

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL
APLICADOS À FLAMBAGEM BIAXIAL DE PLACAS DE
MATERIAL COMPÓSITO UTILIZADAS EM ESTRUTURAS
NAVAIS**

THIAGO DA SILVEIRA

Dissertação para obtenção Título de Mestre em Engenharia Oceânica

Rio Grande, Novembro de 2016.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
FLAMBAGEM BIAXIAL DE PLACAS DE MATERIAL COMPÓSITO
UTILIZADAS EM ESTRUTURAS NAVAIS

Por

THIAGO DA SILVEIRA
Eng. Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Co-orientador: Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Costa Couto (UFPEL - Convidado Externo)

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real (PPGEO/FURG)

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira (PPGEO/FURG)

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 25 de Novembro de 2016.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe e à minha irmã por todo o apoio e compreensão presentes durante a execução deste estudo.

Ao Prof. Dr. Liércio André Isoldi por toda compreensão, orientação e ensinamentos passados durante todo o processo de pesquisa e estudo que resultaram neste trabalho.

Ao Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO), Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos pela co-orientação e disponibilidade em atender aos discentes do PPGEO sempre que solicitado.

Ao colega e amigo Anderson Luis Correia, pelo incentivo à pesquisa e pela parceria em vários trabalhos executados ao longo desta jornada.

Ao colega Bruno Pacheco (in memoriam) pela amizade e pelo incentivo ao longo da graduação e pós-graduação.

À Universidade Federal do Rio Grande (FURG) pelo ensino de qualidade subsidiado pelo Governo Federal.

RESUMO

A flambagem elástica é um fenômeno de instabilidade estrutural indesejado para um projeto de engenharia. Na engenharia naval, placas delgadas utilizadas nas estruturas de navios e plataformas podem sofrer com esse fenômeno. Através da aplicação de carregamentos compressivos, a estrutura pode curvar-se repentinamente no sentido transversal, ou seja, fora do plano da placa. Para tal, o carregamento deve ser superior à carga crítica de flambagem da estrutura. O uso de materiais compósitos em meio oceânico é uma tecnologia relativamente atual e que pode trazer muitos benefícios a médio e longo prazo, visto que estes materiais não sofrem com a degradação através de corrosão marinha e estruturas de material compósito em geral são mais leves do que estruturas de aço, o que pode gerar um ganho na capacidade de carga e armazenagem das embarcações. A flambagem de placas laminadas ortotrópicas ainda é uma área a ser pesquisada, especialmente quando as placas possuem perfurações. Perfurações em placas utilizadas em aplicações navais e oceânicas se fazem necessárias para instalação de vigias, passagem de cabos e tubulações, janelas de visita e inspeção, escotilhas e afins. Em busca de uma otimização estrutural de placas laminadas compósitas, fazendo com que as perfurações afetem o mínimo possível o comportamento mecânico da estrutura, o Design Construtal pode ser aplicado. Este método é baseado em elementos da natureza e possibilita encontrar a ótima distribuição das imperfeições se associado a problemas da mecânica dos sólidos como o de placas delgadas perfuradas. Aplicando diferentes laminações foi possível encontrar um aumento da carga crítica de flambagem para uma placa compósita, com laminação simétrica e sem perfurações, de até 10,47%. Esta condição é encontrada quando o esquema de laminação obedece $(45^\circ/45^\circ)_3s$ ou $(-45^\circ/45^\circ)_3s$. No entanto a aplicação de furos reduz a carga crítica de flambagem, podendo a melhor carga crítica obtida para a placa com furo atendendo à fração volumétrica do furo $\varnothing = 0,25$ ficar até 35,22% menor do que para uma placa sem furo. Para uma fração volumétrica $\varnothing = 0,05$, a carga crítica é melhor, representando uma redução de 18,56% em relação à placa sem furo. Percebeu-se que quanto maior a fração volumétrica do furo, maior seu efeito redutor sobre a carga crítica de flambagem.

Palavras-chaves: Flambagem elástica, material compósito, carga crítica, Design Construtal, elementos finitos.

ABSTRACT

The elastic buckling is an undesirable structural instability phenomenon of engineering design. In naval engineering, thin plates used in ships and platforms can suffer this phenomenon. Under compressive loads the structure can suddenly bend in a transversal direction, i.e., out-of-plane. To obtain the instability, the load has to cross the structure's critical buckling load. The use of composite materials in oceanic environment is a relatively actual technology that can bring a lot of benefits in medium and long term, once these materials do not suffer with oceanic corrosion and also composite structures are, in general, lighter than steel structures, what can improve the storage and loads capacity in the ships. The buckling of laminated orthotropic plates it is still an area to be further studied, especially concerning perforated plates. Holes have to be applied in plates to maintenance access, cables and piping cross, hatches and others. Looking for structural optimization of composite laminated plates with cutout, in way the holes affect as low as possible the mechanic behavior of structure, the Constructal Design can be applied. This method is based in nature elements and turns possible to find the optimal imperfections distribution when associated to solid mechanics problems like buckling in thin plates. Applying different lamination schemes it is possible to find an improvement on critical buckling load for the composite plate, with symmetric lamination and without holes, close to 10,47%. This condition has been found when the lamination scheme respect $(45^\circ/45^\circ)_3$ s or $(-45^\circ/45^\circ)_3$ s. However the cutouts application reduce the buckling critical load causing, for $\varnothing = 0,25$, 35,22% of critical load decrease when compared with the same plate without cutout. When the cutout's volume fraction is $\varnothing = 0,05$, the best biaxial buckling critical load value has been found but still lower than the plate without cutout, with a reduction of 18,56%. It was realized that once the volume fraction is increased, the critical load will decrease.

Keywords: Elastic buckling, composite material, critical load, Constructal Design, finite elements.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS.....	13
LISTA DE SÍMBOLOS	15
1. INTRODUÇÃO	19
1.1. ESTADO DA ARTE.....	21
2. MATERIAIS COMPÓSITOS.....	38
2.1. CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS.....	39
2.1.1. Compósitos reforçados por fibras.....	39
2.2. MACROMECAÂNICA DE UMA LÂMINA	41
2.2.1. Constantes de engenharia para materiais ortotrópicos	45
2.2.2. Lei de Hooke aplicada aos materiais ortotrópicos sob Estado Plano de Tensões	47
2.2.3. Rotação da relação tensão-deformação para o EPT	50
2.3. ANÁLISE DE UM LAMINADO – TEORIA CLÁSSICA DA LAMINAÇÃO ...	55
2.3.1. Casos especiais de laminados.....	66
2.3.2. Laminados monolâmina	66
2.3.3. Laminado simétrico.....	67
2.3.4. Laminado cruzado-simétrico.....	68
2.3.5. Laminado simétrico angular	69
2.3.6. Laminado antissimétrico	69
3. FLAMBAGEM DE PLACAS	71
3.1. FLAMBAGEM DE PLACAS DE MATERIAL COMPÓSITO LAMINADO....	72
3.1.1. Flambagem de placas laminadas.....	73
4. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	75
4.1. ELEMENTOS E GRAUS DE LIBERDADE.....	77
4.2. MATRIZ DE RIGIDEZ E RESTRIÇÕES	80
4.3. MODELO COMPUTACIONAL	83
4.4. TESTE DE CONVERGÊNCIA DE MALHA	85
4.5. VERIFICAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL PARA A PLACA SEM FUROS	87
5. DESIGN CONSTRUTAL.....	90

5.1.	DESIGN CONSTRUTAL APLICADO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS	92
6.	RESULTADOS E DISCUSSÃO	96
6.1.	PLACA COM PERFURAÇÃO ELÍPTICA	120
6.2.	VERIFICAÇÃO DO MODELO PARA UMA PLACA PERFURADA	121
6.3.	DESIGN CONSTRUTAL APLICADO À PLACAS PERFURADAS.....	125
7.	CONCLUSÕES	138
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Configuração da placa retangular (a) sem perfurações, (b) com furo circular e (c) com furo semicircular (Baba e Baltaci, 2007).....	23
Figura 1.2 – Geometria da placa perfurada (Komur et al., 2010)	24
Figura 1.3 – Malha de elementos finitos e condições de contorno (adaptado de Komur et al., 2010)	25
Figura 1.4 – Efeito da posição angular do furo na carga crítica de flambagem (adaptado de Komur et al., 2010)	26
Figura 1.5 – (a) Aplicação do MEF para a placa e (b) placa laminada com carregamento axial (Beznea e Chirica, 2011).....	26
Figura 1.6 – Flambagem e comportamento pós flambagem da placa com furo central (Beznea e Chirica, 2011).....	27
Figura 1.7 – Variação da carga crítica adimensional em relação ao aumento do número de camadas (adaptado de Jameel et al., 2012)	28
Figura 1.8 - Variação da carga de flambagem adimensional em relação ao aumento da razão de aspecto da placa (adaptado de Jameel et al., 2012).....	29
Figura 1.9 - Variação da carga crítica de flambagem em relação à razão de aspecto a/b (adaptado de Joshi et al., 2013).....	30
Figura 1.10 – Variação da carga crítica de flambagem em relação à variação da posição do furo (adaptado de Joshi et al., 2013).....	31
Figura 1.11 – Geometria da placa retangular com perfuração retangular e aplicação de carga compressiva uniaxial (adaptado de Reddy et al., 2014).....	31
Figura 1.12 - Variação da carga crítica de flambagem em relação a β , c/b e d/b (adaptado de Reddy et al., 2014).....	32
Figura 1.13 - Geometria da placa analisada (adaptado de Shakya et al., 2015).....	33
Figura 1.14 – Configuração flambada (a) da placa com furo elíptico-horizontal e (b) da placa com furo elíptico-vertical (Shakya et al., 2015).....	33
Figura 1.15 - Efeito dos diferentes tipos de furo na carga crítica de flambagem (adaptado de Shakya et al., 2015).....	34
Figura 1.16 – Modelo de elementos finitos para a placa, onde $a/b = 2$, $S = 100$, $N = 4$ e $\beta = 0$ (Babu e Rao, 2016)	34
Figura 1.17 – Efeito da orientação do furo na carga crítica de flambagem (adaptado de Babu e Rao, 2016).....	35

Figura 2.1 - Elementos típicos dos compósitos reforçados por fibras, onde: (a) Lâmina com fibras unidirecionais; (b) Lâmina com fibras tecidas; (c) Laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções (Mendonça, 2005).	39
Figura 2.4 – Direções principais 1 - 2 - 3 das propriedades mecânicas do material em uma lâmina (Jones, 1999; Mendonça, 2005; Isoldi 2008).	42
Figura 2.5 – Significado físico para as relações deformação-tensão para materiais anisotrópicos (Isoldi, 2008).	45
Figura 2.6 – Tensões coplanares num ponto genérico de coordenadas P de uma lâmina. Rotação positiva do sistema de eixos $0xy$ para o sistema $0I2$, e correspondente rotação das tensões (Gagliardo, 2008).	51
Figura 2.7 – Geometria de deformação da placa no plano XZ (Mendonça, 2005).	57
Figura 2.8 - Distribuição das tensões e deformações de um laminado (Jones, 1999).	60
Figura 2.9 – Forças (a) e momentos (b) num elemento diferencial de um laminado plano (Jones, 1999).	61
Figura 2.10 – Notações para as lâminas de um laminado com n lâminas (Jones, 1999).	62
Figura 2.11 – Significado físico dos termos de rigidez nas forças e momentos resultantes (Isoldi, 2008).	64
Figura 2.12 – Laminado simétrico com números ímpar (a) e par (b) de lâminas (Isoldi, 2008).	68
 Figura 3.1 - Placa com carregamento uniaxial (Åkesson, 2007).	71
Figura 3.2 - Curva carga $\times$ deslocamento para uma placa isotrópica carregada axialmente (Åkesson, 2007).	72
Figura 3.3 - Placa sujeita a carregamento compressivo, uniaxial e uniforme no plano. (Jones, 1999)	73
Figura 3.4 - Típico comportamento de flambagem de placa simplesmente apoiada (Jones, 1999).	73
 Figura 4.1 - Casco de uma embarcação modelada com a aplicação do Método de Elementos Finitos. (http://www.oceanica.ufrj.br/deno/prod_academic/relatorios/atuais/Caio_%20Ricardo/relat2/Analise%20Estrutural.htm)	76
Figura 4.2 - Divisão de um domínio em elementos finitos (Vanalli, 2004).	77
Figura 4.3 - Elementos de divisão do domínio com uma e duas dimensões (Adaptado de http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/theory/index.html)	77
Figura 4.4 - Elementos de divisão de domínio com três dimensões (Adaptado de http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/theory/index.html)	78

Figura 4.5 - Graus de liberdade em elementos de membrana e placa fletida (Blaauwendraad, 2010).	78
Figura 4.6 - Divisão do domínio da estrutura de um navio em elementos finitos quadrilaterais de duas dimensões (Adaptado de http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/)	79
Figura 4.7 - Geometria dos elementos finitos encontrados em softwares comerciais (Blaauwendraad, 2010).	80
Figura 4.8 - Esquemas de pontos de Gauss (Blaauwendraad, 2010).....	81
Figura 4.9 - Geometria do elemento SHELL281 (ANSYS User's Manual, 2009).....	83
Figura 4.10 – Convergência dos resultados obtidos do teste de independência de malha.	86
Figura 4.11 - Placa utilizada para verificação do modelo computacional. Carga crítica de flambagem de 252.70 N/mm para a configuração estudada.	88
Figura 5.1 - Exemplos da Lei Construtal na natureza (Adaptado de http://www.mindmedley.com/portfolio/design-in-nature-adrian-bejan-and-peder-zane/)	91
Figura 5.2 - Analogia entre o escoamento de fluido e a concentração de tensões.	94
Figura 6.1 – Placa sem perfurações e simplesmente apoiada nas arestas, submetida à compressão biaxial, sendo $H = 500$ mm e $L = 1000$ mm.	96
Figura 6.2 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 1	98
Figura 6.3 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 2	99
Figura 6.4 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 3	100
Figura 6.5 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 4	101
Figura 6.6 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 5	103
Figura 6.7 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 6	104
Figura 6.8 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 7	105
Figura 6.9 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 8	107

Figura 6.10 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 9.....	108
Figura 6.11 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 10.....	109
Figura 6.12 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 11.....	110
Figura 6.13 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 12.....	111
Figura 6.14 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 13.....	112
Figura 6.15 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 14.....	113
Figura 6.16 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 15.....	114
Figura 6.17 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 16.....	115
Figura 6.18 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 17.....	116
Figura 6.19 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 18.....	117
Figura 6.20 - Comparativo dos maiores valores da carga crítica de flambagem para cada laminação que compõe o Grupo 19.....	119
Figura 6.21 - Placa com furo elíptico centrado	121
Figura 6.22 – Curva obtida do teste de independência de malha para a placa com furo.....	122
Figura 6.23 – Comportamento da placa quando atingida a carga crítica de flambagem.....	123
Figura 6.24 - Comparação das curvas de carga crítica entre Joshi et al. (2013) utilizando SHELL99 e o presente estudo utilizando SHELL281.....	125
Figura 6.25 – Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,15$, (b) $H_0/L_0 = 0,38$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 2,46$ para $\varnothing = 0,05$	128
Figura 6.26 - Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,10$, (b) $H_0/L_0 = 0,35$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 1,32$ para $\varnothing = 0,10$	130
Figura 6.27 – Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,15$, (b) $H_0/L_0 = 0,34$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 0,88$ para $\varnothing = 0,15$	132
Figura 6.28 - Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,20$, (b) $H_0/L_0 = 0,38$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 0,71$ para $\varnothing = 0,20$	133

Figura 6.29 - Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,25$, (b) $H_0/L_0 = 0,36$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 0,53$ para $\emptyset = 0,25$	134
Figura 6.30 – Curvas obtidas para cada $\emptyset$ avaliado	135
Figura 6.31 – Variação do $(H_0/L_0)_o$ em relação à variação da fração volumétrica ($\emptyset$)	136
Figura 6.32 – Variação da carga crítica de cada $(H_0/L_0)_o$ em relação à variação da fração volumétrica ($\emptyset$)	136
Figura 6.33 - Configuração flambada na condição de $(H_0/L_0)_o$ para cada fração volumétrica ($\emptyset$).	137

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1– Teste de independência de malha para uma placa sem furo submetida à solicitação de compressão biaxial.....	86
Tabela 4.2 - Propriedades e dimensões da placa (Adaptado de Barbero, 2007)	87
Tabela 4.3 – Propriedades de Engenharia para AS4/9310	88
Tabela 6.1 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 1.....	97
Tabela 6.2 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 2.....	99
Tabela 6.3 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 3.....	100
Tabela 6.4 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 4.....	101
Tabela 6.5 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 5.....	102
Tabela 6.6 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 6.....	103
Tabela 6.7– Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 7.....	105
Tabela 6.8 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 8.....	106
Tabela 6.9 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 9.....	107
Tabela 6.10 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 10.....	108
Tabela 6.11 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 11.....	109
Tabela 6.12 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 12.....	110
Tabela 6.13 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 13.....	112
Tabela 6.14 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 14.....	113
Tabela 6.15 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 15.....	114
Tabela 6.16 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 16.....	115
Tabela 6.17 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 17.....	116
Tabela 6.18 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 18.....	117
Tabela 6.19 - Grupo 19	118
Tabela 6.20 – Teste de independência de malha para a placa com furo	121
Tabela 6.21- Propriedades da placa com furo circular (Joshi et al., 2013)	122
Tabela 6.22 - Comparativo entre os valores de carga crítica obtidos pelo presente estudo, utilizando SHELL281, e por Joshi et al. (2013) utilizando SHELL99	123
Tabela 6.23 - Valores analisados para $\varnothing = 0,05$	127
Tabela 6.24 - Valores analisados para $\varnothing = 0,10$	129
Tabela 6.25 - Valores analisados para $\varnothing = 0,15$	131

Tabela 6.26 - Valores analisados para $\varnothing = 0,20$	132
Tabela 6.27 - Valores analisados para $\varnothing = 0,25$	134

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Romanos:

A_{ij} - Elementos da matriz A

$[A]$ - matriz de rigidez extensional

a – Comprimento da placa

b – Largura da placa

b – Comprimento do furo (Komur et al., 2010; Shakya et al., 2015)

B_{ij} – Elemento da matriz B

$[B]$ - matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e extensão

C_{ij} – Elemento da Matriz de Rigidez Completa do Material

$[C]$ - Matriz de rigidez completa do laminado

c – Largura do furo (Komur et al., 2010; Shakya et al., 2015)

d – Largura do furo (Reddy et al., 2014)

det – Função determinante

D_{ij} – Elemento da Matriz D

$[D]$ - matriz de rigidez à flexão.

E_1 - Módulo de Young na direção principal 1

E_2 - Módulo de Young na direção principal 2

E_3 - Módulo de Young na direção principal 3

E_x - Módulo de Young na direção de x

E_y - Módulo de Young na direção de y

E_z - Módulo de Young na direção de z

F_1 - Vetor representativo da forças atuantes no nó 1

F_N - Vetor representativo da forças atuantes no nó N

$F_{e,i}$ - Vetor das forças atuantes no elemento no nó i

$F_{e,j}$ - Vetor das forças atuantes no elemento no nó j

$F_{e,k}$ - Vetor das forças atuantes no elemento no nó k

G_{12} - Módulo de elasticidade transversal cisalhante no plano 1-2

G_{23} - Módulo de elasticidade transversal cisalhante no plano 2-3

G_{31} - Módulo de elasticidade transversal cisalhante no plano 3-1
 G_{yz} - Módulo de elasticidade transversal cisalhante no plano yz
 G_{xz} - Módulo de elasticidade transversal cisalhante no plano xz
 G_{xy} - Módulo de elasticidade transversal cisalhante no plano xy
 h_k - Espessura de uma lâmina k
 H - Largura da placa
 h - Espessura da placa
 H_0 - Característica dimensional do furo na direção y
 h_k - Espessura de uma lâmina k
 k - Número de ordem da lâmina
 $[K]$ - Matriz de rigidez total
 $[K_E]$ - Matriz de rigidez convencional para pequenas deformações
 $[K_G]$ - Matriz de rigidez geométrica
 K_{ij} - Termos da matriz de rigidez do elemento triangular
 L - Comprimento da placa
 L_0 - Característica dimensional do furo na direção x
 $\{M\}$ - Esforços de momentos por unidade de comprimento
 $\{N\}$ - Esforço normal por unidade de comprimento
 Q_{ij} - Elementos da matriz de rigidez reduzida
 S_{ij} - Elemento da matriz S (Relação tensão deformação)
 P - Carregamento compressivo sobre a placa
 $\{P_0\}$ - Esforço interno existente no início do carregamento
 t - espessura da placa
 $\{U\}$ - Vetor deslocamento
 u_1 - Vetor representativo dos graus de liberdade no nó 1
 u_N - Vetor representativo dos graus de liberdade no nó N
 u_i - Vetor representativo dos graus de liberdade no nó i
 u_j - Vetor representativo dos graus de liberdade no nó j
 u_k - Vetor representativo dos graus de liberdade no nó k
 U_x - Translação no sentido de x
 U_y - Translação no sentido de y
 U_z - Translação no sentido de z
 u_x - Deslocamento na direção x

u_y – Deslocamento na direção y
 u^o – Parcela de deslocamento de membrana em x
 v^o – Parcela de deslocamento de membrana em y
 V_0 - Volume do furo
 V – Volume da placa sem furo
 w - Deslocamento na direção z
 P_{Cr} – Carga crítica de flambagem
 $(P_{Cr})_m$ - Carga crítica maximizada
 N – número de camadas (Jameel et al., 2012; Babu e Rao, 2016)

Símbolos Gregos:

β – Orientação do furo (Reddy et al., 2014; Babu e Rao, 2016)
 θ – ângulo de orientação das fibras em relação ao eixo x
 Δ - Determinante do quadrante superior esquerdo
 $\emptyset$ – Fração volumétrica do furo
 $\{\kappa\}$ – Curvatura da superfície de referência
 λ – Escalar multiplicado do esforço interno
 λ_1 - Menor autovalor do cálculo de esforços
 ψ_x - Inclinação normal à superfície na direção x
 ψ_y - Inclinação normal à superfície na direção y
 $z \psi_x$ – Deslocamento coplanar variável com z na direção x
 $z \psi_y$ - Deslocamento coplanar variável com z na direção y
 θ_x – Rotação em torno do eixo x
 θ_y – Rotação em torno do eixo y
 θ_z – Rotação em torno do eixo z
 σ_i – Tensão Normal
 τ_{ij} - Tensão de Cisalhamento
 ν_{ij} - Coeficiente de Poisson
 ε_i - Deformação Normal
 γ_{ij} - Deformação Cisalhante

Sobrescritos:

T – Transposta

Subscritos:

s – simétrico

o – ótimo

m - maximizado

1. INTRODUÇÃO

No Brasil, boa parte da economia ainda se baseia em atividades navais. Embarcações cargueiras atracam diariamente nos portos brasileiros, navios estes que, a cada dia que passa, trazem uma quantidade maior de cargas e requerem um calado maior. Em decorrência dos grandes volumes transportados, as estruturas das embarcações devem estar adequadas à capacidade de transporte. Plataformas de perfuração de poços de petróleo, especialmente os navios-sonda de últimas gerações, do inglês *Drillships*, são embarcações robustas e com grande capacidade para o armazenamento de cargas no *deck* assim como para as grandes solicitações devido às operações de perfuração. Da mesma forma que nos navios-sonda, as plataformas FPSO, do inglês *Floating Production Storage and Offloading*, possuem uma grande solicitação estrutural por acomodações de cargas e movimentações relativas ao operacional cotidiano.

O montante investido para a conclusão de um projeto de construção naval ainda é muito significativo. Longos períodos com mão de obra temporária e maiores gastos com arrendamento de terras para instalação de empresas, se somam aos custos de material utilizado e projeto. Com a melhoria e padronização dos elementos estruturais utilizados e com o estudo de novas estruturas, é possível que o tempo gasto para uma obra deste porte se reduza. Com o conhecimento das solicitações presentes ao dia a dia da estrutura e a ciência dos materiais disponíveis, pode-se fazer redução de matéria prima, redução de processos utilizados para cada componente estrutural e redução dos tempos gastos com montagem, através do desenvolvimento de estruturas específicas para certa aplicação.

Outro assunto que pode ser abordado neste tema, diz respeito ao material utilizado. Atualmente existem muitas pesquisas em busca de novos materiais, mais leves e resistentes. Exemplo disso são os materiais que utilizam ligas metálicas unidas com tecidos de fibra, apresentando resistência elevada, baixa massa e grande versatilidade na sua utilização. Para as estruturas oceânicas, muito do trabalho é feito de forma conservadora, com a utilização de aços. O motivo disto pode ser devido ao fato de que ainda não sejam conhecidos materiais desenvolvidos com as propriedades necessárias ao uso em ambiente oceânico. Outra possibilidade é que pode não haver

nenhum estudo considerando dados destes materiais para comprovar a segurança da utilização dos mesmos. Uma pesquisa aprofundada neste tema pode trazer um grande avanço para a tecnologia naval brasileira.

Uma das grandes preocupações em um projeto estrutural naval é a estabilidade da estrutura perante as solicitações decorrentes da utilização para a qual foi projetada. A flambagem de estruturas é um fenômeno de instabilidade presente em corpos esbeltos quando submetidos a cargas de compressão. Já se possui um número considerável de trabalhos que abordam flambagem de placas finas feitas de material isotrópico, especialmente o aço, onde diversas configurações são testadas e comparadas quanto ao valor da carga crítica de flambagem. Em se tratando de materiais ortotrópicos, conhecidos como compósitos, a literatura mostra uma área ainda pouco explorada.

O estudo da flambagem de placas finas feitas de material compósito, com e sem perfurações, contribuirá com o desenvolvimento das tecnologias navais, visto que o uso destes componentes pode reduzir significativamente o peso de parte das estruturas, inclusive melhorando algumas propriedades da construção final.

Estruturas de placas de material compósito laminado, como a estrutura de uma fuselagem de avião, do casco de navios ou da cápsula de um automóvel, são geralmente expostas a solicitações biaxiais de cargas no seu plano. As formas de flambagem biaxiais geralmente aparecem no plano de placas retangulares, quando estas estruturas estão submetidas a alguma condição de contorno totalmente suportada. Ainda se esta placa for submetida a carregamentos uniaxiais compressivos, a placa pode apresentar estado de tensão biaxial e deve ser revelada uma deflexão biaxial devido às interações dos carregamentos axiais e das forças reativas do contorno (Soo Kim, 1995). Sabe-se também que placas perfuradas são amplamente utilizadas em aplicações de engenharia, especialmente na indústria naval onde são necessárias escotilhas, portas de visita, janelas de acesso, passagem de cabos e tubulações, estruturas internas de tanques comunicantes, entre outras.

Nesse contexto, este trabalho apresenta a análise numérica de placas laminadas, ortotrópicas e simétricas sob solicitação de flambagem biaxial. Para obtenção dos valores da carga crítica de flambagem, será utilizado o software ANSYS®, baseado no Método de Elementos Finitos (MEF). Um estudo inicial com placas sem furos avalia o comportamento da carga crítica para cada laminação analisada, buscando assim identificar qual o esquema de laminação que proporciona o maior valor da carga crítica de flambagem, para uma solicitação biaxial, em placas sem furos.

Na sequência, o esquema de laminação com o melhor desempenho mecânico foi adotado para realizar um estudo de avaliação geométrica de placas laminadas contendo uma perfuração elíptica centralizada. Para isso o método Design Construtal foi empregado, permitindo propor diferentes geometrias para o furo elíptico, que tiveram seu comportamento mecânico sob flambagem biaxial comparados, visando maximizar a carga crítica de flambagem das mesmas.

1.1. ESTADO DA ARTE

Aqui, inicialmente serão descritos trabalhos relacionados à flambagem de placas de material compósito e, na sequência, serão apresentados trabalhos sobre flambagem de placas de material isotrópico aplicando o método Design Construtal. Assim, os principais assunto envolvidos na presente pesquisa serão devidamente abordados no estado da arte

De acordo com Jones (1999) laminados, como qualquer estrutura, devem ter furos para atenderem necessidades de projeto. Uma razão usual é para a acomodação de parafusos. Outra proposta é para promover acesso a partir de um lado, do laminado, para o outro lado. A análise de tensões em torno dos furos é bastante difícil. Com a aplicação de cargas axiais de tração, em uma placa retangular com furo circular central, observa-se que o fator de concentração de tensões para compósitos vidro-epóxi é de 4 (quatro), para boro-epóxi é igual 6 (seis) e para o grafite-epóxi é em torno de 9 (nove), enquanto o mesmo fator é igual a 3 (três) para materiais isotrópicos usuais. Muitos materiais isotrópicos como, por exemplo, o aço e o alumínio são suficientemente dúcteis para possibilitarem pequenas deformações seguidas da acomodação das tensões, localmente ou no entorno da concentração de tensões. No entanto, muitos materiais compósitos são consideravelmente menos dúcteis do que metais isotrópicos. Sendo assim, materiais compósitos têm dupla desvantagem, no que diz respeito às máximas concentrações de tensões e a menor habilidade para produzir a reacomodação das concentrações de tensões. No entanto, o material compósito apresenta altas relações rigidez/peso e resistência/peso; alta resistência à fadiga; alto amortecimento; isolamento térmica e acústica; e resistência à corrosão.

Austin (2003) aplicou cargas compressivas de flambagem em placas de plástico reforçadas por fibra de vidro (FRP – *Fiberglass Reinforced Plastic Plates*). Utilizando o MEF através do software ANSYS, concluindo que dentre os testes realizados por ele, o

laminado que apresentou melhor resultado para a carga crítica de flambagem uniaxial foi da placa com um esquema de laminação ($90^\circ/+45^\circ/-45^\circ$), quando se tratando de condições de contorno simplesmente apoiadas nas quatro arestas. No entanto, quando trocadas as condições de contorno para três arestas simplesmente apoiadas e uma livre (simples-simples-simples-livre), ou ainda simples-fixa-simples-livre, os melhores resultados foram obtidos para a laminação sob orientação ($90^\circ/+15^\circ/-15^\circ$) para razões de aspecto menores do que 2 (dois). Isso também mostra que a presença do acoplamento flexão-torção diminui a carga crítica de flambagem do laminado em até 30%.

Em Mendonça (2005), é feita uma análise do efeito da orientação das lâminas no que diz respeito à rigidez do laminado sob flambagem uniaxial. Para tal, quatro diferentes laminações foram adotadas, onde o subscrito *s* indica que existe simetria na laminação.

- a) $[(+45^\circ)_8]$, isto é, todas as oito lâminas à 45° ;
- b) $[(+45^\circ)_2/(-45^\circ)_2]_s$, isto é, $[+45^\circ/+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ// -45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/+45^\circ]$;
- c) $[(\pm 45^\circ)_2]_s$, isto é, $[+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ// -45^\circ/+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ]$;
- d) $[(\pm 45^\circ)/(-45^\circ)/(+45^\circ)]_s$, isto é, $[+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ// +45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ]$;

Todas as lâminas foram consideradas, por Mendonça (2005), com espessura idêntica de 3 mm e com as mesmas propriedades do material. Comparando os quatro resultados obtidos, conclui-se que para os modelos $[(+45^\circ)_2/(-45^\circ)_2]_s$, $[(\pm 45^\circ)_2]_s$ e $[(\pm 45^\circ)/(-45^\circ)/(+45^\circ)]_s$, se o número de lâminas à $+45^\circ$ for idêntico ao número de lâminas em -45° , a ordem das lâminas não afeta a rigidez extensional $[A]$ nem os termos da rigidez à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} , e D_{66} , sendo estes elementos da matriz estudada na Teoria Clássica de laminação – TCL que será descrita no próximo capítulo. Mendonça (2005) ainda conclui que desde que o laminado seja simétrico, o elemento $[B]$ da matriz da TCL será nulo, ou seja, $[B] = [0]$. Observou-se que a configuração de laminados $[(\pm 45^\circ)/(-45^\circ)/(+45^\circ)]_s$ apresenta o menor nível de anisotropia de flexão, devido ao menor valor da razão D_{16}/D_{11} , sendo estes elementos da matriz da TCL. Torna-se evidente, também, que o nível de anisotropia pode ser arbitrariamente reduzido também pelo simples artifício de aumentar o número de lâminas, usando uma sequência de orientações adequadas e mantendo a simetria do laminado.

Baba e Baltaci (2007) estudaram os efeitos da configuração de laminação antissimétrica, de furos e da razão comprimento/espessura, na carga crítica de flambagem uniaxial de placas compósitas de fibra de vidro com epóxi (*E/glass-epoxy*). As cargas críticas foram apresentadas para placas simetricamente e antissimetricamente laminadas sujeitas a carregamento axial compressivo. Dois diferentes tipos de

laminação foram estudados: $[90^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]$ e $[90^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$. Também dois tipos diferentes de furos foram testados, um circular e um semicircular, como podem ser vistos na Fig. 1.1 Para finalizar, duas razões comprimento (L)/espessura (t) foram abordadas, $L/t = 75$ e $L/t = 37,5$, em diferentes condições de contorno. Baba e Baltaci (2007) observaram que a comparação dos resultados numéricos com o dos testes executados experimentalmente mostra que o valor da carga crítica de flambagem obtido experimentalmente é geralmente maior dos gerados pelo modelo computacional. As principais fontes desta diferença entre o MEF e a análise experimental se dá devido às imperfeições iniciais dos corpos de prova, da característica ortotrópica do material e das condições do teste experimental. Concluiu-se que a presença de perfurações reduz a carga crítica de flambagem para todas as configurações testadas e que, de forma geral, o valor obtido para a carga crítica é o mesmo quando o furo é circular ou semicircular. Também, quando aumentada a relação L/t (comprimento/espessura), há uma diminuição considerável da carga crítica de flambagem chegando a 75% de redução quando a relação L/t é incrementada em 50%. Por fim, observou-se que as cargas críticas de flambagem foram maiores quando testadas as configurações de laminação antissimétrica, especialmente quando as condições de contorno contemplavam engaste. Normalmente, as placas simplesmente apoiadas apresentaram valores menores do que quando engastadas.

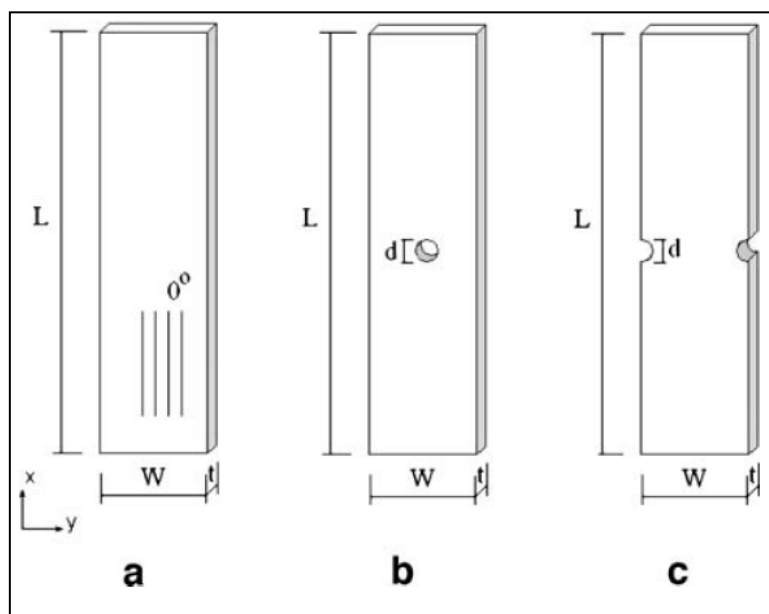


Figura 1.1 - Configuração da placa retangular (a) sem perfurações, (b) com furo circular e (c) com furo semicircular (Baba e Baltaci, 2007).

Em Al-Qablan et al. (2010), foi utilizado o MEF para encontrar a melhor carga crítica de flambagem para as placas de material compósito, contendo furos e enrijecedores. Três tipos de carregamentos foram utilizados: uniaxial, biaxial e de cisalhamento. Baseado no modelo de estudo, Al-Qablan et al. (2010) percebeu que o incremento total da carga crítica de flambagem para as placas de material compósito, com furos e utilizando enrijecedores, pode chegar a cinco vezes no carregamento uniaxial, sete vezes no carregamento biaxial e duas vezes no carregamento de cisalhamento, quando comparados os valores obtidos com os resultados da placa sem uso de furos e enrijecedores. Ainda neste estudo, considerando valores pequenos, entre 0,0 e 0,3, para as razões entre o diâmetro do furo e a largura da placa, podem-se desconsiderar os efeitos de furos para os casos de solicitação uniaxial e biaxial em placas com enrijecedores. Assim, a carga crítica ótima encontrada respeita valores da mesma razão entre 0,4 e 0,6, quando a placa apresentou o maior valor de carga suportada antes de sofrer com o fenômeno, indesejado, da flambagem.

Em Komur et al. (2010) foi feito um estudo numérico sobre flambagem uniaxial aplicado a placas laminadas de vidro-poliéster com furo circular/elíptico. O MEF foi adotado para a realização de estudos paramétricos, em várias placas, baseados no formato e na posição do furo. A Fig. 1.2 apresenta a placa utilizada e a Fig. 1.3 mostra as condições de contorno, a malha de elementos e o carregamento aplicado na placa analisada.

