações de enrijecedores na placa, valores de N_{ls} e N_{ts} superiores a 3 para P (N_{ls}, N_{ts});
- Estudo da influência quando modificada as frações volumétricas, sendo diferentes de ϕ = 0,5, aumentando ou diminuindo o volume utilizado para os enrijecedores;
- Variar o tipo de carregamento e também as condições de contorno.
- Analise das tensões nas placas enrijecidas para otimização das mesmas quanto ao critério de resistência.

6. REFERÊNCIAS

AMARAL, R.R.; TROINA, G. da S.; CUNHA, M. L.; ROCHA, L.A.O.; dos SANTOS, E.D.; ISOLDI, L.A. Verificação de modelo computacional para placas com enrijecedores considerando condição de contorno de simetria. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia - RIPE**, v. 5 n. 1, p. 76-84, 2019

ANSYS. **User's Manual: Analysis Systems**, ANSYS Inc. 2009.

ANSYS MECHANICAL APDL. **Version 15.0 - User's Guide**, ANSYS Inc. 2015.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. Ed. Unicamp. 2003.

BEDAIR, O. K. Analysis of stiffened plates under lateral loading using sequential quadratic programming (SQP), **Computers & Structures** v. 62, n. 1, pp. 63-80, 1997.

BEJAN, A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 40, p. 799–816, 1997.

BEJAN, A. **Shape and structure, from engineering to nature**. Cambridge University Press, 2000.

BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory**. Wiley, Hoboken, 2008.

BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in Nature: How The Constructal Law Govern Evolution in Biology Phisics, Techinology, and Social Organization**. Vol 3. New York: Doubleday, 2012.

BLAUWENDRAAD, J. **Plates and FEM – Surprises and Pitfalls**. Springer, New York, 2010.

CANATO, D. A., 2007. **Utilização de Conceitos de Integração de Sistemas Direcionados a Domótica - Estudo de Caso para Automação Residencial. Campinas**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; E PLESHA, M. E**. Concepts and Applications of Finite Element**. 3 Ed, John Wiley & Sons, 1989.

DA SILVA, L. C., 2006. **Verificação, Validação e Experimentação com Modelos de Simulação. Departamento de Engenharia Rural**. Universidade Federal do Espírito Santo.

DEVLOO, P. R. B. **Simulação Numérica**. Revista Multiciência, 2005.

HEBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. Pearson Education, 7 Ed, 2009.

HOSSEINI, S. H.; SOLTANI B. Analysis of Rectangular Stiffened Plates Based on FSDT and Meshless Collocation Method. **Journal of Solid Mechanics**, v. 9, n. 3, p. 568-586, 2017.

LEVY, M. Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangul. **Comptes Rendus Acad. Sci. Paris**, v. 129, p. 535–539, 1899.

LIMA, J. P., 2016. **Análise numérica da flambagem de placas finas de aço com enrijecedores através do método design construtal**. Rio Grande. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

KHOURY, R.; HARDER, D.W. **Numerical Methods and Modelling for Engineering**. Springer International Publishing, 2016.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. Springer, 2006.

MARINHO, I. J. P., 2002. **Projeto ótimo de estruturas metálicas de arquibancadas reutilizáveis via ANSYS**. Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Civil, Pontíficia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

MENDONÇA, P. de T. R. **Materiais Compostos & Estruturas-Sanduíche**. Manole., 2005.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 18 p. 31–38, 1951

OKUMOTO, Y et al. **Design of Ship Hull Structures – A Practical Guide for Engineers**, 2 Ed. Japão: Springer, 2009.

OTA, N. S. N., 2016. **O elemento finito T6-3i na análise de placas e dinâmica de cascas**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, São Paulo.

RAMOS, A. P.; REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. Estudo Numérico Aplicado à Melhoria do Comportamento Mecânico de Placas Finas de Aço com Enrijecedores Submetidas à Flexão. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v. 3, n. 3, 2018.

REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes. **in Southern Conference on Computational Modeling**, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, p. 69-73, 2010.

REIS, A. H.; GAMA, C. Sand size versus beachface slope – an explanation based on the Constructal Law. **Geomorphology**. v. 114, p. 276-283, 2010.

REISSNER, E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. **Journal of Applied Mechanics**, v. 3, p. 69-77, 1945.

ROSSOW, M. P. e IBRAHIMKHAIL, A. K. Constraint Method Analysis of Stiffened Plates. **Computers & Structures**, v. 8, p. 51- 60, 1978.

SALOMON, A., 2000. **An Evaluation of Finite Element Models of Stiffened Plates**. Degree of Master of Science in Naval Architecture and Marine Engineering, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

SAPOUNTZAKIS, E. J. e KATSIKADELIS, J. T. Analysis of Plates Reinforced with Beams. **Computational Mechanics**, v. 26, p 66-74, 2000.

SEGERLIND, L. J. **Applied Finite Element Analysis**. John Wiley & Sons, NewYork, 1984.

SILVA.H.B.S., 2010. **Análise Numérica da Influência da Excentricidade na Ligação Placa Viga em Pavimentos Usuais de Edifícios**. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo – USP, São Paulo.

SILVA, P. C.; RAMOS, A. P.; LIMA, J. P. S.; PORTELA JR, M. C. B.; ROCHA, L. A.; Dos SANTOS, E. D.; REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. Simulação Numérica e Constructal Design Aplicados à Melhoria do Comportamento Mecânico de Placas Finas de Aço com Enrijecedores Submetidas à Flexão; **CILAMCE**. 2015.

SINGH, A.; 2013. Analysis of Stiffened Rectangular Plate. Master of Technology in Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering National Institute of Technology, India.

SINGH, D. K.; DUGGAL, S. K.; PAL, P. Analysis of Stiffened Plates using FEM – A Parametric Study, **International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)**, v. 2 n. 4, 2015

SZILARD, R. **Theories and application of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**. Wiley, 2004.

SORIANO, H. L. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Edusp. 2003.

TANAKA, M.; BERCIN, A. N. Static bending analysis of stiffened plates using the boundary element method. **Transactions on Modelling and Simulation**. v. 18, p. 203-212, 1997.

TANEMBAUM, A. **Sistemas Operacionais Modernos**. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 2001.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**, 2. Ed., Taylor & Francis, Estados Unidos, 1997.

TEIXEIRA, G. DE M.; KESSLER, M. P.; MALISKA, C. R. **Fontes de Erro: Identificar, Quantificar e Reduzir a Intervalos Aceitáveis**. Artigo técnico, 2009. Disponível em: http://www.esss.com.br/blog/wp-content/uploads/2009/09/ESSS_Artigo_Tecnico_21.pdf. Acessado em 10/07/2019.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw Hill, 1959.

TROINA, G. da S.; 2017. **Modelagem computacional e Método Design Construtal aplicados à**

otimização geométrica de placas finas de aço com enrijecedores submetidas a carregamento transversal uniforme. Dissertação de Mestrado em Engenharia Oceânica. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.

VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W.; **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**, Longman, Malasia. 1995.

VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**, Pearson, Malasia, 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method – Volume 1: The basis**. Butterworth - Heinemann, Oxford, 2000.

APÊNDICE A – Resultado dos deslocamentos otimizados no ponto central das placas P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3) para cada razão h_s/t_s.

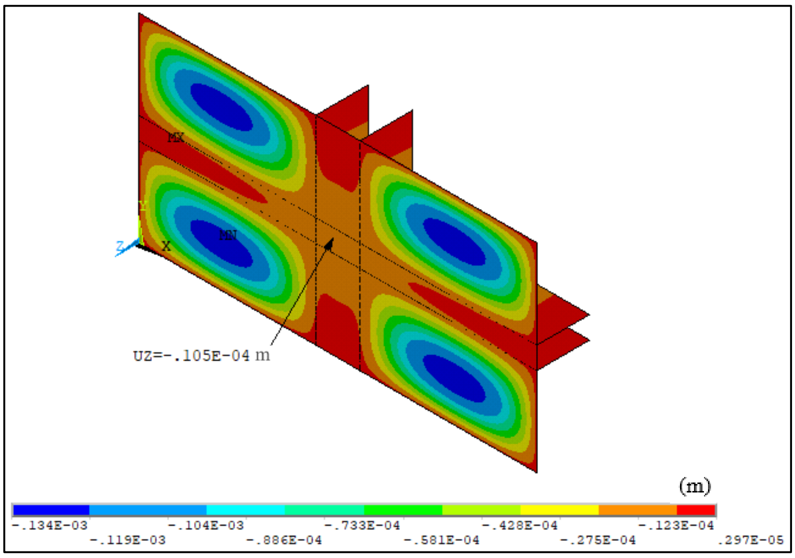


Figura A.1: Deflexão P(2,2) com U_z central, h_s/t_s = 20,84, S_t = 111,11 mm e S_l = 222,22 mm

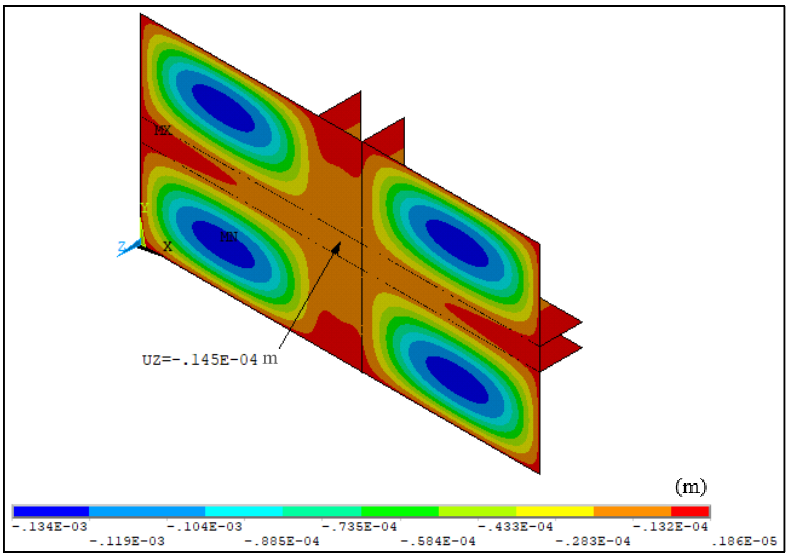


Figura A.2: Deflexão P(2,2) com U_z central, h_s/t_s = 13,33, S_t = 111,11 mm e S_l = 222,22 mm

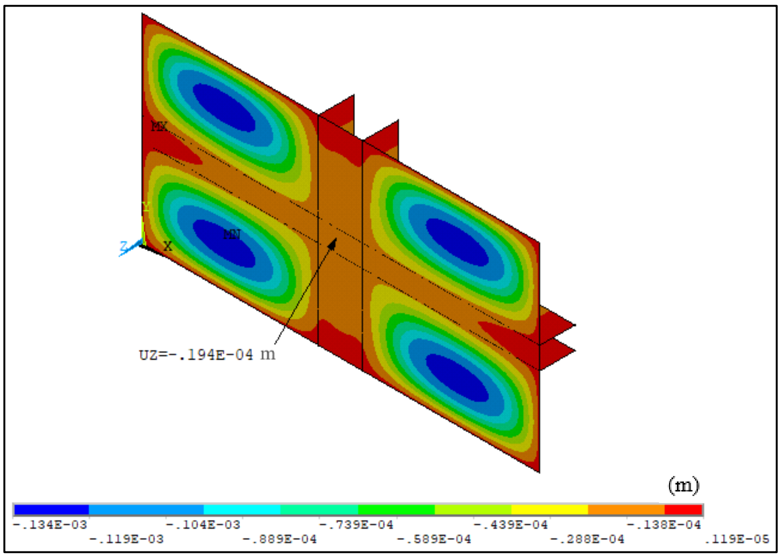


Figura A.3: Deflexão P(2,2) com U_z central, $h_s/t_s = 9{,}15$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 222{,}22$ mm

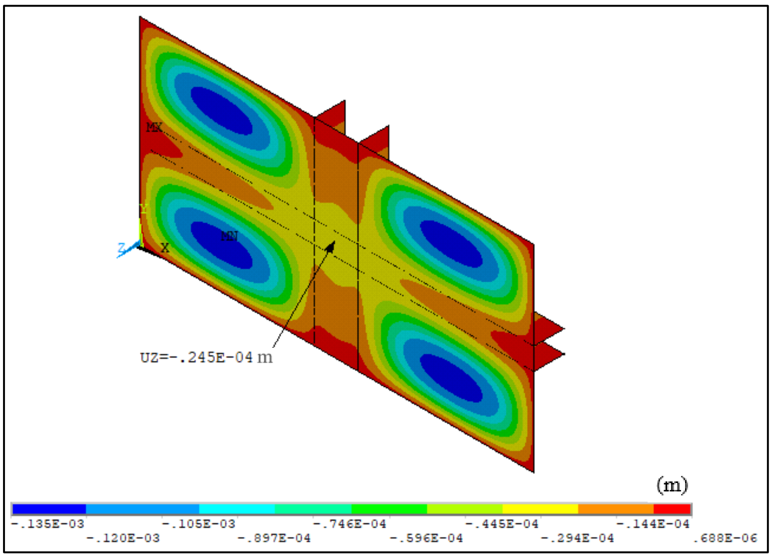


Figura A.4: Deflexão P(2,2) com U_z central, $h_s/t_s = 6{,}87$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 222{,}22$ mm

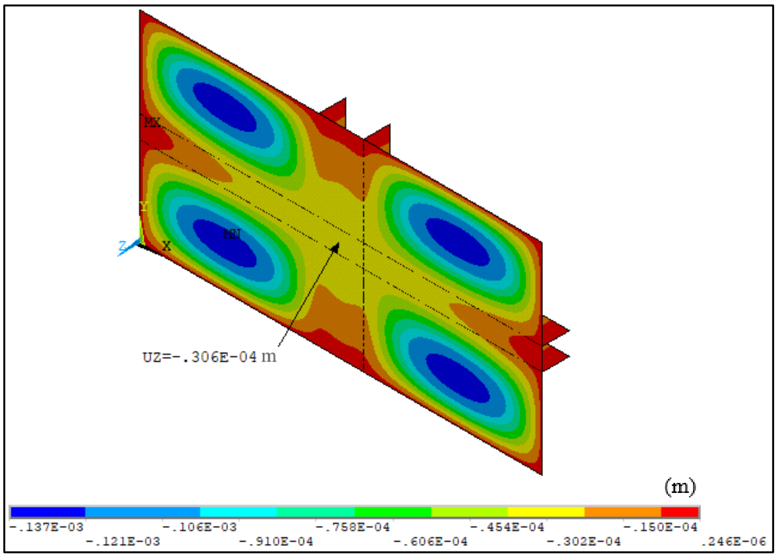


Figura A.5: Deflexão P(2,2) com U_z central, $h_s/t_s = 5{,}26$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 222{,}22$ mm

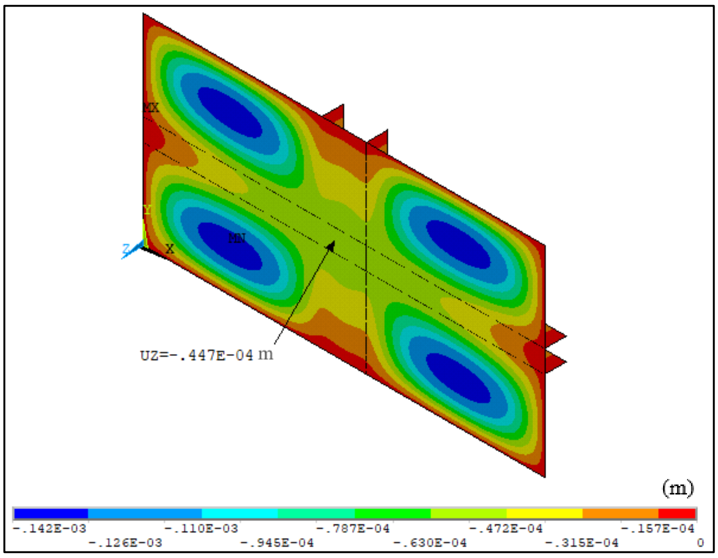


Figura A.6: Deflexão P(2,2) com U_z central, $h_s/t_s = 3{,}37$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 222{,}22$ mm