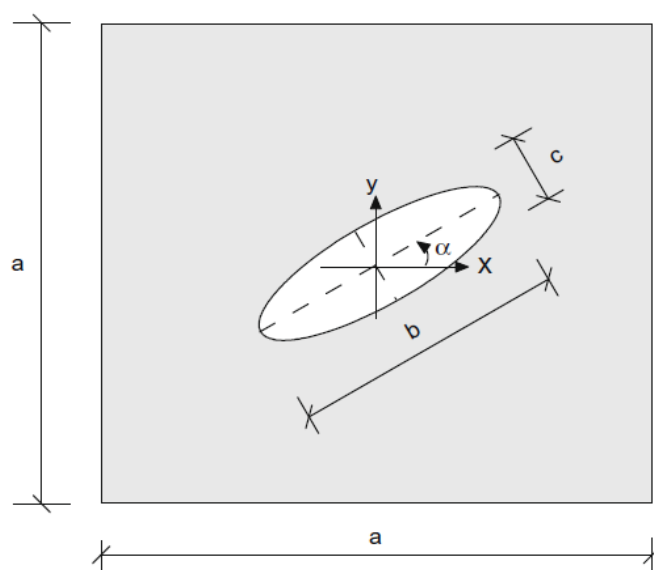


Figura 1.2 – Geometria da placa perfurada (Komur et al., 2010)

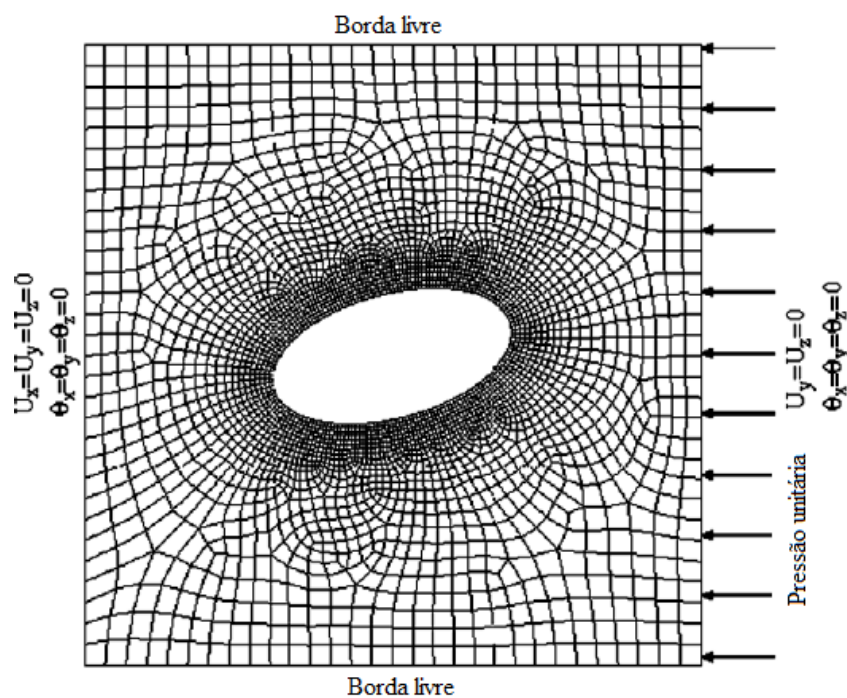


Figura 1.3 – Malha de elementos finitos e condições de contorno (adaptado de Komur et al., 2010)

Ainda em Komur et al. (2010) as placas laminadas são feitas conforme laminação cruzada-simétrica $(0^\circ/90^\circ)_2s$ e angulares-simétricas $(15^\circ/75^\circ)_2s$, $(30^\circ/60^\circ)_2s$ e $(45^\circ/-45^\circ)_2s$. Os resultados mostram que as cargas críticas de flambagem diminuem à medida que são aumentadas as razões c/a e b/a (ver Fig. 1.2). O aumento do ângulo de posicionamento do furo (α) causa decréscimo da carga crítica de flambagem. Para a análise feita, o laminado cruzado-simétrico se mostrou o mais resistente à flambagem. As curvas obtidas, mostrando a variação da carga crítica em função do ângulo α são vistas na Fig. 1.4.

Beznea e Chirica (2011) apresentam um estudo numérico para placa quadrada, com furo elíptico central, sob carregamento compressivo uniaxial ao longo do eixo x e com as duas extremidades engastadas. A Fig. 1.5 apresenta (a) a placa com a aplicação do MEF e (b) a placa laminada analisada com carregamento uniaxial ao longo de x .

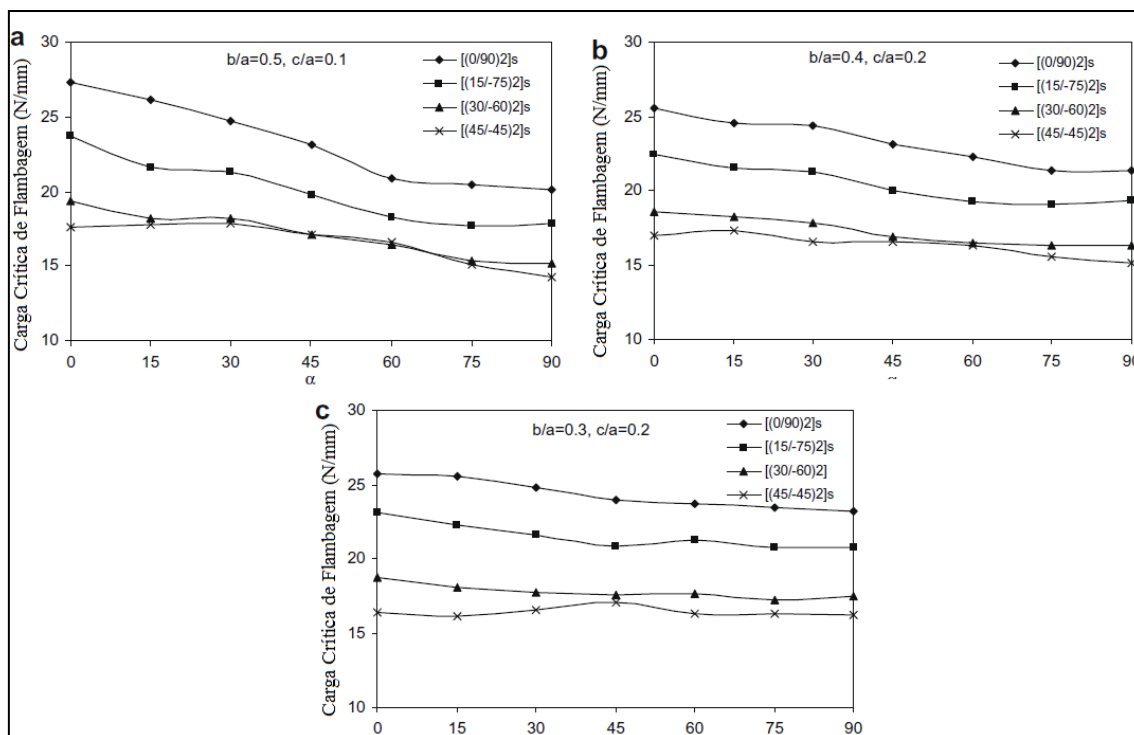


Figura 1.4 – Efeito da posição angular do furo na carga crítica de flambagem (adaptado de Komur et al., 2010)

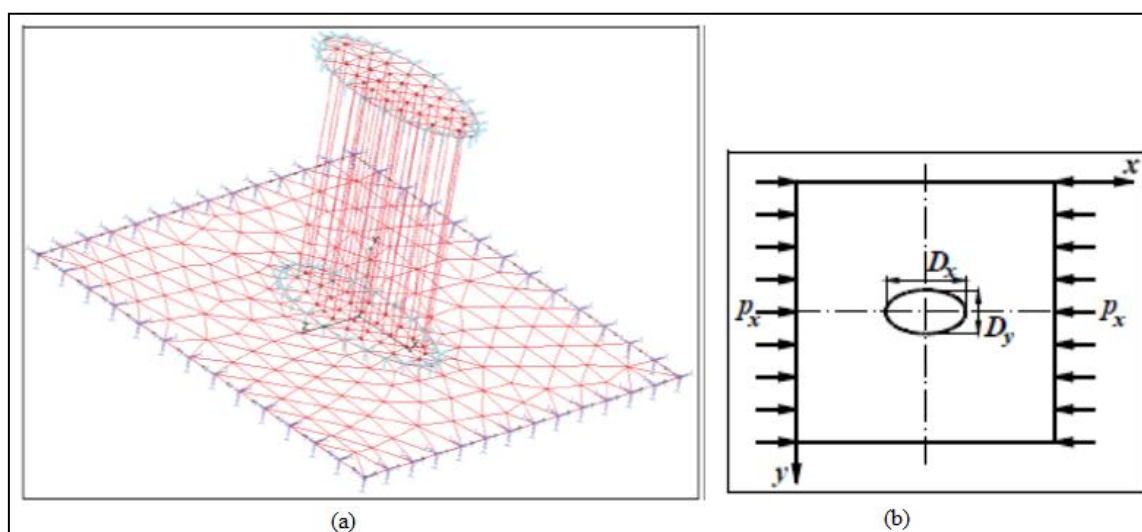


Figura 1.5 – (a) Aplicação do MEF para a placa e (b) placa laminada com carregamento axial (Beznea e Chirica, 2011)

Na Fig. 1.6 a variação dos deslocamentos transversais é considerada para o ponto central da placa e cada curva representa uma razão de diâmetro do furo. A carga crítica foi determinada através do método gráfico. Em cada curva que corresponde a um caso de laminação, a assíntota da curva depois da bifurcação foi plotada. Os valores de

carga crítica de flambagem obedecem ao intervalo $43.41 \text{ MPa} < P_{cr} < 59.5 \text{ MPa}$. Nota-se na Fig. 1.6 que durante o incremento da carga e o deslocamento transversal do ponto central da placa, os valores não mantêm um comportamento constante, apresentando oscilações na curva.

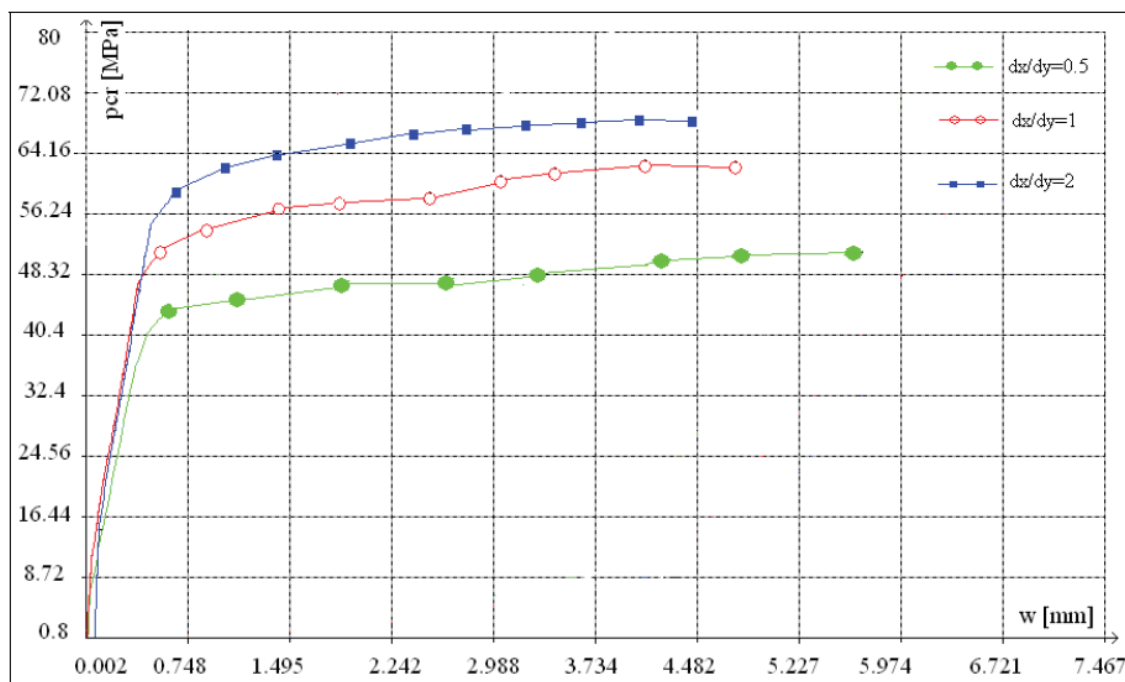


Figura 1.6 – Flambagem e comportamento pós flambagem da placa com furo central (Beznea e Chirica, 2011)

Jameel et al. (2012) investigam em um primeiro momento, de forma teórica, o comportamento da carga crítica de flambagem de placas sem furos, submetidas à carregamentos termomecânicos. Em um segundo momento do estudo, aplicam análise experimental para placas sob flambagem mecânica. A investigação experimental é utilizada para encontrar propriedades mecânicas em temperatura ambiente para o vidro-poliéster. Os resultados numéricos e analíticos da carga crítica de flambagem relatam os efeitos das condições de contorno, número de camadas, número de meias ondas na direção y , ângulo de laminação, razão de aspecto e razão da espessura para diferentes carregamentos termomecânicos.

Na Fig. 1.7 pode-se observar que a carga crítica de flambagem biaxial aumenta à medida que o número de camadas do laminado é aumentado.

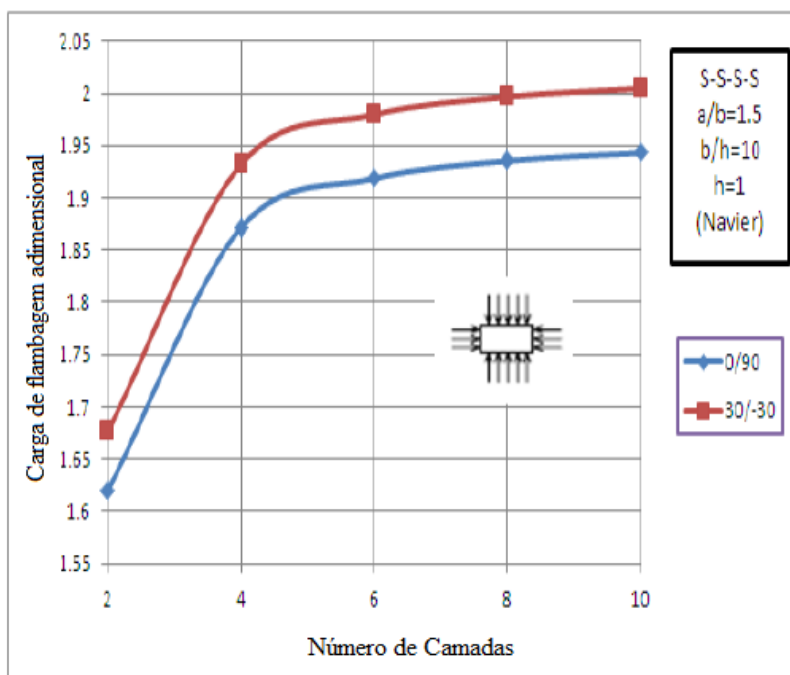


Figura 1.7 – Variação da carga crítica adimensional em relação ao aumento do número de camadas (adaptado de Jameel et al., 2012)

Da Fig. 1.8 observa-se que a razão de aspecto afeta de forma inversa a carga crítica de flambagem, ou seja, conforme aumenta a razão de aspecto (a/b) da placa, diminui o valor da carga crítica de flambagem.

Dhurvey e Mittal (2012) testaram o comportamento de diferentes orientações das fibras em uma placa retangular com furo circular central, submetido a cargas uniformes e uniaxiais de compressão. Para análise da carga crítica de flambagem foi utilizado o MEF, através do elemento 8-node SHELL91 do programa computacional ANSYS. A variação da espessura da placa também foi analisada, avaliando o comportamento mecânico conforme era alterada a quantidade de camadas das fibras laminadas. Utilizando *E-Glass/Epoxy* como material e variando a razão entre diâmetro do furo e a largura da placa, os autores concluíram que a presença de furos reduz a carga de flambagem. Ainda, foi concluído que o aumento da razão entre o diâmetro e a largura da placa causa alteração no valor da carga crítica de flambagem, assim como o aumento do ângulo de orientação das fibras (entre 0° e 60°) aumenta a carga mínima para início do fenômeno de instabilidade estrutural. Ainda segundo Dhurvey e Mittal (2012), a carga crítica de flambagem é diretamente proporcional à espessura da placa e ao número de camadas da mesma.

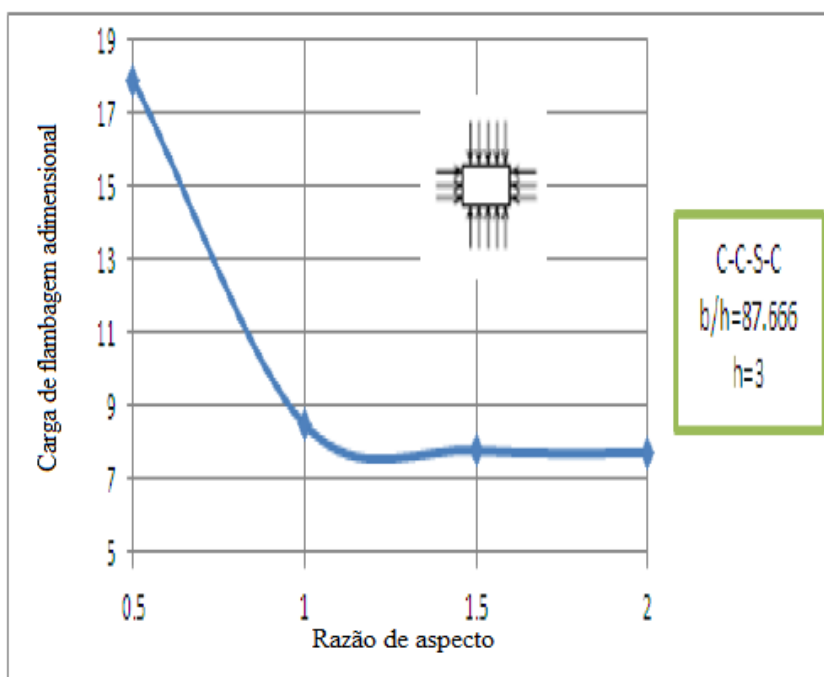


Figura 1.8 - Variação da carga de flambagem adimensional em relação ao aumento da razão de aspecto da placa (adaptado de Jameel et al., 2012)

Joshi et al. (2013) realizaram a avaliação da carga crítica de flambagem biaxial para placas laminadas retangulares, simétricas, com a aplicação de perfurações circulares. O software comercial ANSYS® foi utilizado pelos autores de forma bem sucedida. Para a avaliação das cargas críticas de flambagem, é feita a variação da posição dos furos ao longo da placa. Em uma segunda análise a geometria da placa é alterada com o incremento da sua dimensão longitudinal, incremento este comandado pela variação da razão a/b , onde a é a dimensão da altura da placa (longitudinal) e b é a largura da placa, constante para a análise. Uma terceira análise é feita com a variação da relação b/t , onde t é a espessura da placa. É constatado pelos autores que a carga crítica de flambagem reduz com o aumento da razão de aspecto da placa, como pode ser visto na Fig. 1.9. Nota-se pelas curvas que a variação da carga crítica para flambagem biaxial não possui um comportamento constante em função da relação a/b , o que gera oscilações no gráfico. Também na Fig. 1.9, conforme se aumenta a relação b/t , reduz-se a carga crítica de flambagem por unidade de comprimento. Em outra análise quando é investigado o efeito da posição do furo na carga crítica de flambagem da placa, observa-se que a placa com o furo na parte superior apresenta maior carga crítica de flambagem

do que a placa com furo central e a placa com furo inferior, e todas apresentam oscilações ao longo da curva como pode ser visto na Fig. 1.10.

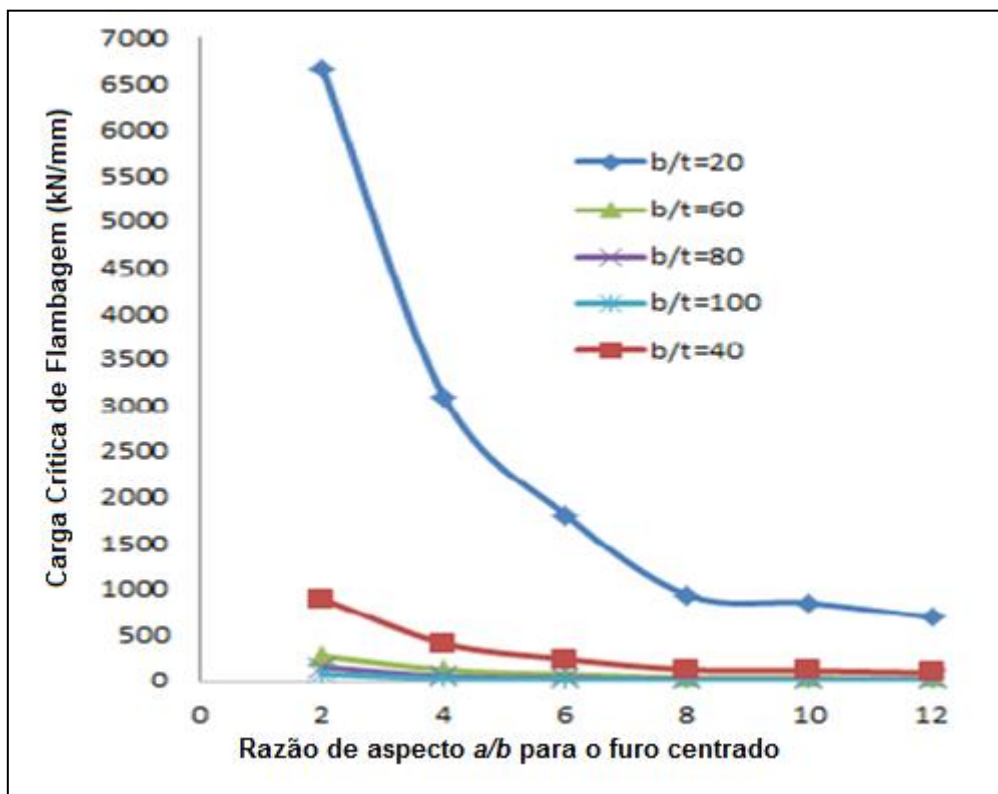


Figura 1.9 - Variação da carga crítica de flambagem em relação à razão de aspecto a/b (adaptado de Joshi et al., 2013)

Em Reddy et al. (2014) o MEF através do software ANSYS® é utilizado para determinar o efeito de furos quadrados e retangulares na carga crítica de flambagem, uniaxial, em placas compósitas retangulares, simetricamente laminadas com 4 (quatro) camadas de laminação em carbono-epóxi. A placa, e suas variáveis, podem ser vistas na Fig. 1.11. O estudo contempla os efeitos do tamanho do furo quadrado/retangular, orientação angular do furo e razão de aspecto da placa (a/b). A placa com laminação $(0^\circ/45^\circ)_2s$ é ensaiada em compressão uniaxial e os resultados mostram que o valor da carga crítica de flambagem decresce quando é aumentado o ângulo de posicionamento do furo e quando aumentadas as razões c/b e d/b para placas com furo retangular, como pode ser visto na Fig. 1.12. A magnitude da carga crítica diminui quando incrementada a razão de aspecto a/b . Percebe-se que a variação da carga crítica de flambagem para placas compósitas com furos retangulares apresentam oscilações conforme é variada a propriedade angular do furo.

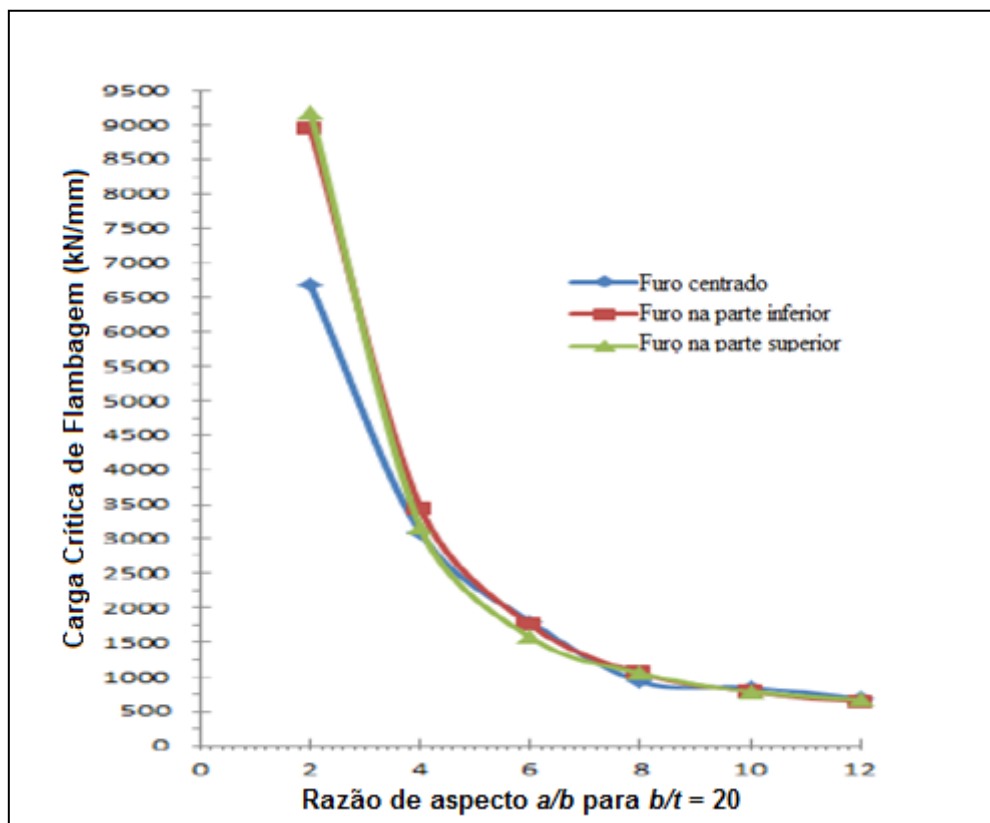


Figura 1.10 – Variação da carga crítica de flambagem em relação à variação da posição do furo (adaptado de Joshi et al., 2013)

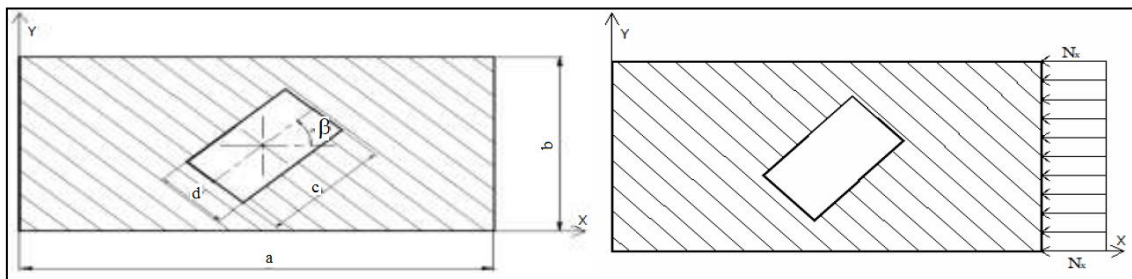


Figura 1.11 – Geometria da placa retangular com perfuração retangular e aplicação de carga compressiva uniaxial (adaptado de Reddy et al., 2014)

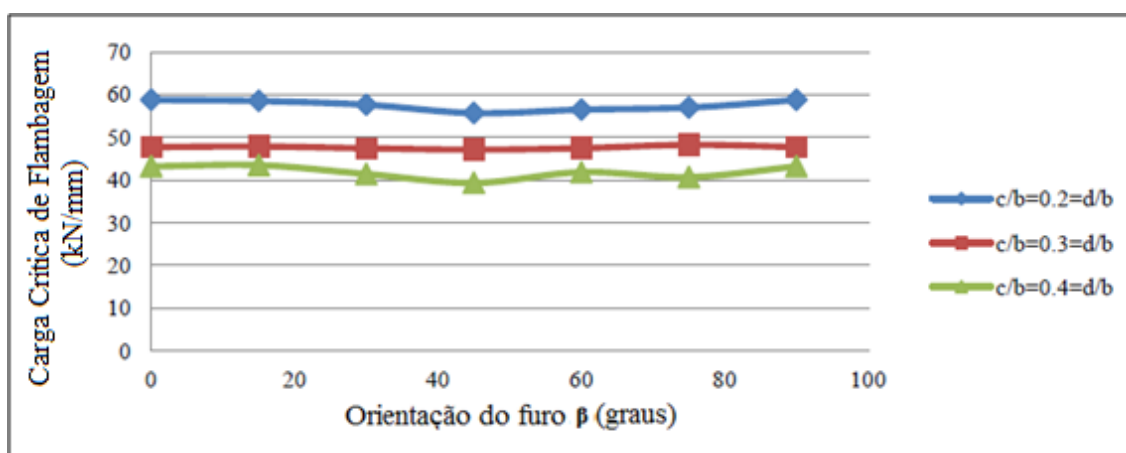


Figura 1.12 - Variação da carga crítica de flambagem em relação a β , c/b e d/b (adaptado de Reddy et al., 2014)

Shakya et al. (2015) investigam a carga crítica de flambagem uniaxial para diferentes furos (elíptico-horizontal, elíptico-vertical, quadrado, retangular, losangular, circular e triangular) em placas compósitas quadradas (ver Fig. 1.13) utilizando o MEF. É utilizado o elemento finito de casca SHELL281 do software ANSYS® 14.0 e as áreas dos furos são consideradas as mesmas para todos os formatos de perfuração. Os furos são posicionados no centro da placa que atende laminações cruzada-simétrica ($0^\circ/90^\circ$)_{2s} e angulares-simétricas ($15^\circ/75^\circ$)_{2s}, ($30^\circ/60^\circ$)_{2s} e ($45^\circ/-45^\circ$)_{2s}. A análise permite concluir que a maior carga crítica é para a configuração de furo elíptico-horizontal, enquanto que a menor corresponde ao furo triangular. Para a análise feita, com carregamento uniaxial em placa compósita quadrada, a laminação cruzada-simétrica se mostrou mais resistente à flambagem do que as laminações angulares-simétricas. A Fig. 1.14 apresenta as configurações flambadas (a) para o furo elíptico-horizontal e (b) para o furo elíptico-vertical. Pode-se observar que a distribuição de deflexões do elíptico-horizontal está mais bem distribuída, deixando o maior deslocamento transversal da semi-onda mais próximo do centro da placa, enquanto no furo elíptico-vertical este deslocamento está próximo da borda consequência do efeito causado pela geometria furo. A Fig. 1.15 apresenta as curvas obtidas para as análises da carga crítica de flambagem para cada um dos tipos de furo. Nota-se que conforme é feita alguma alteração no furo central da placa, o a carga crítica varia sem um comportamento constante, apresentando oscilações no gráfico.

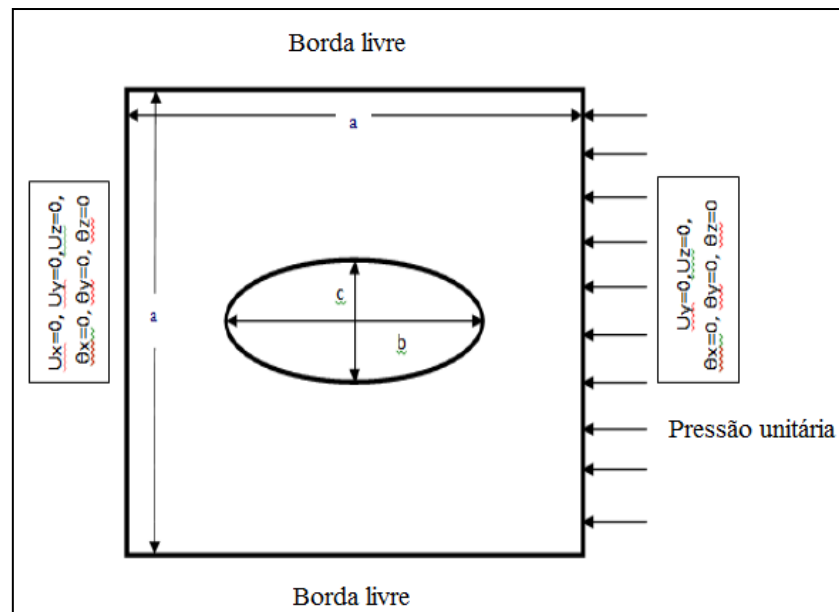


Figura 1.13 - Geometria da placa analisada (adaptado de Shakya et al., 2015)

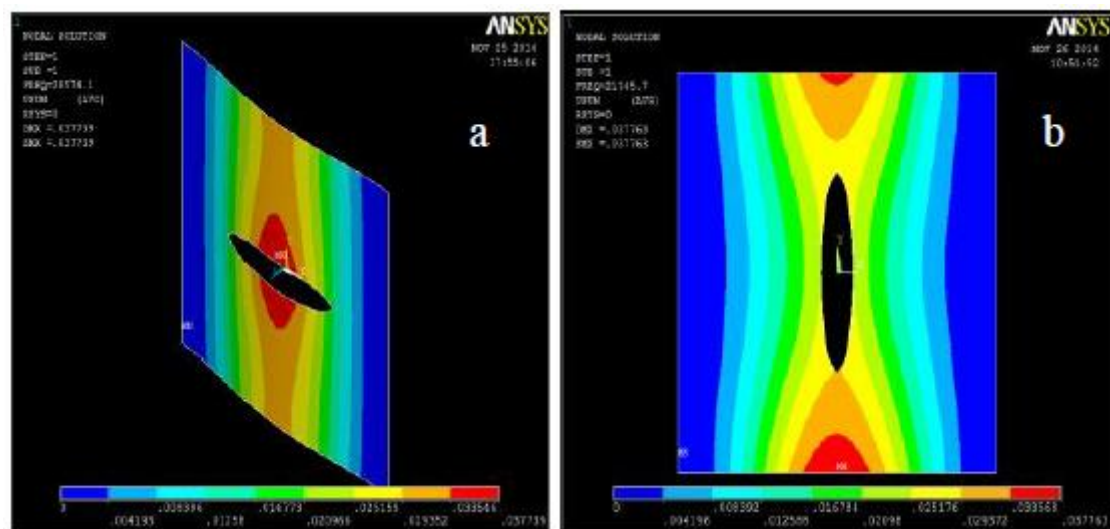


Figura 1.14 – Configuração flambada (a) da placa com furo elíptico-horizontal e (b) da placa com furo elíptico-vertical (Shakya et al., 2015)

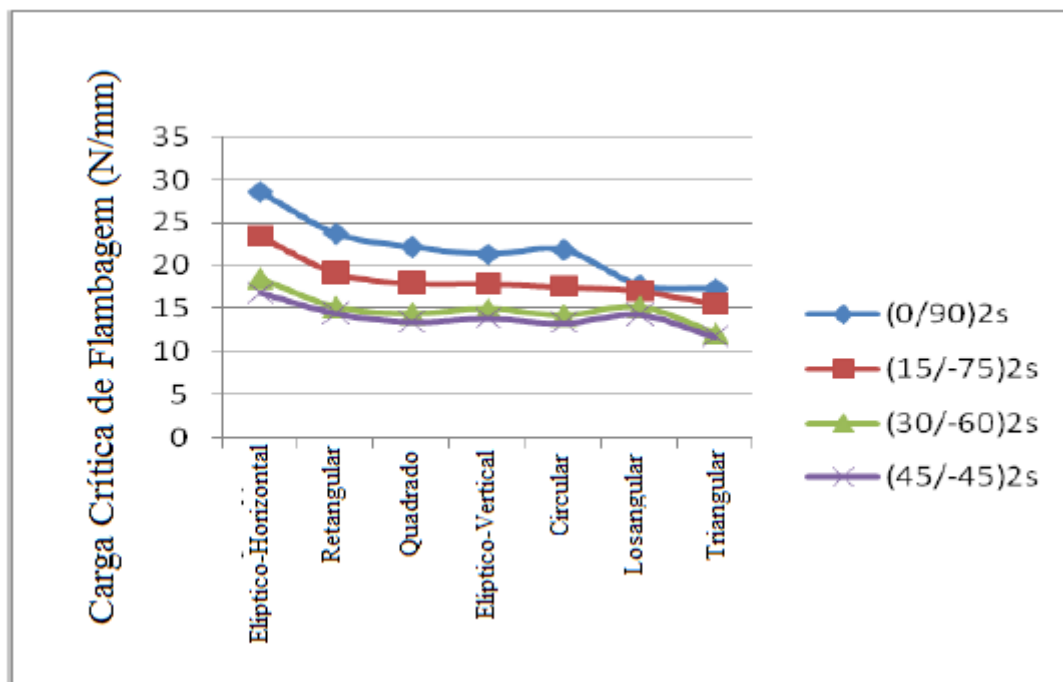


Figura 1.15 - Efeito dos diferentes tipos de furo na carga crítica de flambagem (adaptado de Shakya et al., 2015)

Babu e Rao (2016) analisam placas reforçadas por fibras, simétricas, com laminação cruzada simétrica ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) e com furos hexagonais. Através da aplicação do MEF, as placas com carregamento compressivo são avaliadas quanto à carga crítica de flambagem. O estudo é feito com a variação de alguns parâmetros como a orientação do furo (β), a razão de aspecto (a/b), razão da espessura ($S = b/t$), número de camadas (N) e condições de contorno. A placa pode ser vista na Fig. 1.16.

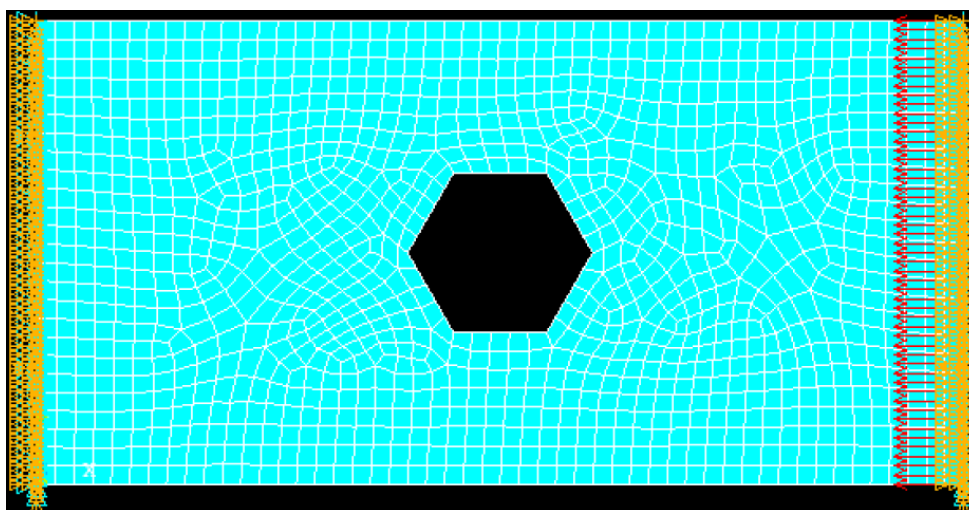


Figura 1.16 – Modelo de elementos finitos para a placa, onde $a/b = 2$, $S = 100$, $N = 4$ e $\beta = 0$ (Babu e Rao, 2016)

Babu e Rao (2016) concluem que a carga crítica de flambagem é maior quando a orientação do furo $\beta = 60^\circ$ e é menor quando $\beta = 30^\circ$. Como pode ser observado na Fig. 1.17 a curva da carga crítica não segue um comportamento constante quando variada a orientação do furo. Também, a carga crítica diminui com o aumento da razão de aspecto (a/b), diminui com o incremento da razão de espessura (S), aumenta para um número de lâminas entre $N = 4$ até $N = 12$ e se torna constante a partir de $N = 20$.

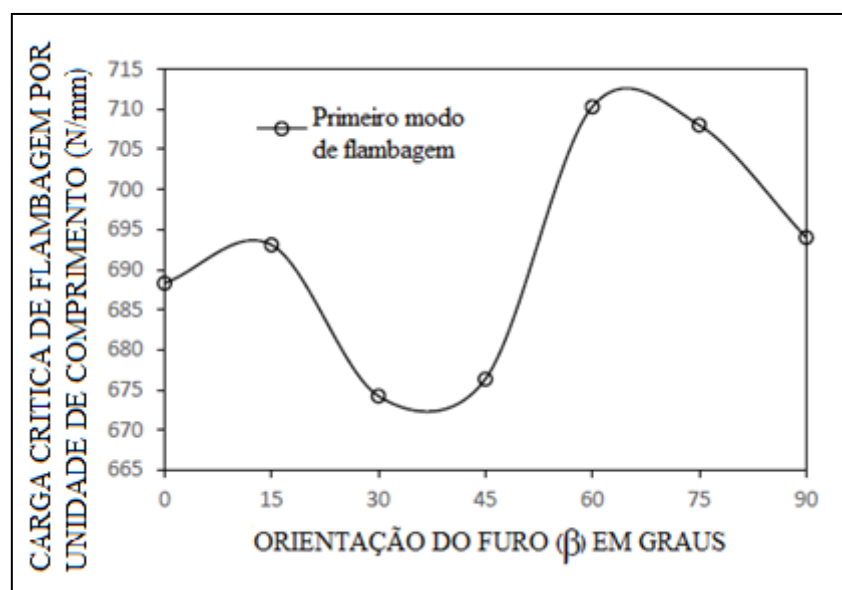


Figura 1.17 – Efeito da orientação do furo na carga crítica de flambagem (adaptado de Babu e Rao, 2016)

Helbig et al. (2013) determinaram a geometria ótima que maximiza a carga crítica de flambagem para placas de aço, com furo elíptico e centrado, quando submetidas aos fenômenos de flambagem linear e não linear. O uso do MEF foi associado ao Design Construtal (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008; Bejan e Zane, 2012), com a finalidade de encontrar a melhor configuração geométrica para o elemento estrutural em estudo. Os resultados indicam que a esbeltez do corpo analisado define se a placa sofrerá flambagem linear elástica antes de ocorrer a flambagem não linear elasto-plástica, ou se a placa vai atingir a carga limite sem que aconteça a flambagem elástica. Foi ressaltado ainda que as placas podem suportar uma boa quantidade de carga após a flambagem elástica. Isso se dá devido à redistribuição de tensões e ao comportamento elasto-plástico do material das placas avaliadas.

Rocha et al. (2013) consideram três diferentes formatos de furos centrados: elíptico, retangular e em forma de diamante (losango). Utilizando a Design Construtal, o estudo contempla diversas frações de volume do furo na placa. Um modelo numérico empregando o método de Lanczos é utilizado em paralelo com o MEF, buscando a configuração geométrica que fornecesse a maior carga crítica de flambagem. A partir de solicitações uniaxiais, os resultados mostram que para frações de volume pequenas (frações menores que 0,20), do furo, a geometria ótima contempla o furo do tipo losangular. Para frações de volume intermediárias (entre 0,20 e 0,30) e grandes (maiores que 0,30), furos elípticos e retangulares apresentam o melhor desempenho, respectivamente.

Lorenzini et al. (2016), através de simulações de flambagem uniaxial de placas pelo MEF aliado ao método Design Construtal, indica que para certos valores da relação entre o volume do furo e o volume de material da placa (φ) o formato do furo é responsável por determinar se a flambagem será elástica ou elasto-plástica. A mudança do comportamento mecânico é definida pelo ponto de intersecção entre as curvas, as quais representam os comportamentos elástico e elasto-plástico da flambagem, sendo determinada uma curve limite para a ocorrência de qualquer tipo de flambagem na placa.

Helbig et al. (2016) encontram através de simulações de flambagem uniaxial, pelo MEF, em placa de aço perfurada, que a razão de aspecto do furo pode ser determinante para definir se, em caso de flambagem, esta será elástica ou elasto-plástica. Também foram determinadas curvas limites que impedem a ocorrência de flambagem nas placas perfuradas. Cabe salientar ainda a utilização do Design Construtal para otimização da geometria do furo. Com tal análise, quando comparados os piores valores com o melhores, para uma mesma fração volumétrica do furo, pode-se observar a ótima distribuição das imperfeições, o que reforça a importância do Design Construtal na análise de problemas de mecânica dos sólidos.

1.1. OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

O objetivo geral do presente estudo é, associando o método Design Construtal à simulação numérica, analisar o comportamento mecânico de placas perfuradas de

material compósito laminado submetidas a um carregamento compressivo biaxial que causa o fenômeno da flambagem elástica na estrutura.

Para atingir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

- Utilizar o MEF para definição da carga crítica do primeiro estado de flambagem elástica biaxial em placas sem perfurações.
- Avaliar a variação do esquema de laminação, quanto aos ângulos das fibras, buscando definir a qual configuração apresenta a maior carga crítica.
- Inserir uma perfuração elíptica centralizada à placa, considerando o esquema de laminação que conduziu à maior carga crítica no análise previamente realizada.
- Avaliar a influência do tamanho da perfuração elíptica, através da variação do parâmetro fração de volume da perfuração $\emptyset$ (que relaciona o volume do furo com o volume total da placa), no comportamento mecânico da placa sob flambagem biaxial.
- Avaliar a influência da geometria da perfuração elíptica, através do grau de liberdade H_0/L_0 (relação entre as dimensões características do furo elíptico), para cada valor de $\emptyset$ considerado, no comportamento mecânico da placa sob flambagem biaxial.

2. MATERIAIS COMPÓSITOS

Um material compósito é um composto de dois ou mais materiais diferentes, combinados em escala macroscópica, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta (Mendonça, 2005).

A crescente necessidade de estruturas com propriedades superiores impulsiona o desenvolvimento de novos tipos de materiais, dentre os quais se destacam os materiais compósitos laminados reforçados por fibras. Estes materiais são formados por uma associação de lâminas adequadamente unidas, confeccionadas com fibras resistentes dispostas em diferentes direções, envolvidas por uma matriz. Sua utilização nas indústrias automobilística, aeronáutica, naval e espacial exige que os mesmos tenham determinadas propriedades mecânicas como: altas relações rigidez/peso e resistência/peso; alta resistência à fadiga; alto amortecimento; isolamento térmica e acústica; e resistência à corrosão. Estas exigências estruturais específicas são obtidas, basicamente, através do ajuste da natureza dos materiais constituintes, da espessura das lâminas, orientação das fibras e da sequência de laminação, o que faz com que este seja um dos materiais estruturais mais avançados atualmente (Lee, Reddy e Rostam-Abadi, 2006; Marincovic, Köpper e Gabbert, 2004; Marques, 1994; Isoldi, 2008)

O conceito de material compósito é uma ferramenta filosófica poderosa no sentido de que ele permite ao engenheiro, até certo ponto, “criar” um novo material, enfatizando certas características desejáveis, enquanto minimiza outras indesejáveis, por meio da combinação de componentes. A definição de combinação macroscópica de materiais, para o material compósito, é utilizada para distingui-lo das ligas, por exemplo, nas quais também são combinados diferentes materiais, como o ferro e manganês no aço, mas em escala atômica. Nos compósitos, a escala de dimensões das inclusões é tipicamente da ordem de um micrometro ou maior (Mendonça, 2005).

A vantagem dos materiais compósitos é que, se bem projetados, podem exibir as melhores qualidades de seus componentes ou constituintes e ainda algumas qualidades que nenhum dos seus componentes possui (Jones, 1999). Dentre as propriedades que podem ser obtidas em um material compósito, pode-se destacar: resistência estática e à

fadiga; rigidez; resistência à corrosão; resistência à abrasão; redução de peso; capacidade de trabalho a alta e baixa temperatura; isolamento ou condutividade térmica, elétrica e acústica; dureza; e aparência estética (Mendonça, 2005).

2.1. CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

Materiais compósitos são classificados em quatro grupos: materiais compósitos reforçados por fibras; materiais compósitos reforçados por partículas ou materiais compósitos particulados; materiais compósitos laminados; e materiais compósitos combinados (Jones, 1999; Isoldi, 2008). Quando se fala em materiais compósitos modernos ou compósitos de plásticos reforçados por fibras de alta resistência, as teorias descritas têm aplicação geral na descrição do comportamento mecânico da maioria dos compósitos, quer sejam de fibra-polímero, fibra-metal, cerâmica metal, ou outros (Mendonça, 2005). A Fig. 2.1 ilustra alguns elementos típicos dos compósitos reforçados por fibras.

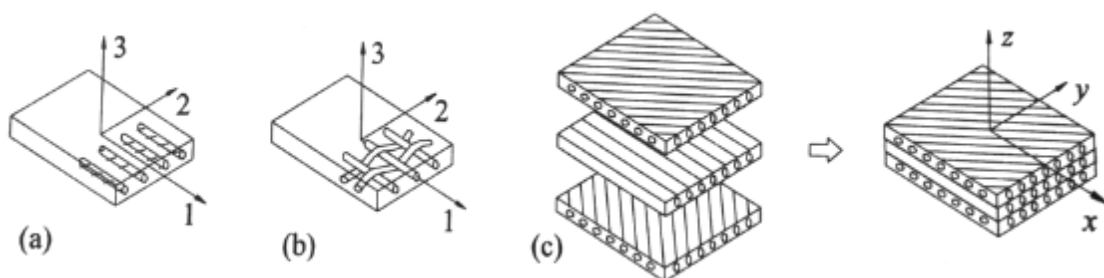


Figura 2.1 - Elementos típicos dos compósitos reforçados por fibras, onde: (a) Lâmina com fibras unidirecionais; (b) Lâmina com fibras tecidas; (c) Laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções (Mendonça, 2005).

2.1.1. Compósitos reforçados por fibras

As fibras podem ser contínuas, longas, ou curtas, na faixa de 5 mm a 25 mm de comprimento. Quanto à sua disposição, elas podem ser paralelas, unidirecionais, ou bidirecionais, em forma de tecido, ou ainda podem ser aleatoriamente orientadas como nuvem, quer de fibras contínuas, quer de fibras picotadas (Mendonça, 2005). A resistência e a rigidez de um material, quando em forma de fibra, são algumas ordens de magnitude maiores que os valores obtidos para o mesmo material em bloco. Este paradoxo é devido ao fato de que as fibras apresentam estruturas mais perfeitas se

comparadas ao material em bloco. Nas fibras, os cristais estão alinhados ao longo de seu eixo. Além disso, existem menos defeitos internos que em um material em bloco (Jones, 1999; Isoldi, 2008).

No caso de componentes estruturais, as principais propriedades mecânicas do material são: rigidez; resistência (ruptura, fadiga, etc.); peso específico. Uma das razões para o uso de fibras como reforço consiste no fato conhecido experimentalmente de que alguns materiais em forma de fibra apresentam melhores resultados, quanto à resistência e a rigidez, do que quando utilizados em sua forma convencional. Por exemplo, um vidro comum como o da janela apresenta valores de resistência à ruptura na faixa de 0,7 GPa. Já em forma de fibras, a resistência vai a 3,5 GPa ou até a 4,6 GPa, dependendo do tipo de fibra. Os altos valores de resistência observados para as fibras se aproximam dos valores teóricos, sendo a discrepância entre os valores de fibras e em bloco explicada pela presença de imperfeições ou falhas no material. Um bloco de material possui uma população de trincas inerentes ao processo de fabricação. Já uma fibra de vidro, por exemplo, é fabricada com diâmetros na faixa de 0,010 mm. Esse diâmetro diminuto torna inviável o desenvolvimento excessivo de trincas durante a fabricação. Isso explicaria os altos valores de resistência das fibras comparados aos dos materiais em bloco. Também, em virtude do próprio processo de fabricação, a estrutura da fibra tende a ser muito mais bem organizada, mesmo nos casos não-cristalinos, que o mesmo material em bloco (Mendonça, 2005).

Apesar das excelentes propriedades que apresentam, as fibras geralmente não podem ser usadas sozinhas. Um feixe de fibras apenas pode suportar forças, de tração, longitudinais. Para suportar cargas compressivas longitudinais, quaisquer forças transversais ao eixo, ou cargas cisalhantes, torna-se necessário que as fibras sejam embebidas em uma matriz. Excluídos os raros casos onde as únicas forças presentes são de tração uniaxial, sempre se terá um compósito de fibras suportadas por uma matriz. As propriedades de resistência da matriz serão frequentemente bastante inferiores às da fibra. Por consequência, os compósitos obtidos não apresentam os valores elevados de resistência exibidos pelas fibras, mas valores intermediários. O quanto os valores finais se aproximarão de um ou outro extremo depende, obviamente, mas não exclusivamente, da porcentagem de fibras usada (Mendonça, 2005).

2.2. MACROMECHANICA DE UMA LÂMINA

Segundo Mendonça (2005), o termo comportamento macromecânico refere-se ao comportamento da lâmina apenas quando as propriedades mecânicas aparentes médias, em sua forma macroscópica, são consideradas.

A restrição básica desta teoria é assumir um comportamento elástico-linear para os materiais tratados (Mendonça, 2005). Entretanto, esta linearidade é geralmente superior à dos metais, e a teoria, como descrita a seguir, é amplamente usada na engenharia (Isoldi, 2008).

A relação tensão-deformação, baseada na Lei de Hooke, para um material elástico-linear anisotrópico é dada por (Jones, 1999; Mendonça, 2005; Isoldi, 2008):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde σ_i e τ_{ij} com $i, j = 1, 2, 3$ são as tensões normais e cisalhantes, respectivamente. As deformações normais e cisalhantes são apresentadas, respectivamente, por ε_i e γ_{ij} com $i, j = 1, 2, 3$. C_{ij} , com $i, j = 1, \dots, 6$, são os elementos da matriz rigidez do material $[C^1]$.

A Eq. (2.1) em sua forma compacta é dada por:

$$\{\sigma^1\} = [C^1]\{\varepsilon^1\} \quad (2.2)$$

$$\{\varepsilon^1\} = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right\}^T$$

onde o expoente 1 indica o sistema de coordenadas utilizado, sistema este definido pelos eixos cartesianos 1 - 2 - 3 (Fig. 2.4), u_x, u_y e w são, respectivamente, os

deslocamentos nas direções x , y e z (ou direções 1, 2 e 3) e o sobrescrito T indica a forma transposta do vetor.

Barbero (2007) afirma que a matriz de rigidez, 6×6 , das Eqs. (2.1) e (2.2), obtida através da forma contraída da Lei de Hooke, é simétrica em decorrência de um estado de tensões livre de tensões residuais.

Segundo Mendonça (2005), a direção das fibras define as três direções principais de propriedades de uma lâmina, que são as direções tomadas como referência nas definições das propriedades mecânicas, tensões, deformações e demais cálculos básicos. Como ilustração das direções 1 - 2 - 3 a Fig. 2.4 apresenta os eixos 1 - 2 - 3 condizentes com o referencial. A direção principal 1 é referenciada ao longo das fibras (longitudinal), a direção principal 2 é transversal à fibra e a direção principal 3 é perpendicular ao plano formado pelos eixos 1 e 2.

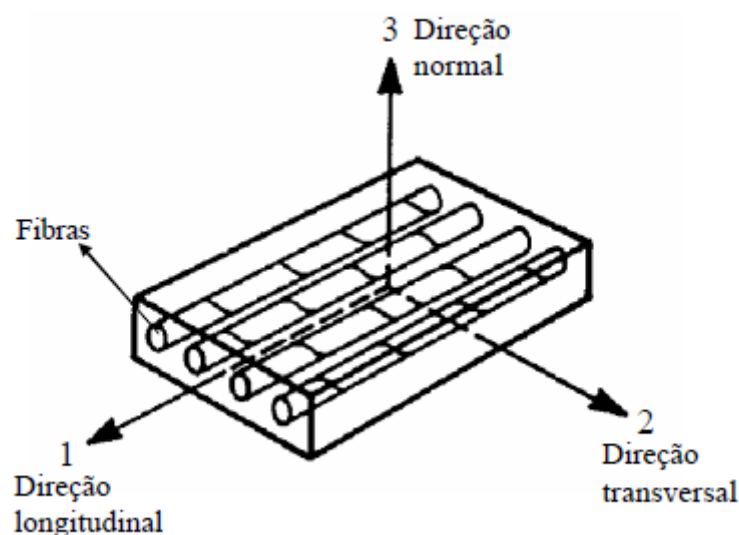


Figura 2.2 – Direções principais 1 - 2 - 3 das propriedades mecânicas do material em uma lâmina (Jones, 1999; Mendonça, 2005; Isoldi 2008).

Quando existentes dois planos ortogonais de simetria de propriedades no material, necessariamente haverá uma simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos demais. Com isso, a relação tensão-deformação do material simplifica-se (Mendonça, 2005):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Quando um material atende à esta tríplice simetria ele é chamado de ortotrópico. De acordo com Mendonça (2005), as direções principais de propriedades do material são paralelas às intersecções dos três planos ortogonais de simetria do mesmo.

Um material ortotrópico possui pelo menos um sistema de coordenadas em cada ponto em que as tensões normais provocam apenas deformações normais e as tensões cisalhantes provocam apenas deformações cisalhantes na direção do carregamento, como visto na Eq. (2.3) (Mendonça, 2005 ; Isoldi, 2008).

A matriz de rigidez $[C^1]$, da Eq. (2.3), além de possuir apenas 9 (nove) constantes independentes, é não-singular, o que viabiliza a aplicação da matriz inversa da mesma. Sendo assim, a relação deformação-tensão de um material ortotrópico é dada pela equação na sua forma compacta como:

$$\{\varepsilon^1\} = [S^1]\{\sigma^1\} \quad (2.4)$$

e em sua forma estendida como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Segundo Jones (1999) e Isoldi (2008), se existe um número infinito de planos de simetria de propriedades no material, sua matriz de rigidez apresenta duas constantes independentes, caracterizando um material isotrópico que possui uma relação tensão-deformação definida como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Ainda, existe uma relação similar para a matriz deformação-tensão, dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Em Jones (1999) é possível encontrar outros tipos de materiais considerando diferentes planos de simetria.

Como é possível observar, as relações deformação-tensão indicam respostas de deformação causadas por uma determinada tensão aplicada ao material. Considerando um material anisotrópico, acoplamentos significativos ocorrem entre as tensões aplicadas e as deformações sofridas, em contraste com um material isotrópico que possui um único acoplamento: o de extensão-extensão (Jones, 1999 ; Isoldi, 2008). A Fig. 2.3 apresenta a matriz deformação-tensão com discriminações de cada solicitação analisada.

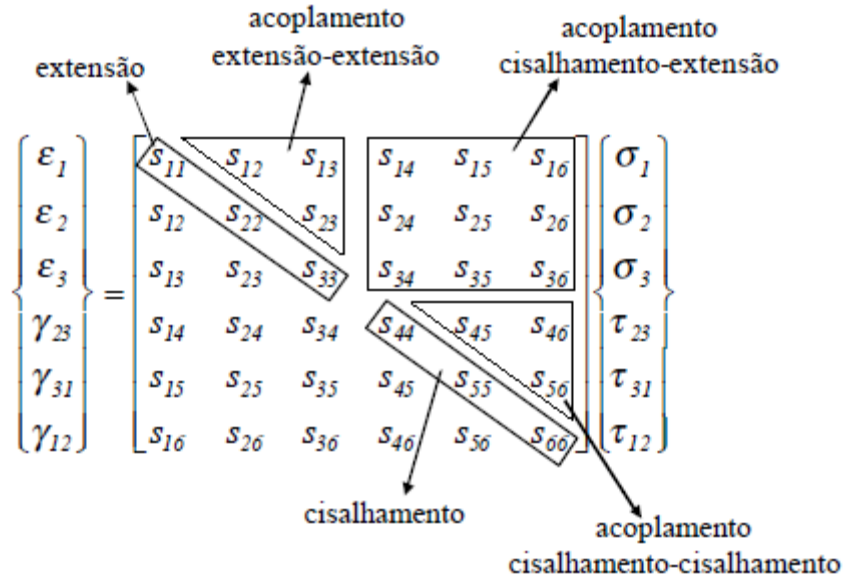


Figura 2.3 – Significado físico para as relações deformação-tensão para materiais anisotrópicos (Isoldi, 2008).

2.2.1. Constantes de engenharia para materiais ortotrópicos

Conforme Mendonça (2005), as constantes de engenharia, ou constantes técnicas, podem ser obtidas de forma experimental e mais fácil do que as constantes abstratas das matrizes de rigidez e flexibilidade do material e, também, possuem uma interpretação mais óbvia.

Em termos das constantes técnicas, a matriz de flexibilidade é escrita como:

$$[S^1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde, E_1, E_2 e E_3 são os módulos de Young nas direções principais 1, 2 e 3; $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$, $i, j = 1, 2, 3$, são os seis valores de coeficiente de Poisson, obtidos da

relação entre a deformação na direção j quando um elemento direcional de volume é carregado apenas na direção i , isto é, com $\sigma_i = \sigma$ e todas as outras tensões nulas; G_{12} , G_{23} e G_{31} são os módulos de elasticidade transversal cisalhante, nos planos 1-2, 2-3 e 3-1, respectivamente.

Deve-se lembrar que, apesar de terem sido definidas 12 (doze) constantes de engenharia para o material ortotrópico, a simetria S_{ij} mostra que existem apenas 9 (nove) constantes independentes (Mendonça, 2005; Isoldi, 2008), o que é melhor explicado por:

$$\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j \quad (2.9)$$

Devido à característica das matrizes de flexibilidade e rigidez serem mutuamente inversas, fazendo uso da álgebra matricial, pode-se concluir que seus componentes estão relacionados como:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{13}}{S} & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} & C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde:

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \quad (2.11)$$

No entanto, a matriz de rigidez para um material ortotrópico, considerando as constantes de engenharia, é obtida pela inversão da matriz de flexibilidade, Eq. (2.8). Assim, os termos não nulos da matriz rigidez são dados por:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & C_{44} &= G_{23} & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & C_{55} &= G_{31} & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{66} = G_{12} \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

sendo Δ o determinante do quadrante superior esquerdo da Eq. (2.8), que é dado por:

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (2.13)$$

Segundo Barbero (2007), uma vez que o laminado seja simétrico e satisfaça a Eq. (2.9), com $i,j = x,y,z$, é possível calcular as propriedades de engenharia do laminado através das relações:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{S_{11}} \quad ; \quad E_y = \frac{1}{S_{22}} \quad ; \quad E_z = \frac{1}{S_{33}} \\ G_{yz} &= \frac{1}{S_{44}} \quad ; \quad G_{xz} = \frac{1}{S_{55}} \quad ; \quad G_{xy} = \frac{1}{S_{66}} \\ \nu_{xy} &= -\frac{S_{21}}{S_{11}} \quad ; \quad \nu_{xz} = -\frac{S_{31}}{S_{11}} \quad ; \quad \nu_{yz} = -\frac{S_{32}}{S_{22}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.2. Lei de Hooke aplicada aos materiais ortotrópicos sob Estado Plano de Tensões

Considerando um laminado como o mostrado na Fig. 2.4, diz-se que este está sob um estado plano de tensões (EPT). Segundo Jones (1999), Mendonça (2005) e Christensen (2005), um corpo está sob um EPT quando cada ponto está sujeito a tensões apenas num único plano. No caso da Fig. 2.4 esse plano é o 1-2, sendo assim:

$$\sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 \neq 0; \quad \tau_{12} \neq 0 \quad (2.15)$$

e

$$\sigma_3 = 0; \tau_{23} = 0; \tau_{31} = 0; \forall (x, y, z) \in \Omega \quad (2.16)$$

Segundo Isoldi (2008) o EPT em uma placa não é meramente uma idealização da realidade, trata-se de um objetivo prático de como se deve usar uma lâmina reforçada por fibras, pois a mesma não pode resistir a altas tensões em qualquer outra direção que não a direção das fibras.

Impondo as condições das Eqs. (2.15) e (2.16) na Eq. (2.5), as deformações fora do plano 1-2 ficam como:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2; \gamma_{23} = 0; \gamma_{31} = 0 \quad (2.17)$$

onde:

$$S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} ; S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (2.18)$$

Considerando um estado plano de tensões, a relação deformação-tensão da Eq. (2.5) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{11} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

ou na forma compacta como:

$$\{\varepsilon^1\} = [S]\{\sigma^1\} \quad (2.20)$$

sendo:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} ; S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} ; S_{22} = \frac{1}{E_2} ; S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

Considerando a Eq. (2.20), $\{\varepsilon^1\}$ é o vetor de deformações, $[S]$ é a matriz de flexibilidade reduzida da lâmina ortotrópica para o EPT, referenciados aos eixos principais e $\{\sigma^1\}$ é o vetor de tensões.

Ainda, as Eqs. (2.19) e (2.20) podem ser invertidas, o que resultará na relação tensão-deformação reduzida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

A Eq. (2.22) pode ser representada na forma compacta como:

$$\{\sigma^1\} = [Q]\{\varepsilon^1\} \quad (2.23)$$

onde Q_{ij} são os termos da matriz de rigidez reduzida e podem ser obtidos em função das constantes de engenharia. Para tal, faz-se a inversão da matriz da Eq. (2.19), obtendo:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \quad ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{22} &= \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \quad ; \quad Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nota-se que o comportamento de uma lâmina ortotrópica carregada em seu próprio plano, ou seja, sob um EPT, é definido por apenas quatro constantes elásticas: E_1, E_2, ν_{12} e G_{12} , além da relação de reciprocidade dada por (Jones, 1999; Mendonça, 2005; Isoldi, 2008):

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.25)$$

Mendonça (2005) diz que quanto às relações para um material isotrópico, podem ser obtidas através da simplificação das relações do material ortotrópico, ou seja:

$$E_1 = E_2 = E; \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu; \quad G_{12} = G \quad (2.26)$$

Substituindo as Eqs. (2.26) nas Eqs. (2.21), obtém-se:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{E} \quad ; \quad S_{12} = -\frac{\nu}{E} \quad ; \quad S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) = \frac{1}{G} \quad (2.27)$$

Com isso, para a matriz de rigidez reduzida, os coeficientes tornam-se:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (2.28)$$

2.2.3. Rotação da relação tensão-deformação para o EPT

Até aqui as tensões e as deformações foram definidas no sistema principal de coordenadas do material. Entretanto, as direções principais do material normalmente não coincidem com o sistema de coordenadas que deve ser usado na solução do problema. Além disso, cada lâmina constituinte do laminado pode possuir suas fibras orientadas em uma direção diferente das demais. Então, para a análise do laminado são necessários dois sistemas de coordenadas: o $0xyz$ e o 0123 . O sistema global $0xyz$ é usado para definir os parâmetros do laminado, enquanto que cada lâmina possui um sistema 0123 , com os eixos orientados nas direções principais de ortotropia do material (ver Fig. 2.4). Torna-se necessário então uma relação entre as tensões e as deformações nestes dois sistemas de coordenadas. Como a relação tensão-deformação no sistema de coordenadas 0123 já foi definida anteriormente, na Eq. (2.5), um método de transformação deve ser empregado, obtendo assim a relação tensão-deformação no sistema de coordenadas global. Para tanto, define-se a matriz de transformação $[T_r]$ como a matriz que exprime a rotação de componentes do sistema $0xyz$ para o sistema 0123 , determinada pelo ângulo θ . Esta rotação plana é representada por (Jones, 1999; Mendonça, 2005):

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Uma vez que a rotação é feita em torno do eixo z , normal à lâmina, não há transformação nessa direção, como pode ser visto na Fig. 2.4. Por exemplo, dadas as componentes do vetor posição de um ponto P qualquer na lâmina, definido por $\{p^x\} = \{p_x, p_y\}^T$ nas direções $0xyz$, suas componentes $\{p^1\} = \{p_1, p_2\}^T$, nas direções 0123 , são dadas por $\{p^1\} = [T_r]^T \{p^x\}$ (Mendonça, 2005; Isoldi, 2008).

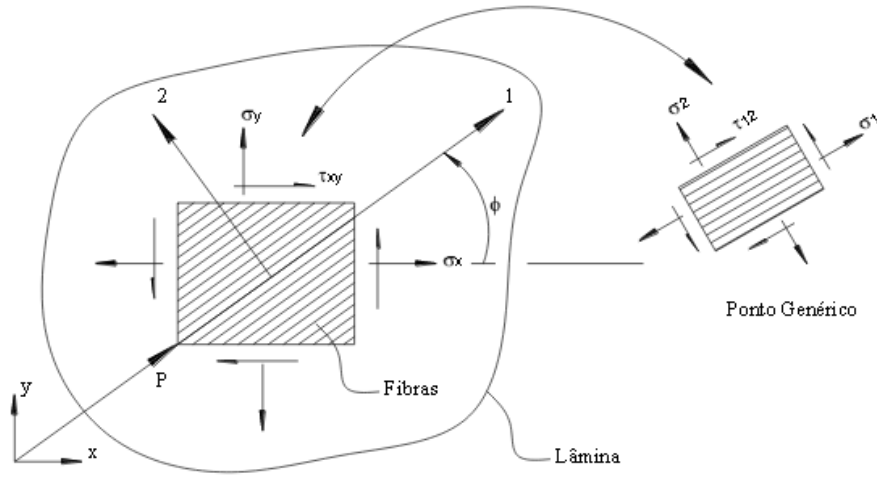


Figura 2.4 – Tensões coplanares num ponto genérico de coordenadas P de uma lâmina. Rotação positiva do sistema de eixos $0xy$ para o sistema 012 , e correspondente rotação das tensões (Gagliardo, 2008).

Desta forma, as componentes de tensões planas se transformam em uma rotação em torno do eixo z :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ou ainda:

$$[\sigma^x] = [T_r][\sigma^1][T_r]^T \quad (2.31)$$

Nas Eqs. (2.30) e (2.31), os índices x , l e T referem-se aos sistemas de eixos x - y , 1 - 2 e transposta de uma matriz, respectivamente. Efetuando as operações indicadas nesta equação e exprimindo os termos das matrizes $[\sigma^x]$ e $[\sigma^1]$ em colunas, denotadas por $\{\sigma^x\}$ e $\{\sigma^1\}$, têm-se a expressão de transformação plana das tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Ainda, a Eq. (2.32) pode ser apresentada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

ou

$$[\sigma^x] = [T]^{-1}[\sigma^1] \quad (2.34)$$

onde, $[T]$ é a matriz de transformação, dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A matriz inversa de $[T]$, ou seja $[T]^{-1}$, é obtida simplesmente usando $-\theta$ em lugar de θ em $[T]$, na Eq. (2.35), o que resulta numa simples troca de sinais nos termos não quadráticos em $\sin \theta$ fora da diagonal.

As deformações transformam-se da mesma forma que as tensões, desde que a deformação cisalhante $\gamma/2$ seja usada ao invés da deformação de engenharia γ . Sendo assim, chega-se à:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\{\varepsilon^{x/2}\} = [T]^{-1} \{\varepsilon^{1/2}\} \quad (2.37)$$

Por sua vez, a Eq. (2.37) pode ser modificada com o uso de uma matriz $[R]$, definida por:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Pode-se então fazer a relação da Eq. (2.38) com as Eqs. (2.36) e (2.37).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\{\varepsilon^1\} = [R] \{\varepsilon^{1/2}\} \quad (2.40)$$

De forma similar, podem ser obtidas as mesmas relações para o sistema $0xyz$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\{\varepsilon^x\} = [R] \{\varepsilon^{x/2}\} \quad (2.42)$$

Substituindo as Eqs. (2.37), (2.39) e (2.41), a relação reduzida da - ver Eq. (2.23) - pode ser transformada pela seguinte sequência de operações:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q][R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q][R][T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

onde na Eq. (2.43), a Eq. (2.39) foi substituída na Eq. (2.23). Na Eq. (2.44), a Eq. (2.37) é aplicada à Eq. (2.43). Na Eq. (2.45) está apresentada a substituição da Eq. (2.41) na Eq. (2.44).

Substituindo a Eq. (2.45) na Eq. (2.34), obtem-se:

$$[T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Se forem comparadas as definições de $[T]$, $[T]^{-1}$, $[R]$ e $[R]^{-1}$, nota-se que:

$$[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T} \quad (2.47)$$

Segundo Mendonça (2005) e Isoldi (2008), fazendo a aplicação da Eq. (2.47), a Eq. (2.46) fica como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\{\sigma^x\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon^x\} \quad (2.49)$$

sendo que as Eqs. (2.48) e (2.49) representam a relação tensão-deformação reduzida, para o estado plano de tensões, no sistema de coordenadas global $0xyz$ (Jones, 1999; Mendonça, 2005; Isoldi, 2008), onde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11}+Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned} \quad (2.50)$$

A matriz $\bar{Q}_{ij}$ é a matriz de rigidez em sua condição reduzida e transformada e embora apresente índices numéricos, esta faz referência ao sistema $0xyz$. Esta matriz de rigidez transformada é visualmente similar à matriz de um material anisotrópico, Q_{ij} , pois não apresenta termos nulos. No entanto, o que difere $\bar{Q}_{ij}$ de Q_{ij} é que na matriz transformada reduzida, apenas quatro constantes de engenharia são necessárias, são elas: E_1, E_2, ν_{12} e G_{12} . Estas constantes são as quatro componentes de $[Q]$ (Mendonça, 2005).

Para a transformação de deformações, substituem-se as Eqs. (2.39) e (2.41) na Eq. (2.36), e leva-se em consideração a Eq. (2.47), e obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Através da inversão da Eq. (2.48), é obtida a relação deformação-tensão como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^T [Q]^{-1} [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Das Eqs. (2.19) e (2.22), a relação entre a matriz de flexibilidade reduzida e a matriz de rigidez reduzida é:

$$[S] = [Q]^{-1} \quad (2.53)$$

Assim, considerando a Eq. (2.53), a Eq. (2.52) pode ser reescrita resultando na relação deformação-tensão reduzida:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^T [S] [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{S}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

onde $[\bar{S}]$ é a matriz de flexibilidade reduzida transformada, definida nas direções $x - y$ da lâmina e suas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{S}_{12} &= S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.3. ANÁLISE DE UM LAMINADO – TEORIA CLÁSSICA DA LAMINAÇÃO

Segundo Soo Kim (1995), a teoria requerida para analisar a flambagem em placas laminadas compósitas é mais complexa do que a utilizada para placas isotrópicas homogêneas. Isso é particularmente verdadeiro no caso de uma laminação assimétrica

cruzada angular (*angle-ply*) na laminação devido à existência de termos de acoplamento em decorrência dos efeitos de flexão e alongamento das placas.

As diferentes combinações de orientações da laminação bem como as variações de espessuras e materiais de cada lâmina que compõe um laminado fazem com que o comportamento deste adquira características diferentes das encontradas em cada lâmina individual. A análise macromecânica de um laminado é a modelagem do comportamento do mesmo através da suposição de conhecidas propriedades mecânicas e do comportamento individual de cada lâmina (Mendonça, 2005).

Para aplicação da TCL considera-se para o laminado um conjunto de pressupostos que são comumente conhecidos como hipóteses de Kirchhoff em se tratando de estudo de placas. No entanto, para o estudo de cascas são aplicadas as pressuposições de Kirchhoff-Love. Essas hipóteses gerais de placas e cascas isotrópicas, assim como suposições próprias dos materiais compósitos laminados, são apresentadas a seguir (Mendonça, 2005; Soo Kim, 1995):

- a) O laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas, ou seja, sem deslizamento ou deslocamento.
- b) A camada de resina que é usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento. Isso significa que os deslocamentos são contínuos através das lâminas.
- c) O laminado é considerado delgado. É uma placa ou casca de parede relativamente fina em relação a uma das dimensões da superfície. Normalmente isso é quantificado, de forma bastante arbitrária, considerando que o erro na resposta estará na faixa de até 5% em deslocamentos usando a teoria de placa delgada se a relação comprimento/espessura for maior que 100.
- d) Utiliza-se a hipótese das seções planas que diz que uma linha originalmente reta e perpendicular à superfície que define a geometria da estrutura (superfície de referência) permanece reta e perpendicular a essa superfície quando o laminado for estendido e flexionado, como pode ser observado na Fig. 2.7.

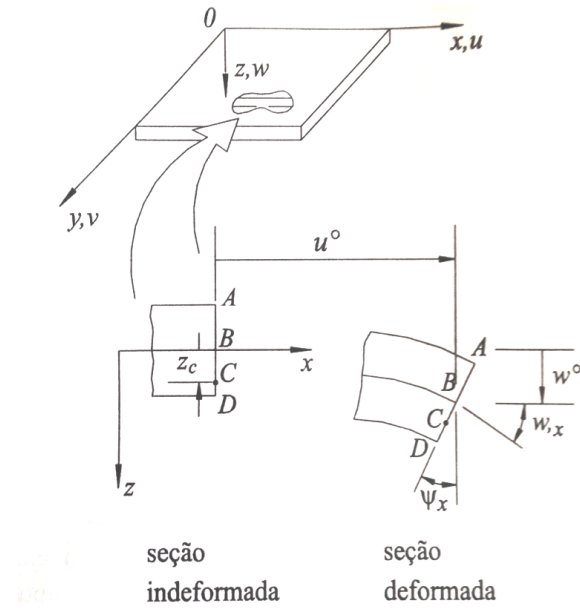


Figura 2.5 – Geometria de deformação da placa no plano XZ (Mendonça, 2005).

A hipótese das seções retas implica que os deslocamentos do ponto genérico C do laminado, nas direções x e y , são obtidos, respectivamente, por:

$$u(x, y, z) = u^o(x, y) + z \psi_x(x, y) \quad (2.56)$$

$$v(x, y, z) = v^o(x, y) + z \psi_y(x, y) \quad (2.57)$$

Nas Eqs. (2.56) e (2.57), ψ_x e ψ_y são as inclinações da normal à superfície média nas direções x e y no ponto (x, y) da superfície de referência. Para uma placa de material compósito é necessário que sejam considerados dois efeitos de forma simultânea: flexão e membrana. A partir das Eqs. (2.56) e (2.57), onde u^o e v^o são as parcelas de deslocamento de membrana, uniformes ao longo da espessura. Por sua vez, os termos $z \psi_x$ e $z \psi_y$ são os deslocamentos coplanares, variáveis com z , associados à flexão.