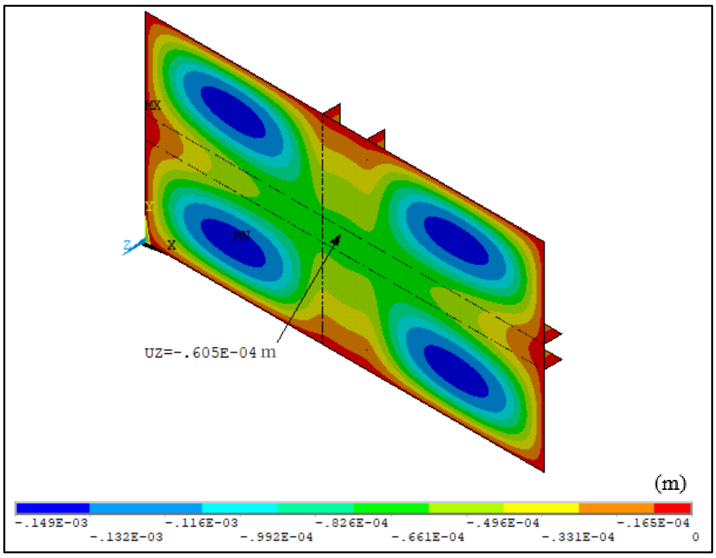


Figura A.7: Deflexão P(2,2) com U_z central, $h_s/t_s = 2{,}36$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 222{,}22$ mm

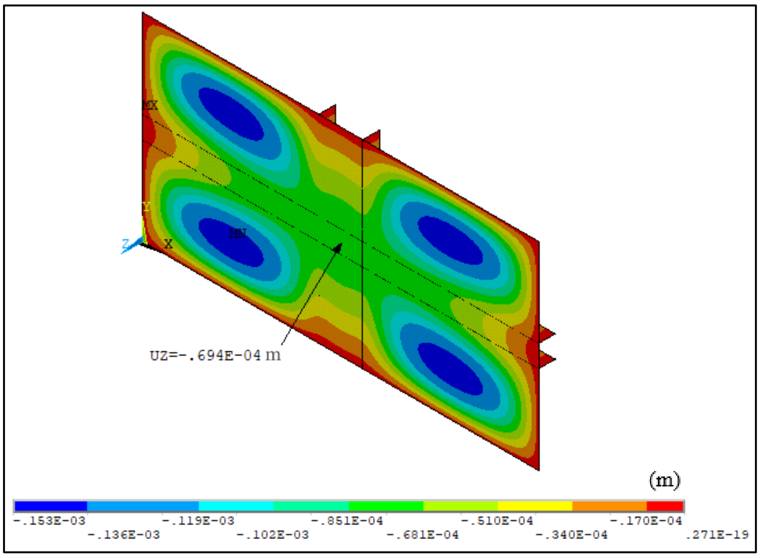


Figura A.8: Deflexão P(2,2) com U_z central, $h_s/t_s = 2{,}01$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 222{,}22$ mm

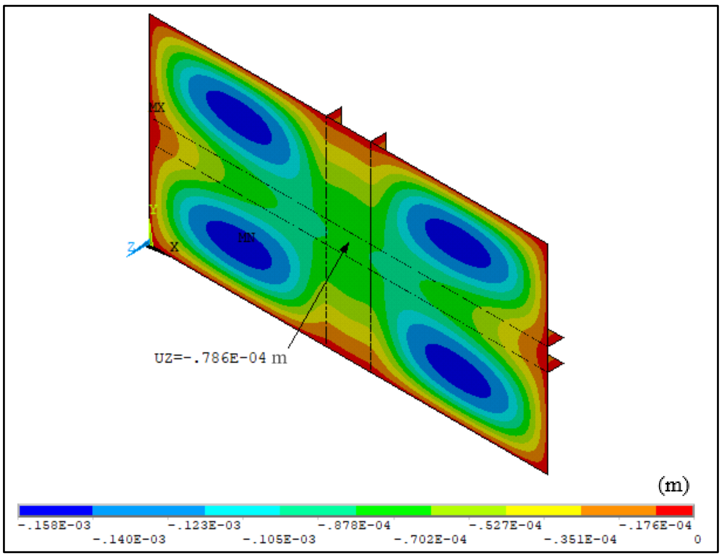


Figura A.9: Deflexão P(2,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,73, S_t = 111,11 mm e S_l = 222,22 mm

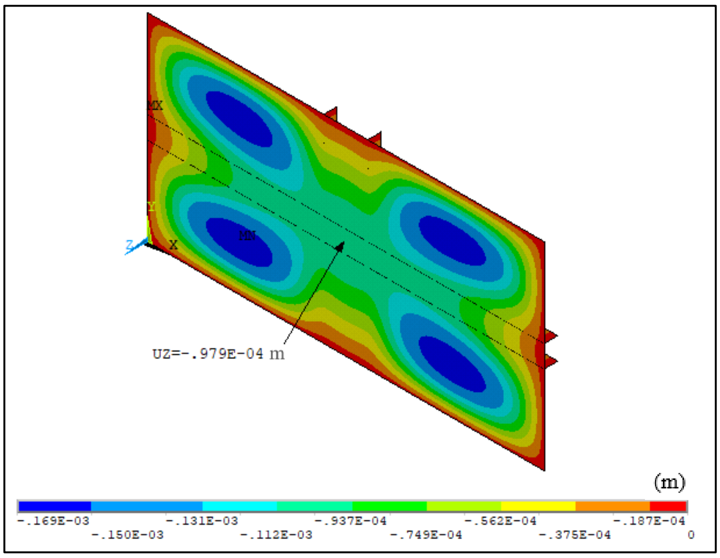


Figura A.10: Deflexão P(2,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,34, S_t = 111,11 mm e S_l = 222,22 mm

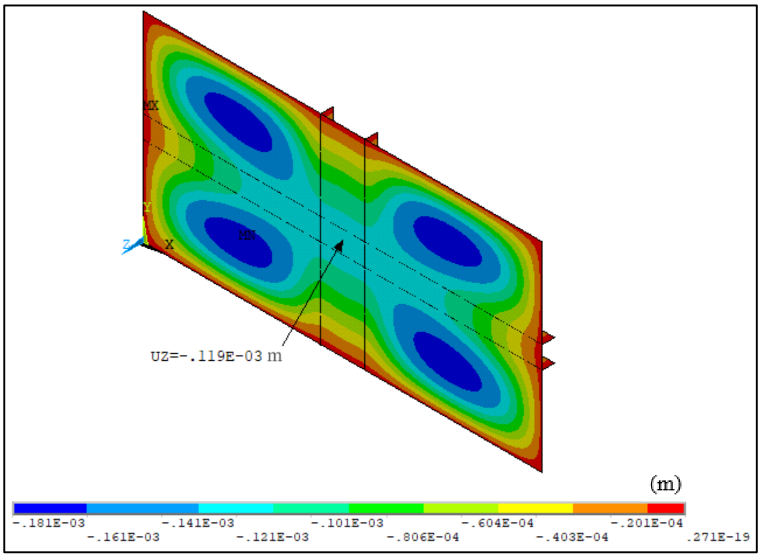


Figura A.11: Deflexão P(2,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,06, S_t = 111,11 mm e S_l = 222,22 mm

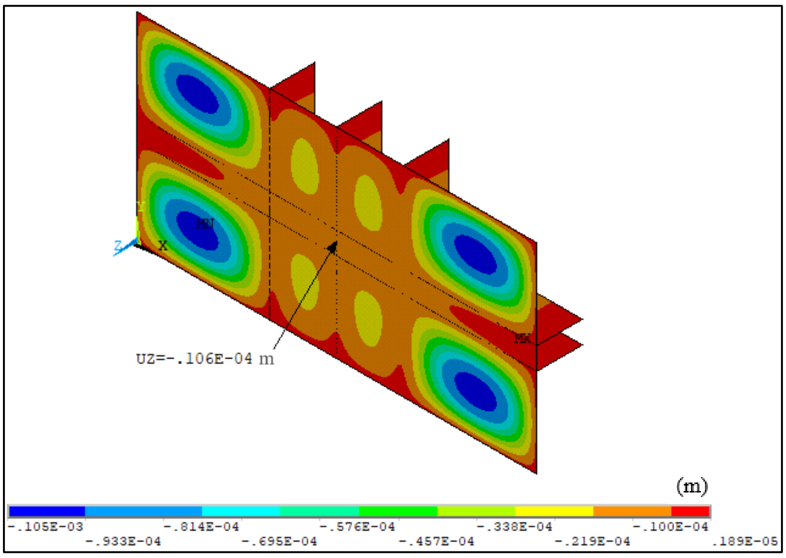


Figura A.12: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 17,91, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

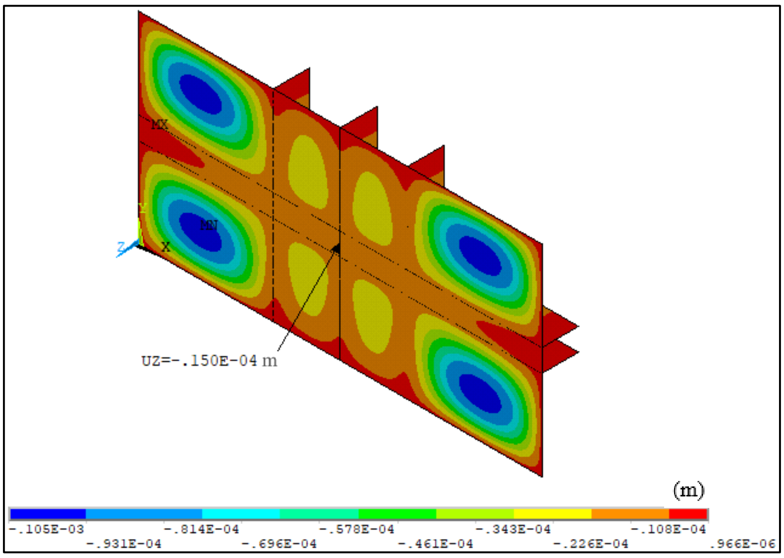


Figura A.13: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 11,46, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

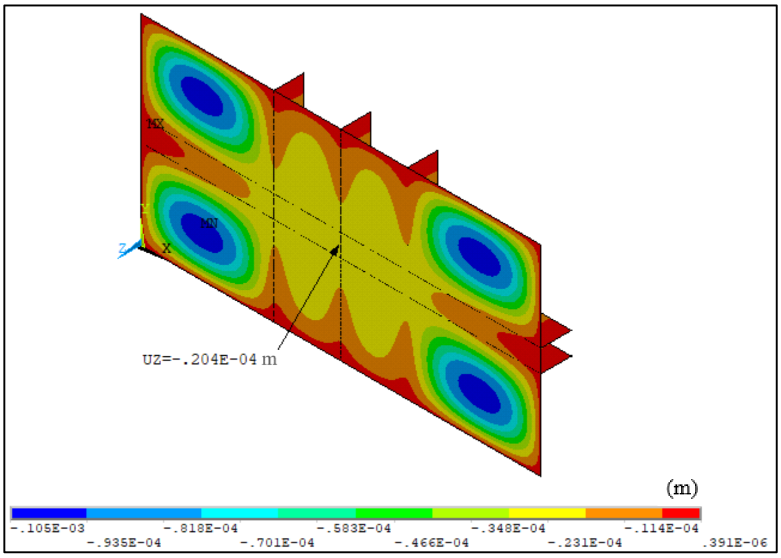


Figura A.14: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 7,87, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

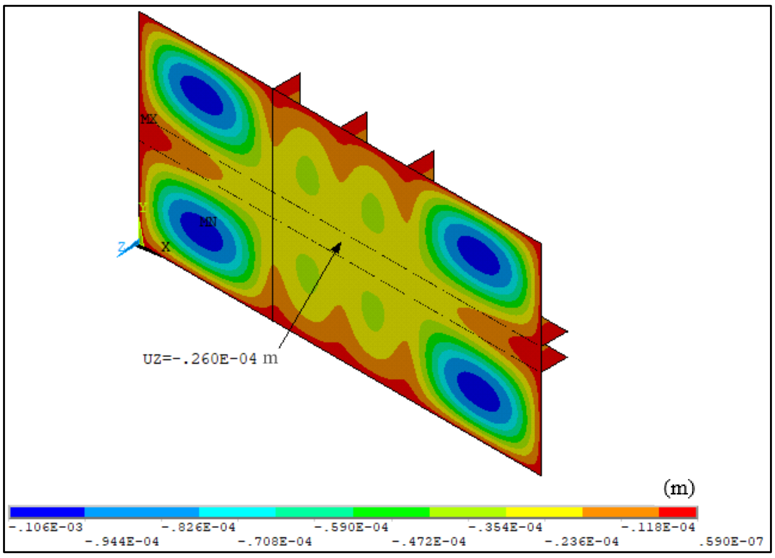


Figura A.15: Deflexão P(2,3) com U_z central, $h_s/t_s = 5{,}91$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 666{,}67$ mm

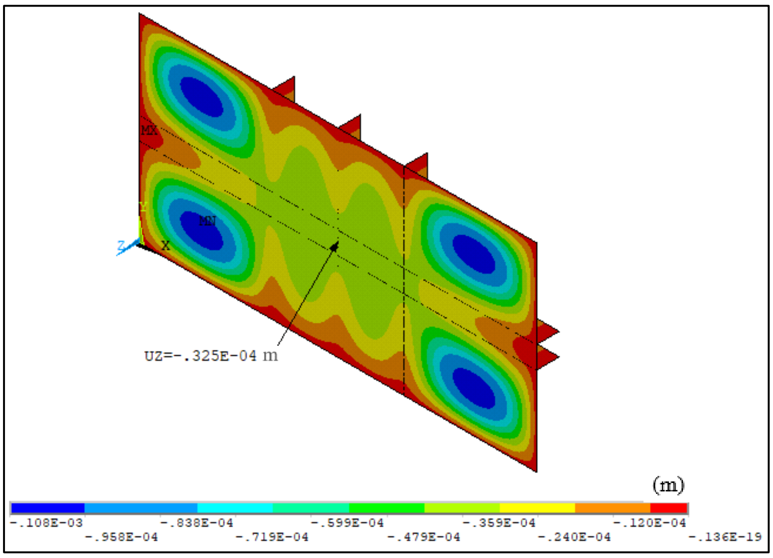


Figura A.16: Deflexão P(2,3) com U_z central, $h_s/t_s = 4{,}53$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 666{,}67$ mm

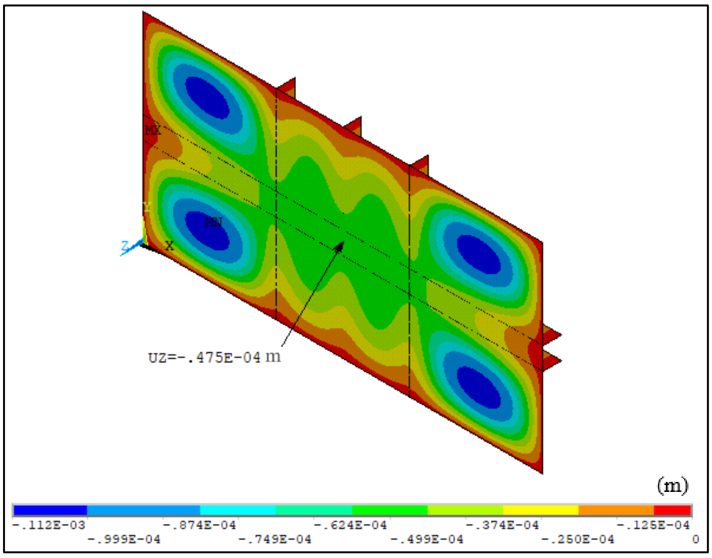


Figura A.17: Deflexão P(2,3) com U_z central, $h_s/t_s = 2{,}90$, $S_t = 111{,}11$ mm e $S_l = 666{,}67$ mm