Das hipóteses gerais de placas e cascas compósitas, tem-se que as superfícies tomadas na configuração indeformada são planas e perpendiculares à linha de referência centroidal da placa. Após a deformação, estas superfícies permanecem planas, sofrendo apenas rotação. Assim, chega-se à:

$$\psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.58)$$

$$(2.59)$$

$$\psi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

Substituindo as Eqs. (2.58) e (2.59) nas Eqs. (2.56) e (2.57), chegamos à:

$$u(x, y, z) = u^o(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \quad (2.60)$$

$$v(x, y, z) = v^o(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \quad (2.61)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.62)$$

As Eqs. (2.60), (2.61) e (2.62) são as equações representativas das três componentes dos deslocamentos e das rotações da superfície de referência. A Eq. (2.62) é consequência da inextensividade do segmento normal.

Considerando a hipótese de que as deformações e rotações são relativamente pequenas, as relações deformação-deslocamento são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.63)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.64)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (2.66)$$

Se substituídos os deslocamentos das Eqs. (2.60), (2.61) e (2.62) nas Eqs. (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66), são obtidas:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u^o(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v^o(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad (2.68)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u^o(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v^o(x, y)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.69)$$

As deformações coplanares da superfície de referência são chamadas de deformações de membrana $\{\varepsilon^o\}$ e são relacionadas aos deslocamentos de membrana como apresentado na Eq. (2.70). Fisicamente, essa deformação de membrana condiz com o primeiro termo das Eqs. (2.67) à (2.69).

$$\{\varepsilon^o\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^o}{\partial x} \\ \frac{\partial v^o}{\partial y} \\ \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Em relação ao segundo termo das Eqs. (2.67), (2.68) e (2.69), o comportamento relacionado faz referência à flexão da superfície de referência. Logo, as curvaturas da superfície de referência $\{\kappa\}$ são definidas por:

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Assim, a curvatura quantifica a flexão da superfície de referência e a deformação de membrana indica a extensão ou a contração da superfície de referência (Mendonça, 2005). Através do uso de notação simbólica, as deformações mostradas nas Eqs. (2.67), (2.68) e (2.69) podem ser apresentadas como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \text{ ou ainda } \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^o\} + z\{\kappa\} \quad (2.72)$$

Substituindo a Eq. (2.72) da variação da deformação através da espessura de um laminado, na relação tensão-deformação de uma lâmina, dada pelas Eqs. (2.48) e (2.49), as tensões de uma determinada lâmina k podem ser expressas em termos das deformações e curvaturas da superfície média (Mendonça, 2005):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (2.73)$$

Ao longo da espessura do laminado os valores de $\{\varepsilon^o\}$ e $\{\kappa\}$ são constantes, ou seja, são independentes do número k de ordem da lâmina. No entanto, cada lâmina k possui suas propriedades elásticas próprias representadas por $[\bar{Q}]_k$. Desta forma cada lâmina desenvolve tensões próprias diferentes das demais lâminas, conforme suas propriedades elásticas e sua cota z . As deformações variam de forma contínua e linear ao longo de z . As tensões, por sua vez, podem ter variações elásticas entre uma lâmina e outra. Dentro de cada lâmina as tensões ainda variam linearmente, como mostrado na Fig. 2.8.

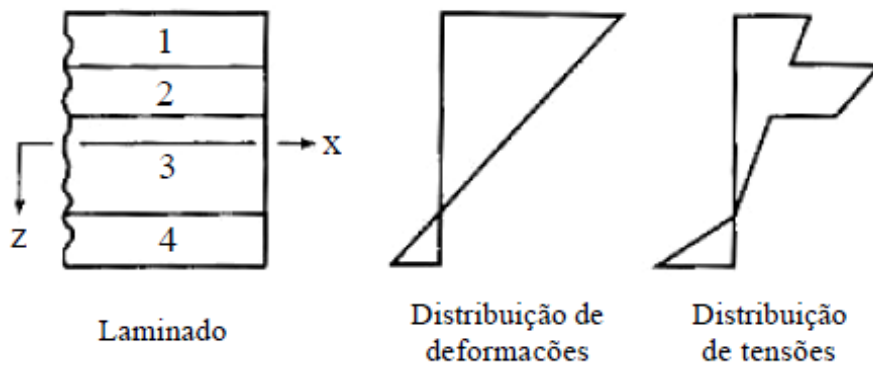


Figura 2.6 - Distribuição das tensões e deformações de um laminado (Jones, 1999).

Segundo Mendonça (2005) e Isoldi (2008), os esforços no laminado são obtidos através da integração das tensões em cada lâmina através da espessura do laminado, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{ou} \quad \{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz \quad (2.74)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{ou} \quad \{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} z dz \quad (2.75)$$

Nas Eqs. (2.74) e (2.75), $\{N\}$ e $\{M\}$ são os esforços normais e de momentos por unidade de comprimento ao longo de uma aresta de um elemento diferencial da placa, paralelos aos eixos x e y . As orientações positivas das forças e dos momentos são apresentadas na Fig. 2.9 (a) e 2.9 (b), respectivamente. Ainda das relações anteriores, h é a espessura total do laminado.

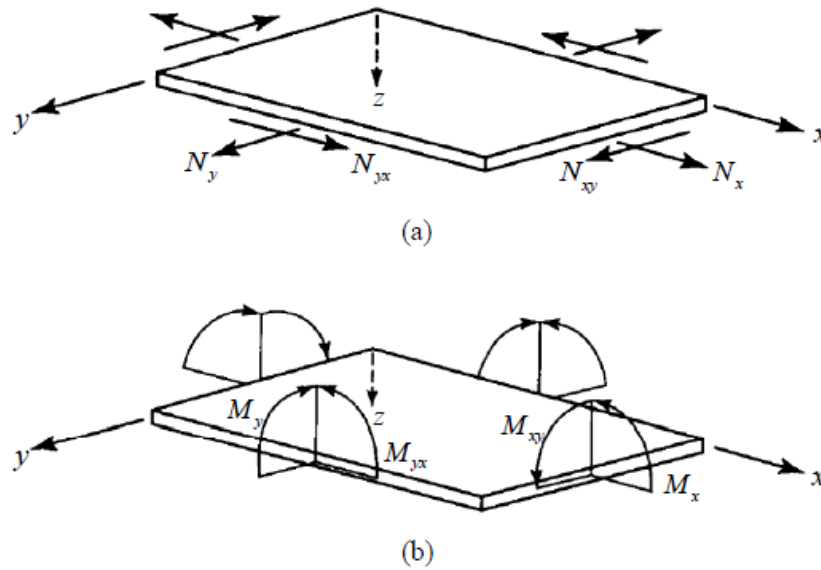


Figura 2.7 – Forças (a) e momentos (b) num elemento diferencial de um laminado plano (Jones, 1999).

A integral ao longo da espessura nas definições das forças resultantes nas Eqs. (2.74) e (2.75) pode ser substituída por um somatório de integrais definidas ao longo da espessura de cada lâmina, sendo assim:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.76)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (2.77)$$

Das Eqs. (2.76) e (2.77), z_k e z_{k-1} são definidos de acordo com a geometria do laminado e n é o número total de lâminas. Considerando as Eqs. (2.48) e (2.49) da relação tensão-deformação, as Eqs. (2.76) e (2.77) ficam da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (2.78)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (2.79)$$

A Fig. 2.10 apresenta as notações para as lâminas de um laminado com n lâminas.

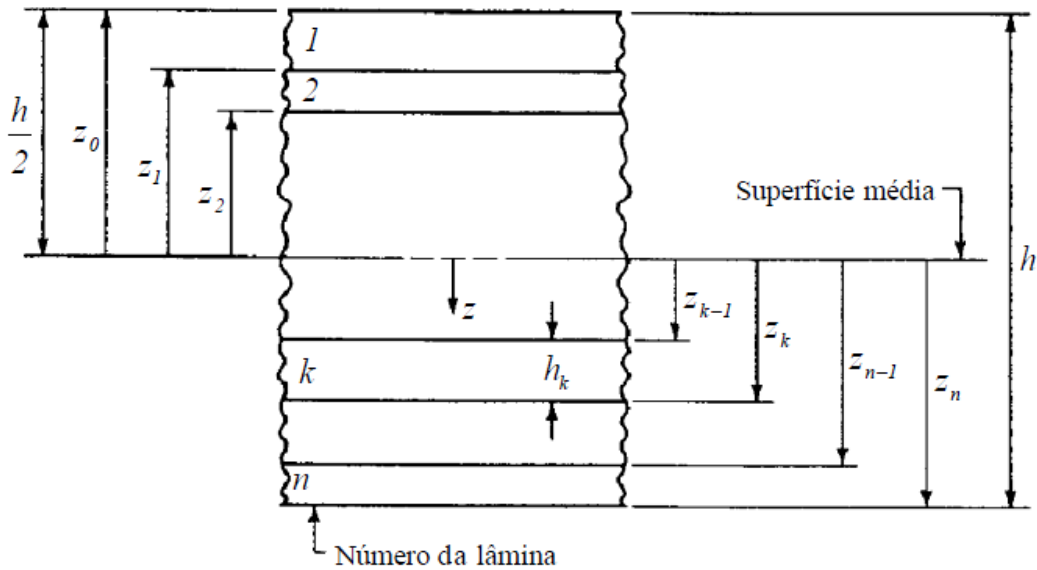


Figura 2.8 – Notações para as lâminas de um laminado com n lâminas (Jones, 1999).

Vale lembrar que $\{\varepsilon^o\}$ e $\{\kappa\}$ não são funções de z , então realizando as integrações e os somatórios, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

sendo:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.82)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.83)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.84)$$

Definindo h_k como a espessura da lâmina k , as Eqs. (2.82), (2.83) e (2.84) passam a ser apresentadas como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k h_k \quad (2.85)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k h_k z_{mk} \quad (2.86)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \left(h_k z_{mk}^2 + \frac{h_k^3}{12} \right) \quad (2.87)$$

onde $i, j = 1, 2, 6$ e z_{mk} é a cota da superfície média da lâmina k , que é a distância da superfície média até a superfície de referência do laminado, definida por:

$$z_{mk} = \frac{z_{k-1} + z_k}{2} \quad (2.88)$$

As Eqs. (2.80) e (2.81) podem ser escritas de forma compacta como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

Na Eq. (2.89), $[A]$ é a matriz de rigidez extensional, $[B]$ é a matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e extensão e $[D]$ é a matriz de rigidez à flexão. Por sua vez, as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ são simétricas. Segundo Mendonça (2005) e Isoldi (2008), no caso de um laminado simétrico em relação à superfície de referência, não existirá acoplamento entre a extensão e a flexão, logo, $[B] = 0$ para o caso de laminados com simetria. A matriz $[C]$ apresenta-se como sendo a matriz de rigidez completa do laminado. A Fig. 2.11 apresenta o significado físico dos termos da matriz $[C]$.

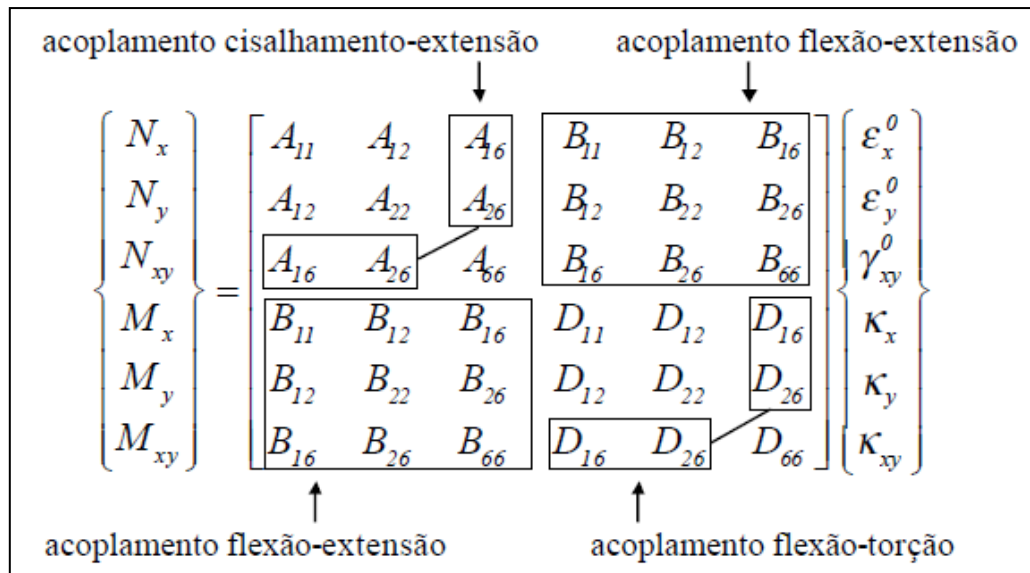


Figura 2.9 – Significado físico dos termos de rigidez nas forças e momentos resultantes (Isoldi, 2008).

Segundo Mendonça (2005) e Isoldi (2008), as unidades do Sistema Internacional de Medidas, envolvidas na Eq. (2.88), são:

$$\{N\} \text{ em } \frac{N}{m}; \quad \{M\} \text{ em } N; \quad \{\varepsilon^o\} \text{ em } \frac{m}{m}; \quad \{\kappa\} \text{ em } \frac{1}{m};$$

$$[A] \text{ em } \frac{N}{m}; \quad [B] \text{ em } N; \quad [D] \text{ em } Nm$$

Um ponto a ser ressaltado é que, assim como dito por Jones (1999) e Mendonça (2005), a TCL apresenta algumas limitações devido às hipóteses de Kirchhoff. As tensões transversais σ_z , τ_{xz} e τ_{xy} , ou chamadas também de tensões interlaminares, são, por definição, nulas na TCL. De fato estas tensões não são nulas, e assumem valores nas interfaces das lâminas nos compósitos. Tais componentes de tensão são responsáveis por um dos modos de falhas mais importantes e frequentes em laminados, a delaminação. Uma das causas dessas tensões consiste na diferença abrupta de propriedades elásticas entre as lâminas adjacentes. Sobre os laminados, o efeito dessas tensões é muito mais importante do que quando se considerando placas e cascas homogêneo-isotrópicas. Nos compósitos, o módulo de elasticidade das resinas poliméricas possui valor muito inferior ao módulo da fibra e mesmo do laminado como um todo. Partindo do ponto conhecido de que a resina é a responsável por transmitir os esforços internos, o efeito do cisalhamento no laminado é considerado como o efeito somado das contribuições de cada região interlaminar ao longo da espessura do laminado. Outra suposição da TCL é uma distribuição linear de deslocamentos coplanares ao longo da espessura, o que contraria resultados analíticos obtidos anteriormente por teorias de maior complexidade. A TCL considera, também, um estado plano de tensões nas relações constitutivas, o que impede um cálculo preciso das tensões interlaminares. Segundo Fagundes (2002), dentre as teorias de laminação existentes, pode-se citar a teoria de alta ordem de Reddy e as teorias zig-zag (de primeira ordem e de alta ordem) como teorias capazes de representar estes efeitos. Todavia, Matthews et al. (2003) e Isoldi (2008) afirmam que tais limitações são importantes em placas espessas, e que em placas delgadas a TCL pode ser utilizada de forma satisfatória.

2.3.1. Casos especiais de laminados

Segundo Jones (1999) e Mendonça (2005), a relação tensão-deformação num laminado traduz-se através de uma relação esforços-deformação dada pelas Eqs. (2.85), (2.86), (2.87) e (2.89). Uma grande parcela dos laminados construídos possui algum tipo de regularidade na sequência das lâminas, propriedades, espessuras e orientações. Para esses casos, simplificações nas expressões das matrizes de rigidez podem ser feitas.

2.3.2. Laminados monolâmina

De acordo com Mendonça (2005) e Isoldi (2008), de certa forma o laminado mais simples é aquele que consiste de apenas uma lâmina, sendo essa lâmina isotrópica, ortotrópica ou ortotrópica oblíqua.

Para o caso de um laminado de uma lâmina isotrópica são válidas as igualdades da Eq. (2.26), fazendo com que a matriz de rigidez da lâmina no sistema principal seja igual à:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Em função de o material ser isotrópico, a matriz de rigidez rotacionada deve ser igual à matriz original, ou seja, $[\bar{Q}] = [Q]$. Assim, a matriz de rigidez do laminado se apresenta como:

$$[C] = \begin{bmatrix} a & \nu a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)a}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & \nu d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu d & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)d}{2} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Na Eq. (2.91), $a = Eh/(1 - \nu)$ e $d = (Eh)/12(1 - \nu)$, sendo estes valores da constante de rigidez extensional e flexural para um caso de placa isotrópica.

Em se tratando de laminado de uma lâmina ortotrópica, as fibras possuem a orientação da direção de x . Como $\theta = 0^\circ$, a matriz de rigidez é $[\bar{Q}] = [Q]$, e a rigidez do laminado é dada pelas Eqs. (2.85), (2.86) e (2.87), sendo apresentada como:

$$[C] = \begin{bmatrix} Q_{11}h & Q_{12}h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}h & Q_{22}h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q_{11}h^3}{12} & \frac{Q_{12}h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q_{12}h^3}{12} & \frac{Q_{22}h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Q_{66}h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Para um laminado de uma lâmina ortotrópica angular as fibras fazem um ângulo θ com o eixo x . Como consequência, a matriz rotacionada $[\bar{Q}]$ da lâmina é uma matriz cheia, definida pela Eq. (2.50), sendo então apresentada a rigidez do laminado como:

$$[C] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}h & \bar{Q}_{12}h & \bar{Q}_{16}h & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}h & \bar{Q}_{22}h & \bar{Q}_{26}h & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16}h & \bar{Q}_{26}h & \bar{Q}_{66}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{11}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{12}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{16}h^3}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{12}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{22}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{26}h^3}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{16}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{26}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{66}h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

2.3.3. Laminado simétrico

Segundo Mendonça (2005), um laminado simétrico é aquele em que várias lâminas são empilhadas de tal forma a garantir simetria de geometria (espessuras e

orientações) e de propriedades mecânicas em relação à superfície de referência. Uma consequência dessa simetria, como já foi comentado anteriormente, é a ausência de acoplamento membrana-flexão, que se traduz pelo valor nulo da matriz $[B]$. Os dois tipos possíveis de laminados simétricos são: os laminados simétricos com número ímpar e os com número par de lâminas, mostrado na Fig. 2.12.

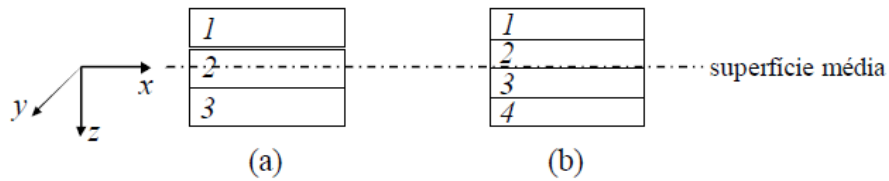


Figura 2.10 – Laminado simétrico com números ímpar (a) e par (b) de lâminas (Isoldi, 2008).

A simetria do laminado da Fig. 2.12 (a) significa que $[\bar{Q}]_1 = [\bar{Q}]_3, h_1 = h_3$, o que implica $z_{m1} = -z_{m3}$ e $z_{m2} = 0$. Já o laminado da Fig. 2.12 (b) tem-se que $[\bar{Q}]_1 = [\bar{Q}]_4, [\bar{Q}]_2 = [\bar{Q}]_3, h_1 = h_4, h_2 = h_3, z_{m1} = -z_{m4}$ e $z_{m2} = -z_{m3}$. Em ambos os casos o acoplamento membrana-flexão é nulo, ou seja, $[B] = 0$.

2.3.4. Laminado cruzado-simétrico

Também conhecido em inglês como *cross-ply*, trata-se de um caso particular onde as lâminas ortotrópicas são empilhadas alternadamente com o eixo principal 1 orientado a 0° ou 90° com o eixo x , as Eqs. (2.50) mostram que $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$. Como consequência, $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ no laminado. As matrizes de rigidez $[A]$ e $[D]$ terão cada uma apenas quatro termos não nulos (Mendonça, 2005).

Conforme Mendonça (2005), quando todas as lâminas possuem espessuras e propriedades idênticas, alternando-se entre 0° e 90° , este laminado é chamado de cruzado simétrico regular. Este laminado tem necessariamente um número ímpar de lâminas, ou seja, um laminado cruzado regular não é dito simétrico se possuir um número par de lâminas. Na literatura é normal o uso da notação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, por exemplo, para indicar as orientações das lâminas.

2.3.5. Laminado simétrico angular

Também encontrado em literaturas como *angle-ply*, consideram-se aqui os laminados formados por lâminas ortotrópicas, cada uma com sua própria espessura e ângulo de laminação θ_k , porém empilhados de forma a garantir simetria. Essa simetria assegura a ausência do acoplamento extensão-flexão, ou seja, $[B] = 0$. Porém, o acoplamento entre os esforços normais e cisalhantes é mantido, o que se traduz em A_{16}, A_{26}, D_{16} e D_{26} não nulos (Mendonça, 2005).

Uma classe especial de laminados simétricos é a dos laminados simétricos regulares, na qual todas as lâminas têm espessuras idênticas, e tem orientações idênticas e alternadas, na forma $[+\theta/-\theta/+ \theta]$.

No caso de laminados simétricos angulares regulares, isto é, laminados de espessura total h , com n lâminas idênticas de espessura h_k , com n ímpar, com orientações alternadas do tipo $[+\theta/-\theta/+ \theta]$, a rigidez é dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}h & \bar{Q}_{12}h & \bar{Q}_{16}\frac{h}{n} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}h & \bar{Q}_{22}h & \bar{Q}_{26}\frac{h}{n} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16}\frac{h}{n} & \bar{Q}_{26}\frac{h}{n} & \bar{Q}_{66}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{11}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{12}h^3}{12} & \frac{h^3(3n^2-2)\bar{Q}_{16}}{12n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{12}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{22}h^3}{12} & \frac{h^3(3n^2-2)\bar{Q}_{26}}{12n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3(3n^2-2)\bar{Q}_{16}}{12n} & \frac{h^3(3n^2-2)\bar{Q}_{26}}{12n} & \frac{\bar{Q}_{66}h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

2.3.6. Laminado antissimétrico

Mendonça (2005) afirma que a fim de eliminar o acoplamento extensão-flexão do laminado, constantemente os projetos buscam a simetria na laminação. Porém, em algumas laminações um laminado antissimétrico é buscado exatamente para garantir sua torção após a cura, previamente à utilização, como no caso de lâminas de ventilador, por exemplo.

Um laminado antissimétrico geralmente tem as matrizes de rigidez com apenas uma simplificação, que é a nulidade dos termos A_{16}, A_{26}, D_{16} e D_{26} .

Para facilidade de fabricação e análise o laminado antissimétrico pode ser regular, isto é, ter todas as lâminas idênticas, empilhadas em ângulos iguais $+\theta$ e $-\theta$ alternadamente, com n par, formando um laminado do tipo $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]$. E, a rigidez desse laminado é dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}h & \bar{Q}_{12}h & 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{Q}_{16}h^2}{2n} \\ \bar{Q}_{12}h & \bar{Q}_{22}h & 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{Q}_{26}h^2}{2n} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{11}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{12}h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{12}h^3}{12} & \frac{\bar{Q}_{22}h^3}{12} & 0 \\ -\frac{\bar{Q}_{16}h^2}{2n} & -\frac{\bar{Q}_{26}h^2}{2n} & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}_{66}h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

3. FLAMBAGEM DE PLACAS

Segundo Åkesson (2007) e Okumoto (2009), a flambagem é um fenômeno de instabilidade que pode ocorrer quando uma placa fina, seja ela plana ou curva, é submetida a um esforço de compressão axial. Quando atingido um determinado nível de carga crítica, a placa apresenta um deslocamento súbito na direção transversal ao plano de ação da força. A força de compressão pode não necessariamente se originar de compressão axial pura, podendo também ser gerada por um momento de flexão, por cargas locais concentradas de cisalhamento, ou por uma combinação entre estes.

Um exemplo de placa sendo carregada uniaxialmente, sob estado de flambagem pode ser observada na Fig. 3.1, onde H é a largura da placa, L é o comprimento e a espessura é chamada de h . O modelo apresentado por Åkesson (2007) contempla bordas apoiadas com carregamento e bordas livres sem carregamento.

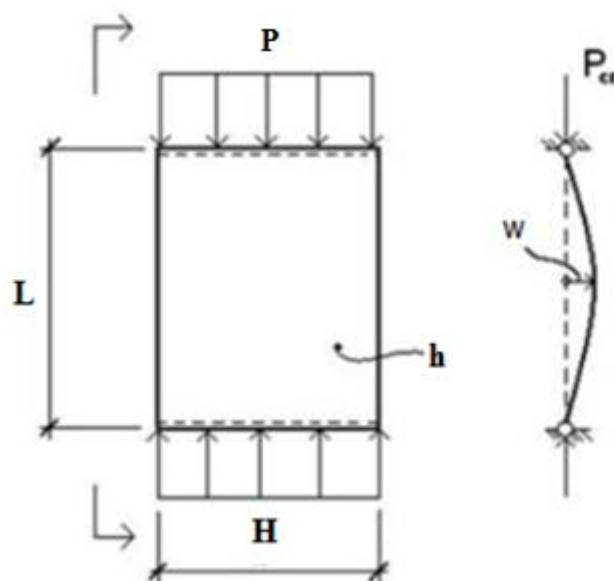


Figura 3.1 - Placa com carregamento uniaxial (Åkesson, 2007)

A Fig. 3.2 apresenta um gráfico *carga × deslocamento* para uma placa carregada uniaxialmente, feita de material isotrópico (como o aço, por exemplo). Nela Åkesson (2007) mostra que quando a carga atinge um determinado valor crítico, expresso como P_{Cr} ou σ_{Cr} , a estrutura sofre flambagem elástica (linear).

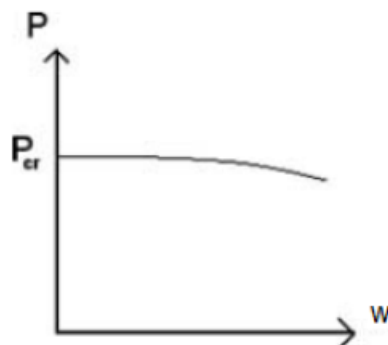


Figura 3.2 - Curva carga $\times$ deslocamento para uma placa isotrópica carregada axialmente (Åkesson, 2007).

3.1. FLAMBAGEM DE PLACAS DE MATERIAL COMPÓSITO LAMINADO

Austin (2003) apresentou a carga crítica de flambagem para placas ortotrópicas homogêneas e placas laminadas. Segundo o autor, a determinação da carga crítica de flambagem para placas homogêneas é bem documentada. A obtenção da carga crítica de flambagem é principalmente utilizada para verificação de modelos computacionais. A verificação do quão precisa é a determinação da carga crítica de flambagem, obtida pelo ANSYS® para placas laminadas, é desejada partindo do pressuposto que a análise de carga crítica de flambagem ainda não apresenta estudos bem aprofundados para placas compósitas laminadas.

Devido ao baixo número de estudos de carga crítica de flambagem em placas laminadas disponíveis, a validade da maioria das análises de carga crítica obtidas pelo ANSYS® é feita baseada na precisão dos resultados para placas ortotrópicas homogêneas (Austin, 2003).

Segundo Austin (2003), para análise da placa laminada sob solicitações compressivas, o efeito da orientação das camadas, as condições de contorno, a razão de aspecto da placa e a espessura do laminado devem ser levados em consideração para obtenção da carga crítica de flambagem.

A Fig. 3.3 apresenta uma placa com solicitação uniaxial de cargas compressivas P .

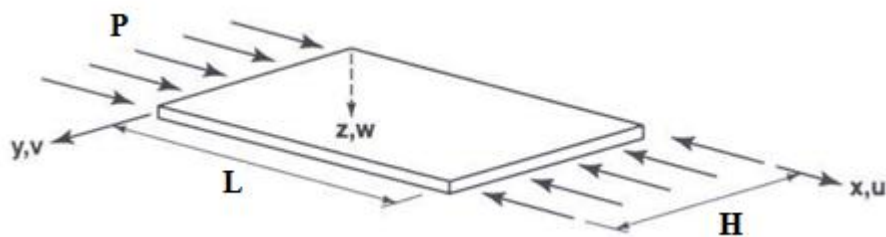


Figura 3.3 - Placa sujeita a carregamento compressivo, uniaxial e uniforme no plano.
(Jones, 1999)

3.1.1. Flambagem de placas laminadas

Em Jones (1999), considerando uma classe geral de placas retangulares laminadas, simplesmente apoiadas nas bordas $x=0$, $x=L$, $y=0$ e $y=H$, e sujeitas a cargas uniformes, no plano, como visto na Fig. 3.3, observa-se que quando placas flambam, a deformação transversal ao plano da placa tem a formação de ondulações naturais em duas dimensões, como pode ser observado na Fig. 3.4.

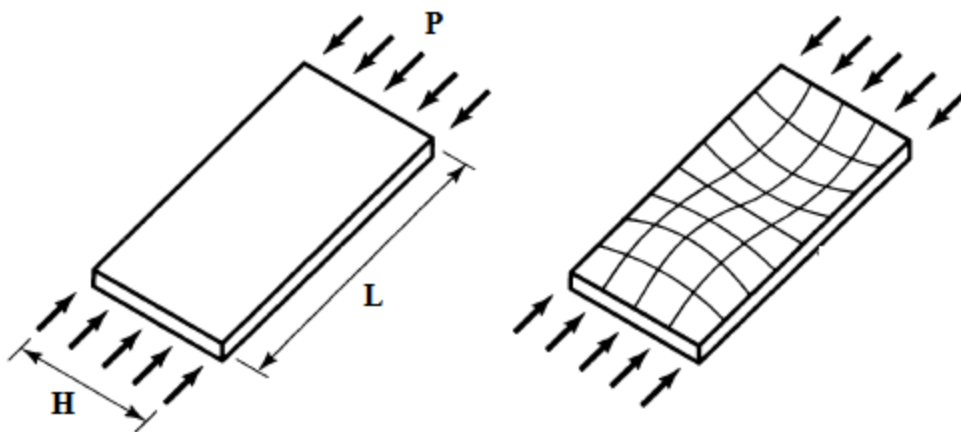


Figura 3.4 - Típico comportamento de flambagem de placa simplesmente apoiada
(Jones, 1999).

Segundo Jones (1999), no caso de laminações assimétricas, o acoplamento flexão-extensão é extremamente significativo para um pequeno número de camadas. Para 2 (duas) lâminas em uma placa com razão de aspecto igual à 1 (um), a resistência à flambagem é superestimada em 183% se a aproximação ortotrópica for aplicada. Por

outro lado, a resistência atual é 65% menor do que o calculado pelo uso da aproximação ortotrópica. Para 4 (quatro) lâminas, a resistência superestimada é de 19% enquanto a redução atende à 16%, respectivamente. Para 6 (seis) camadas, o número cai par 8% superestimado e 7% de redução, respectivamente. Obviamente, o efeito do acoplamento flexão-extensão desaparece muito rápido à medida que o número de camadas aumenta para um laminado assimétrico. No entanto, para pouco mais de 6 (seis) camadas o efeito do acoplamento não pode ser ignorado. Tal consideração não se aplica às placas simétricas, onde a simetria da laminação anula o acoplamento flexão-extensão.

Em sua pesquisa de carga crítica de flambagem em placas de fibra de vidro reforçadas com plástico, Austin (2003) diz que a flambagem de placas laminadas é um tópico complicado e apenas alguns resultados foram publicados. Para tal, o autor apresenta a determinação da carga crítica de flambagem para um caso de uma placa laminada simétrica onde, conforme visto na Eq. (2.93), a matriz $[B] = 0$ devido à ausência de acoplamento extensão-flexão. A formulação apresentada por Austin (2003) é aplicada especialmente para uma placa laminada ortotrópica simplesmente apoiada em todas as bordas da placa. Para tal, além de $[B] = 0$, a placa não apresenta acoplamento cisalhamento-extensão, o que resulta em $A_{16} = A_{26} = 0$, e não apresenta acoplamento flexão-torção, o que resulta em $D_{16} = D_{26} = 0$.

Segundo Jones (1999), uma solução para uma placa como no caso proposto por Austin (2003), é considerada como uma aproximação não conservativa da classe geral dos laminados que normalmente apresentam o acoplamento flexão-torção. A aproximação de um laminado geral, através de um laminado ortotrópico especial pode resultar em erros de fator maior do que 3 (três).

Conforme Austin (2003), existem soluções mais precisas para a flambagem de placas laminadas, porém apresentam resolução e aplicação muito complicadas em seus procedimentos.

4. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Segundo Chodraui (2003), o Método de Elementos Finitos (MEF), do inglês *Finite Element Method* (FEM), é um método numérico utilizado para gerar funções de aproximação. Em princípio, o método serve para abordar praticamente todos os fenômenos, desde que os mesmos sejam modelados de maneira coerente. Podem ser consideradas variações das condições de contorno e da seção transversal ao longo do eixo longitudinal, bem como imperfeições e não linearidades. Como desvantagem, tem-se em alguns casos um elevado tempo para a preparação da entrada de dados e análise propriamente dita, dependendo da velocidade do computador a ser utilizado e da complexidade da malha a ser discretizada, o que às vezes o torna um método trabalhoso para a aplicação em alguns problemas práticos.

Segundo Madenci e Guven (2006), o MEF é uma técnica computacional para obtenção de soluções aproximadas para uma grande variedade de problemas de engenharia do “mundo real”, possuindo domínios complexos submetidos a condições gerais de contorno. Um fenômeno físico normalmente ocorre em um meio contínuo da matéria (sólido, líquido ou gasoso). Esse meio contínuo com um limite conhecido denomina-se domínio. O MEF é baseado na decomposição do domínio em um número finito de subdomínios, conhecidos na metodologia como elementos, para os quais a solução aproximada sistemática é construída pela aplicação dos métodos residual variacional ou residual ponderado.

O MEF vem sendo largamente utilizado para solucionar problemas de engenharia (Mattews et al., 2003; Marincovic, 2004; Madenci e Guven, 2006; Barbero, 2007; Blaauwendrad, 2010, Correia, 2013, Lorenzini et al., 2016), tendo como principais áreas a mecânica dos sólidos, a transferência de calor, a mecânica dos fluidos, a acústica, a eletricidade e o magnetismo. Atualmente, a grande aplicação do método se dá através dos inúmeros programas computacionais existentes para a resolução de problemas, associados a uma interface projetada para ser o mais intuitiva possível, tornando a utilização do MEF mais fácil e rápida. A Fig. 4.1 mostra o casco de uma embarcação através de uma modelagem com aplicação do método de elementos finitos.

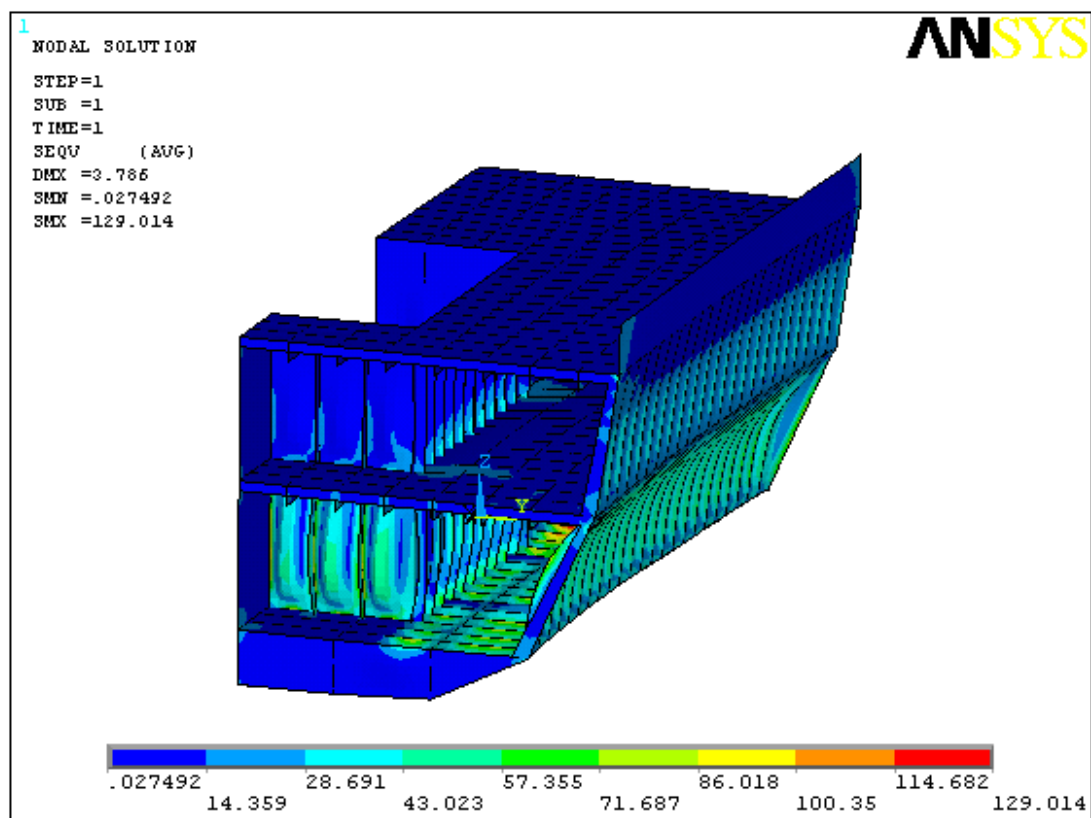


Figura 4.1 - Casco de uma embarcação modelada com a aplicação do Método de Elementos Finitos.
(http://www.oceanica.ufrj.br/deno/prod_academic/relatorios/atuais/Caio_%20Ricardo/relat2/Analise%20Estrutural.htm)

Segundo Burnett (1987), toda a análise se dá seguindo uma determinada ordem. Inicialmente, o analista vislumbra as resoluções das equações que determinam o fenômeno estudado. Um conjunto composto pelas equações governantes, pelo sistema, pelo domínio e pelas condições de carregamento, é utilizado a fim de resolver os problemas de engenharia. De uma forma geral, o sistema é um elemento físico composto por vários materiais como sólidos, líquidos, gases, plasma ou combinações destes. O domínio representa a porção do espaço ocupada pelo sistema. As equações governantes podem ser equações diferenciais que expressem a conservação ou o balanço de propriedades físicas do sistema, como massa, energia ou quantidade de movimento. As condições de carregamento são agentes externos que podem ser forças, temperaturas, correntes, campos, entre outros.

Segundo Vanalli (2004), a aplicação do MEF se dá através da divisão do domínio, que deve ser contínuo, em pequenos elementos, denominados elementos

finitos. Cada elemento se conecta ao elemento vizinho através dos pontos nodais. Um exemplo de divisão de domínio pode ser vista na Fig. 4.2.

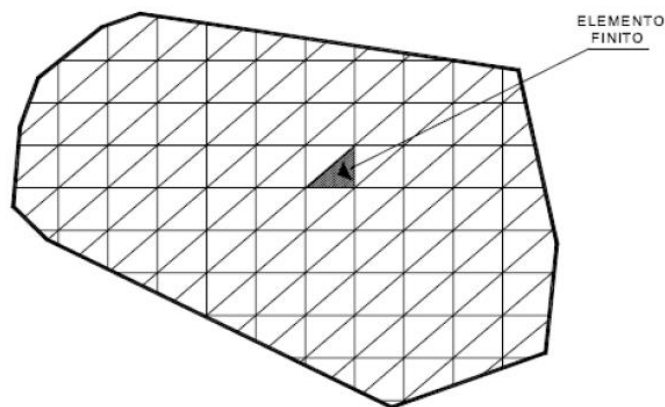


Figura 4.2 - Divisão de um domínio em elementos finitos (Vanalli, 2004)

4.1. ELEMENTOS E GRAUS DE LIBERDADE

Os elementos comumente utilizados nas análises pelo método MEF, podem possuir uma dimensão (1D), duas (2D) ou três dimensões (3D). As Figs. 4.3. e 4.4. apresentam os tipos de elementos mais utilizados na divisão dos domínios submetidos à análise.

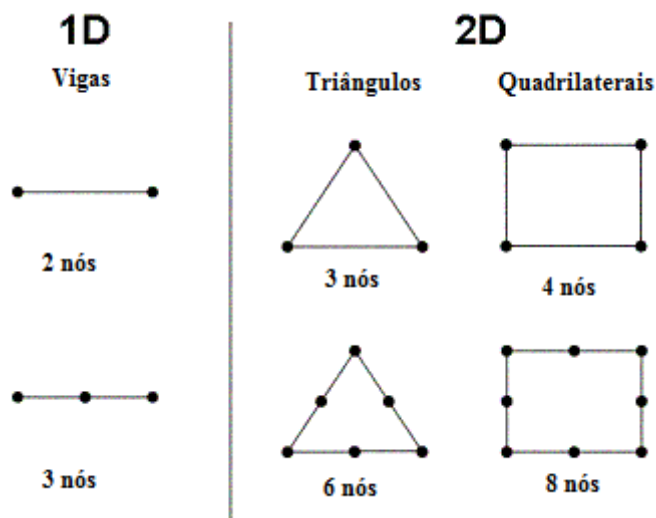


Figura 4.3 - Elementos de divisão do domínio com uma e duas dimensões (Adaptado de <http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/theory/index.html>)

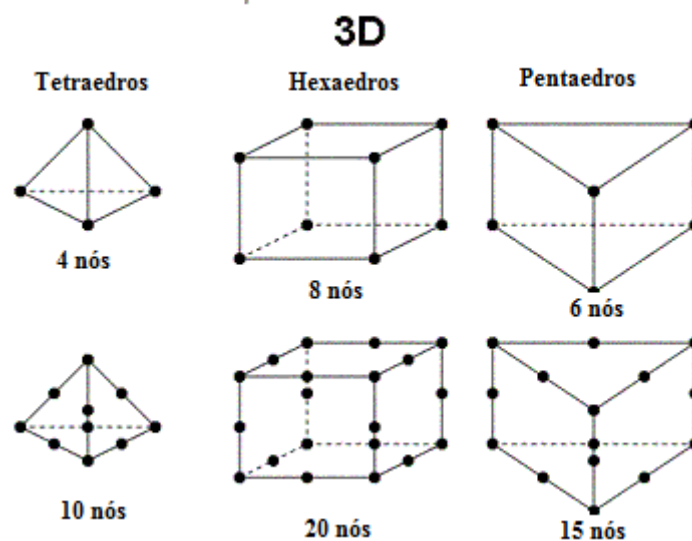


Figura 4.4 - Elementos de divisão de domínio com três dimensões (Adaptado de <http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/theory/index.html>)

Segundo Blaauwendraad (2010) na maioria das simulações de placas são utilizados os elementos planos, onde uma das dimensões é muito pequena se comparada com as outras duas. Os referidos elementos são unidos por nós, formando uma malha através da união das bordas de cada elemento. Os graus de liberdade são atribuídos ao elemento na região dos nós. Em um elemento em forma de membrana, por exemplo, têm-se dois graus de liberdade por nó: um deslocamento w , uma rotação ψ_x sobre o eixo x e uma rotação ψ_y sobre o eixo y . A Fig. 4.5 mostra os graus de liberdade considerados nos dois elementos citados anteriormente.

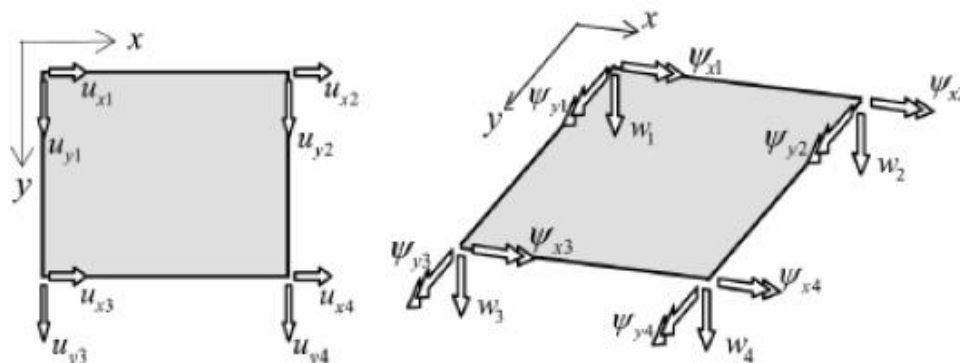


Figura 4.5 - Graus de liberdade em elementos de membrana e placa fletida (Blaauwendraad, 2010).

A aplicação de elementos quadrilaterais em duas dimensões pode ser vista na Fig. 4.6, que apresenta a estrutura de um navio com o seu domínio todo dividido pelo elemento citado, a fim de realizar avaliações e/ou análises estruturais.

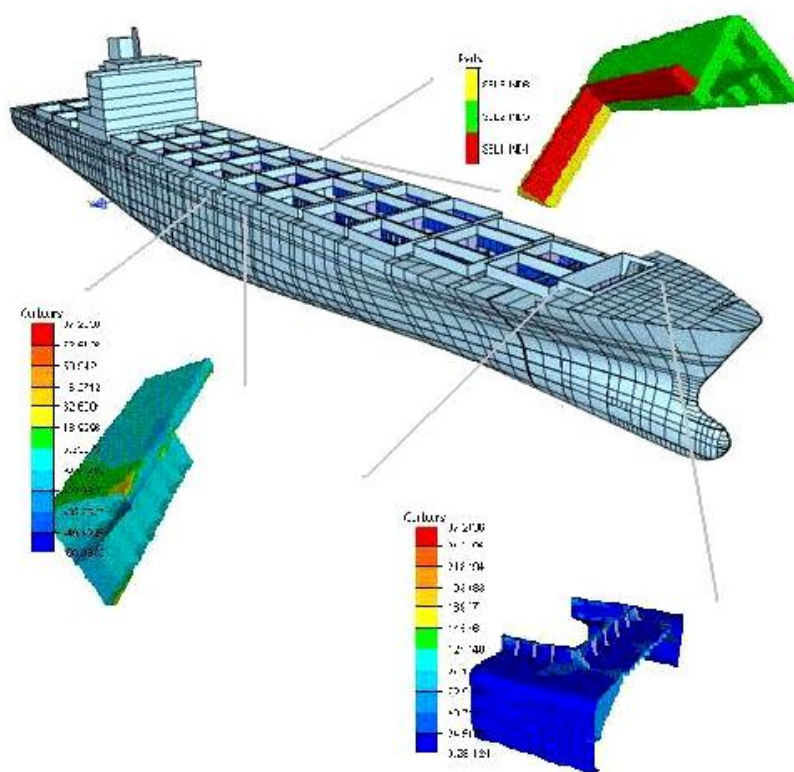


Figura 4.6 - Divisão do domínio da estrutura de um navio em elementos finitos quadrilaterais de duas dimensões (Adaptado de <http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/>)

Segundo Blaauwendraad (2010), os elementos em forma de placa podem ser conectados espacialmente. Na maioria das estruturas é necessário utilizar elementos que se comportem tanto como membrana quanto como uma placa sob flexão. Em decorrência disso, geralmente são utilizados elementos com seis graus de liberdade em cada nó, sendo chamados de elementos de casca. De uma forma geral, os softwares comerciais disponíveis oferecem diferentes tipos de elementos finitos para serem utilizados. A Fig. 4.7 mostra elementos retangulares, triangulares e quadrilaterais que podem ser encontrados em softwares comerciais e aplicados aos domínios do modelo desejado.

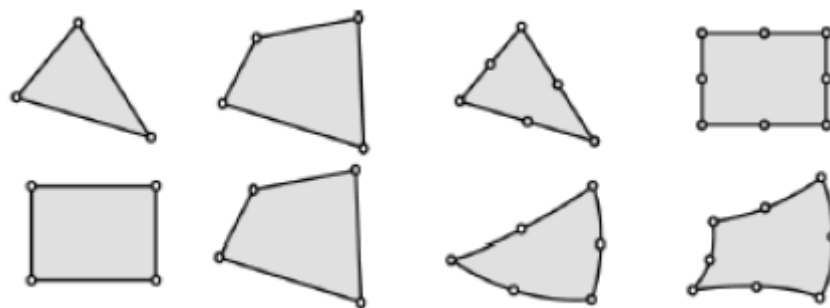


Figura 4.7 - Geometria dos elementos finitos encontrados em softwares comerciais (Blaauwendraad, 2010).

Conforme Blaauwendraad (2010), quando inserido um nó intermediário em uma borda do elemento, esse bordo pode adquirir uma forma curvada, o que pode ser visto na Fig. 4.7. Tais elementos são chamados de elementos isoparamétricos.

4.2. MATRIZ DE RIGIDEZ E RESTRIÇÕES

Segundo Burnett (1987) e Blaauwendraad (2010), os graus de liberdade de um nó são comuns a todos os elementos que se ligam a esse nó. Um elemento individual, por sua vez, partilha os graus de liberdade de nós diferentes. Estes graus de liberdade em conjunto formam o vetor de deslocamento do elemento, podendo este conter rotações. Uma força generalizada, que pode ser em forma de momento, é associada a cada grau de liberdade. Estas forças em conjunto formam o vetor de força do elemento. A matriz de rigidez do elemento relaciona o vetor deslocamento do mesmo ao seu vetor de força. Para um elemento triangular de três nós denominados i , j e k , a matriz de rigidez tem a forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{e,i} \\ F_{e,j} \\ F_{e,k} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Na Eq. (4.1), K são os termos da matriz de rigidez do elemento triangular, u_i é o vetor que representa os graus de liberdade do elemento no nó i , u_j é o vetor que

representa os graus de liberdade do elemento no nó j , u_k é o vetor que representa os graus de liberdade do elemento no nó k , $F_{e,i}$ é o vetor que representa as forças atuantes no elemento no nó i , $F_{e,j}$ é o vetor que representa as forças atuantes no elemento no nó j , $F_{e,k}$ é o vetor que representa as forças atuantes no elemento no nó k .

Conforme Blaauwendraad (2010), a matriz de rigidez da Eq. (4.1) governa o comportamento do elemento estrutural. A sua derivação baseia-se na aproximação do campo de deslocamento dentro do elemento. Quanto maior o grau de polinômios no campo, maior será a precisão da solução do elemento. Diversas vezes o desempenho de um elemento é melhor se o mesmo tiver mais graus de liberdade, porém, isso não pode ser interpretado como uma regra. A qualidade de um elemento é dependente de vários fatores, entre eles, o campo de deslocamento escolhido, as formas como as integrações numéricas são feitas, a compatibilidade entre os deslocamentos em elementos adjacentes, entre outros. Segundo Blaauwendraad (2010) e Correia (2013), há uma tendência de que elementos com nós intermediários nas bordas tenha um desempenho melhor se comparado a um elemento com nós apenas nas extremidades, porém, isso não pode ser encarado como regra.

Programadores costumam usar pontos de Gauss no processo de integração matemática para a construção de matrizes de rigidez do elemento. De acordo com Akin (2005) e Blaauwendraad (2010), os pontos de Gauss são relacionados com as integrais de polinômios sobre a área de um elemento. Gauss mostrou que é possível escrever integrais como sendo somas ponderadas dos valores do polinômio de um número de pontos discretos específico. Os pontos não coincidem com o nós, mas situam-se no interior dos elementos com certa distância das bordas. Esquemas de pontos de Gauss com dois por dois e três por três, em domínios retangulares, pode ser visto na Fig. 4.8.



Figura 4.8 - Esquemas de pontos de Gauss (Blaauwendraad, 2010).

O sistema de equações do problema, com N pontos nodais é dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_N \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde “.” representa os termos da matriz de rigidez do elemento triangular, u_1 é o vetor que representa os graus de liberdade do nó 1, u_N é o vetor que representa os graus de liberdade do nó N , F_1 é o vetor que representa as forças atuantes no nó 1 e F_N é o vetor que representa as forças atuantes no nó N .

Segundo Blaauwendraad (2010), a matriz rigidez global é um conjunto de matrizes de elementos individuais. O vetor do lado direito representa a carga à qual está submetida a estrutura. Esta carga é constituída por cargas pontuais nos nós. Quando o usuário insere uma carga distribuída, o programa irá substituí-lo por cargas pontuais estaticamente equivalentes. Hoje em dia, a aplicação de malhas mais refinadas já não é mais um problema na aplicação do MEF, visto que com o avanço tecnológico, as máquinas possuem um poder de processamento maior. O procedimento de montagem tem um significado físico: se M elementos se juntam em um nó i , então M vetores de força do elemento $F_{e,i}$ juntos devem equilibrar a carga F_i aplicada naquele nó.

O conjunto de equações dado pela Eq. (4.2) não pode ser resolvido enquanto houver possibilidade de deslocamentos do corpo rígido, conseqüentemente, a matriz de rigidez global será singular. Para impedir a referida singularidade, limitações do deslocamento devem ser especificadas. Em geral, os programas comerciais disponibilizam recursos para que suportes sejam especificados como flexíveis ou rígidos. Segundo Blaauwendraad (2010), em se tratando de suporte rígido, o deslocamento correspondente nessa direção deve ser zero. Desta forma, diminui-se um grau de liberdade para efeitos de cálculo. Sendo assim, a linha e a coluna na equação da matriz global, que correspondem a esse grau de liberdade, devem ser omitidas. Se um suporte de mola for especificado em algum nó, o software irá adicionar a rigidez da mola para o termo diagonal principal que corresponde ao grau de liberdade deste ponto específico.

4.3. MODELO COMPUTACIONAL

Com a utilização do software ANSYS® em sua versão de número 14, foram desenvolvidas as análises numéricas. O elemento utilizado foi SHELL281 que, segundo ANSYS *Element Manual* (2009), é o elemento adequado para análises de estruturas de casca laminada com espessura fina até moderada. O elemento tem oito nós e seis graus de liberdade para cada nó, sendo eles: translações ao longo dos eixos x, y e z, e rotações em torno dos eixos x, y e z.

Segundo ANSYS *User's Manual* (2009), o SHELL281 deve ser utilizado para aplicações laminadas, sendo elas cascas compósitas ou construções sanduíche. O elemento trabalha com a precisão de modelagem, para cascas compósitas, governada pela primeira ordem da teoria de deformação de cisalhamento. O elemento SHELL281 é apresentado na Fig. 4.9.

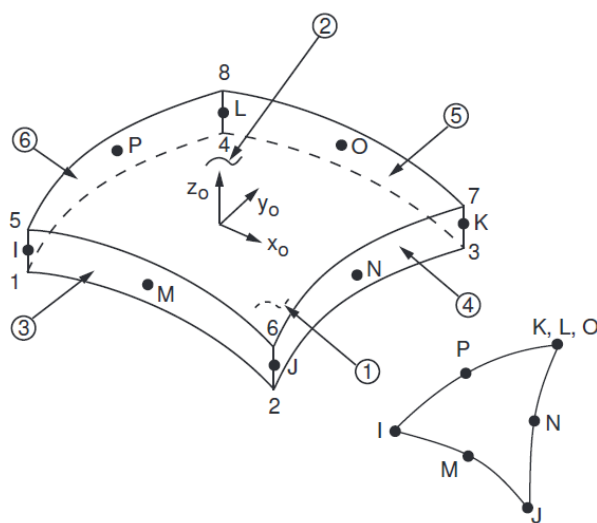


Figura 4.9 - Geometria do elemento SHELL281 (ANSYS User's Manual, 2009)

Para o estudo numérico do fenômeno da flambagem através do ANSYS® foi adotada a análise (elástica) de autovalores. Segundo Madenci e Guven (2006), as equações de equilíbrio por elementos finitos para este tipo de análise envolvem a solução de equações algébricas homogêneas cujo autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado representa o modo primário de flambagem.

Segundo Przemieniecki (1985), a formulação utilizada para a metodologia de análise inclui tanto os termos lineares como os termos não lineares. Desta forma, a

matriz rigidez total $[K]$, é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações, $[K_E]$, como a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$. Esta última, $[K_G]$, não depende apenas da geometria visto que o esforço interno $\{P_0\}$ existente no início do carregamento deve ser considerado. Desta forma, a matriz de rigidez total da placa para um nível de carga $\{P_0\}$ pode ser apresentada como:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (4.3)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez total, $[K_E]$ é a matriz de rigidez convencional para pequenas deformações $[K_G]$ é a matriz de rigidez geométrica.

No caso de o carregamento atingir um nível de $\{P\} = \lambda\{P_0\}$, onde λ é um escalar, a matriz de rigidez passa a ser escrita como:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \quad (4.4)$$

sendo λ um escalar na Eq. (4.4).

As equações, governantes, de equilíbrio para uma placa, podem ser escritas como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{P_0\} \quad (4.5)$$

onde $\{U\}$ é o vetor de deslocamento total e $\{P_0\}$ é o esforço interno existente no início do carregamento.

O vetor de deslocamento total pode ser determinado por:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{P_0\} \quad (4.6)$$

Segundo Przemieniecki (1985), em se tratando de flambagem de placas, o elemento estrutural em análise apresenta um grande crescimento nos deslocamentos sem que haja crescimento da carga. Por definição matemática é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos $\{U\}$ tendem a infinito quando:

$$\det [K_E] + \lambda[K_G] = 0 \quad (4.7)$$

onde $\det$ é uma função determinante.

Segundo o ANSYS User's Manual (2005), esta equação representa um problema de autovalores que, uma vez resolvido, gera o menor autovalor, λ_1 , que corresponde à carga crítica de flambagem dada por $\{P_{Cr}\} = \lambda_1\{P_0\}$. Esta é a carga limite onde inicia o fenômeno de instabilidade da flambagem. Ainda, o vetor de deslocamento associado $\{U\}$ define a forma do modo de flambagem. O problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos.

4.4. TESTE DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

Primeiramente foi feito o teste de convergência de malha para que fosse definido o grau de refinamento da análise sobre a placa. Considerando a flambagem biaxial, uma placa de material compósito laminado sem perfurações foi utilizada. Os resultados obtidos para a carga crítica para diferentes refinamentos de malha são apresentados na Tabela 4.1.

Para análise da convergência dos valores analisados utiliza-se o cálculo da diferença percentual como:

$$er e () = x \frac{(r () - r ())}{r ()} \quad (4.8)$$

onde $r_{(i)}$ é o valor da carga crítica de flambagem obtido com a malha mais refinada utilizada na última análise, enquanto $r_{(i-1)}$ é o resultado da carga crítica de flambagem obtido com uma malha menos refinada utilizada em uma análise anterior.

A Fig. 4.10 apresenta um gráfico representativo da análise de convergência de malha. Nesta imagem é possível observar o comportamento dos resultados obtidos pelo número de elementos utilizados na análise. Torna-se notável a convergência do resultado para um número de elementos maior do que 3200.

Tabela 4.1– Teste de independência de malha para uma placa sem furo submetida à solicitação de compressão biaxial.

Malha	Tamanho do elemento (mm)	Número de Elementos	Carga Crítica (N/mm)	Diferença (%)	Tempo de simulação (min)
10 x 20	50,0	200	252,71470	0,00369	0,2
20 x 40	25,0	800	252,70537	0,00073	0,5
40 x 80	12,5	3200	252,70353	0,00013	0,8
50 x 100	10,0	5000	252,70319	0,00028	1,0
100 x 200	5,0	20000	252,70247	0,00033	30,0
200 x 400	2,5	80000	252,70163		240,0

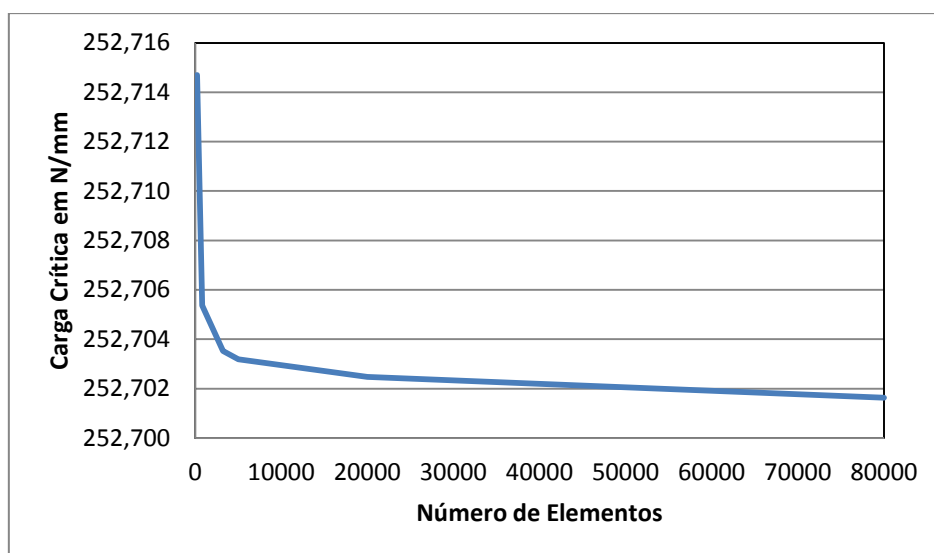


Figura 4.10 – Convergência dos resultados obtidos do teste de independência de malha.

Após tal análise, a malha escolhida para dar seguimento à pesquisa foi a malha de 3200 elementos, visto que não apresentará um erro significativo nos resultados e reduzirá o esforço computacional durante as análises.

4.5. VERIFICAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL PARA A PLACA SEM FUROS

A verificação do modelo foi feita utilizando um problema de flambagem biaxial em placas de material compósito, disponível em Barbero (2007). O problema proposto por Barbero (2007) trata de uma placa simplesmente apoiada laminada em AS4/9310 com fração volumétrica de fibras igual a 0,6. O laminado possui dimensões de 500 mm x 1000 mm x 10,2 mm (divididos em 12 camadas de laminação com 0,85 mm de espessura, cada) com orientação de $(0^\circ/90^\circ)_3s$. Na Tab. 4.2, é exposta a configuração da placa testada, bem como as suas propriedades. O livro utiliza um modelo de análise com o software ANSYS®, versão 12 e elemento de casca SHELL93. Para o modelo de análise do presente estudo, será utilizada uma versão mais recente do software ANSYS®, ANSYS 14, e o elemento de casca utilizado será o SHELL281.

Tabela 4.2 - Propriedades e dimensões da placa (Adaptado de Barbero, 2007)

H	500mm
L	1000mm
h	10,2mm
Orientação do laminado	$(0/90)_3s$
E_1	145880 MPa
$E_2 = E_3$	13312 MPa
$G_{12} = G_{13}$	4386 MPa
G_{23}	4529 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,263
ν_{23}	0,470

Aplicando os valores das constantes de engenharia da Tab. 4.2. na Eq. (2.14), é possível obter os valores para as constantes em relação aos eixos x - y - z . Essa conversão é necessária para aplicação no modelo computacional, visto que o ANSYS® utiliza os nove parâmetros da Eq. (2.14) como referência para os cálculos de laminados, parâmetros estes que estão dispostos na Tab. 4.3.

Tabela 4.3 – Propriedades de Engenharia para AS4/9310

$E_x = E_y$	79985 MPa
E_z	16128 MPa
$G_{yz} = G_{xz}$	4458 MPa
G_{xy}	4386 MPa
ν_{xy}	0,044
$\nu_{xz} = \nu_{yz}$	0,415

Com o elemento SHELL93 um valor de 252,70 N/mm foi obtido (Barbero, 2007). Através da análise do problema com o modelo utilizando o elemento de casca SHELL281, a carga crítica de flambagem obtida é de 252,70 N/mm, o que verifica o modelo computacional utilizado nessa pesquisa. A placa verificada pode ser vista abaixo na Fig. 4.11 sob a condição do primeiro modo de flambagem, onde 0 (zero) é o mínimo deslocamento e está representado em azul, e 1 (um) representa o máximo deslocamento mostrado em vermelho.

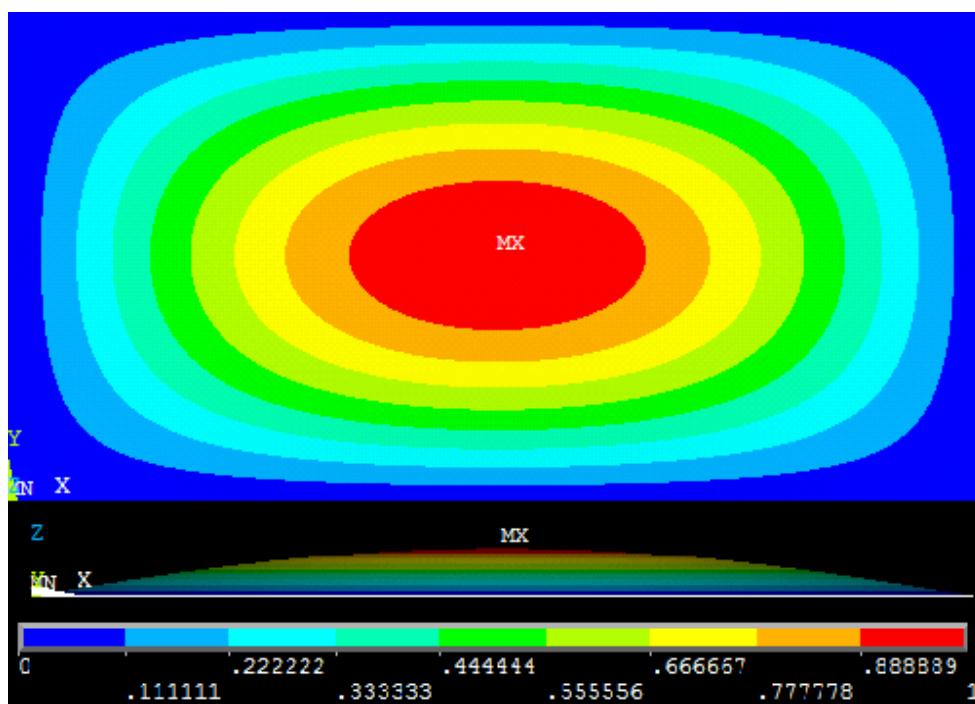


Figura 4.11 - Placa utilizada para verificação do modelo computacional. Carga crítica de flambagem de 252.70 N/mm para a configuração estudada.

Cabe destacar que os elementos SHELL93 e SHELL281 possuem equacionamentos análogos, justificando ter sido encontrado o mesmo valor de carga crítica. Entretanto, essa verificação é válida pois mostra que o modelo computacional está sendo usado de maneira adequada.

5. DESIGN CONSTRUTAL

Em 1997 o *Constructal Design*, ou Design Construtal, foi proposto como uma visualização mental de que os sistemas de fluxo animados ou inanimados seguem um princípio físico fundamental, que é a Lei Construtal. O Design Construtal se baseia em três princípios fundamentais para descrever como as formas geométricas são determinadas (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008; Bejan e Zane, 2012), são eles:

- 1) A vida é um fluxo, ou seja, todos os sistemas de fluxo são sistemas vivos, tanto o animado como o inanimado;
- 1) Geração de design e a sua evolução são fenômenos da física, baseados em um princípio físico fundamental;
- 2) Os sistemas têm a tendência universal para evoluir em um determinado sentido no tempo.

Segundo Reis e Gama (2010), a Lei Construtal é o primeiro princípio da física responsável por todo o projeto e evolução dos sistemas de fluxo. Ela sustenta que a forma e a estrutura surgem para facilitar o fluxo. Esta tendência é refletida pelos fenômenos que ocorrem, de forma espontânea, na natureza, e que são os responsáveis por permitir que os fluxos ocorram com mais facilidade. Como exemplo disto, podem ser citados os riachos, córregos e até mesmo as bacias hidrográficas que se formam através de gotas de chuva que se aglutinam e se movem juntas.

Conforme Bejan e Zane (2012), o Design Construtal proclama que a estrutura que proporciona maior facilidade de fluxo em sistemas que movimentam uma corrente de um ponto a uma área, ou de uma área para um ponto, é uma estrutura em forma de árvore. Ainda os autores relacionam esta forma de árvore com as formas do aparelho circulatório humano e do sistema nervoso, que geram estruturas semelhantes a uma árvore porque essa é a maneira mais fácil de promover o fluxo.

Segundo Bejan (2000) e Bejan e Lorente (2008), o Design Construtal define a direção do tempo de todos os fenômenos evolutivos. A Lei Construtal afirma que os projetos devem evoluir, adquirindo configurações cada vez melhores para dar mais acesso para as correntes que fluem através deles. Bejan (2000) também define, através

de uma análise física, o significado de ser “forte” para “sobreviver” e para ser eficiente. Lorente e Bejan (2010) dizem que o design construtal mostra que a geração das formas e a evolução física são fenômenos macroscópicos que surgem naturalmente para fornecer condições de fluxo cada vez melhores. Essa evolução ocorre em todas as escalas, tratando-se de uma evolução conjunta de cada componente de um fluxo do sistema, como por exemplo, riachos, árvores e ruas. Estes elementos se fundem em estruturas cada vez maiores, formando bacias hidrográficas, florestas e redes de transportes, provocando a emergência de uma hierarquia onde os componentes, com seus mais variados tamanhos, trabalham juntos para que o sistema flua de forma mais fácil. Os alvéolos pulmonares, as redes neurais do cérebro e sua estrutura, a distribuição de vegetação na floresta, todos estes são exemplos cotidianos dos sistemas que fluem através de estruturas referenciadas na teoria Construtal. A Fig. 5.1 mostra três dos exemplos citados: (a) o sistema circulatório do corpo humano, (b) os alvéolos pulmonares e (c) uma descarga elétrica que ramifica sua energia melhorando o fluxo das cargas em direção a um ponto na terra.

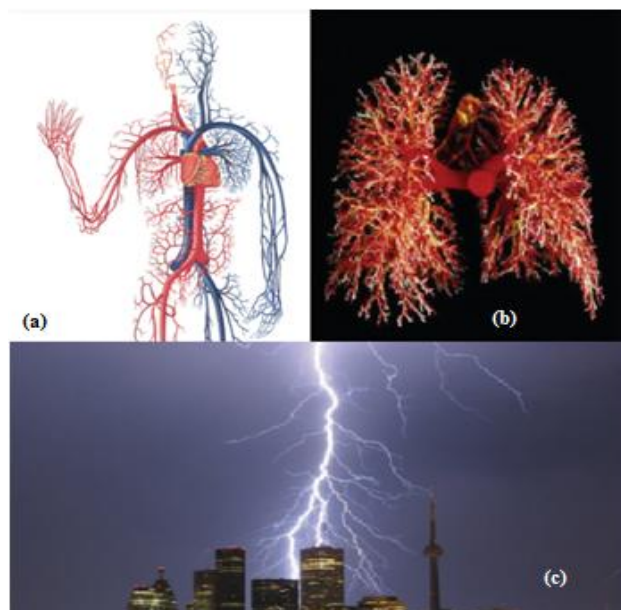


Figura 5.1 - Exemplos da Lei Construtal na natureza (Adaptado de <http://www.mindmedley.com/portfolio/design-in-nature-adrian-bejan-and-peder-zane/>).

5.1. DESIGN CONSTRUTAL APLICADO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Configurações de sistemas de fluxo não existem sozinhas. Elas são confinadas e suportadas por estruturas sólidas que proporcionam força e rigidez. A estrutura suportada se transforma de modo a coincidir com a estrutura de fluxo. Exemplo são paredes de tijolos para máxima rigidez e isolamento térmico, vigas suportadas e até a configuração natural das árvores fletidas pelo vento (Bejan e Lorente, 2008).

De acordo com Bejan e Lorente (2008), deve-se visualizar a configuração mecânica da mesma forma como se visualizam as configurações de fluxo, ou seja: estruturas mecânicas são como uma rede (conexões com mínimo volume) através da qual os “fluxos” de esforços passam dos componentes para seus vizinhos. Em um sistema de fluxo, a estrangulação do fluxo não é benéfica para o melhor desempenho: o que é benéfico para o melhor desempenho é a distribuição uniforme da estrangulação do fluxo. Fazendo relação com estruturas mecânicas pode-se concluir que, para estruturas sólidas, a concentração das máximas tensões não é benéfica para o melhor desempenho: o melhor uso do suporte mecânico é obtido quando o máximo dos esforços admissíveis é distribuído uniformemente através do material disponível.

Para fazer uma relação próxima entre a estrutura interna de um sistema de fluxo e o desempenho térmico e mecânico, a questão fundamental é como selecionar parâmetros que irão maximizar a resistência global para a transferência de calor através de uma estrutura e/ou preservar a resistência mecânica estrutural (Bejan e Lorente, 2008).

Uma análise pode ser feita para uma parede cavernosa, com câmaras de ar, para isolamento térmico, com a finalidade de investigar o melhor desempenho baseado na quantidade e nas dimensões das câmaras de ar. Como conclusão, a estrutura interna de paredes cavernosas para isolamento térmico é derivada da competição entre o isolamento térmico e a resistência mecânica da parede, visto que ambas as investigações apresentam grande importância no projeto final. A partir desta conclusão, a aplicação da Lei Construtal pode ser feita em outros campos onde estruturas mecânicas devem suportar cargas enquanto mantém a resistência à fluxos internos e externos. Esta combinação pode ser aplicada no projeto estrutural de elementos para veículos,

aeronaves e embarcações, os quais podem ser conceituados e moldados em formas geométricas com mais de uma função (Bejan e Lorente, 2008).

Em Lorente et al. (2010), é proposto que as considerações utilizadas da Lei Construtal para sistemas térmicos e de fluxo, sejam também utilizadas para estruturas sólidas, ou seja, estruturas devem ser configuradas de forma a facilitar o fluxo das tensões.

Olhar como fluxo de tensões não é algo usual mas se torna efetivo quando o objetivo é descobrir a melhor configuração do volume sob tensão. Para cada mecanismo, de falha, existe uma forma de permitir o fluxo de tensões de forma que as cargas sejam as máximas (tensões mais altas) quando o volume de material da estrutura é mantido constante, ou o volume seja o mínimo quando o carregamento for constante (Lorente et al., 2010).

De acordo com Young (2002), na mecânica dos materiais é possível a obtenção de um entendimento qualitativo da concentração de tensões através da relação com sistemas de fluxo, chamado de analogia de fluxo. Métodos intuitivos como a analogia de fluxo são úteis para o engenheiro que precisa reduzir a concentração de tensões em projetos estruturais.

Segundo Isoldi et al. (2013), as equações governantes para linhas de fluxo irrotacional e ideal de fluidos são bastante similares com as utilizadas para tensões. Desta forma, existe uma analogia entre linhas de fluxo, velocidade e gradientes de pressão, e trajetórias de tensão, magnitude e tensões principais. A analogia de fluxo para a placa tracionada da Fig. 5.2 (a) pode ser vista na Fig. 5.2 (b), onde as cargas uniformemente aplicadas são substituídas por um escoamento uniforme de fluido. Na entrada, secção A-A na Fig. 5.2 (b), o escoamento é uniforme e, devido à simetria, o fluxo é igualmente uniforme na saída do canal. No entanto, as partículas do fluido que se aproximam da secção B-B (ver Fig. 5.2 (b)) precisam se ajustar à trajetória do escoamento para movimentarem-se ao redor do obstáculo circular. Para acompanhar isto, as partículas próximas à linha de corrente 1 devem fazer um maior ajuste e irão acelerar até atingirem a secção B-B. Desta forma, a velocidade no ponto *c* é a máxima. A compactação das linhas de fluxo em *c* vai levar ao desenvolvimento de um gradiente de pressão, o qual vai normalmente resultar em uma menor velocidade no ponto *b* do que a velocidade de entrada da linha de corrente 6 em A-A. Observa-se também que quando a partícula atinge o ponto *d*, através da linha de corrente 1, uma velocidade com deslocamento perpendicular ao escoamento é obtida. Pode-se então fazer uma analogia

com a da placa carregada, sob tração, com furo central de forma circular. A tensão é máxima na borda do furo, correspondente ao ponto *c*. A tensão, na placa, correspondente ao ponto *b* é menor do que a tensão aplicada, e para o ponto *d* a tensão na placa é compressiva e perpendicular à direção axial. Esta analogia pode ser utilizada para sugerir diminuição da concentração de tensões. Um exemplo pode ser visto na Fig. 5.2 (c), onde o furo circular pode ser estendido axialmente mantendo o volume constante, modificação esta que vai aumentar a transição do fluxo na secção B-B, devido ao formato elíptico do furo.

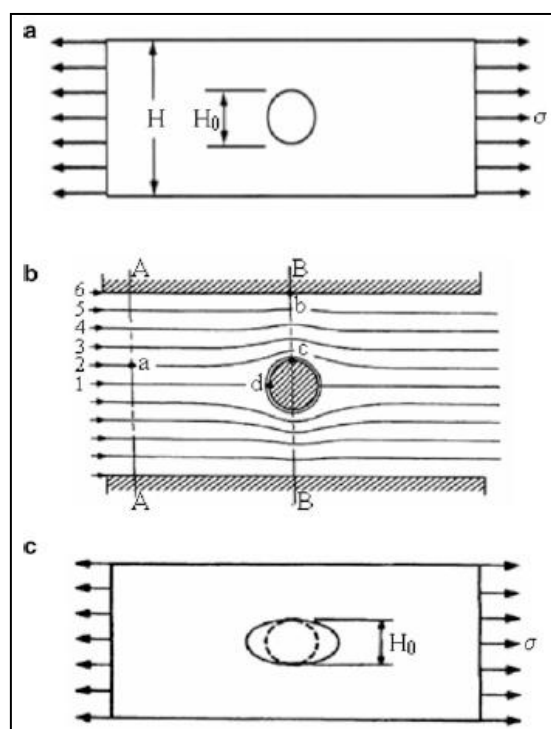


Figura 5.2 - Analogia entre o escoamento de fluido e a concentração de tensões.