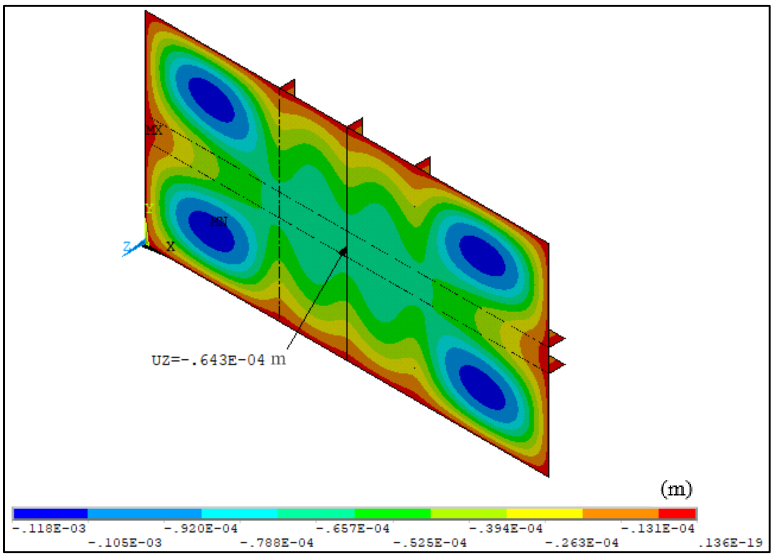


Figura A.18: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 2,03, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

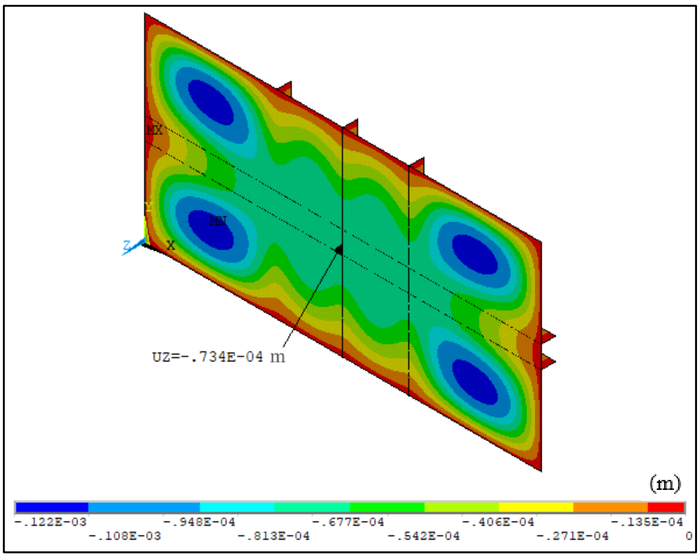


Figura A.19: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 1,74, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

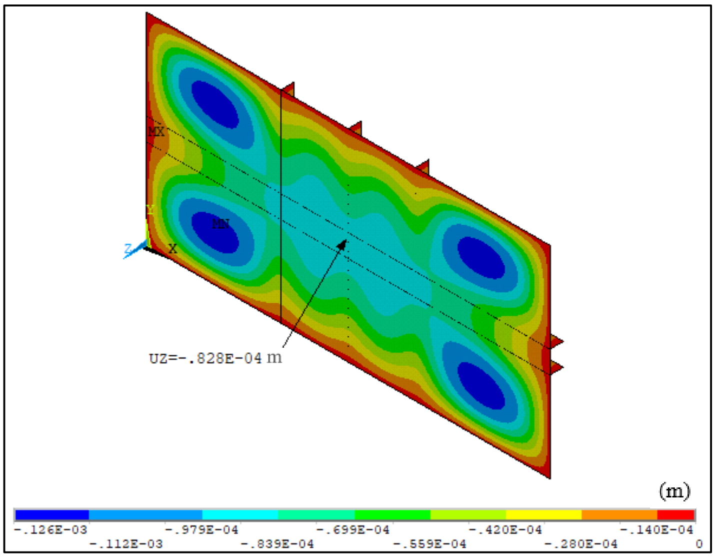


Figura A.20: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 1,50, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

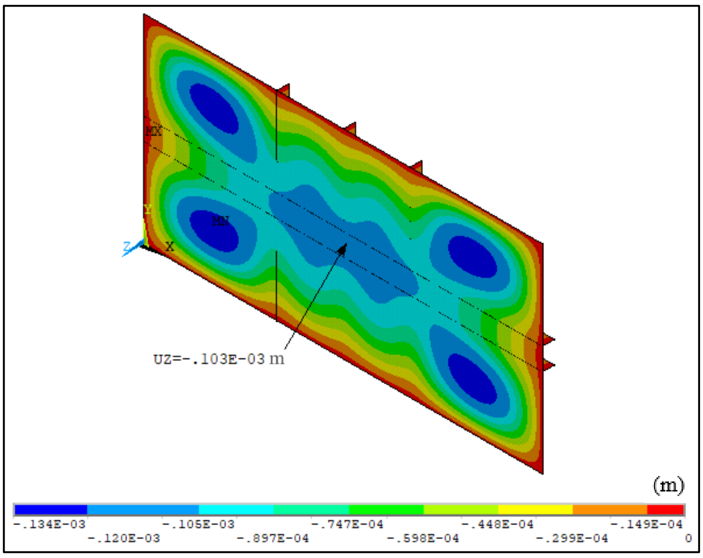


Figura A.21: Deflexão P(2,3) com U_z central, h_s/t_s = 1,16, S_t = 111,11 mm e S_l = 666,67 mm

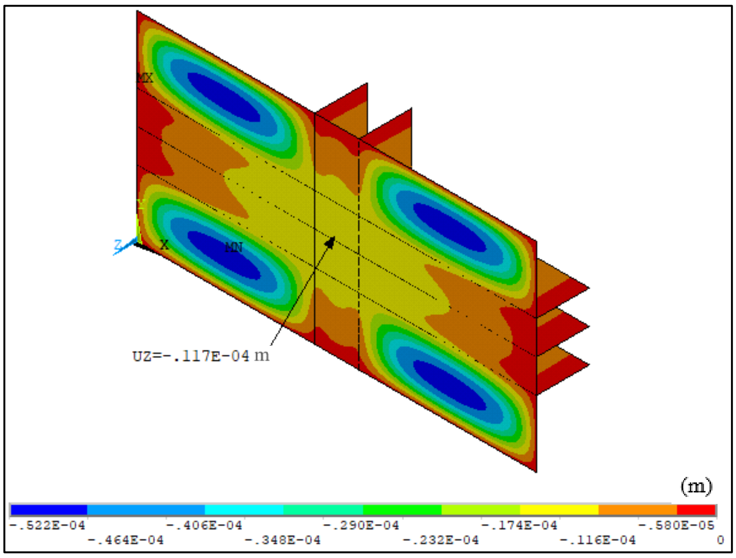


Figura A.22: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 27,72, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

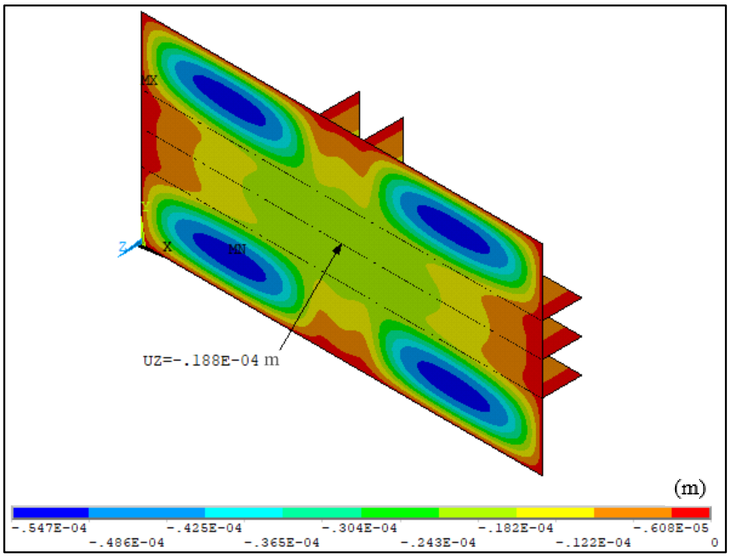


Figura A.23: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 15,65, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

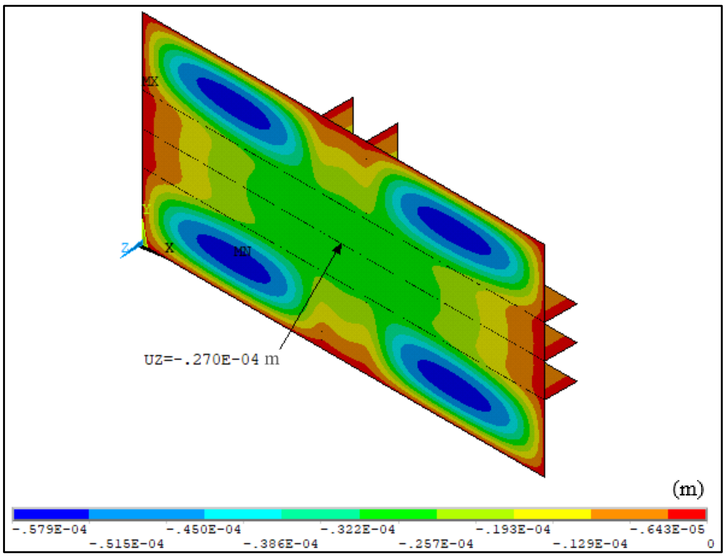


Figura A.24: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 10,01, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

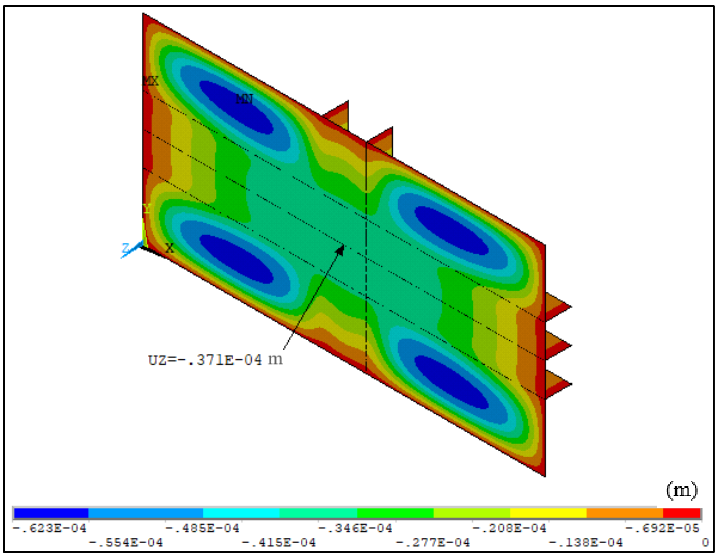


Figura A.25: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 6,87, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

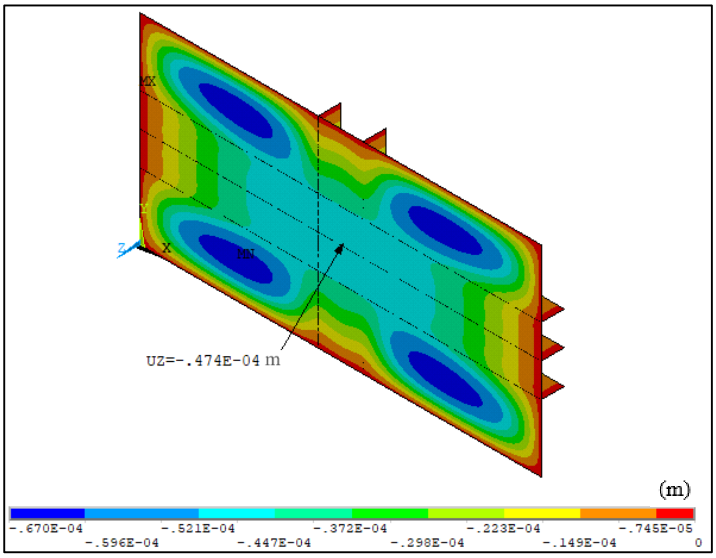


Figura A.26: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 5,16, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

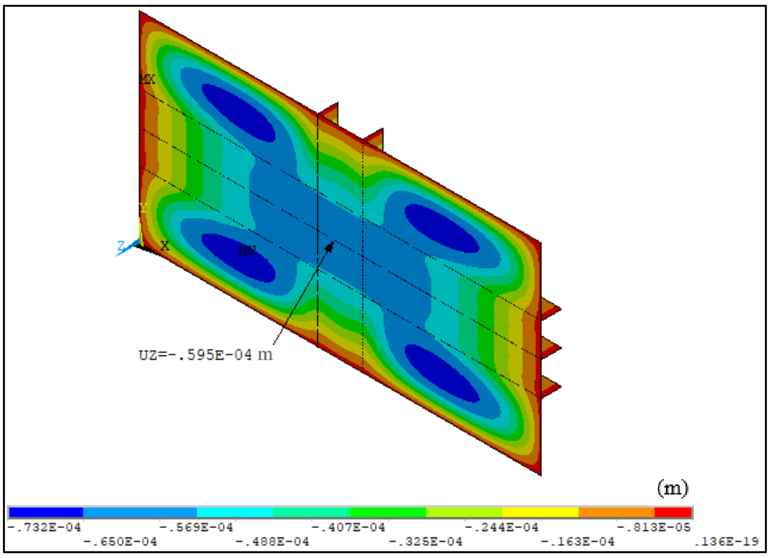


Figura A.27: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 3,95, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

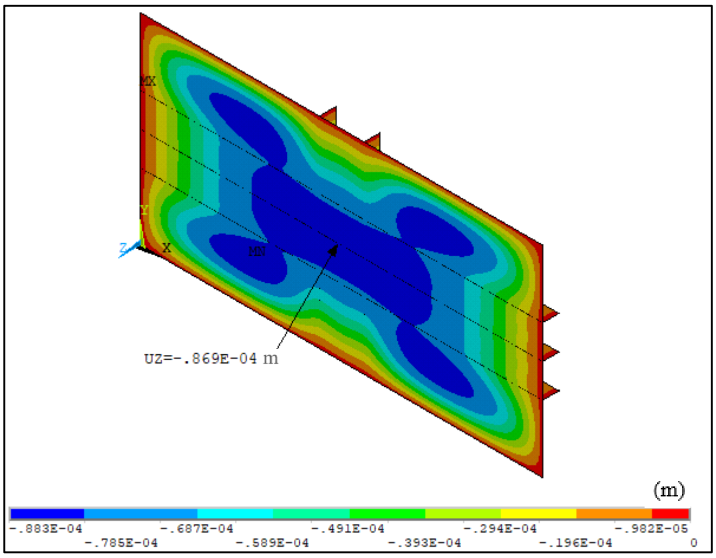


Figura A.28: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 2,53, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