Segundo Da Silva (2015), o método do Design Construtal vem sendo aplicado, em algumas pesquisas e tem apresentando bons resultados, em várias abordagens sobre mecânica dos sólidos e análise de tensões para aplicações na engenharia naval e *offshore*. Estudos voltados à área da engenharia oceânica e naval estão sendo desenvolvidos, especialmente na determinação geométrica e dimensional dos componentes estruturais de navios e plataformas. Exemplos de assuntos que vêm sendo abordados são relacionados à placas e vigas metálicas, buscando as geometrias que possibilitarão um melhor desempenho mecânico quando sujeitas às solicitações mecânicas impostas pelo sistema. Outra situação comum na indústria naval é a

necessidade de perfurações nestas placas e vigas metálicas. Neste ponto, o Design Construtal passa a ser uma ferramenta muito importante na determinação geométrica, na determinação da quantidade, bem como das posições e dimensões dos furos, de modo que estes componentes mantenham o melhor desempenho mecânico possível frente às solicitações mecânicas às quais serão impostos.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O presente trabalho contempla uma placa submetida à solicitação compressiva biaxial, o que resulta em uma análise de flambagem biaxial. Como apresentado anteriormente (ver capítulo 4, seção 4.5), uma placa sem perfurações foi utilizada por Barbero (2007) para exemplificar a flambagem biaxial de uma placa laminada e delgada, de material compósito. A Fig. 6.1 apresenta o modelo da placa utilizada como referência.

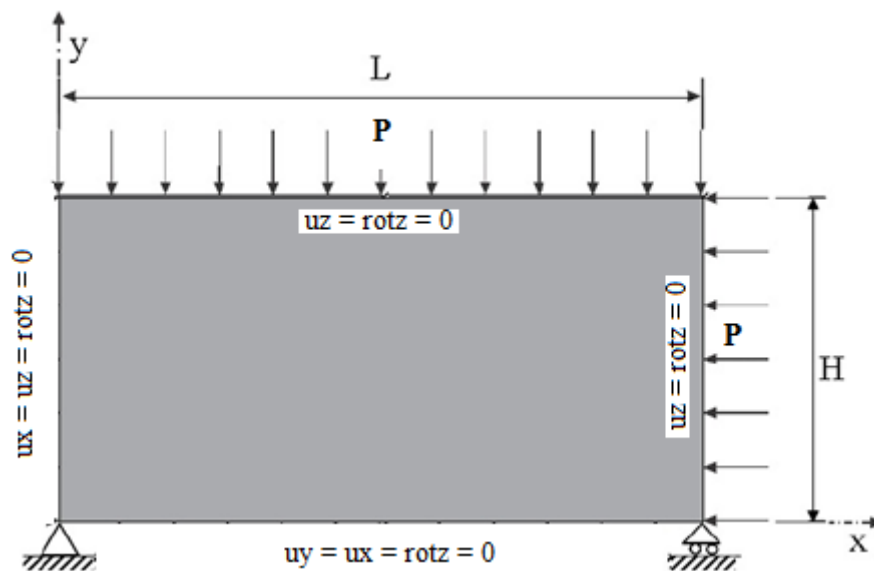


Figura 6.1 – Placa sem perfurações e simplesmente apoiada nas arestas, submetida à compressão biaxial, sendo $H = 500$ mm e $L = 1000$ mm.

Inicialmente, um estudo de placas laminadas, sem perfurações, foi realizado com a finalidade de analisar o comportamento da carga crítica de flambagem, biaxial, para uma placa ortotrópica, laminada e simétrica. Com a aplicação do MEF para obtenção dos valores da carga crítica, através do software ANSYS®, foi definido o melhor esquema de laminação, ou seja, o que apresentou o maior valor da carga crítica de flambagem para a solicitação compressiva biaxial. Esta análise serviu para definir qual o esquema de laminação utilizado para a continuidade do trabalho, onde foram analisadas placas com perfurações elípticas.

Através de aplicação de cargas compressivas biaxiais foi investigada a carga crítica de flambagem para uma placa laminada ortotrópica, delgada, como no modelo de Barbero (2007) apresentado na seção 4.5 deste trabalho e ilustrada na Fig. 6.1.

Buscando a compreensão de como a carga crítica de flambagem varia, em decorrência da variação da orientação das camadas da placa laminada, uma gama de experimentos foram feitos com base na variação angular das fibras na laminação e os seus resultados foram comparados. Para obtenção destes resultados, o software comercial ANSYS® foi utilizado para a aplicação MEF, fazendo alterações pontuais no problema da seção 4.5, a partir do qual foi feita a verificação do modelo computacional e respeitando o teste de convergência de malha apresentado na seção 4.4.

A análise inicial está baseada em 18 (dezoito) grupos divididos previamente e separados por característica de laminação, ou seja, em um mesmo grupo são mantidos parâmetros predominantes e comuns entre as placas, e uma das laminações é alterada, gerando um grau comparativo entre os testes.

Para o projeto estrutural de navios e plataformas, é interessante que o corpo esbelto utilizado resista ao primeiro estado de flambagem, de forma que a instabilidade estrutural não se aplique de forma alguma sobre a estrutura. Assim, a carga crítica do primeiro estado de flambagem foi analisada individualmente para todas as laminações estudadas.

O Grupo 1 foi dividido de forma a comparar todas as laminações que possuem mesmo ângulo de laminação para todas as camadas, ou seja, as 12 (doze) camadas laminadas possuem a mesma orientação das suas fibras. A Tab. 6.1. apresenta o resultado obtido para cada uma das laminações ensaiadas, nesta condição.

Tabela 6.1 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 1

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(0°/0°)3s	252,70
(15°/15°)3s	255,11
(30°/30°)3s	269,90
(45°/45°)3s	282,25
(60°/60°)3s	269,91
(75°/75°)3s	255,11
(90°/90°)3s	252,70

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminações do Grupo 1 (Tab. 6.1) é apresentado na Fig. 6.2.

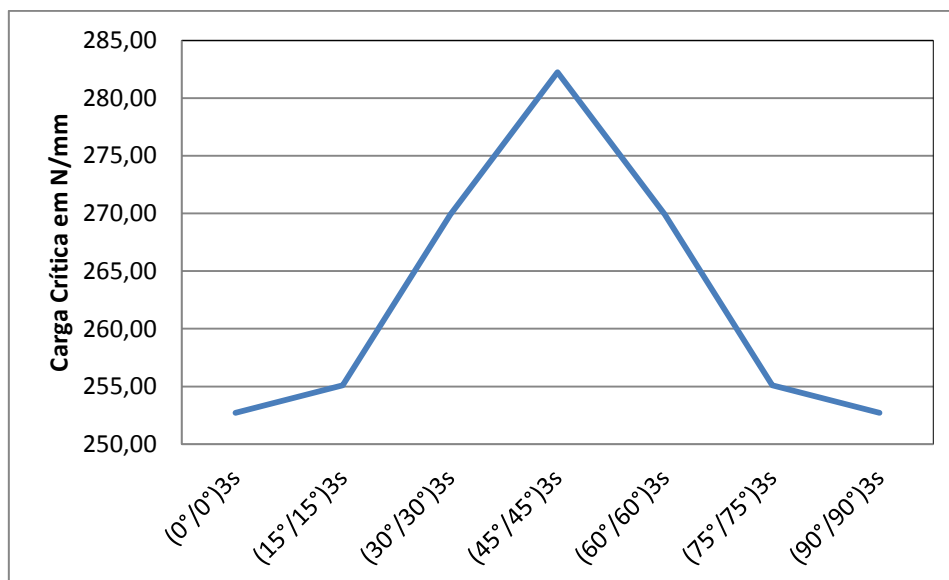


Figura 6.2 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 1

Baseado nos resultados do Grupo 1 (Tab. 6.1 e Fig. 6.2) pode-se perceber que, quando mantidas iguais as orientações das 12 (doze) camadas do laminado, o maior valor de carga crítica, e por consequência o melhor comportamento mecânico, está apresentado para uma laminação cujo esquema angular é igual à dos 45° em relação à aplicação do carregamento compressivo, como pode ser visto em (45°/45°)3s. Ao mesmo tempo quando as fibras estão paralelas, (0°/0°)3s, ou perpendiculares, (90°/90°)3s, à aplicação das cargas, foi obtido o menor valor da carga crítica de flambagem. A diferença entre a melhor, (45°/45°)3s, e a pior configuração, (0°/0°)3s ou (90°/90°)3s, chega a 10,47%.

O Grupo 2 foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 6 (seis) das suas camadas fixas em 0° com a orientação de laminação (camadas 1, 3, 5, 8, 10 e 12) e outras 6 (seis) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 2, 4, 6, 7, 9 e 11). A Tab. 6.2. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 2, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo. Os resultados da Tab. 6.2 estão apresentados graficamente na Fig. 6.3.

Tabela 6.2 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 2

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(0°/15°)3s	255,17
(0°/30°)3s	261,42
(0°/45°)3s	265,21
(0°/60°)3s	261,42
(0°/75°)3s	255,17
(0°/90°)3s	252,70

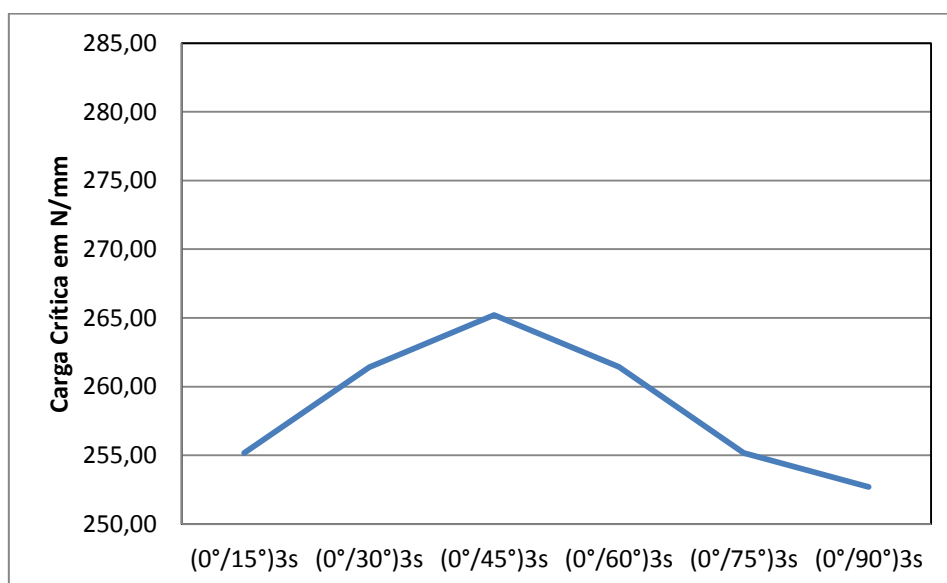


Figura 6.3 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 2

A partir dos resultados obtidos para o Grupo 2 (Tab. 6.2 e Fig. 6.3), pode-se observar que a carga crítica de flambagem aumenta conforme uma das orientações da laminação se aproxima dos 45° com a aplicação do carregamento compressivo. Mantendo uma das orientações em 0° e incrementando a segunda orientação em 15° percebe-se que a laminação (0°/45°)3s apresenta o maior valor de carga crítica, porém, este valor ainda é 6,03% menor do que o obtido para a laminação (45°/45°)3s observada na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2. Assim como no Grupo 1, a laminação que orienta as fibras paralelas e/ou perpendiculares à aplicação do carregamento, (0°/90°)3s, apresenta o menor valor de carga crítica de flambagem, sendo este o mesmo encontrado para (0°/0°)3s e (90°/90°)3s observados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2.

O Grupo 3 foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 6 (seis) das suas camadas fixas em 15° com a orientação de laminação (camadas 1, 3, 5, 8, 10 e 12) e outras 6 (seis) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 2, 4, 6, 7, 9 e 11). A Tab. 6.3. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 3, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo, .

Tabela 6.3 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 3

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(15°/30°)3s	261,11
(15°/45°)3s	267,55
(15°/60°)3s	266,68
(15°/75°)3s	260,81
(15°/90°)3s	255,70

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminações do Grupo 3 é apresentado na Fig. 6.4.

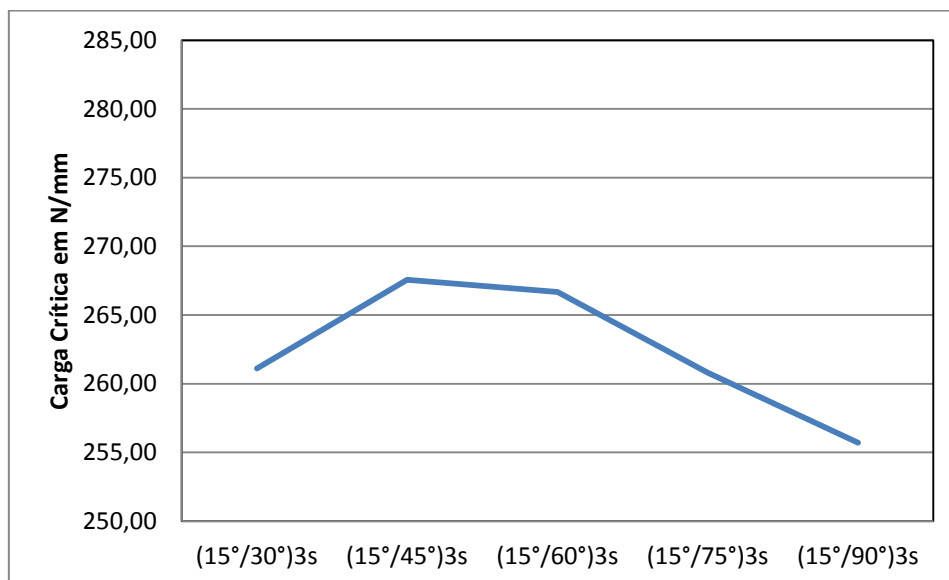


Figura 6.4 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 3

Considerando resultados da Tab. 6.3 e da Fig. 6.4, para o Grupo 3 pode-se observar que, como nos grupos anteriores, a carga crítica de flambagem aumenta

conforme uma das orientações da laminação se aproxima dos 45° com a aplicação do carregamento compressivo. Mantendo uma das orientações em 15° e incrementando a segunda orientação em 15° percebe-se que a laminação $(15^\circ/45^\circ)3s$ apresenta o maior valor de carga crítica, porém, este valor ainda é 5,49% menor do que o obtido para a laminação $(45^\circ/45^\circ)3s$ observada na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2. Assim como nos grupos anteriores, a laminação que possui parte das fibras paralelas e/ou perpendiculares à aplicação do carregamento, $(15^\circ/90^\circ)3s$, apresenta o menor valor de carga crítica de flambagem, sendo este 1,18% maior do que o valor encontrado para $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$ observados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2.

O Grupo 4 foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 6 (seis) das suas camadas fixas em 30° com a orientação de laminação (camadas 1, 3, 5, 8, 10 e 12) e outras 6 (seis) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 2, 4, 6, 7, 9 e 11). Na Tab. 6.4 e na Fig. 6.5 estão mostrados os resultados obtidos para as análises do Grupo 4.

Tabela 6.4 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 4

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(30^\circ/45^\circ)3s$	276,09
$(30^\circ/60^\circ)3s$	275,45
$(30^\circ/75^\circ)3s$	270,19
$(30^\circ/90^\circ)3s$	265,48

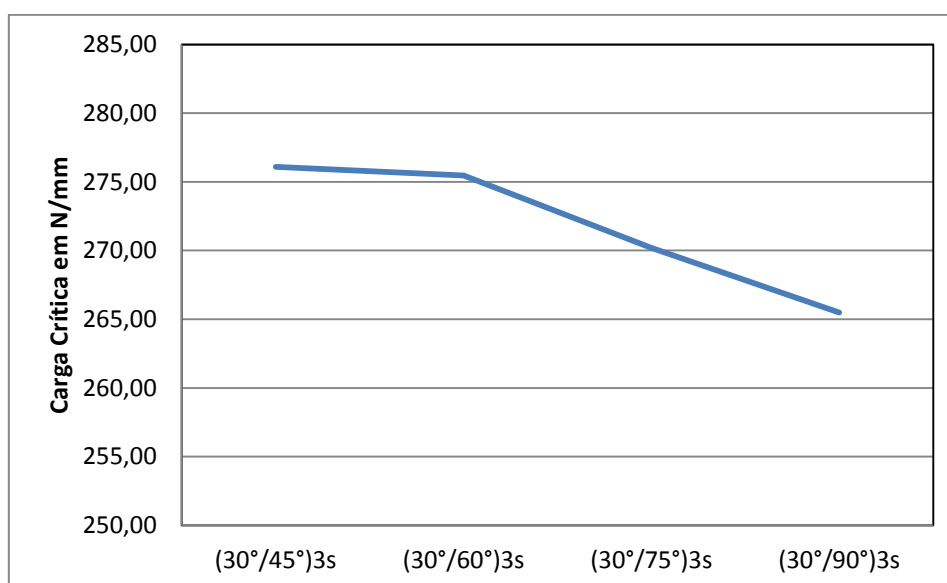


Figura 6.5 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 4

O resultados obtidos para o Grupo 4 (Tab.6.4 e Fig. 6.5) indicam que, como nos grupos anteriores, a carga crítica de flambagem é maior quando pelo menos uma das orientações da laminação se aproxima dos 45° com a aplicação do carregamento compressivo. Mantendo uma das orientações em 30° e incrementando a segunda orientação em 15° percebe-se que a laminação $(30^\circ/45^\circ)3s$ apresenta o maior valor de carga crítica, porém, este valor é 2,23% menor do que o obtido para a laminação $(45^\circ/45^\circ)3s$ observada na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2. Como já observado anteriormente, a laminação que possui parte das fibras paralelas e/ou perpendiculares à aplicação do carregamento, $(30^\circ/90^\circ)3s$, apresenta o menor valor de carga crítica de flambagem, sendo este 5,05% maior do que o valor encontrado para $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$ observados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2.

Já o Grupo 5 foi composto por placas que possuem 6 (seis) das suas camadas fixas em 45° com a orientação de laminação (camadas 1, 3, 5, 8, 10 e 12) e outras 6 (seis) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 2, 4, 6, 7, 9 e 11). A Tab. 6.5. apresenta os esquema de laminação do Grupo 5, bem como o valor da carga crítica correspondente.

Tabela 6.5 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 5

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(45^\circ/60^\circ)3s$	278,96
$(45^\circ/75^\circ)3s$	273,98
$(45^\circ/90^\circ)3s$	272,22

Na Fig. 6.6 os resultados da Tab. 6.5 são apresentados graficamente.

É possível notar na Tab. 6.5 e na Fig. 6.6 que o valor da carga crítica de flambagem é maior quando pelo menos uma das orientações da laminação se aproxima dos 45° , ou seja, com a mesma tendência de comportamento mecânico dos grupos anteriores. Mantendo uma das orientações em 45° e incrementando a segunda orientação em 15° percebe-se que a laminação $(45^\circ/60^\circ)3s$ apresenta o maior valor de carga crítica, porém, este valor ainda é 1,17% menor do que o obtido para a laminação $(45^\circ/45^\circ)3s$ observada na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2. Assim como nos grupos anteriores, a laminação que possui parte das fibras paralelas e/ou perpendiculares à aplicação do carregamento, $(45^\circ/90^\circ)3s$, apresenta o menor valor de carga crítica de flambagem, sendo este 7,72%

maior do que o valor encontrado para $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$ observados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2.

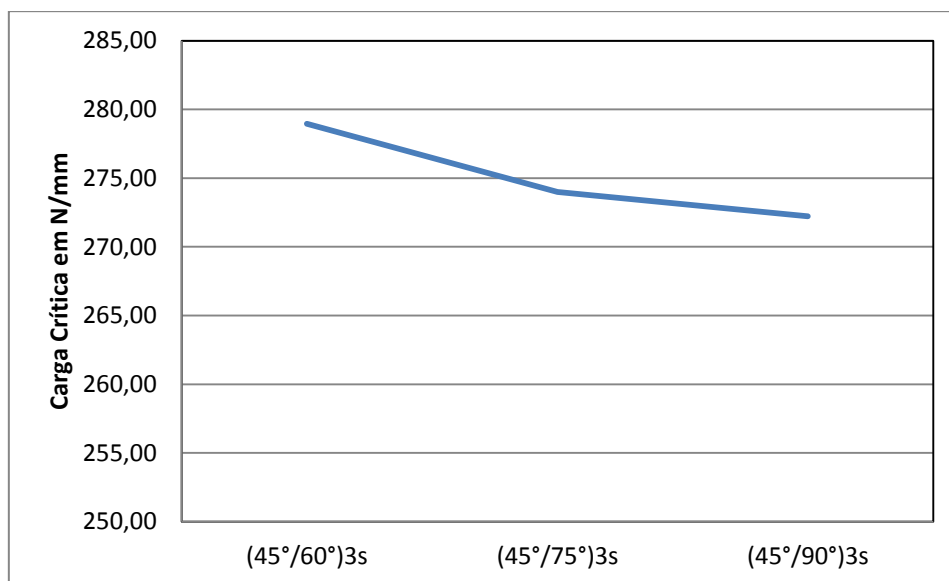


Figura 6.6 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 5

O Grupo 6 foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 6 (seis) das suas camadas fixas em 60° com a orientação de laminação (camadas 1, 3, 5, 8, 10 e 12) e outras 6 (seis) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 2, 4, 6, 7, 9 e 11). A Tab. 6.6. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 6, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo. Os valores da Tab. 6.6. são apresentados em forma de gráfico na Fig. 6.7.

Tabela 6.6 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 6

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(60^\circ/75^\circ)3s$	264,56
$(60^\circ/90^\circ)3s$	265,49

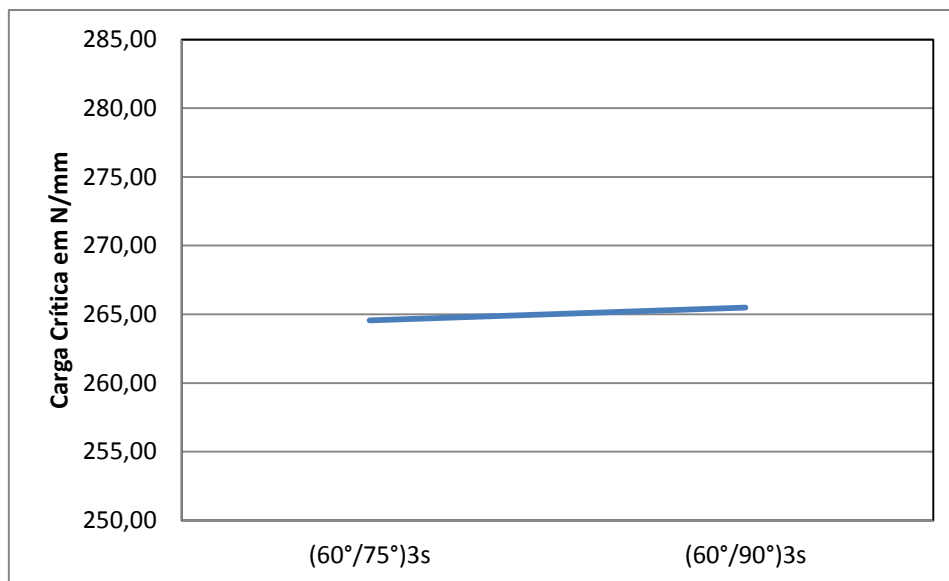


Figura 6.7 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 6

A partir resultados obtidos para a carga crítica de flambagem do Grupo 6, observa-se que a diferença nos valores obtidos está em torno de 0,35% entre as duas laminações do Grupo 6. Esta diferença não é significativa e, portanto, pode-se considerar que ambos os casos apresentam uma carga crítica praticamente igual. Se comparada a laminação de maior valor, (60°/90°)3s, o seu valor de carga crítica de flambagem biaxial ainda é 6,31% menor do que a configuração (45°/45°)3s, a qual tem seus valores mostrados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2. Para o menor valor de carga crítica do Grupo 6, (60°/75°)3s, pode ser destacado uma melhora de 4,69% em relação às laminações (0°/0°)3s e (90°/90°)3s observados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2.

O sétimo grupo analisado foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 6 (seis) das suas camadas fixas em valores de angulação negativos em relação à orientação de laminação (camadas 1, 3, 5, 8, 10 e 12) e outras 6 (seis) camadas mantendo a mesma angulação das fibras porém com angulação positiva em relação à orientação de laminação (camadas 2, 4, 6, 7, 9 e 11). A Tab. 6.7. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 7. A Fig. 6.8. apresenta, em forma de gráfico, os valores obtidos para a carga crítica (ver Tab. 6.7).

Tabela 6.7– Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 7

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(-15°/15°)3s	260,81
(-30°/30°)3s	275,46
(-45°/45°)3s	282,25
(-60°/60°)3s	275,45
(-75°/75°)3s	260,81

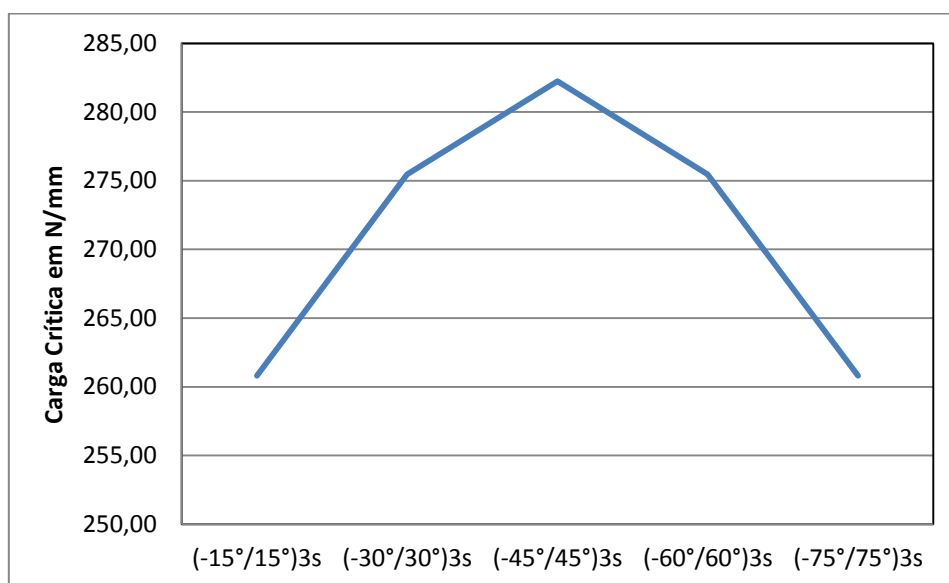


Figura 6.8 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 7

Os resultados do Grupo 7 mostram que quando variada a laminação entre ângulos positivos e negativos, de mesmo valor angular, o maior valor de carga crítica, e por consequência o melhor comportamento mecânico, está apresentado para uma laminação cujo esquema angular respeita a laminação em 45° em relação à aplicação do carregamento compressivo, como pode ser visto em $(-45^\circ/45^\circ)3s$. Ao mesmo tempo quando as fibras possuem angulações mais próximas de 0° e 90° com a aplicação das cargas, é observado o menor valor da carga crítica de flambagem, como pode ser observado em $(-15^\circ/15^\circ)3s$ e $(-75^\circ/75^\circ)3s$. A melhor carga crítica de flambagem, para a laminação $(-45^\circ/45^\circ)3s$, apresenta o mesmo valor da maior carga crítica de flambagem biaxial para os grupos estudados até o momento, visto na Tab. 6.1. onde a laminação

atende à $(45^\circ/45^\circ)3s$. No entanto, as piores configurações, $(-15^\circ/15^\circ)3s$ e $(-75^\circ/75^\circ)3s$, apresentam uma melhora de 3,20% em relação às laminações $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$ observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

A partir do Grupo 8, 3 (três) diferentes angulações serão aplicadas em uma mesma placa, ou seja, cada orientação das fibras se repetirá por 4 (quatro) vezes na placa laminada, enquanto anteriormente, cada orientação aparecia 6 (seis) vezes na laminação da placa.

O oitavo grupo foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 0° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 15° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.8. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 8, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo.

Tabela 6.8 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 8

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(0^\circ/15^\circ/30^\circ)2s$	258,55
$(0^\circ/15^\circ/45^\circ)2s$	260,83
$(0^\circ/15^\circ/60^\circ)2s$	259,85
$(0^\circ/15^\circ/75^\circ)2s$	256,89
$(0^\circ/15^\circ/90^\circ)2s$	254,89

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminações do Grupo 8 é apresentado na Fig. 6.9.

A partir dos valores obtidos para o Grupo 8, observa-se que devido à influência de ângulos próximos de 0° e 90° predominantes na laminação proposta para o grupo, os valores de carga crítica diminuem quando comparados aos esquemas de laminação $(45^\circ/45^\circ)3s$ e $(-45^\circ/45^\circ)3s$, sendo estes os maiores valores de carga crítica obtidos até o momento. O melhor comportamento mecânico observado para o Grupo 8 é da laminação $(0^\circ/15^\circ/45^\circ)2s$, sendo este valor 8,21% menor do que o melhor obtido para $(45^\circ/45^\circ)3s$ como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para $(-45^\circ/45^\circ)3s$ como disposto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8 Por outro lado o menor valor encontrado, $(0^\circ/15^\circ/90^\circ)2s$, melhorou em 0,87% os menores valores obtidos até o momento, $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$, que podem ser observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2

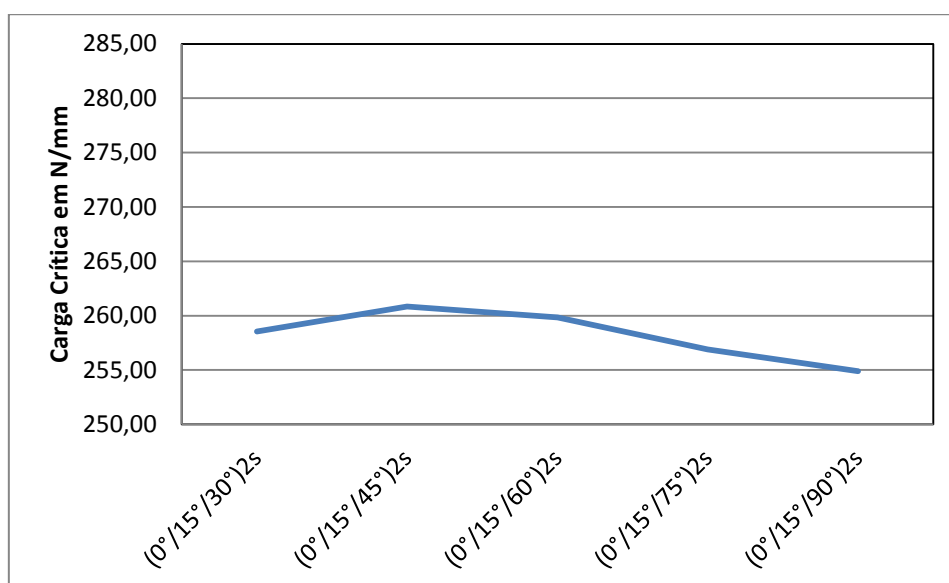


Figura 6.9 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 8

O Grupo 9 foi dividido a partir do agrupamento de placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 0° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 30° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.9. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 9, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo. A Fig. 6.10 apresenta de forma gráfica os valores da Tab. 6.9.

Tabela 6.9 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 9

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(0°/30°/45°)2s	265,80
(0°/30°/60°)2s	264,88
(0°/30°/75°)2s	262,09
(0°/30°/90°)2s	260,18

Após analisados os valores do Grupo 9, pode-se observar que devido à predominância da laminação de 0°, os valores de carga crítica diminuem quando comparados às melhores cargas críticas obtidas para (45°/45°)3s e (-45°/45°)3s. A maior carga crítica de flambagem biaxial do Grupo 9 foi encontrado para a laminação (0°/30°/45°)2s, sendo este valor 6,19% menor do que o encontrado para (45°/45°)3s

como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para $(-45^\circ/45^\circ)_3s$ como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. No entanto o menor valor encontrado, $(0^\circ/30^\circ/90^\circ)_2s$, melhorou em 2,96% as menores cargas críticas obtidas até o momento, $(0^\circ/0^\circ)_3s$ e $(90^\circ/90^\circ)_3s$, que podem ser observadas na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

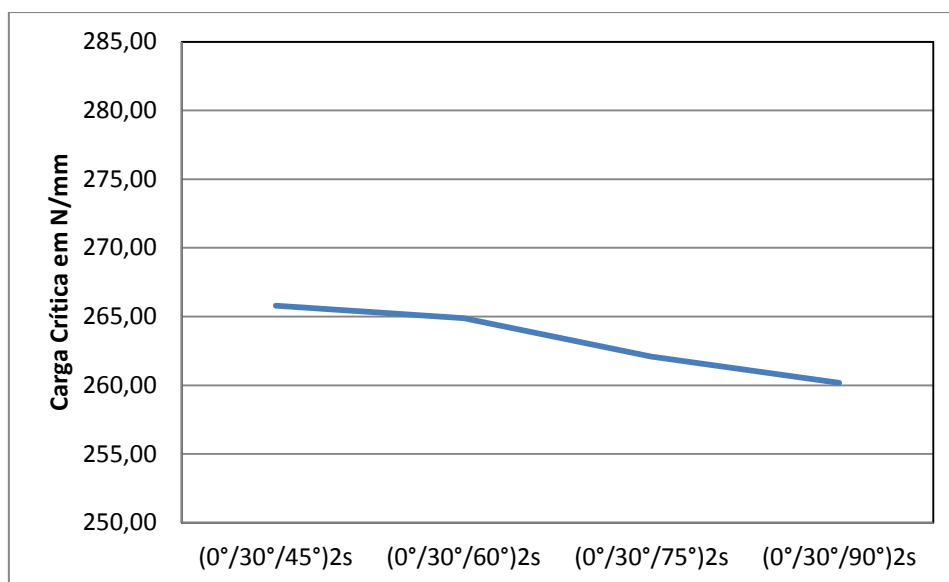


Figura 6.10 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 9

O Grupo 10 agrupa placas que mantém 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 0° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 45° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.10. apresenta as laminações testadas do Grupo 10 e as curvas obtidas são apresentadas na Fig. 6.11.

Tabela 6.10 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 10

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(0^\circ/45^\circ/60^\circ)_2s$	267,24
$(0^\circ/45^\circ/75^\circ)_2s$	264,51
$(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_2s$	263,29

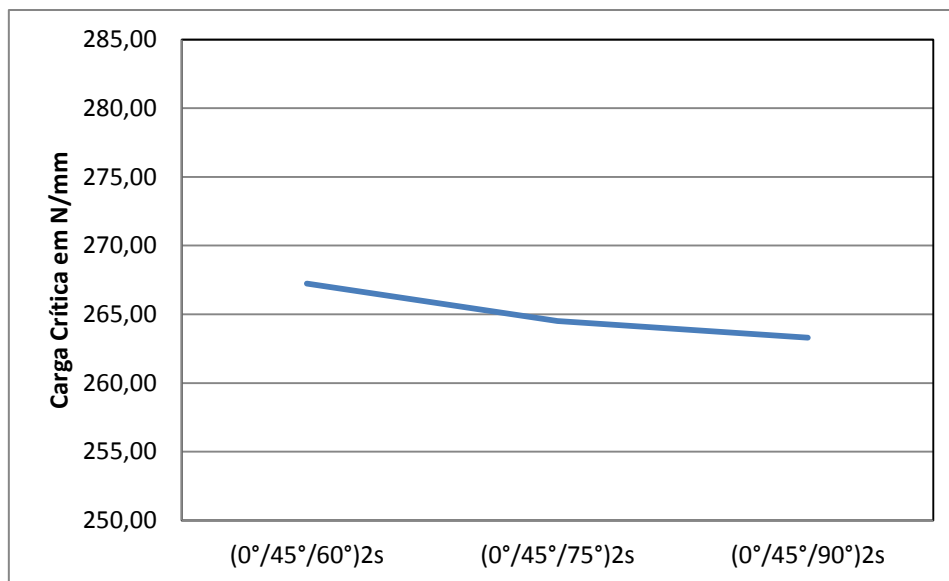


Figura 6.11 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 10

Através da Tab. 6.10 e das curvas da Fig. 6.11, observa-se que o melhor comportamento mecânico do grupo 10 está vinculado à laminação $(0^\circ/45^\circ/60^\circ)2s$, sendo que esta carga crítica diminui em 5,62% o valor obtido para $(45^\circ/45^\circ)3s$ como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para $(-45^\circ/45^\circ)3s$ como pode ser visto na Tab. 6.7. e na Fig. 6.8., sendo estes os melhores comportamentos obtidos para as placas analisadas. Por outro lado o menor valor encontrado, $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)2s$, aumentou em 4,19% as menores cargas críticas obtidas até o momento quando as placas obedecem as laminações $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

Já o Grupo 11 apresenta placas que mantêm 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 0° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 60° (camadas 2, 5, 8 e 11) e, por fim, outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.11 e a Fig. 6.12 apresentam as laminações testadas com as configurações do Grupo 11 e as curvas obtidas a partir dos valores de carga crítica, respectivamente.