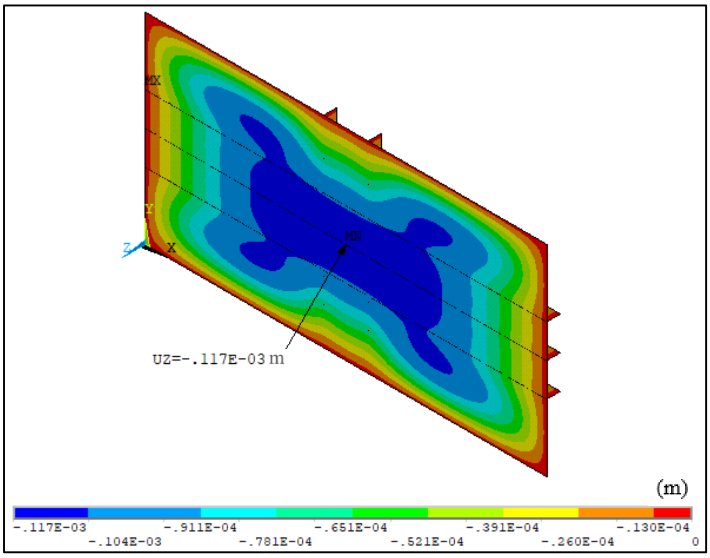


Figura A.29: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,77, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

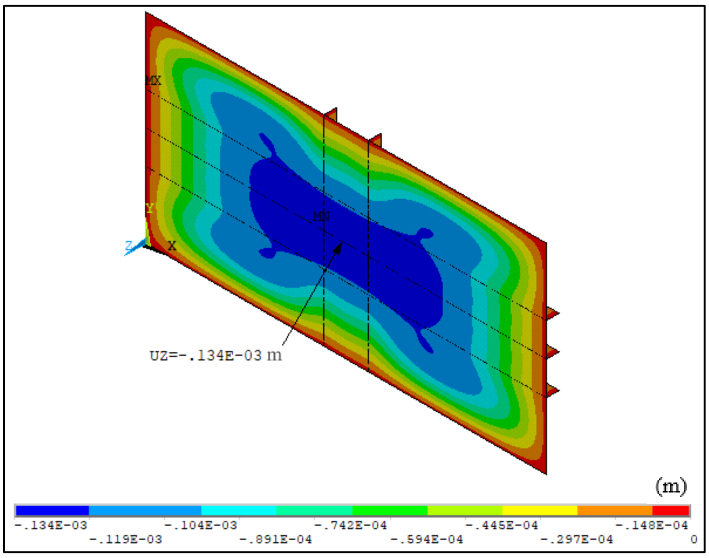


Figura A.30: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,51, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

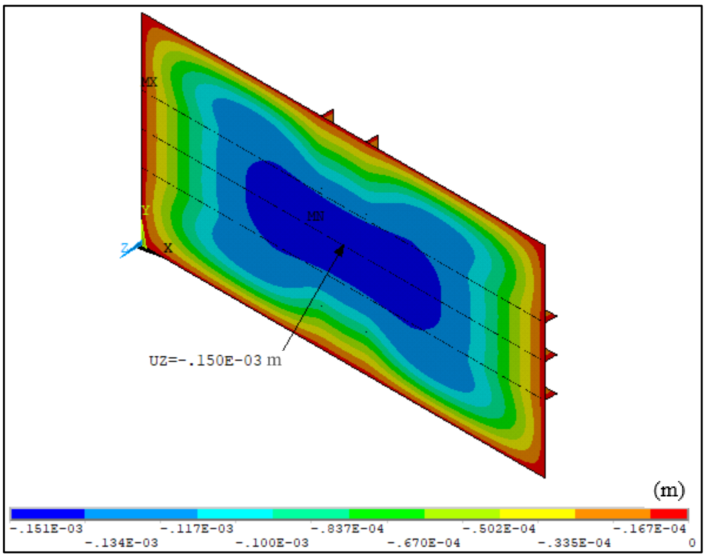


Figura A.31: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,31, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

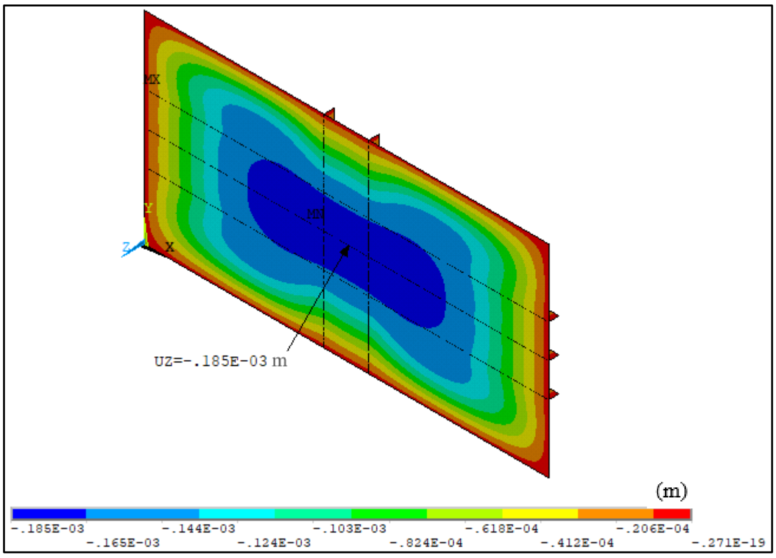


Figura A.32: Deflexão P(3,2) com U_z central, h_s/t_s = 1,01, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

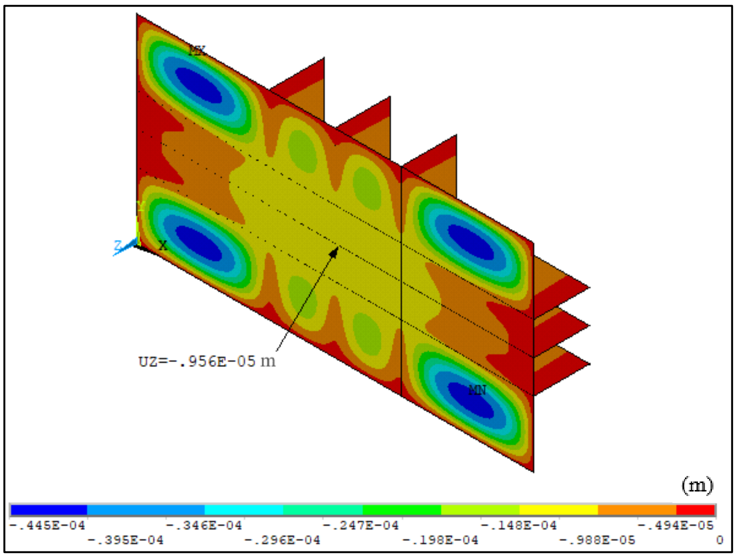


Figura A.33: Deflexão P(3,3) com U_z central, $h_s/t_s = 35{,}00$, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

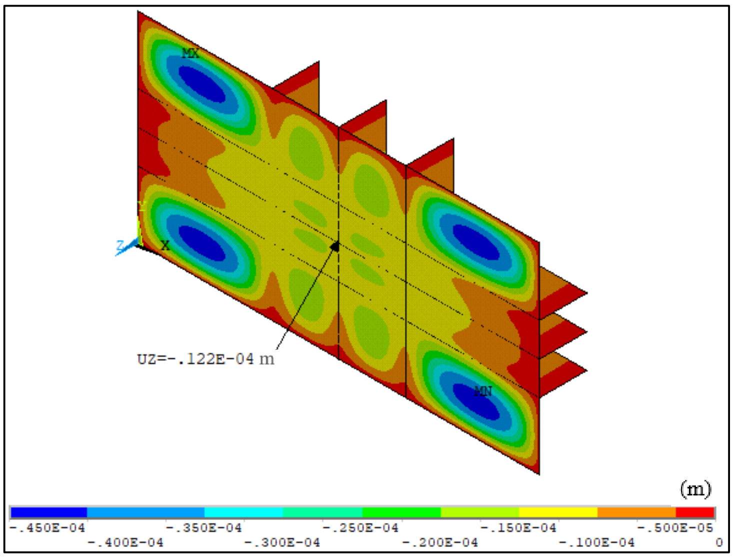


Figura A.34: Deflexão P(3,3) com U_z central, $h_s/t_s = 24{,}70$, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

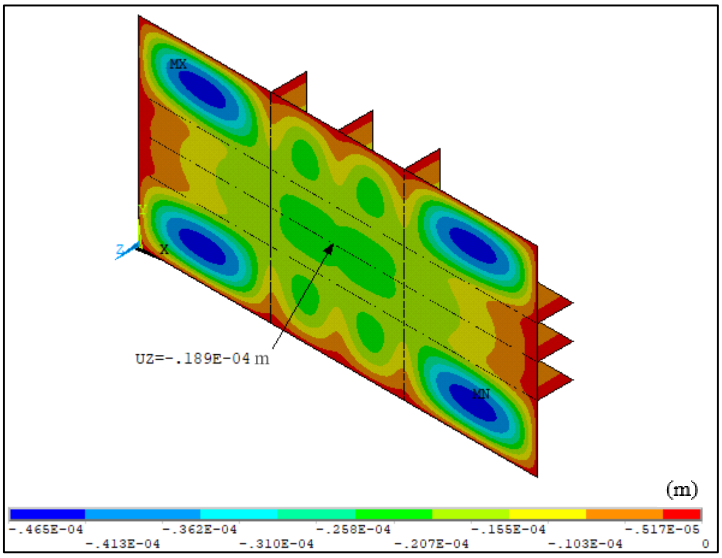


Figura A.35: Deflexão P(3,3) com U_z central, $h_s/t_s = 13{,}96$, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

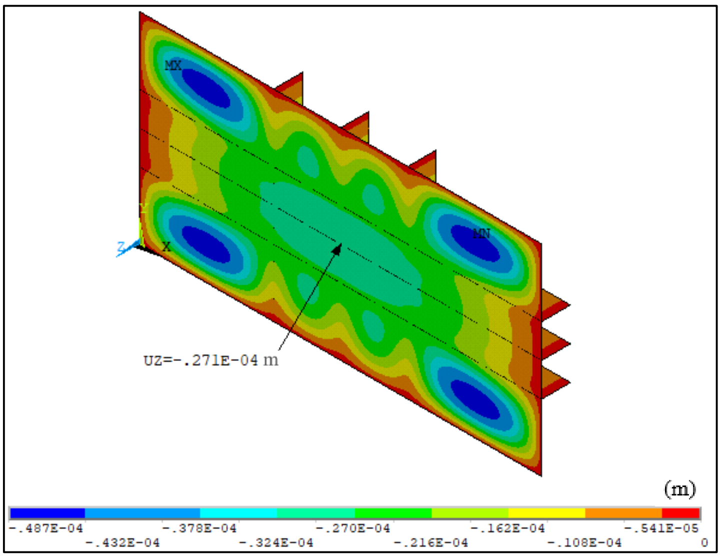


Figura A.36: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 8,93, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

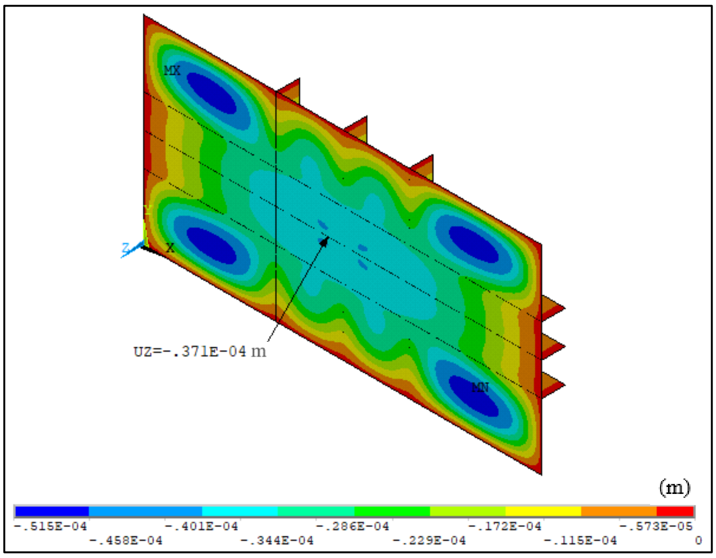


Figura A.37: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 6,14, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

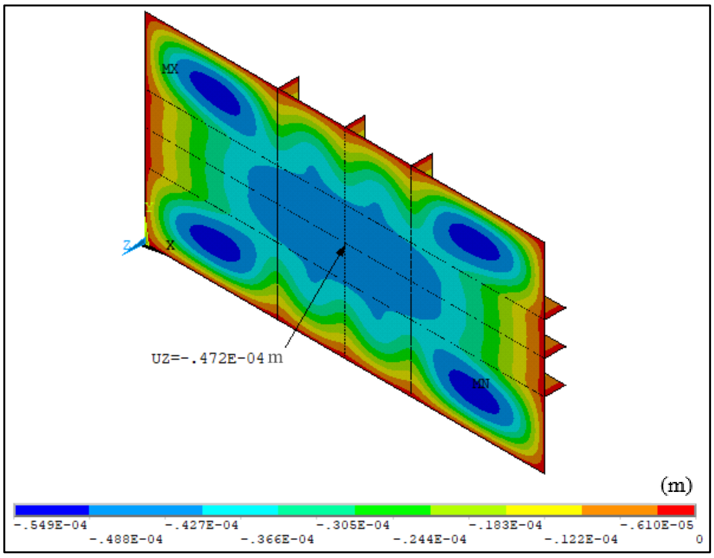


Figura A.38: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 4,61, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

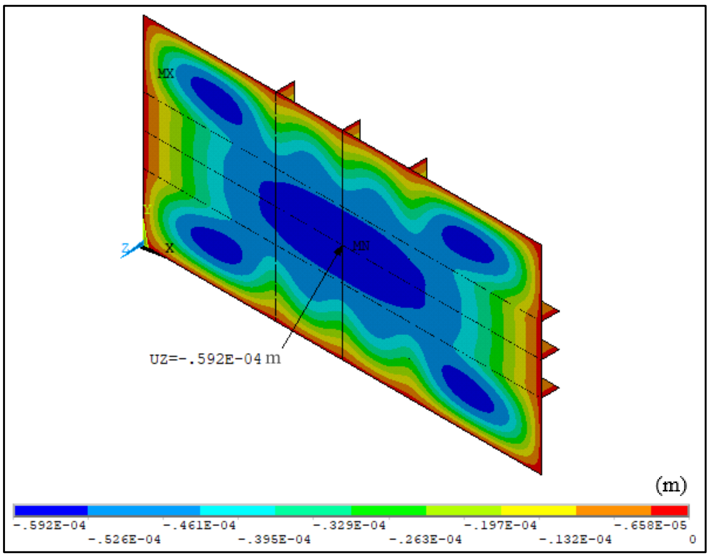


Figura A.39: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 3,53, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

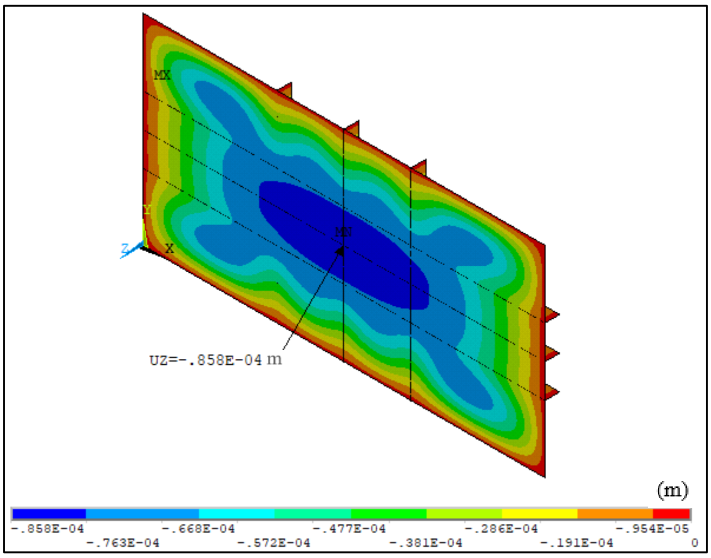


Figura A.40: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 2,27, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

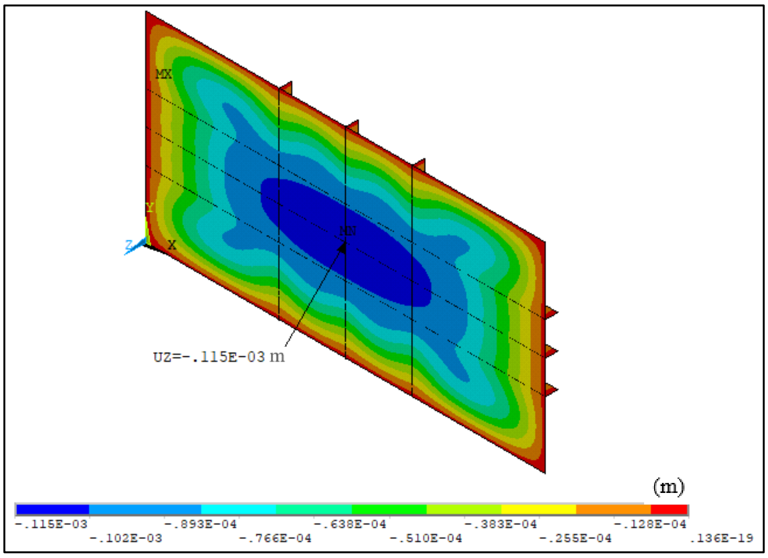


Figura A.41: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 1,59, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

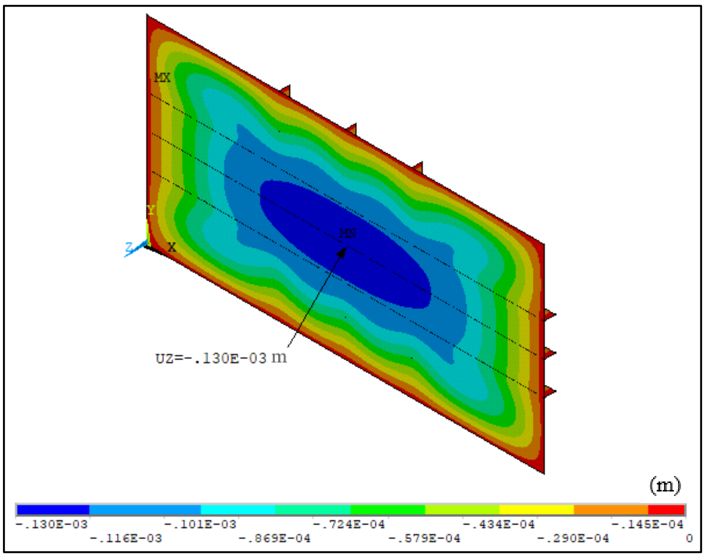


Figura A.42: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 1,36, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

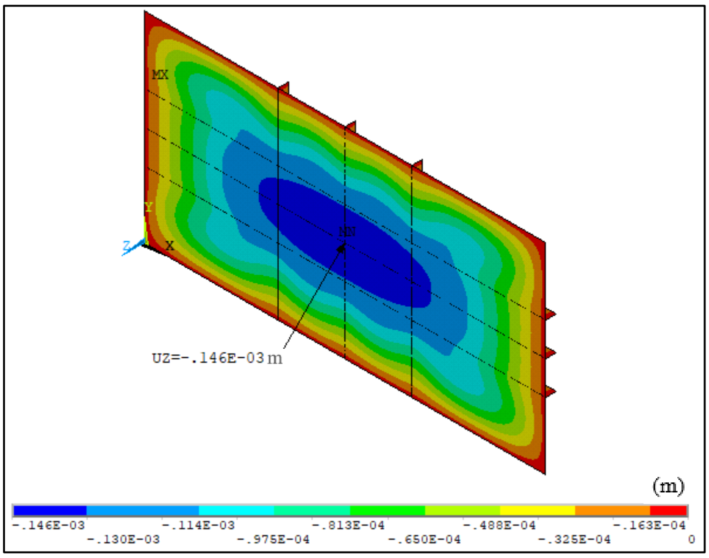


Figura A.43: Deflexão P(3,3) com U_z central, h_s/t_s = 1,17, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

APÊNDICE B – Resultado dos deslocamentos otimizados no ponto máximo das placas P(2,2), P(2,3), P(3,2) e P(3,3) para cada razão h_s/t_s.

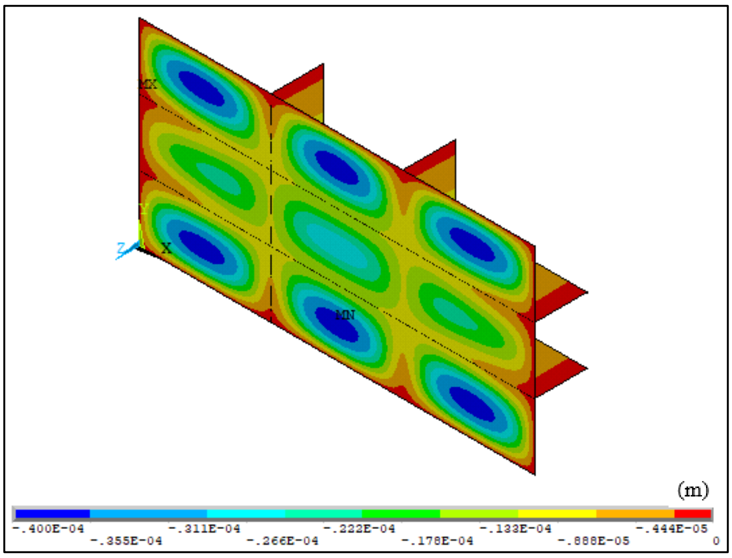


Figura B.1: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 20,84, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

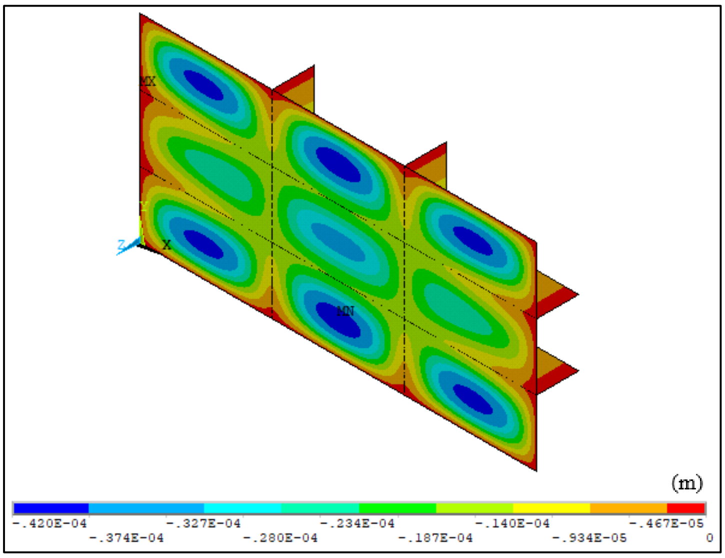


Figura B.2: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 13,33, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

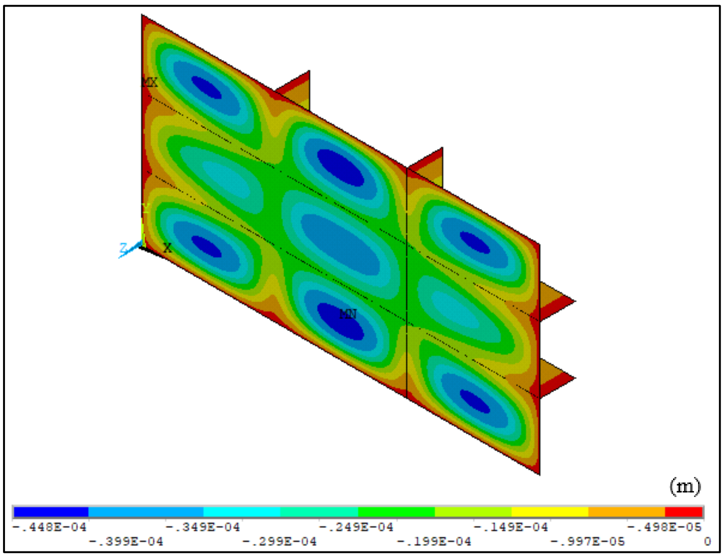


Figura B.3: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 9,15, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

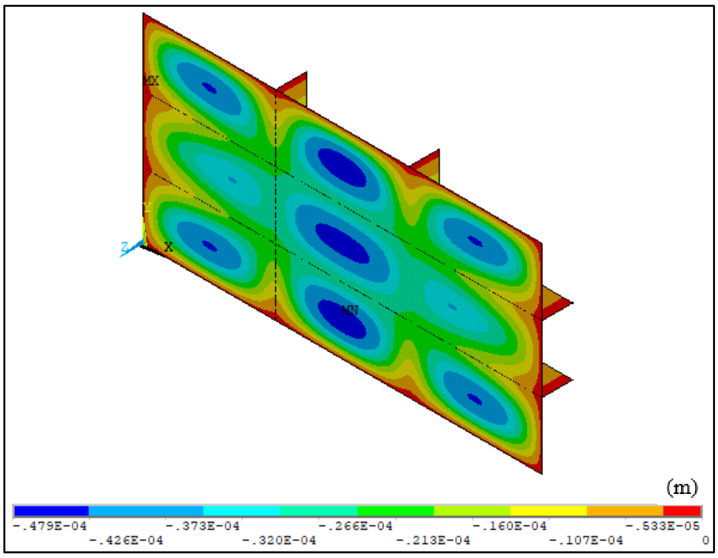


Figura B.4: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 6,87, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

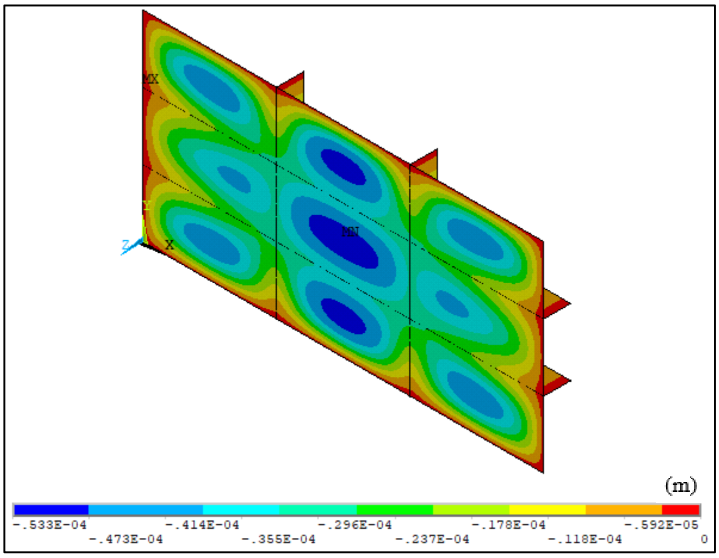


Figura B.5: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 5,26, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

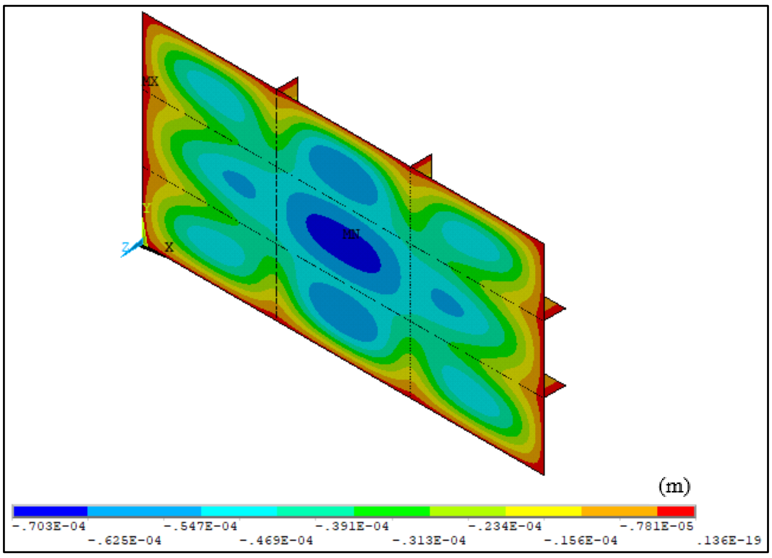


Figura B.6: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 3,37, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

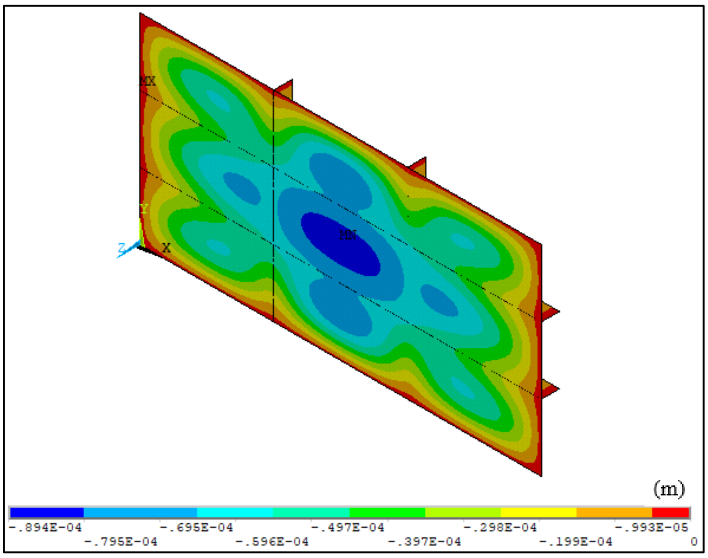


Figura B.7: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 2,36, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

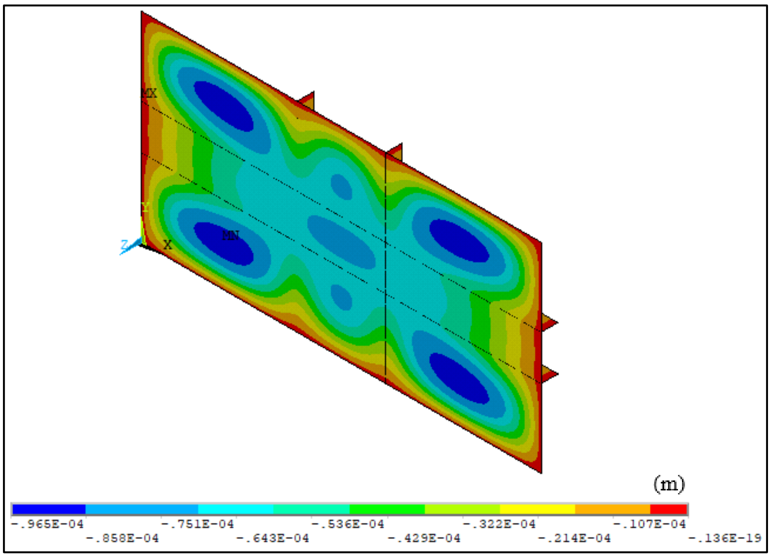


Figura B.8: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 2,01, S_t = 222,22 mm e S_l = 444,44 mm