Tabela 6.11 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 11

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(0^\circ/60^\circ/75^\circ)2s$	260,79
$(0^\circ/60^\circ/90^\circ)2s$	260,19

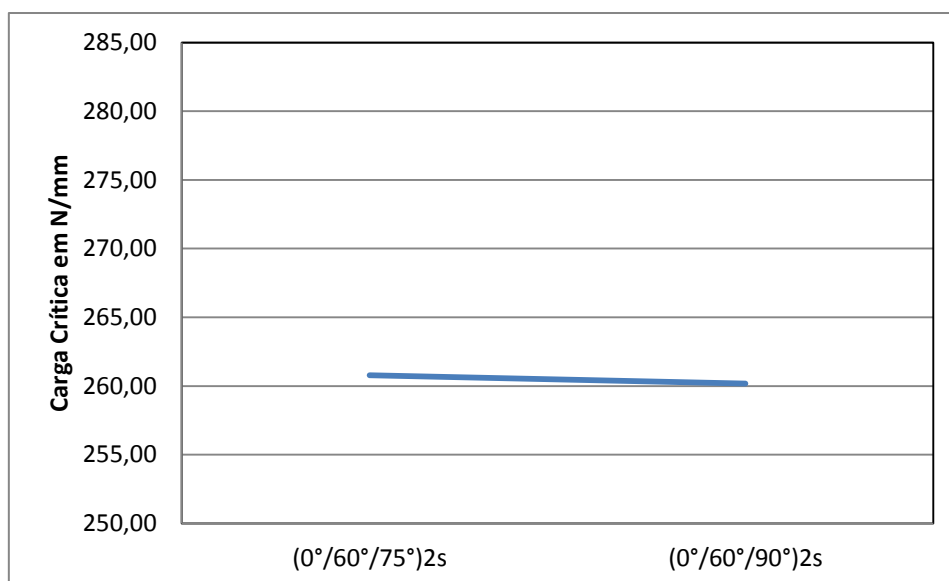


Figura 6.12 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 11

Avaliando os valores obtidos para o Grupo 11, pode-se perceber que a carga crítica varia muito pouco e não pode ser considerada visto que a variação de 0,23% do grupo torna os valores obtidos praticamente iguais. No entanto, considerando a laminação $(0^\circ/60^\circ/75^\circ)2s$, o valor encontrado é 8,23% menor do que em $(45^\circ/45^\circ)3s$ como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para $(-45^\circ/45^\circ)3s$ como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. Também, a carga crítica encontrada para a laminação $(0^\circ/60^\circ/90^\circ)2s$ melhorou em 2,96% os menores valores de carga crítica das placas analisadas, $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$, os quais podem ser observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

O Grupo 12 foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 15° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 30° (camadas 2, 5, 8 e 11). Para completar o total de 12 (doze) camadas, outras 4 (quatro) camadas são aplicadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.12. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 12, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo.

Tabela 6.12 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 12

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(15^\circ/30^\circ/45^\circ)2s$	266,12
$(15^\circ/30^\circ/60^\circ)2s$	266,30
$(15^\circ/30^\circ/75^\circ)2s$	263,58
$(15^\circ/30^\circ/90^\circ)2s$	260,65

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminações do Grupo 12 é apresentado na Fig. 6.13.

Com base nos valores obtidos para o Grupo 12, pode-se observar que o melhor comportamento mecânico do grupo está vinculado à laminação $(15^\circ/30^\circ/60^\circ)_2s$, sendo este valor 5,99% menor do que o obtido para $(45^\circ/45^\circ)_3s$ como visto na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2 e para $(-45^\circ/45^\circ)_3s$ como pode ser visto na Tab. 6.7. e na Fig. 6.8. Em se tratando do valor obtido para $(13/30/90)_2s$, houve uma melhora em 3,15% em relação aos valores obtidos para $(0^\circ/0^\circ)_3s$ e $(90^\circ/90^\circ)_3s$, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

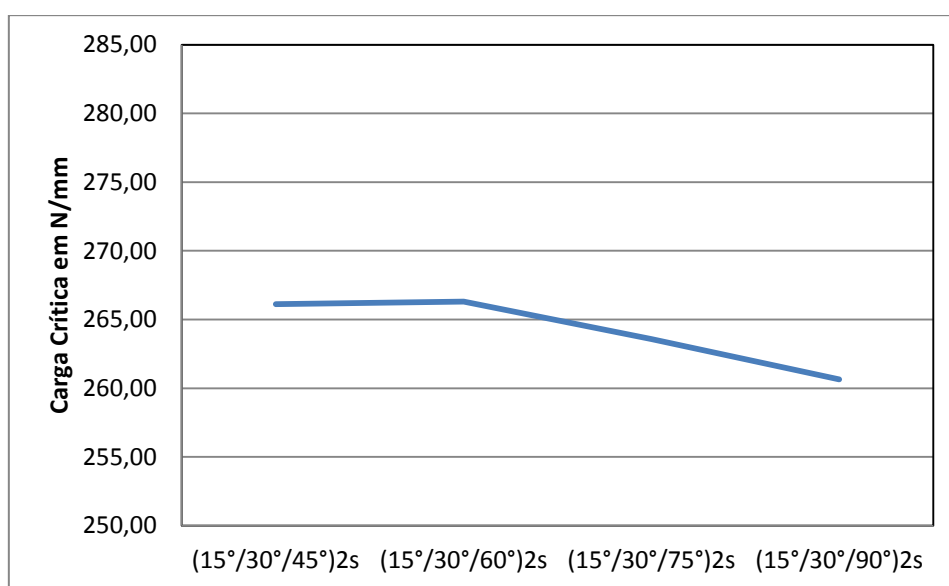


Figura 6.13 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 12

Para separar placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 15° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 45° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10), foi analisado o Grupo 13. A Tab. 6.13. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 13, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo. Os valores apresentados na Tab. 6.13. podem ser visualizados de forma gráfica na Fig. 6.14.

Tabela 6.13 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 13

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(15°/45°/60°)2s	270,45
(15°/45°/75°)2s	267,81
(15°/45°/90°)2s	265,60

Observa-se no Grupo 13 que a melhor carga crítica de flambagem biaxial do grupo está vinculada à laminação (15°/45°/60°)2s, sendo este valor 4,36% menor do que os mais altos valores obtidos para (45°/45°)3s como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para (-45°/45°)3s como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. No entanto o menor valor encontrado, (15°/45°/90°)2s, melhorou em 5,10% os valores mais baixos obtidos até o momento, (0°/0°)3s e (90°/90°)3s, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

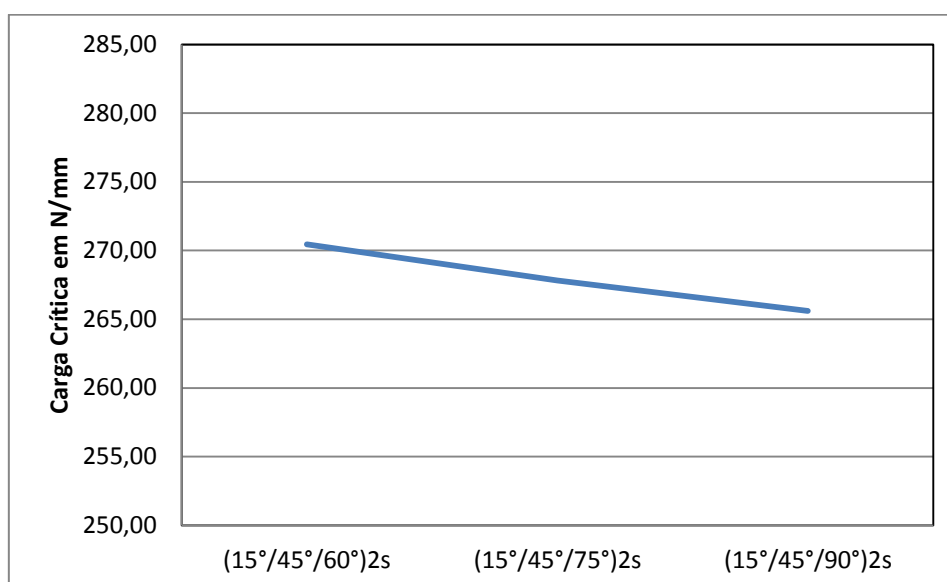


Figura 6.14 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 13

Já o Grupo 14 reúne placas que apresentam 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 15° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 60° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.14. apresenta as laminções testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 14, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo.

Tabela 6.14 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 14

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(15°/60°/75°)2s	266,13
(15°/60°/90°)2s	264,53

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminações do Grupo 14 é apresentado na Fig. 6.15.

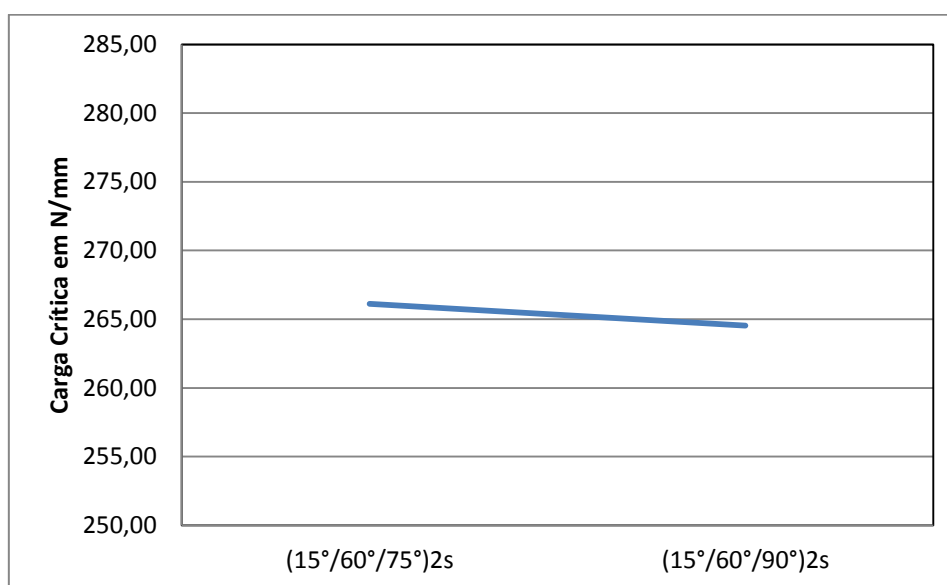


Figura 6.15 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 14

Analisando o Grupo 14, pode-se observar que o melhor comportamento mecânico do grupo está vinculado à laminação (15°/60°/75°)2s, sendo este valor 6,06% menor do que o melhor obtido para (45°/45°)3s como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para (-45°/45°)3s como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. No entanto o menor valor encontrado, (15°/60°/90°)2s, melhorou em 4,68% os menores valores obtidos até o momento, (0°/0°)3s e (90°/90°)3s, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

A divisão do Grupo 15 ocorreu de forma a separar placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 30° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 45° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação. As outras 4 (quatro) camadas apresentam variação na angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.15. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 15, onde há um incremento de 15° entre os diferentes

esquemas de laminação do grupo. Já a Fig. 6.16 apresenta de forma gráfica os valores dispostos na Tab. 6.15.

Tabela 6.15 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 15

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(30°/45°/60°)2s	277,26
(30°/45°/75°)2s	274,77
(30°/45°/90°)2s	272,64

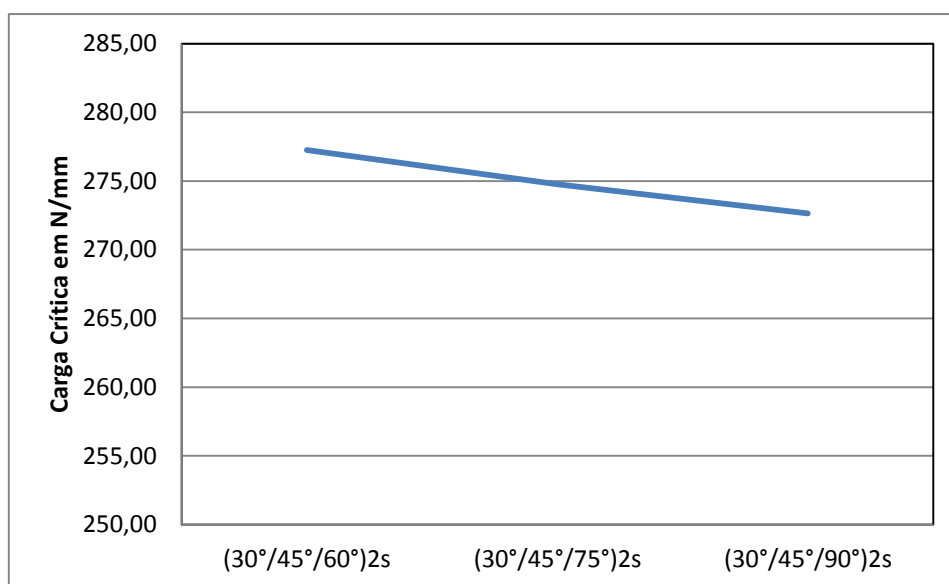


Figura 6.16 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 15

Nota-se que para o Grupo 15, o melhor valor da carga crítica de flambagem remete à laminação (30°/45°/60°)2s, sendo este valor 1,80% menor o obtido para (45°/45°)3s como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para (-45°/45°)3s como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. Por outro lado o menor valor encontrado, (30°/45°/90°)2s, aumentou em 7,89% os valores obtidos para (0°/0°)3s e (90°/90°)3s, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2, os quais apresentam a menor carga crítica de flambagem entre as placas analisadas.

A divisão do Grupo 16 foi feita de forma a separar placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 30° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4 (quatro) em 60° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A

Tab. 6.16. mostra as laminações avaliadas e os resultados para o Grupo 16, resultados estes apresentados de forma gráfica na Fig. 6.17.

Tabela 6.16 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 16

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(30°/60°/75°)2s	273,34
(30°/60°/90°)2s	271,84

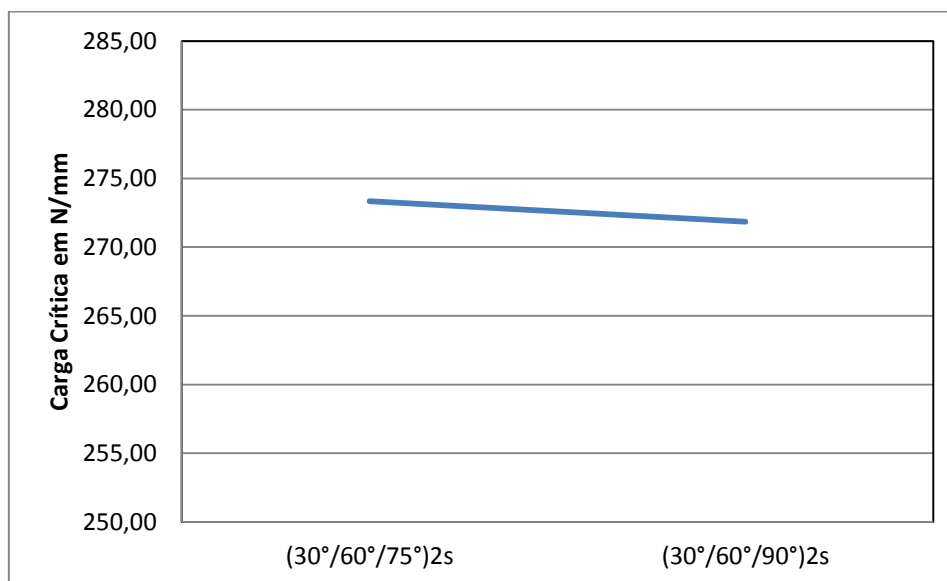


Figura 6.17 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 16

Com base nos valores obtidos para o Grupo 16, pode-se observar que o melhor comportamento mecânico do grupo está vinculado à laminação (30°/60°/75°)2s, porém este valor 3,26% menor do que o melhor obtido entre as análises feitas neste estudo, para (45°/45°)3s como visto na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 e para (-45°/45°)3s como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. Quando analisando o menor valor encontrado para o grupo, (30°/60°/90°)2s, nota-se um aumento de 7,57% em relação aos menores valores obtidos até o momento, (0°/0°)3s e (90°/90°)3s, observados na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2.

O Grupo 17 foi dividido de forma a agrupar placas que mantêm 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 75° (camadas 2, 5, 8 e 11) outras 4 (quatro) em 90° (camadas 3, 6, 7 e 10) com a orientação de laminação. As outras 4 (quatro) camadas apresentam variação na angulação das fibras em 15° (camadas 1, 4, 9 e 12). A Tab. 6.17. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o

Grupo 17, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo.

Tabela 6.17 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 17

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
$(0^\circ/75^\circ/90^\circ)2s$	254,89
$(15^\circ/75^\circ/90^\circ)2s$	259,52
$(30^\circ/75^\circ/90^\circ)2s$	267,33
$(60^\circ/75^\circ/90^\circ)2s$	263,43

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminções do Grupo 17 é apresentado na Fig. 6.18.

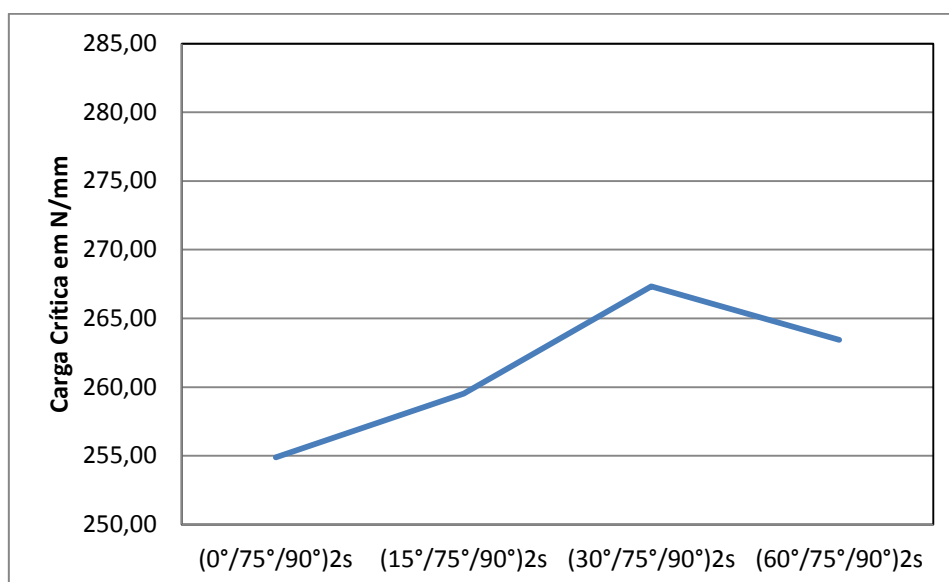


Figura 6.18 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 17

Analisando os valores encontrados para o Grupo 17, nota-se que a melhor carga crítica de flambagem é encontrada para a laminação $(30^\circ/75^\circ/90^\circ)2s$, no entanto, este valor é 5,58% menor do que o obtido para $(45^\circ/45^\circ)3s$ como visto na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2 e para $(-45^\circ/45^\circ)3s$ como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. Já o menor valor encontrado, $(0^\circ/75^\circ/90^\circ)2s$, melhorou em 0,87% os menores valores obtidos até o momento, $(0^\circ/0^\circ)3s$ e $(90^\circ/90^\circ)3s$, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

O Grupo 18 foi dividido de forma a separar placas que mantivessem 8 (oito) das suas camadas fixas, sendo 4 (quatro) delas em 45° (camadas 1, 4, 9 e 12) outras 4

(quatro) em 60° (camadas 2, 5, 8 e 11) com a orientação de laminação e outras 4 (quatro) camadas variando a angulação das fibras em 15° (camadas 3, 6, 7 e 10). A Tab. 6.18. apresenta as laminações testadas com o arranjo pré-determinado para o Grupo 18, onde há um incremento de 15° entre os diferentes esquemas de laminação do grupo.

Tabela 6.18 – Configuração de laminação x Carga crítica para o Grupo 18

Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
(45°/60°/75°)2s	275,16
(45°/60°/90°)2s	274,77

Um gráfico representativo dos valores de carga crítica encontrados para as laminações do Grupo 18 é apresentado na Fig. 6.19.

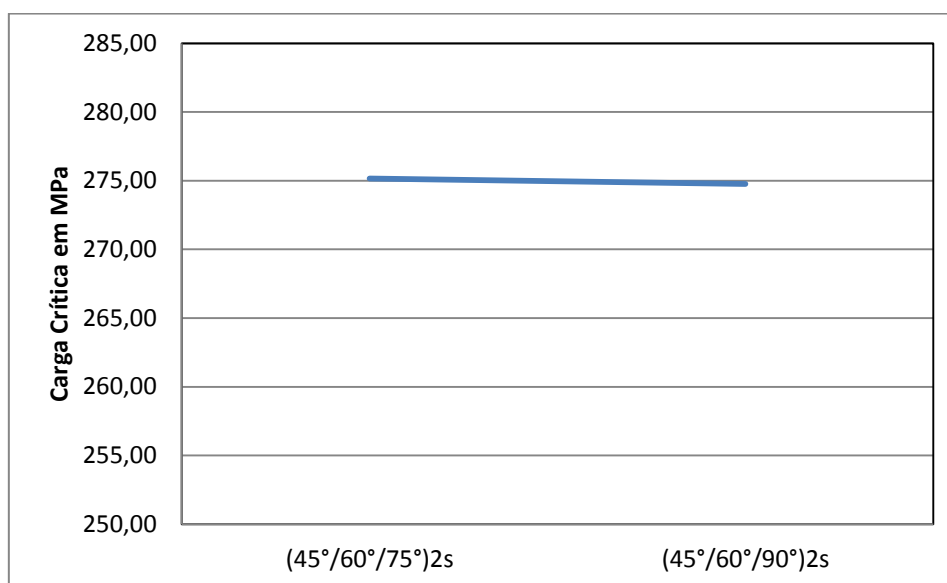


Figura 6.19 – Variação da carga crítica de flambagem em decorrência da variação da orientação das fibras - Grupo 18

A partir dos valores obtidos para o Grupo 18, pode-se observar que o comportamento mecânico não pode ser considerado, visto que a variação entre os valores representa 0,14%, o que torna os valores de carga crítica praticamente iguais. Tomando como maior o valor obtido para a laminação (45°/60°/75°)2s, este valor é 2,58% menor do que o melhor obtido para (45°/45°)3s como visto na Tab. 6.1. e na Fig. 6.2 e para (-45°/45°)3s como pode ser visto na Tab. 6.7 e na Fig. 6.8. No entanto, quando considerado o valor obtido para a laminação (45°/60°/90°)2s, este valor melhora

em 8,73% os menores valores obtidos até o momento, $(0^\circ/0^\circ)_3s$ e $(90^\circ/90^\circ)_3s$, observados na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2.

Como pode ser observado através dos resultados apresentados, a variação angular da laminação das fibras afeta consideravelmente o valor da carga crítica do primeiro estado de flambagem. Exemplo disso pode ser claramente analisado com base no modelo verificado baseado em (Barbero, 2007), (ver seção 4.5), onde a laminação atende à configuração $(0^\circ/90^\circ)_3s$ e a carga crítica do primeiro estado de flambagem tem valor de 252,70 N/mm. Quando variada a laminação foram obtidos valores sensivelmente diferentes do apresentado na verificação, como pode ser visto nas Tab. 6.1. até Tab.6.18.

A fim de encontrar a melhor geometria para uma placa laminada ortotrópica submetida a cargas compressivas biaxiais, a partir de agora a análise é feita com um 19º grupo, que será formado a partir dos maiores valores de carga crítica de flambagem de cada um dos 18 (dezoito) grupos anteriores. O Grupo 19 está apresentando na Tab. 6.19., discriminando o grupo de origem, o esquema de laminação e a carga crítica para flambagem biaxial.

Tabela 6.19 - Grupo 19

Grupo	Configuração da laminação	Carga Crítica em N/mm
1	$(45^\circ/45^\circ)_3s$	282,25
2	$(0^\circ/45^\circ)_3s$	265,21
3	$(15^\circ/45^\circ)_3s$	267,55
4	$(30^\circ/45^\circ)_3s$	276,09
5	$(45^\circ/60^\circ)_3s$	278,96
6	$(60^\circ/90^\circ)_3s$	265,49
7	$(-45^\circ/45^\circ)_3s$	282,25
8	$(0^\circ/15^\circ/45^\circ)_2s$	260,83
9	$(0^\circ/30^\circ/45^\circ)_2s$	265,80
10	$(0^\circ/45^\circ/60^\circ)_2s$	267,24
11	$(0^\circ/60^\circ/75^\circ)_2s$	260,79
12	$(15^\circ/30^\circ/60^\circ)_2s$	266,30
13	$(15^\circ/45^\circ/60^\circ)_2s$	270,45
14	$(15^\circ/60^\circ/75^\circ)_2s$	266,13
15	$(30^\circ/45^\circ/60^\circ)_2s$	277,26
16	$(30^\circ/60^\circ/75^\circ)_2s$	273,34
17	$(30^\circ/75^\circ/90^\circ)_2s$	267,33
18	$(45^\circ/60^\circ/75^\circ)_2s$	275,16

Analisando a Tab. 6.19, é notável a variação dos valores, entre os melhores comportamentos mecânicos, devido ao esquema de laminação. Esta diferença entre as maiores cargas críticas obtidas chega a 8,23%, visto que o maior valor de carga crítica foi de 282,25 N/mm obtidos no Grupo 1 e no Grupo 7, para as laminações $(45^\circ/45^\circ)_3s$ (ver Tab. 6.1 e Fig. 6.2) e $(-45^\circ/45^\circ)_3s$ (ver Tab. 6.7 e Fig. 6.8), respectivamente. Em se tratando do menor valor de carga crítica do Grupo 19, o valor de 260,79 N/mm é o melhor comportamento mecânico encontrado para os esquemas de laminação do Grupo 11, onde a configuração adotada é $(0^\circ/60^\circ/75^\circ)_2s$.

Um gráfico de barras, apresentado na Fig. 6.20, mostra os valores de carga crítica para todos os esquemas de laminação do Grupo 19, onde em vermelho é destacado o melhor esquema de laminação com $(-45^\circ/45^\circ)_3s$ e em verde o pior esquema de laminação com $(0^\circ/60^\circ/75^\circ)_2s$, entre os casos estudados.

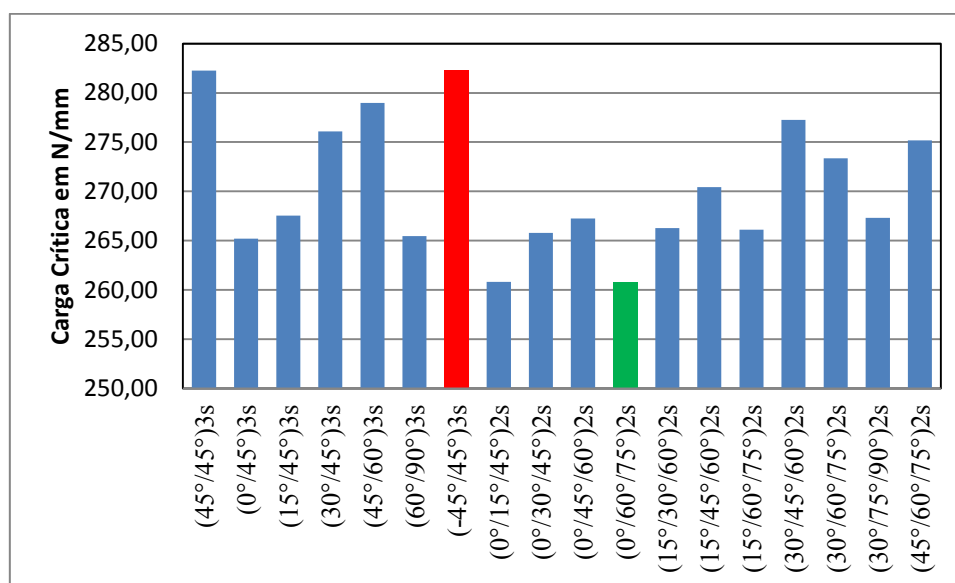


Figura 6.20 - Comparativo dos maiores valores da carga crítica de flambagem para cada laminação que compõe o Grupo 19

É possível notar uma tendência que à medida que as laminações possuem orientações próximas de 45° , o valor da carga crítica é maior. As laminações onde predominam as orientações angulares próximas a 0° ou 90° mostram um comportamento mecânico de resistência à flambagem, biaxial, menor. A diferença destes valores se dá devido à decomposição das forças ao longo das fibras, uma vez que

as fibras possuem grande resistência à tração e a resistência à compressão fica por conta do elemento de matriz (ver Cap. 2, seção 2.1.1).

Este estudo mostra que apenas alterando a configuração do esquema de laminação proposto em Barbero (2007) é possível melhorar consideravelmente a resistência da placa esbelta laminada quanto à solicitação de flambagem biaxial. No modelo verificado, a carga crítica de flambagem correspondia a 252,70 N/mm (Ver Cap. 4, seção 4.5). No entanto, com a alteração do esquema de laminação é possível aumentar a carga crítica de flambagem para 282,25 N/mm, o que representa um aumento de 11,70% da resistência ao fenômeno de instabilidade para a placa, laminada em material compósito, proposta.

6.1. PLACA COM PERFURAÇÃO ELÍPTICA

Aqui será analisada numericamente uma placa de propriedades do material e dimensões fixas previamente estabelecidas, como mostrado na seção 4.5 no exemplo de Barbero (2007), porém contendo uma perfuração elíptica centralizada. A aplicação de perfurações nestas placas, como já foi dito, é uma prática comum na indústria naval. O que não se tem é um conhecimento geral de qual a melhor geometria e qual a razão ideal entre o volume perfurado e o volume de material da placa. Para tal, foi aplicado o método Design Construtal para avaliar a influência da geometria de uma perfuração elíptica, considerando todas as configurações possíveis e, assim, permitindo otimizar geometricamente uma placa compósita retangular com a aplicação de perfuração elíptica centrada, sob compressão biaxial. A Fig. 6.21 apresenta uma placa com perfuração elíptica centralizada e suas dimensões, onde H_0 é a característica dimensional do furo na direção y e L_0 é a característica dimensional do furo na direção x .

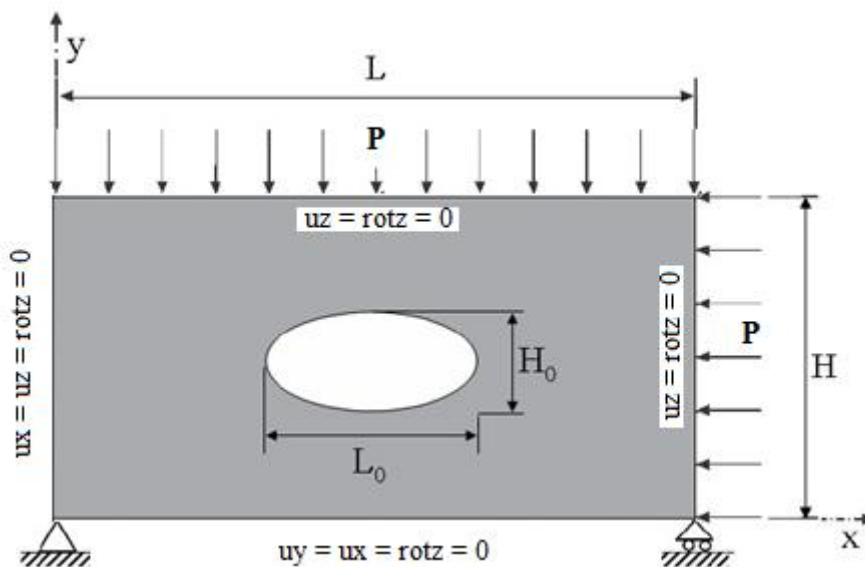


Figura 6.21 - Placa com furo elíptico centrado

6.2. VERIFICAÇÃO DO MODELO PARA UMA PLACA PERFURADA

Uma verificação do modelo SHELL281 é feita para uma placa laminada fina retangular, submetida à solicitação compressiva biaxial, possuindo uma perfuração central circular. Uma placa analisada em Joshi et al. (2013) foi utilizada para verificar o modelo computacional com o elemento de casca SHELL281. A placa utilizada como referência tem dimensões e carregamento de acordo com a Fig. 6.21. Para tal, um teste de independência de malha foi feito para a placa com furo, como pode ser visto na Fig. 6.22 e na Tab. 6.20.

Tabela 6.20 – Teste de independência de malha para a placa com furo

Malha	Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	Carga Crítica (N/mm)	Diferença (%)	Tempo de Simulação (min)
10 x 20	50,0	200	177,042	5,755623853	0,5
20 x 40	25,0	800	187,232	2,650729808	1,0
40 x 80	12,5	3200	192,195	0,264080435	3,0
50 x 100	10,0	5000	192,703	-0,253649688	5,0
100 x 200	5,0	20000	192,214		40,0

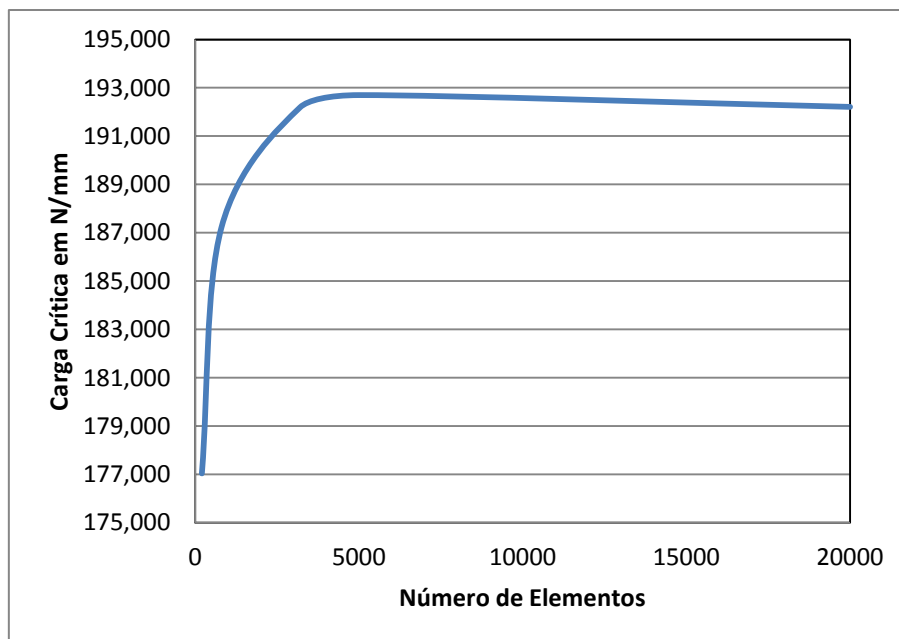


Figura 6.22 – Curva obtida do teste de independência de malha para a placa com furo.

Em Joshi et al. (2013) foi utilizada uma placa laminada simétrica de fibra epóxi/carbono, de laminação $(0^\circ/45^\circ)_2s$ com altura (H) de 2000 mm, largura (L) de 1000 mm e espessura variando em razões L/h , onde h é a espessura. O furo avaliado é circular com diâmetro de 500 mm, ou seja, $H_0 = L_0 = 500$ mm. A Tab. 6.21 apresenta as propriedades do material utilizado, bem como a configuração da placa.

Tabela 6.21- Propriedades da placa com furo circular (Joshi et al., 2013)

Propriedades Mecânicas	Valor
E_1	139000 MPa
$E_2 = E_3$	11000 MPa
$G_{12} = G_{13}$	4700 MPa
G_{23}	3700 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,320
ν_{23}	0,460

A Tab. 6.22 apresenta o comparativo entre os resultados obtidos pela referência Joshi et al. (2013) utilizando o SHELL99, e o presente estudo com aplicação do SHELL281. Para obtenção dos resultados de Joshi et al. (2013) o software Digitizer® foi utilizado, com a finalidade de coletar os valores a partir da curva de referência.

Tabela 6.22 - Comparativo entre os valores de carga crítica obtidos pelo presente estudo, utilizando SHELL281, e por Joshi et al. (2013) utilizando SHELL99

Presente Estudo		Joshi et al. (2013)	Diferença percentual relativa
L/h	Carga Crítica (N/mm)	Carga Crítica (N/mm)	(%)
20	6733,04	6694,32	0,58
40	896,08	892,98	0,35
60	270,89	275,11	1,56
80	115,50	138,04	19,51
100	59,54	56,11	5,76

A Fig. 6.23 apresenta a configuração flambada da placa com furo circular central obtida nas análises do presente estudo. No gradiente de cores, o vermelho significa o maior deslocamento na direção z (transversal à placa), enquanto a cor azul representa um deslocamento nulo.

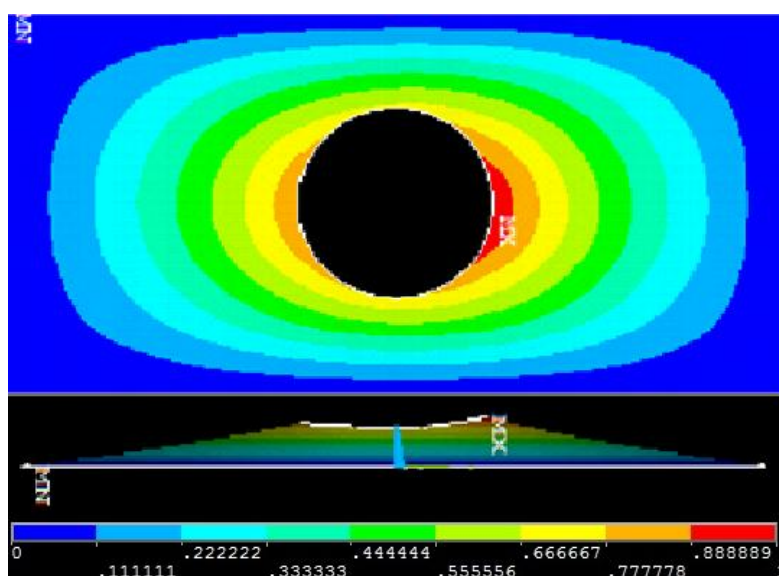


Figura 6.23 – Comportamento da placa quando atingida a carga crítica de flambagem

Como visto na Fig. 6.23, uma semi-onda é formada na placa. O comportamento é o mesmo obtido por Joshi et al. (2013), com o mesmo número de semi-ondas e a mesma distribuição de deslocamentos na placa. Na Fig. 6.24 são apresentadas a curva obtida por Joshi et al. (2013) utilizando o SHELL99 e a curva obtida com o SHELL281 no presente estudo. Além da concordância entre os resultados do presente estudo com os de Joshi et al. (2003), observa-se ainda que conforme a espessura da placa diminui, o valor da carga crítica de flambagem também diminui, sendo esse o comportamento mecânico esperado. Outra observação diz respeito à configuração flambada da placa que não apresenta simetria entre os lados direito e esquerdo do furo.

Então, com base nos resultados da Tab. 6.23 e da Fig. 6.24 é possível afirmar que o modelo computacional empregado neste trabalho foi verificado para ser empregado no estudo de flambagem biaxial de placas perfuradas de material compósito laminado.