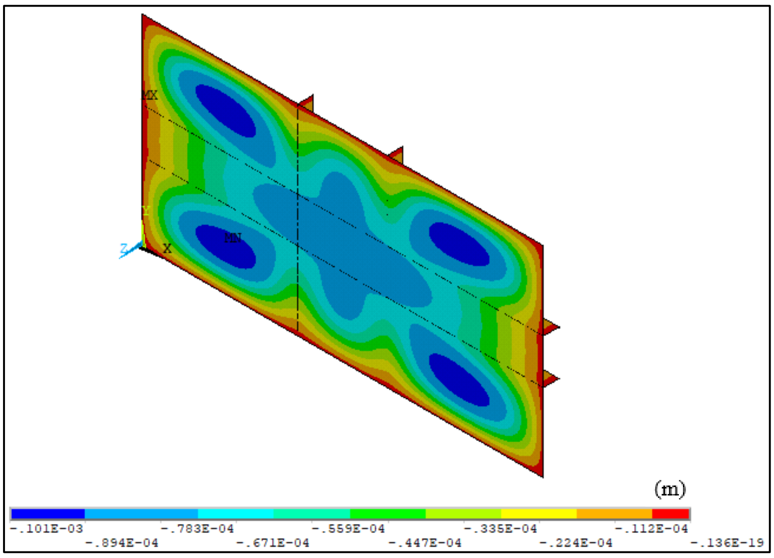


Figura B.9: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,73, S_t = 222,22 mm e S_l = 444,44 mm

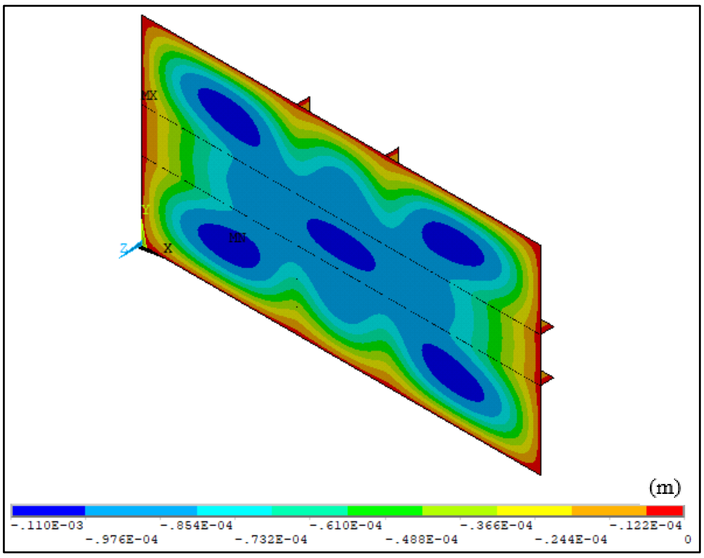


Figura B.10: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,34, S_t = 222,22 mm e S_l = 444,44 mm

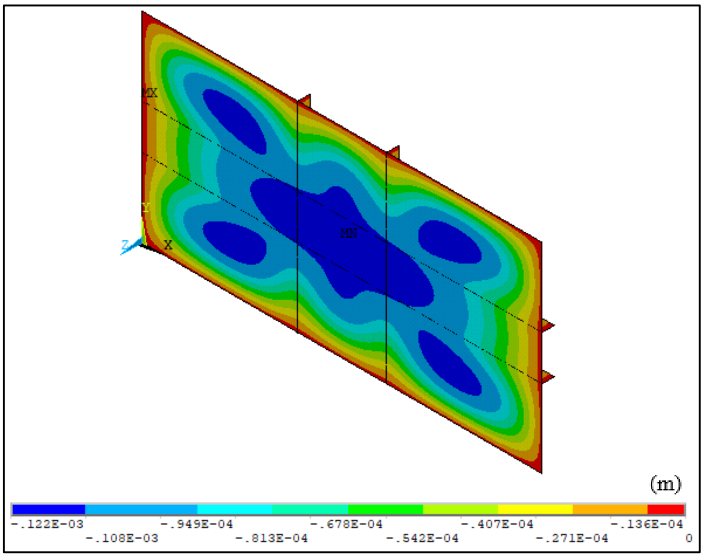


Figura B.11: Deflexão P(2,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,06, S_t = 222,22 mm e S_l = 444,44 mm

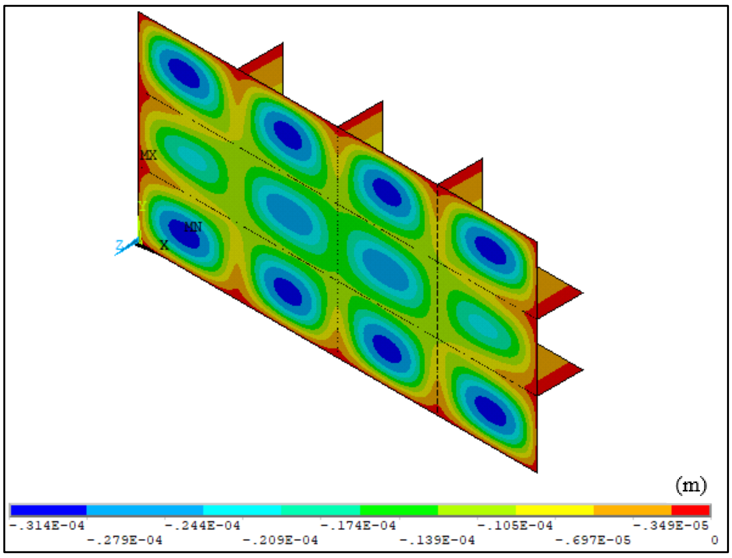


Figura B.12: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 17,91, S_t = 333,33 mm e S_l = 1000,00 mm

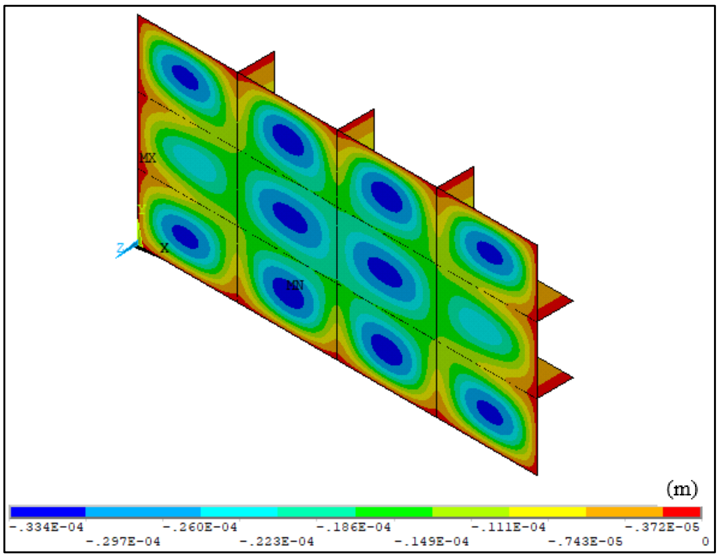


Figura B.13: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 11,46, S_t = 333,33 mm e S_l = 1000,00 mm

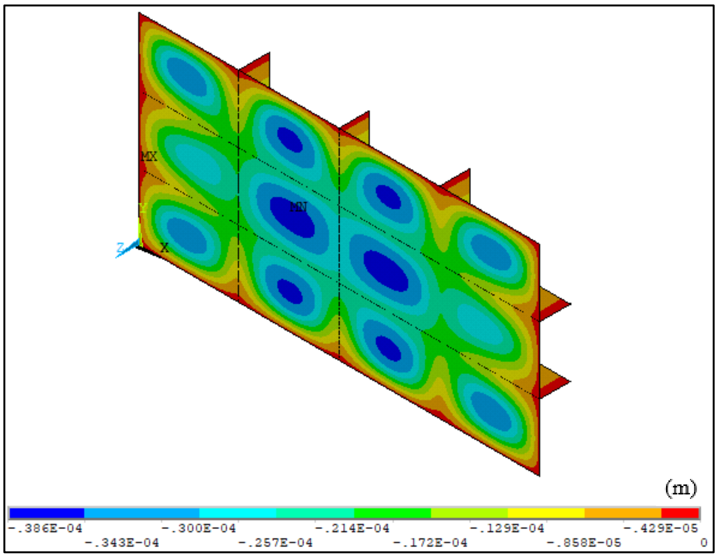


Figura B.14: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 7,87, S_t = 333,33 mm e S_l = 1000,00 mm

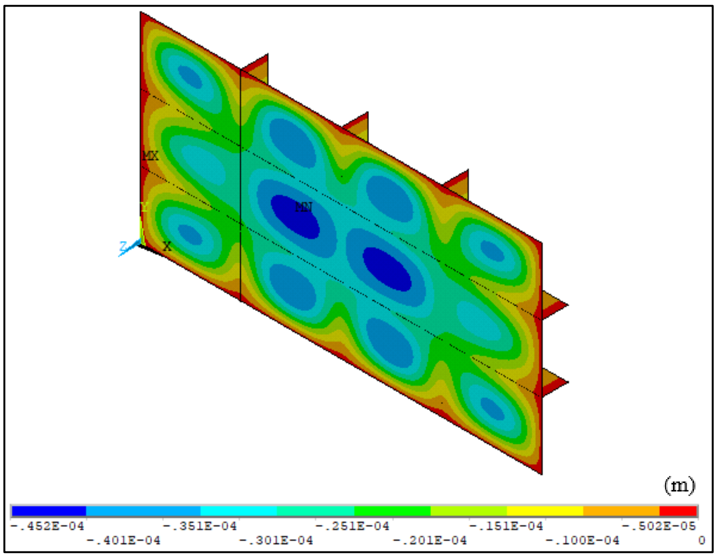


Figura B.15: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 5,91, S_t = 333,33 mm e S_l = 1000,00 mm

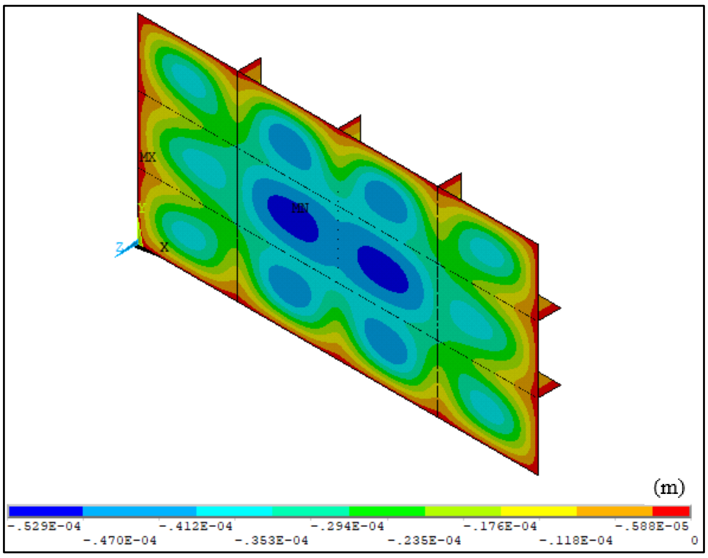


Figura B.16: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 4,53, S_t = 333,33 mm e S_l = 1000,00 mm

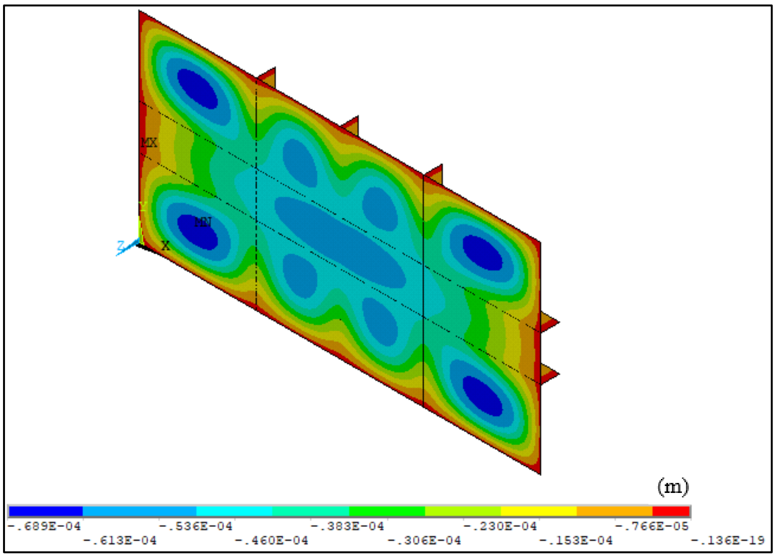


Figura B.17: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 2,90, S_t = 222,22 mm e S_l = 833,33 mm

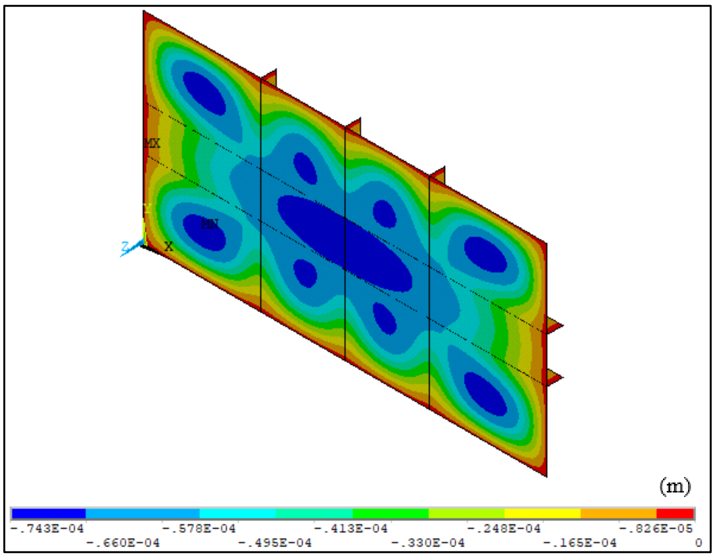


Figura B.18: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 2,03, S_t = 222,22 mm e S_l = 833,33 mm

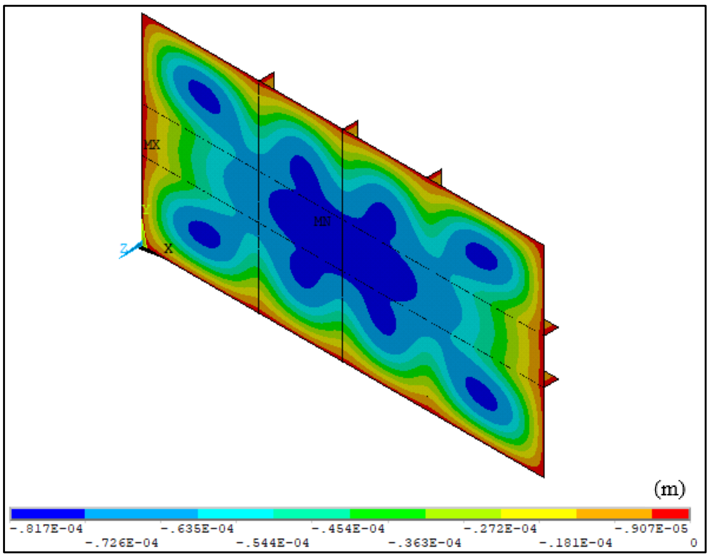


Figura B.19: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,74, S_t = 222,22 mm e S_l = 833,33 mm

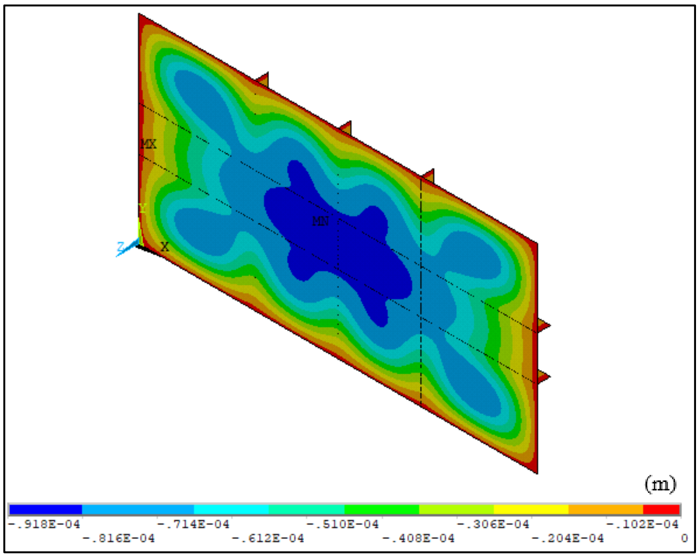


Figura B.20: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,50, S_t = 222,22 mm e S_l = 833,33 mm

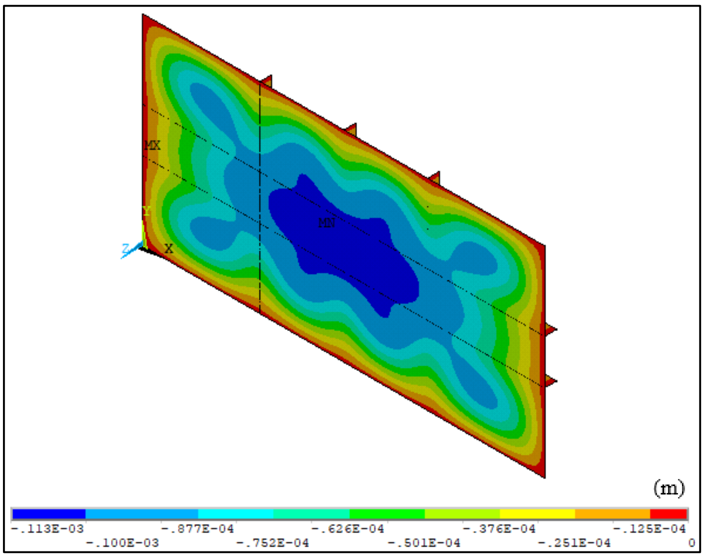


Figura B.21: Deflexão P(2,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,16, S_t = 222,22 mm e S_l = 833,33 mm

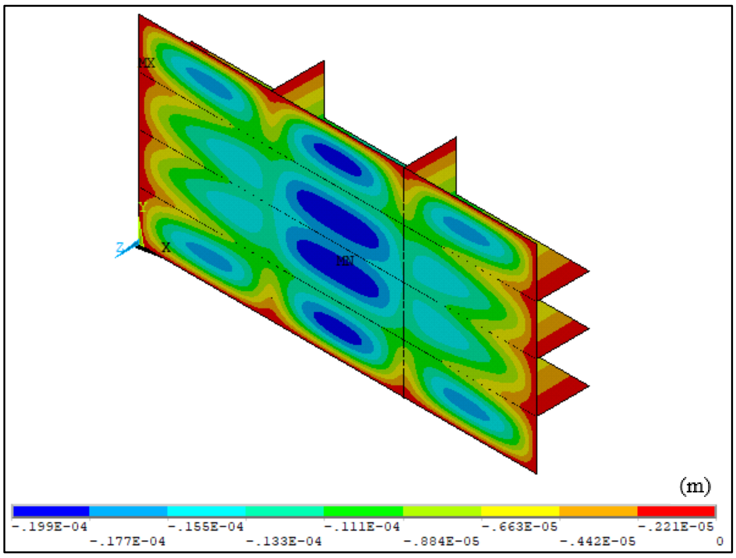


Figura B.22: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 27,72, S_t = 500,00 mm e S_l = 666,67 mm

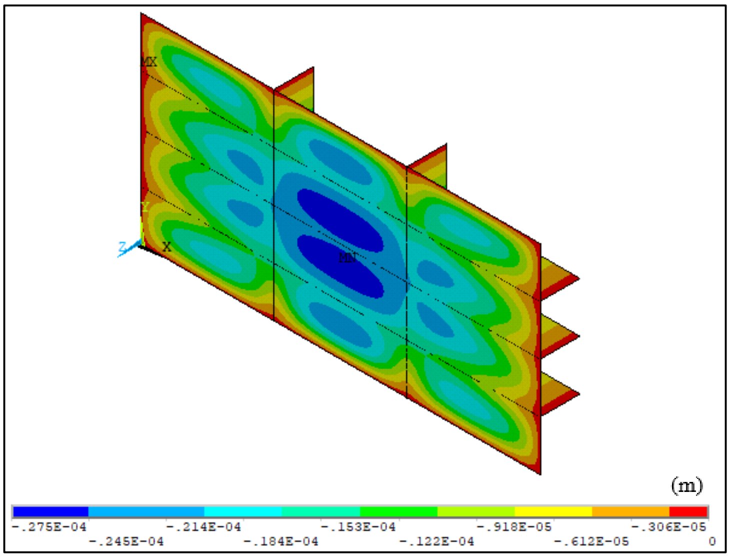


Figura B.23: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 15,65, S_t = 500,00 mm e S_l = 666,67 mm

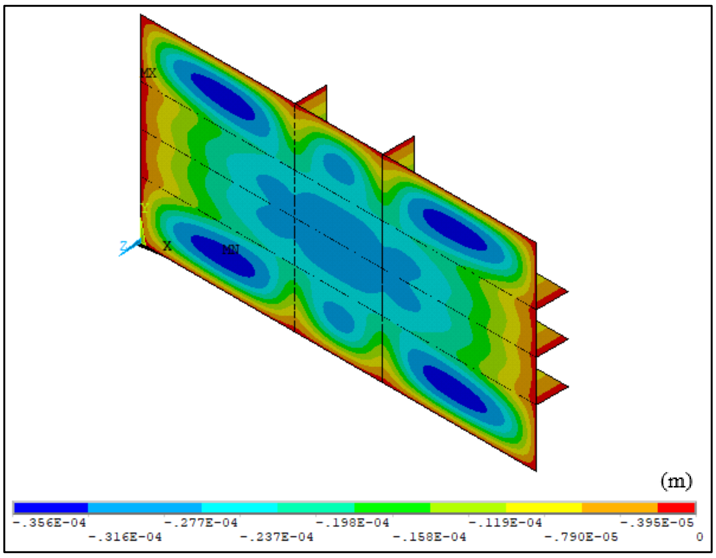


Figura B.24: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 10,01, S_t = 416,67 mm e S_l = 444,44 mm

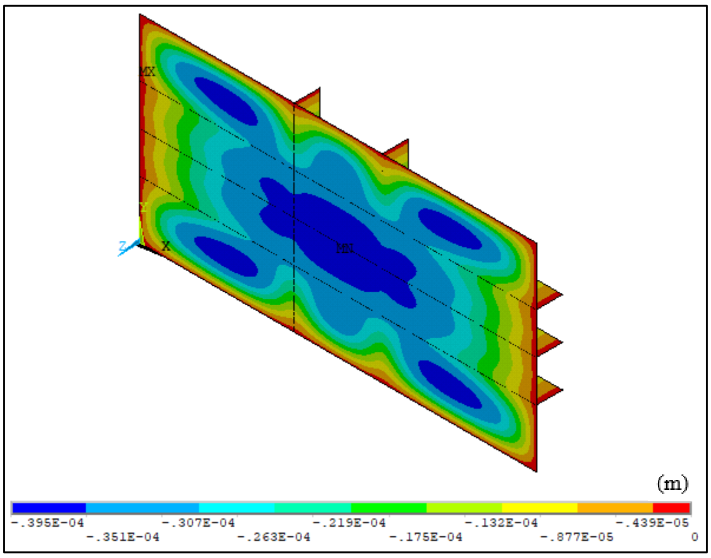


Figura B.25: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 6,87, S_t = 416,67 mm e S_l = 444,44 mm

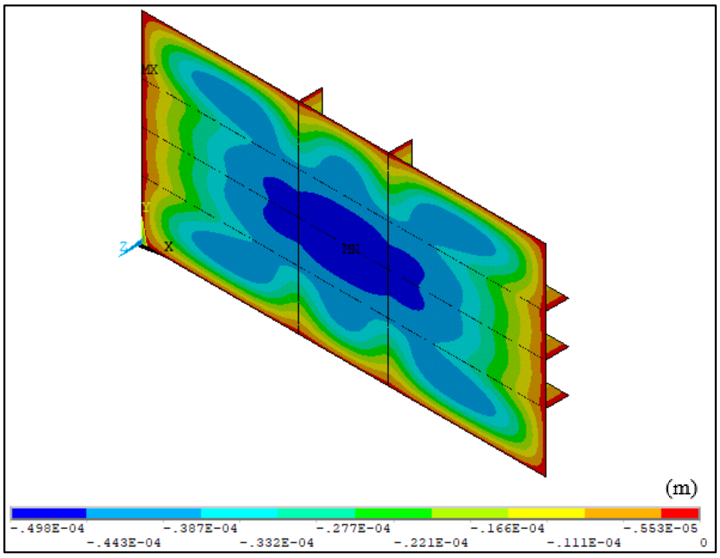


Figura B.26: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 5,16, S_t = 416,67 mm e S_l = 444,44 mm

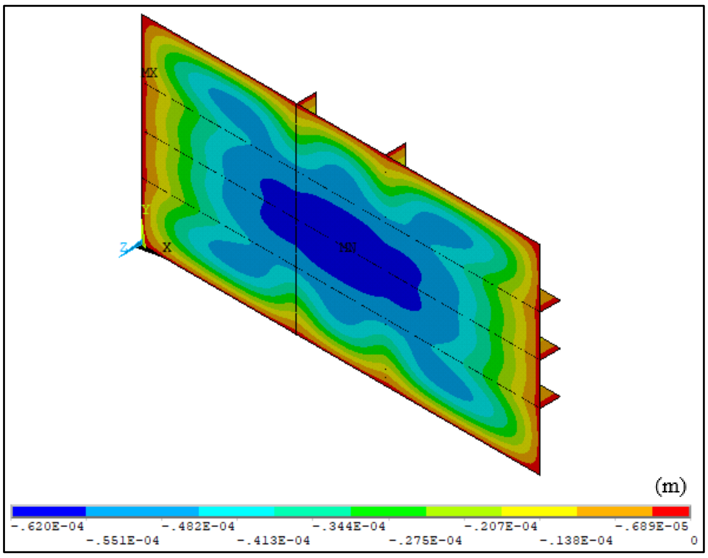


Figura B.27: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 3,95, S_t = 416,67 mm e S_l = 444,44 mm

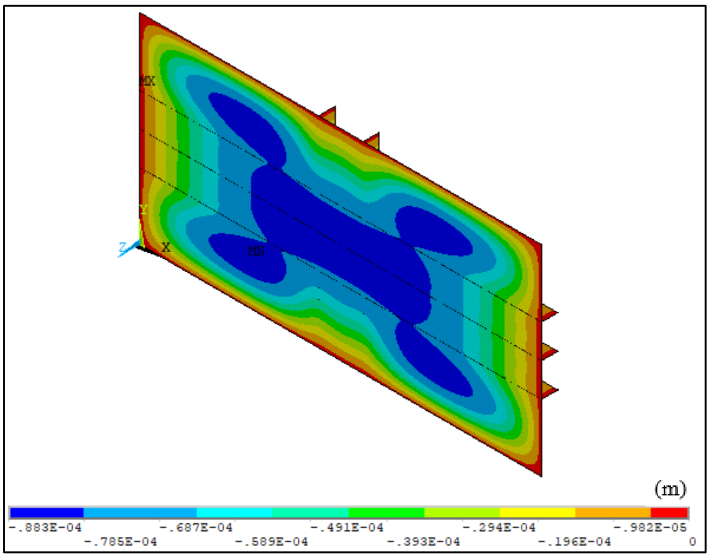


Figura B.28: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 2,53, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

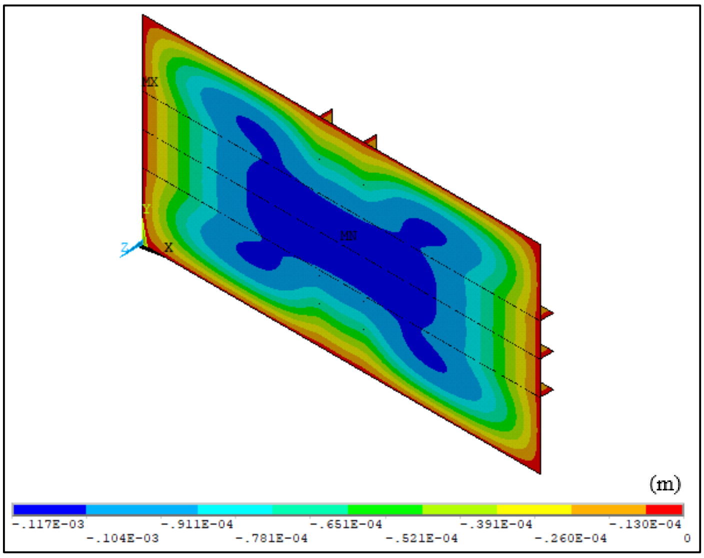


Figura B.29: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,77, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

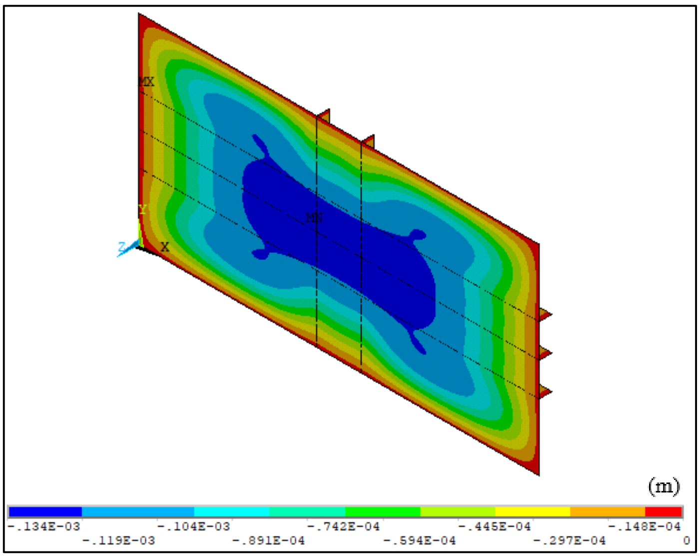


Figura B.30: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,51, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

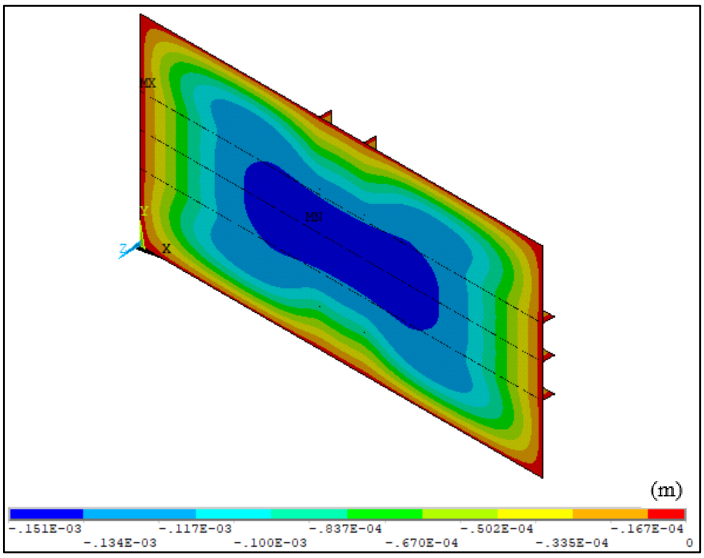


Figura B.31: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,31, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

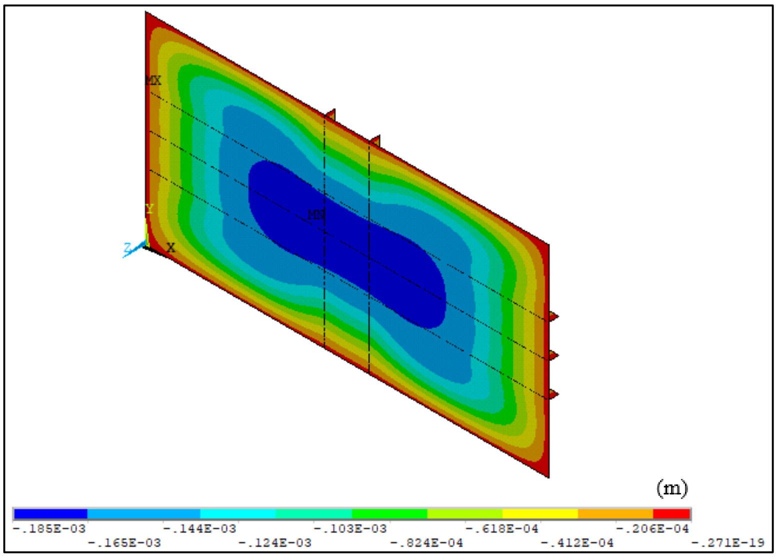


Figura B.32: Deflexão P(3,2) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,01, S_t = 333,33 mm e S_l = 222,22 mm

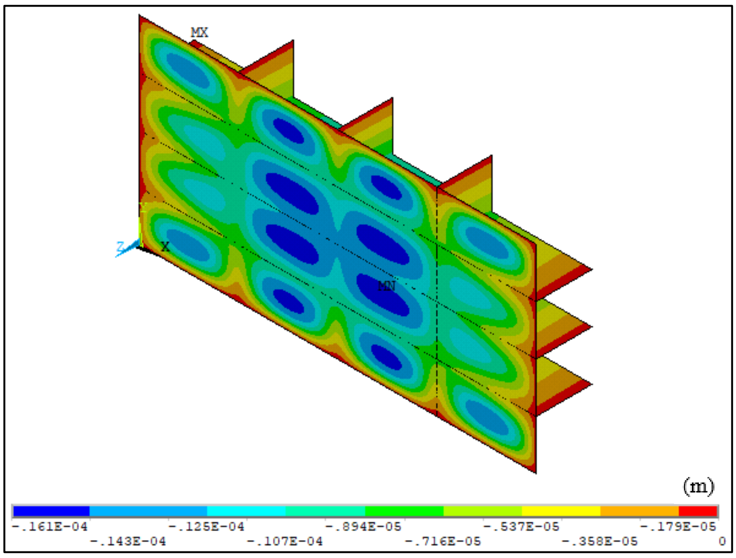


Figura B.33: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 35,00, S_t = 500,00 mm e S_l = 1000,00 mm

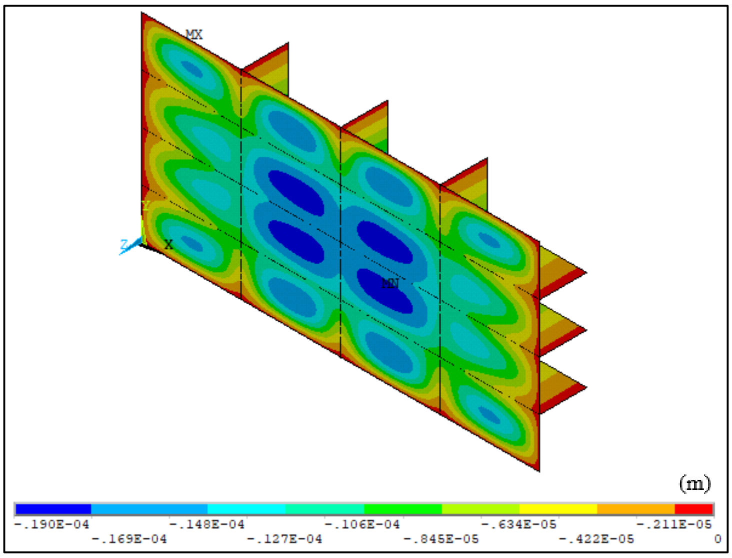


Figura B.34: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 24,70, S_t = 500,00 mm e S_l = 1000,00 mm

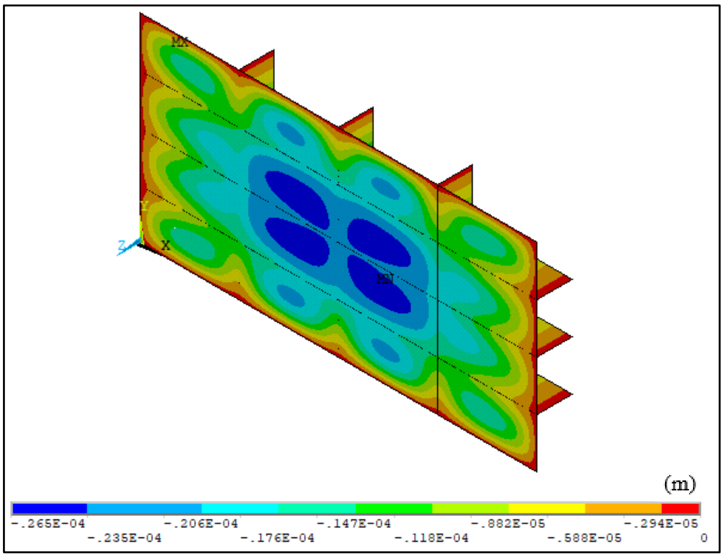


Figura B.35: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 13,96, S_t = 500,00 mm e S_l = 1000,00 mm

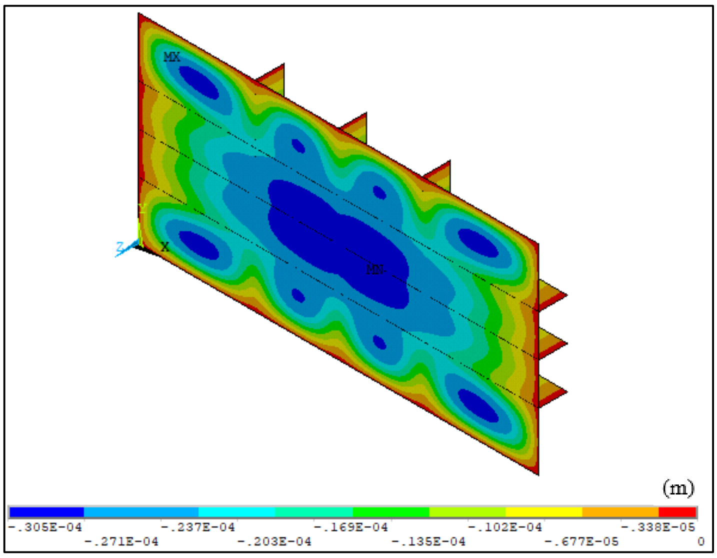


Figura B.36: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 8,93, S_t = 416,67 mm e S_l = 833,33 mm

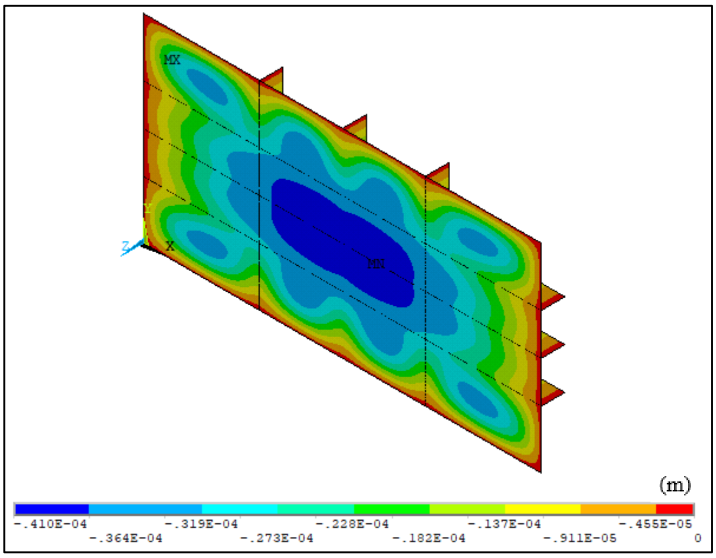


Figura B.37: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 6,14, S_t = 416,67 mm e S_l = 833,33 mm

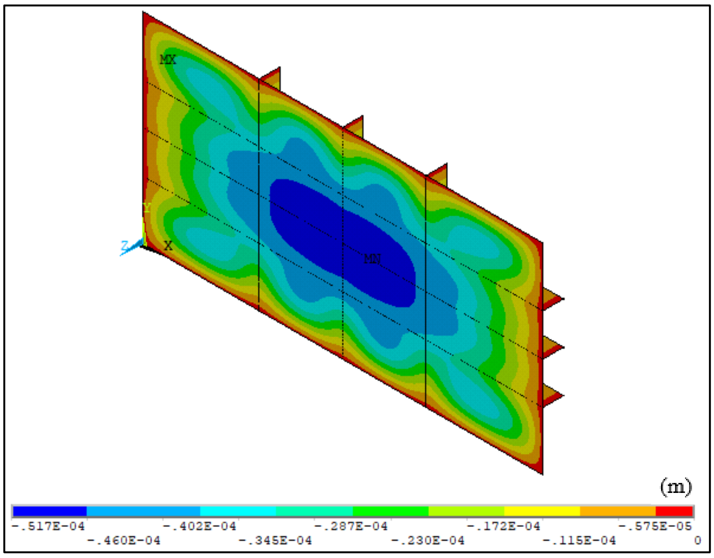


Figura B.38: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 4,61, S_t = 416,67 mm e S_l = 833,33 mm

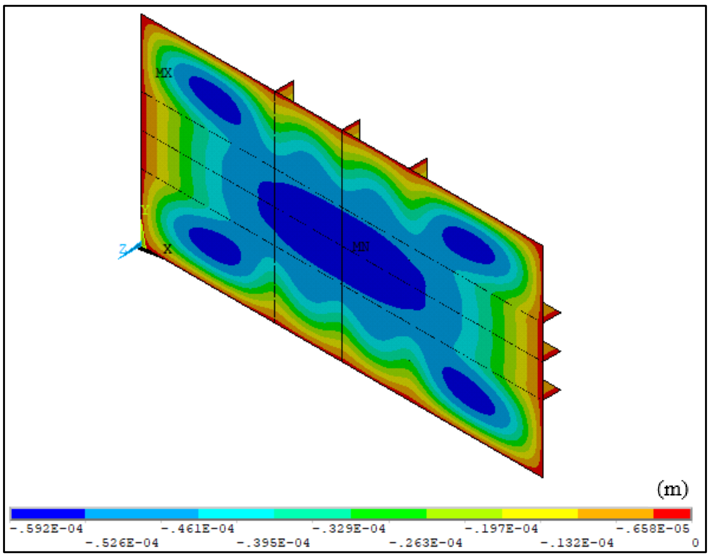


Figura B.39: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 3,53, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

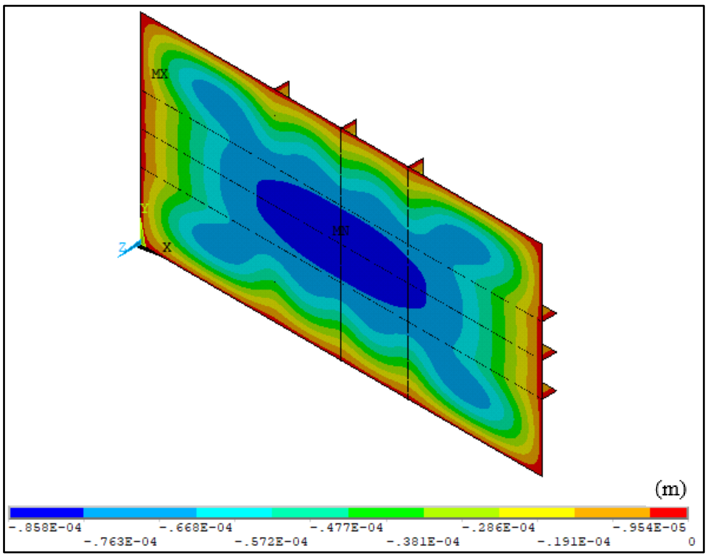


Figura B.40: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 2,27, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

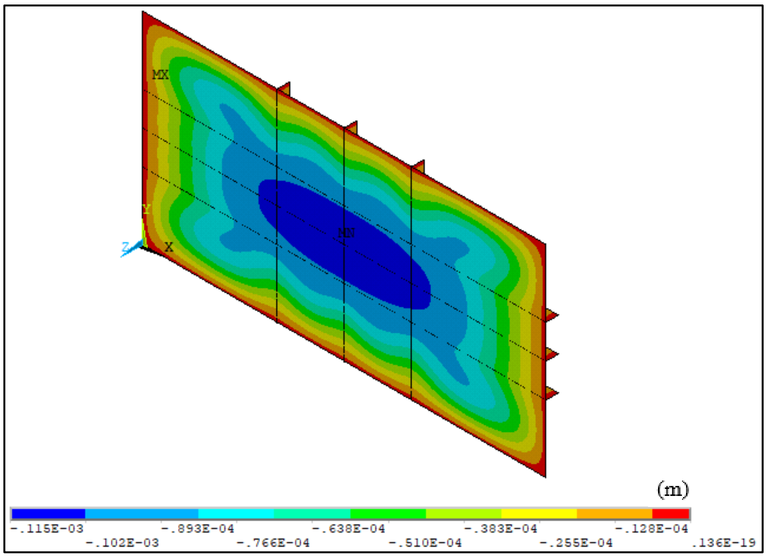


Figura B.41: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,59, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

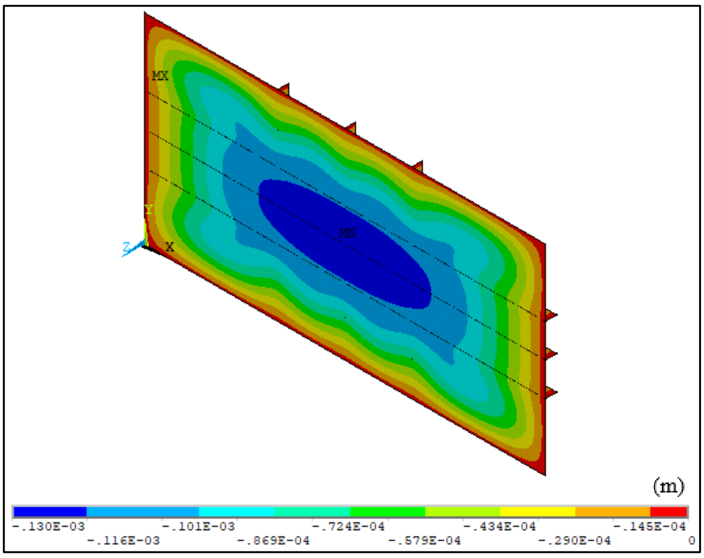


Figura B.42: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,36, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm

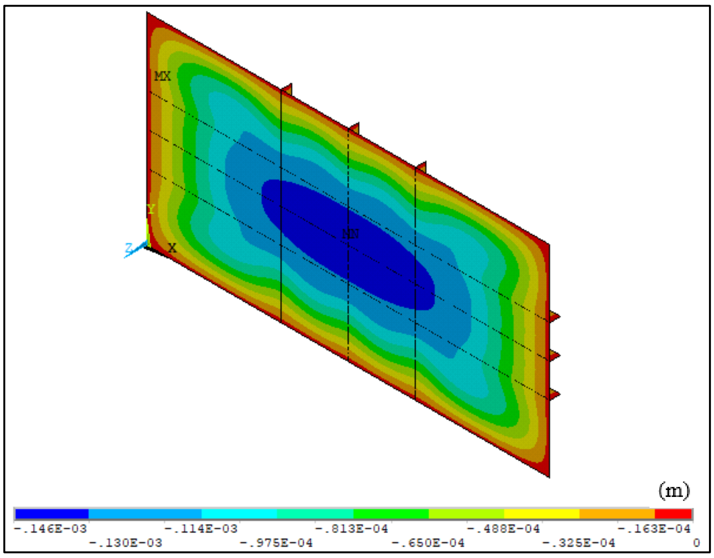


Figura B.43: Deflexão P(3,3) com U_z máximo, h_s/t_s = 1,17, S_t = 333,33 mm e S_l = 666,67 mm