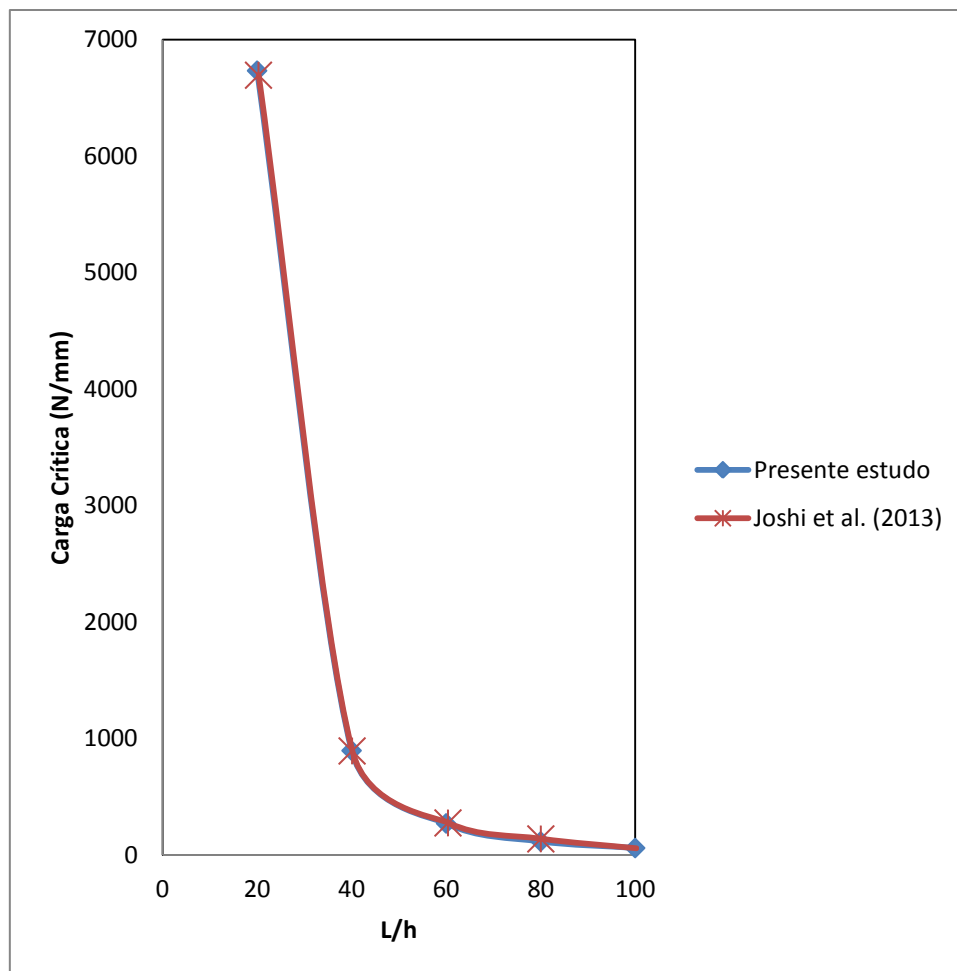


Figura 6.24 - Comparação das curvas de carga crítica entre Joshi et al. (2013) utilizando SHELL99 e o presente estudo utilizando SHELL281.

6.3. DESIGN CONSTRUTAL APLICADO À PLACAS PERFURADAS

Para a aplicação do Design Construtal, a porção volumétrica do furo em relação à placa é mantida constante e apenas a geometria é alterada. A variação do volume dos furos testados é governada por um parâmetro chamado fração volumétrica ($\emptyset$). Esse parâmetro representa a relação entre o volume do furo (V_0) e o volume total da placa sem furo (V). A fração volumétrica para uma placa retangular com perfuração elíptica (ver Fig. 6.21) é definida como:

$$= \frac{V_0}{V} = \frac{\left[\frac{(\pi H_0 L_0 h)}{4} \right]}{(HLh)} = \frac{(\pi H_0 L_0)}{(4HL)} \quad (6.1)$$

onde $\emptyset$ é a fração volumétrica, V_0 é o volume do furo elíptico e V é o volume total da placa sem perfuração, H é a característica dimensional da placa no sentido do eixo y , L é a característica dimensional da placa na direção de x (ver Fig. 6.1) e h é a espessura da placa.

Como uma das restrições impostas, determina-se que, com a finalidade de evitar o efeito das bordas, a borda do furo elíptico deve estar distante pelo menos 100 mm da borda da placa, ou seja:

$$\begin{aligned} H - H_0 &\geq 200 \text{ mm} \\ L - L_0 &\geq 200 \text{ mm} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Considerando os resultados obtidos no estudo preliminar realizado para a placa sem furos, a placa laminada angular-simétrica (*cross-ply*) $(-45/45)_3s$ da Fig. 6.20 foi o esquema de laminação escolhido para ser utilizado aqui. Nesta placa a inserção de furo centrado elíptico é feita respeitando diferentes frações de volume para o furo elíptico ($\emptyset = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$ e $0,25$). Para uma mesma fração volumétrica, diferentes configurações geométricas são adotadas para a perfuração a partir da variação do grau de liberdade H_0/L_0 (ver Fig. 6.21), respeitando a condição imposta pela Eq. (6.2).

Portanto, considerando restrições dadas pelas Eqs. (6.1) e (6.2) para a placa laminada perfurada e variando o grau de liberdade H_0/L_0 , que é responsável pela mudança de geometria da perfuração elíptica, a função objetivo é maximizar a carga crítica de flambagem biaxial.

A primeira fração volumétrica testada é relativa à $\emptyset = 0,05$. Nesta condição o volume do furo representa uma remoção de material de 5% em relação à placa sem furo. O valor de H_0 foi incrementado gradativamente, consequentemente para cada H_0 um L_0 é calculado de forma a manter a fração volumétrica $\emptyset = 0,05$ constante. Respeitando o determinado pela Eq. 6.2., só são utilizados os valores de H_0 menores ou iguais a 300 mm e de L_0 menores ou iguais a 800 mm. A Tab. 6.23 apresenta os valores utilizados para cada parâmetro envolvido na análise, assim como o valor da carga crítica de flambagem obtido para cada H_0/L_0 avaliado.

Tabela 6.23 - Valores analisados para $\varnothing = 0,05$

$\varnothing=0,05$					
H (mm)	L (mm)	H0 (mm)	L0 (mm)	H0/L0	Carga Crítica (N/mm)
500	1000	50	636,64	0,08	200,73
500	1000	60	530,53	0,11	195,88
500	1000	70	454,74	0,15	194,29
500	1000	80	397,90	0,20	210,60
500	1000	90	353,69	0,25	213,21
500	1000	100	318,32	0,31	214,91
500	1000	110	289,38	0,38	219,20
500	1000	120	265,27	0,45	217,49
500	1000	130	244,86	0,53	220,32
500	1000	140	227,37	0,62	219,72
500	1000	150	212,21	0,71	221,15
500	1000	160	198,95	0,80	222,06
500	1000	170	187,25	0,91	221,30
500	1000	180	176,84	1,02	220,82
500	1000	190	167,54	1,13	220,93
500	1000	200	159,16	1,26	222,69
500	1000	210	151,58	1,39	222,86
500	1000	220	144,69	1,52	223,50
500	1000	230	138,40	1,66	227,23
500	1000	240	132,63	1,81	224,81
500	1000	250	127,33	1,96	225,00
500	1000	260	122,43	2,12	227,27
500	1000	270	117,90	2,29	228,36
500	1000	280	113,69	2,46	229,86
500	1000	290	109,77	2,64	227,22
500	1000	300	106,11	2,83	227,96

Através da Tab. 6.23, primeiramente, observa-se que de uma forma geral a carga crítica de flambagem aumenta à medida que é aumentado o valor de H_0/L_0 . Isso pode ser observado a partir da forma como se apresenta a flambagem da placa para cada configuração do furo, como pode ser visto na Fig. 1.14.

Para o $\varnothing = 0,05$, a geometria otimizada encontrada foi $(H_0/L_0)_o = 2,46$ que conduziu ao melhor valor de carga crítica, chamada de carga crítica maximizada, $(P_{Cr})_m$, igual a 229,86 N/mm, enquanto que para a placa sem furos e obedecendo aos

mesmos parâmetros de laminação, o maior valor da carga crítica encontrado é de 282,25 N/mm (ver Fig. 6.20). Isso representa uma redução de 18,56% na resistência à flambagem elástica para esta placa. Ainda, se comparar a melhor carga crítica da placa furada para $\varnothing = 0,05$ com a pior condição da placa sem furo (ver Fig. 6.2), ainda assim a placa com furo elíptico reduz a carga crítica em 9,03%. Entre a maior carga crítica e o menor valor encontrado para $\varnothing = 0,05$, é observada uma variação de 15,47% na carga crítica de flambagem biaxial. A Fig. 6.25 apresenta três diferentes geometrias, cada uma com a sua respectiva característica da flambagem. Na Fig. 6.25 (a) a placa apresenta um $H_0/L_0 = 0,15$, em (b) um $H_0/L_0 = 0,38$ e em (c) $H_0/L_0 = 2,46$. Todas as placas apresentaram uma semi-onda próxima ao centro da placa, como pode ser visto na Fig. 6.25, onde o vermelho representa o maior deslocamento da placa ao longo de z , transversal ao plano xy , e a cor azul indica um deslocamento nulo.

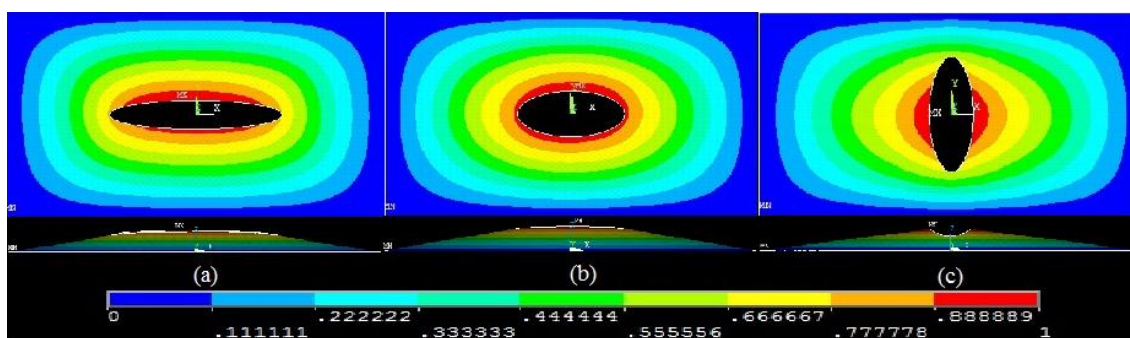


Figura 6.25 – Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,15$, (b) $H_0/L_0 = 0,38$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 2,46$ para $\varnothing = 0,05$

Para $\varnothing = 0,10$ o volume do furo representa uma remoção de 10% do material em relação à placa sem furo. Para manter a fração volumétrica $\varnothing = 0,10$, para cada H_0 um L_0 é calculado. Baseado na Eq. 6.2., apenas os valores de H_0 menores ou iguais a 300 mm e de L_0 menores ou iguais a 800 mm são utilizados para a análise. A Tab. 6.24 apresenta os valores de cada parâmetro envolvido na análise, bem como o valor da carga crítica de flambagem obtido para cada H_0/L_0 avaliado.

Tabela 6.24 - Valores analisados para $\varnothing = 0,10$

$\varnothing=0,10$					
H (mm)	L (mm)	H₀ (mm)	L₀ (mm)	H₀/L₀	Carga Crítica (N/mm)
500	1000	80	795,80	0,10	179,41
500	1000	90	707,38	0,13	201,56
500	1000	100	636,64	0,16	197,68
500	1000	110	578,76	0,19	198,08
500	1000	120	530,53	0,23	199,49
500	1000	130	489,72	0,27	198,59
500	1000	140	454,74	0,31	199,85
500	1000	150	424,43	0,35	199,19
500	1000	160	397,90	0,40	200,22
500	1000	170	374,49	0,45	201,27
500	1000	180	353,69	0,51	199,56
500	1000	190	335,07	0,57	202,48
500	1000	200	318,32	0,63	202,65
500	1000	210	303,16	0,69	204,65
500	1000	220	289,38	0,76	203,86
500	1000	230	276,80	0,83	206,33
500	1000	240	265,27	0,90	206,94
500	1000	250	254,66	0,98	207,68
500	1000	260	244,86	1,06	207,31
500	1000	270	235,79	1,15	205,83
500	1000	280	227,37	1,23	208,81
500	1000	290	219,53	1,32	209,72
500	1000	300	212,21	1,41	209,62

Analisando a Tab. 6.24 observa-se que de uma forma geral a carga crítica de flambagem aumenta à medida que é aumentado o valor de H_0/L_0 . Isso pode ser observado a partir da forma como se apresenta a flambagem da placa para cada configuração do furo, como pode ser visto na Fig. 1.14.

Para o $\varnothing = 0,10$ a carga crítica maximizada $(P_{Cr})_m$ é igual a 209,72, quanto $[(H_0/L_0)_o] = 1,32$. Quando comparado à placa sem furo, nota-se uma redução de 25,70% na resistência à flambagem elástica, sendo a carga crítica da placa sem furos a maior. Comparando a $(P_{Cr})_m$ para $\varnothing = 0,10$ com a pior condição da placa sem furo (ver Fig. 6.2), ainda assim a placa com furo elíptico reduz a carga crítica em 17,01%. Comparando com a $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,05$, a $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,10$ reduz em 8,76% o valor

da carga crítica. Entre os valores obtidos para $\emptyset = 0,10$, é observada uma variação de 14,45% na carga crítica de flambagem biaxial.. Na Fig. 6.26 (a) a placa apresenta um $H_0/L_0 = 0,10$, em (b) um $H_0/L_0 = 0,35$ e em (c) $H_0/L_0 = 1,32$, sendo este o $(H_0/L_0)_o$ devido à maior carga crítica de flambagem para o $\emptyset = 0,10$. Duas das placas apresentaram a semi-onda próxima ao centro da placa, como pode ser visto na Fig. 6.26 (b) e (c), onde o vermelho representa o maior deslocamento da placa ao longo de z , transversal ao plano xy . Na Fig. 6.26 (a) a semi-onda está deslocada do centro da placa, o que demonstra uma característica da flambagem devido a geometria do furo alongada no sentido do eixo x .

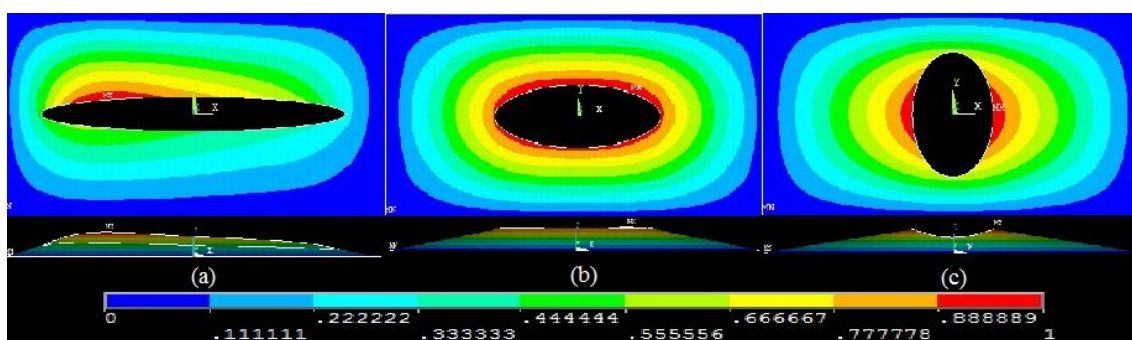


Figura 6.26 - Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,10$, (b) $H_0/L_0 = 0,35$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 1,32$ para $\emptyset = 0,10$

A terceira fração volumétrica analisada corresponde à $\emptyset = 0,15$. O valor de H_0 é incrementado gradativamente quando um L_0 é calculado de forma a manter a fração volumétrica $\emptyset = 0,15$ para cada variação de H_0 . Os valores utilizados para cada um dos parâmetros e os valores da carga crítica de flambagem obtidos podem ser vistos na Tab. 6.24.

A partir da análise dos valores da Tab. 6.25 observa-se o aumento da carga crítica à medida que é aumentado o valor de H_0/L_0 . Este resultado varia com forma como se apresenta a flambagem da placa para cada furo analisado, como pode ser visto na Fig. 1.14.

Tabela 6.25 - Valores analisados para $\varnothing = 0,15$

$\varnothing=0,15$					
H (mm)	L (mm)	H₀ (mm)	L₀ (mm)	H₀/L₀	Carga Crítica (N/mm)
500	1000	120	795,80	0,15	190,26
500	1000	130	734,58	0,18	193,25
500	1000	140	682,11	0,21	191,75
500	1000	150	636,64	0,24	191,61
500	1000	160	596,85	0,27	192,39
500	1000	170	561,74	0,30	191,60
500	1000	180	530,53	0,34	188,72
500	1000	190	502,61	0,38	190,99
500	1000	200	477,48	0,42	192,51
500	1000	210	454,74	0,46	193,62
500	1000	220	434,07	0,51	192,20
500	1000	230	415,20	0,55	195,33
500	1000	240	397,90	0,60	193,19
500	1000	250	381,98	0,65	196,12
500	1000	260	367,29	0,71	196,16
500	1000	270	353,69	0,76	197,52
500	1000	280	341,06	0,82	195,95
500	1000	290	329,30	0,88	198,01
500	1000	300	318,32	0,94	196,32

Para o $\varnothing = 0,15$ o melhor valor da carga crítica encontrado, $(P_{Cr})_m$, é obtido quando $[(H_0/L_0)_o] = 0,88$, quando $(P_{Cr})_m$ é igual a 198,01 N/mm. Este valor representa uma redução de 29,84% na resistência à flambagem elástica quando comparada a placa furada com a placa sem furos. Ainda, se comparar o $(P_{Cr})_m$ da placa furada para $\varnothing = 0,15$ com a pior condição da placa sem furo (ver Fig. 6.2), ainda assim a placa com furo elíptico reduz a carga crítica em 21,64%. Comparando com $\varnothing = 0,05$, o furo com fração volumétrica $\varnothing = 0,15$ reduz em 13,86% o $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,05$. Entre os maiores e menores valores da carga crítica para $\varnothing = 0,15$, há observada uma variação de 4,69%. Na Fig. 6.27 (a) a placa apresenta um $H_0/L_0 = 0,15$, em (b) um $H_0/L_0 = 0,34$ e em (c) $H_0/L_0 = 0,88$, sendo este o $(H_0/L_0)_o$ devido à maior carga crítica de flambagem para o $\varnothing = 0,15$, $(P_{Cr})_m = 198,01$ N/mm. Analisando a Fig. 6.27 observa-se que duas das placas apresentaram a semi-onda próxima ao centro da placa [ver Fig. 6.27 (b) e (c)], onde o vermelho representa o maior deslocamento da placa ao longo de z , transversal ao

plano xy . Na Fig. 6.27 (a) a semi-onda está deslocada do centro da placa, tendo o seu maior deslocamento transversal mais próximo ao zero do eixo x , o que demonstra uma característica da flambagem devido a geometria do furo alongada no sentido do eixo x .

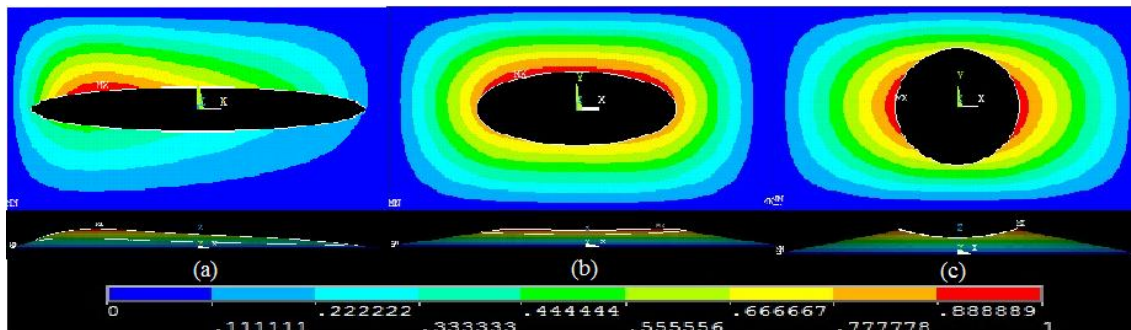


Figura 6.27 – Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,15$, (b) $H_0/L_0 = 0,34$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 0,88$ para $\varnothing = 0,15$

Já para $\varnothing = 0,20$, quando o volume do furo representa uma remoção de material de 20% em relação à placa sem furo, os valores obtidos são apresentados na Tab. 6.26.

Tabela 6.26 - Valores analisados para $\varnothing = 0,20$

$\varnothing=0,20$					
H (mm)	L (mm)	H ₀ (mm)	L ₀ (mm)	H ₀ /L ₀	Carga Crítica (N/mm)
500	1000	160	795,80	0,20	177,22
500	1000	170	748,99	0,23	182,49
500	1000	180	707,38	0,25	184,78
500	1000	190	670,15	0,28	185,41
500	1000	200	636,64	0,31	186,01
500	1000	210	606,32	0,35	186,53
500	1000	220	578,76	0,38	183,48
500	1000	230	553,60	0,42	186,86
500	1000	240	530,53	0,45	185,31
500	1000	250	509,31	0,49	186,22
500	1000	260	489,72	0,53	187,26
500	1000	270	471,58	0,57	188,30
500	1000	280	454,74	0,62	188,32
500	1000	290	439,06	0,66	189,26
500	1000	300	424,43	0,71	190,66

Os resultados obtidos da análise (ver Tab. 6.26) mostram o aumento da carga crítica como efeito do aumento de H_0/L_0 . A forma como se apresenta a placa flambada afeta o valor da carga crítica, como pode ser visto na Fig. 1.14.

Para o $\varnothing = 0,20$ o valor ótimo de H_0/L_0 $[(H_0/L_0)_o]$ é igual a 0,71, quando $(P_{Cr})_m = 190,66$ N/mm. A presença do furo elíptico causa uma redução de 32,45% na resistência à flambagem elástica quando comparado à placa sem furo. Ainda, se comparar a melhor carga crítica da placa furada para $\varnothing = 0,20$ com a pior condição da placa sem furo (ver Fig. 6.2), a placa com furo elíptico novamente reduz a carga crítica, em 24,55%. Quando comparadas as $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,05$ e a $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,20$, a maior fração volumétrica reduz em 17,05% o valor da carga crítica de $\varnothing = 0,05$. A variação dos valores obtidos das análises para $\varnothing = 0,20$ variam em 7,05%, entre o melhor e o pior valor encontrados. Na Fig. 6.28 (a) a placa apresenta um $H_0/L_0 = 0,20$ e uma semi-onda descentralizada, em (b) um $H_0/L_0 = 0,38$ e uma semi-onda mais próxima do centro da placa, bem como em (c) quando $H_0/L_0 = 0,71$, sendo este o $(H_0/L_0)_o$.

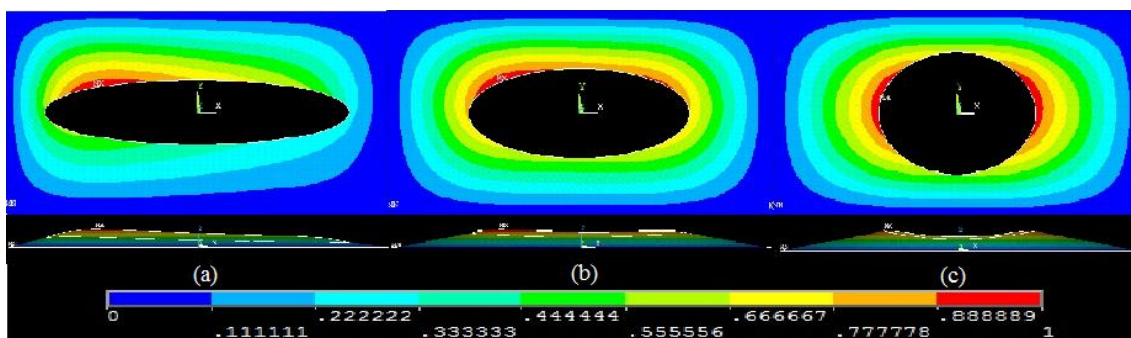


Figura 6.28 - Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,20$, (b) $H_0/L_0 = 0,38$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 0,71$ para $\varnothing = 0,20$

Por fim, o $\varnothing = 0,25$ tem apresentados na Tab. 6.28 os valores obtidos para cada parâmetro da análise, conforme a variação de H_0/L_0 .

Nota-se um aumento da carga crítica conforme é aumentado o H_0/L_0 .

Para o $\varnothing = 0,25$ a carga crítica maximizada $(P_{Cr})_m$ é igual a 182,83 N/mm, quando o $(H_0/L_0)_o = 0,53$. Quando comparado o $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,25$ com a carga crítica obtida para a placa sem furos, uma redução de 35,22% na resistência à flambagem elástica é observada. Comparando $(P_{Cr})_m$ para $\varnothing = 0,25$ com a pior condição da placa sem furo (ver Fig. 6.2), ainda assim a placa com furo elíptico reduz a carga crítica em 27,65%. Comparando com $\varnothing = 0,05$, a melhor carga crítica de $\varnothing = 0,25$

reduz em 20,46% o $(P_{Cr})_m$ para $\varnothing = 0,05$. Entre a maior carga crítica e o menor valor encontrado para $\varnothing = 0,25$, é observada uma variação de 5,59% na carga crítica de flambagem biaxial. Na Fig. 6.29 (a) a placa apresenta um $H_0/L_0 = 0,25$, em (b) um $H_0/L_0 = 0,36$ e em (c) $H_0/L_0 = 0,53$, sendo este o $(H_0/L_0)_o$ devido à maior carga crítica de flambagem $[(P_{Cr})_m]$ para o $\varnothing = 0,25$, igual à 182,83 N/mm. A Fig. 6.29 apresenta as imagens obtidas para as placas no estado de flambagem. Na Fig. 6.29 (b) e (c) a meia-onda da placa apresenta uma condição centralizada, onde o vermelho representa o maior deslocamento transversal ao plano xy enquanto que na Fig. 6.29 (a) a semi-onda está deslocada do centro da placa, tendo o seu maior deslocamento ao longo do eixo z em uma posição mais próximo à origem do eixo x .

Tabela 6.27 - Valores analisados para $\varnothing = 0,25$

$\varnothing=0,25$					
H (mm)	L (mm)	H0 (mm)	L0 (mm)	H0/L0	Carga Crítica (N/mm)
500	1000	200	795,80	0,25	172,60
500	1000	210	757,90	0,28	176,39
500	1000	220	723,45	0,30	176,49
500	1000	230	692,00	0,33	179,27
500	1000	240	663,17	0,36	180,51
500	1000	250	636,64	0,39	181,36
500	1000	260	612,15	0,42	181,13
500	1000	270	589,48	0,46	181,31
500	1000	280	568,43	0,49	181,26
500	1000	290	548,83	0,53	182,83
500	1000	300	530,53	0,57	181,78

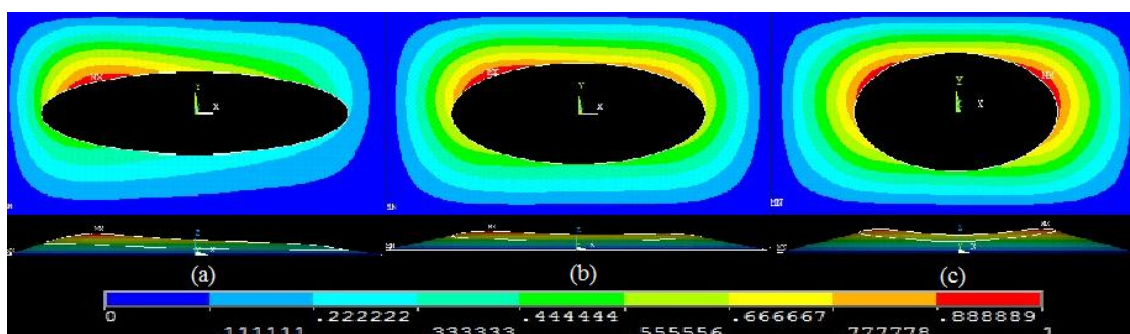


Figura 6.29 - Configuração da placa flambada de (a) $H_0/L_0 = 0,25$, (b) $H_0/L_0 = 0,36$ e (c) $(H_0/L_0)_o = 0,53$ para $\varnothing = 0,25$

A Fig. 6.30 apresenta as curvas obtidas para cada valor de $\emptyset$. Observando o gráfico, pode-se observar que a presença do furo reduz a carga crítica de flambagem ao longo de toda a análise. Segundo Dhurvey e Mittal (2012), esse comportamento é devido à concentração de tensões gerada pelo furo e ao efeito da remoção de material. Apenas no começo da análise para $\emptyset = 0,05$ e $\emptyset = 0,10$ os valores de carga crítica são próximos (onde $0,10 \leq H_0/L_0 \leq 0,15$).

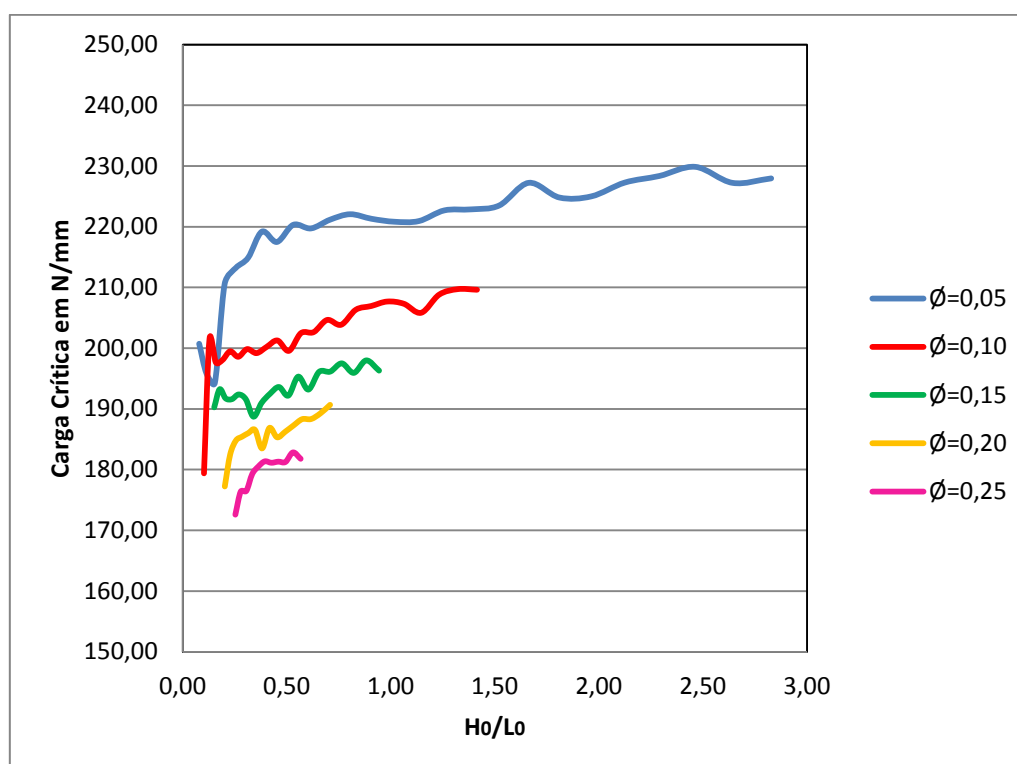


Figura 6.30 – Curvas obtidas para cada $\emptyset$ avaliado

Uma característica observada é quanto às oscilações das curvas, que é um comportamento observado para os 5 (cinco) $\emptyset$ analisados. Embora este comportamento esteja presente, a maior oscilação é de 1,92% do valor da carga crítica, exatamente para $\emptyset = 0,10$ quando $0,10 \leq H_0/L_0 \leq 0,15$ e as curvas de $\emptyset = 0,05$ e $\emptyset = 0,10$ se cruzam. Comportamento semelhante pode ser visto em Komur et al. (2010) (ver Fig. 1.4), Joshi et al. (2013) (ver Fig. 1.9 e 1.10), Reddy et al. (2014) (ver Fig. 1.12), Shakya et al. (2015) (ver Fig. 1.15) e Babu e Rao (2016) (ver Fig. 1.17.). Característica importante observada diz respeito à variação da carga crítica de flambagem em relação à H_0/L_0 . Conforme aumenta o valor de H_0/L_0 , aumenta também a carga crítica de flambagem

biaxial, ou seja, quando mais o furo se estender do longo do eixo dos y , melhor será o desempenho da placa. A Fig. 6.31 apresenta uma curva da variação do $(H_0/L_0)_o$ em relação à variação da fração volumétrica ($\emptyset$). Por sua vez a Fig. 6.32 mostra o comportamento da carga crítica de flambagem maximizada $(P_{Cr})_m$, para os $(H_0/L_0)_o$ obtidos, ao longo da variação da fração volumétrica ($\emptyset$).

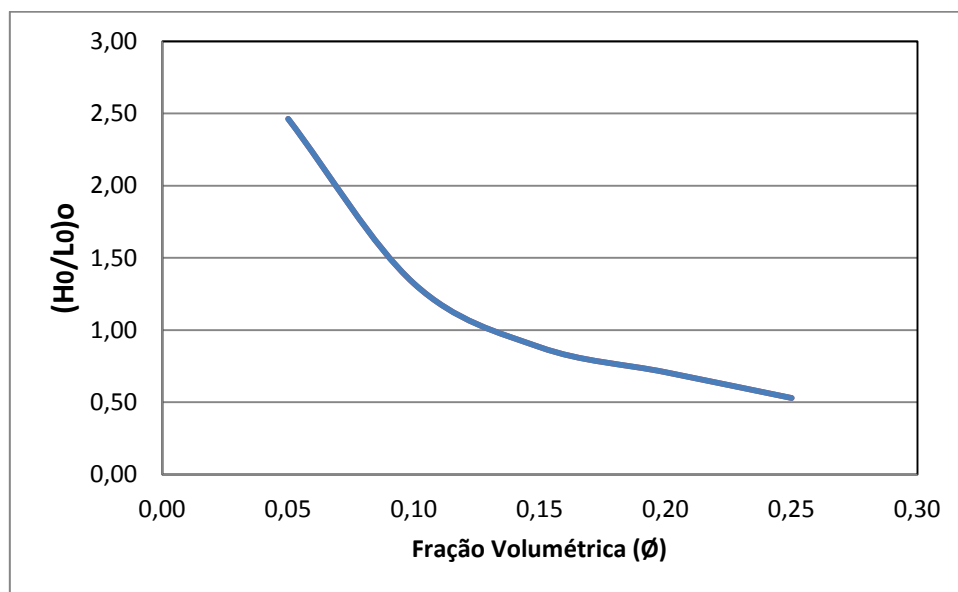


Figura 6.31 – Variação do $(H_0/L_0)_o$ em relação à variação da fração volumétrica ($\emptyset$)

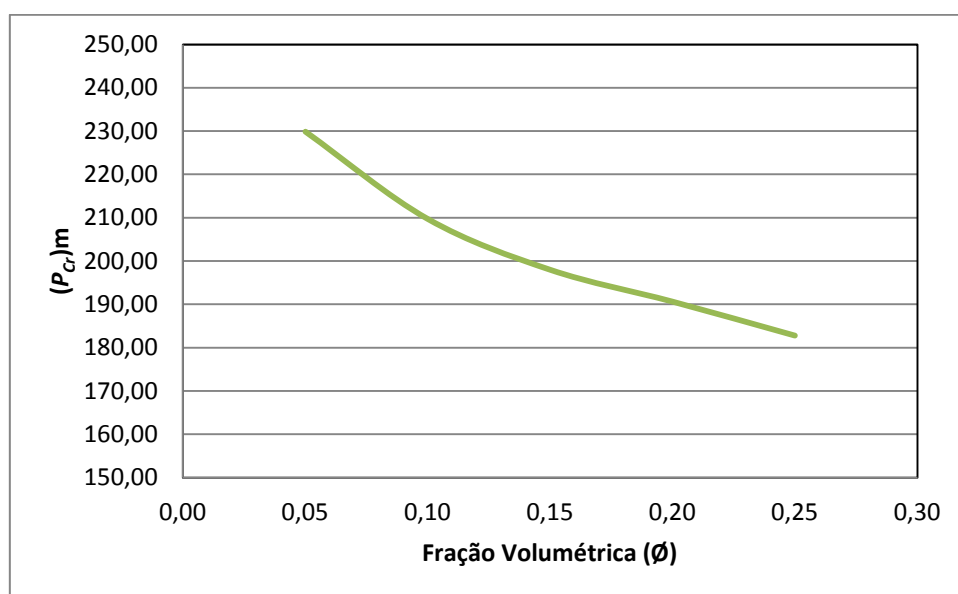


Figura 6.32 – Variação da carga crítica de cada $(H_0/L_0)_o$ em relação à variação da fração volumétrica ($\emptyset$)

Das Figs. 6.31 e 6.32 observa-se que conforme a fração volumétrica do furo aumenta a carga crítica de flambagem diminui, ou seja, quanto maior o furo feito na placa menor será a sua resistência ao fenômeno de instabilidade da flambagem elástica, o que é um comportamento mecânica esperado. A Fig. 6.33 mostra as configurações flambadas para todos os $(H_0/L_0)_o$ obtidos.

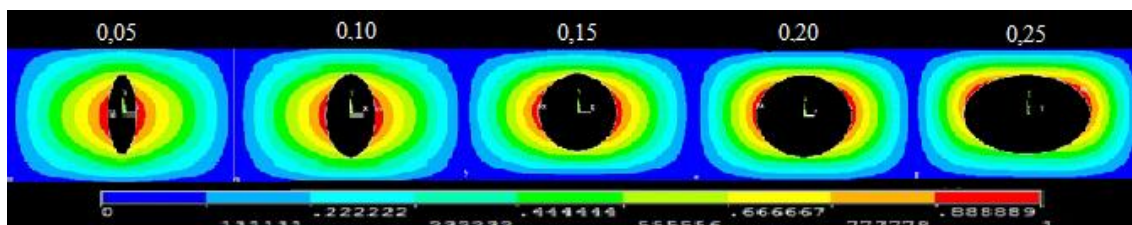


Figura 6.33 - Configuração flambada na condição de $(H_0/L_0)_o$ para cada fração volumétrica ($\emptyset$).

Nota-se que para todas as frações volumétricas, o $(H_0/L_0)_o$ é o que apresenta um furo mais alongado ao longo do eixo y, apresentando uma simetria nos deslocamentos ao longo da placa.

7. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma abordagem numérica para a análise de placas retangulares laminadas, de laminação simétrica, sob solicitação compressiva biaxial, com e sem a aplicação de furos. Para ambas as análises (com e sem furo) o MEF foi utilizado com sucesso, apresentando valores confiáveis e com considerável agilidade no processamento das informações.

No caso de placas perfuradas, associado ao MEF foi aplicado o Design Construtal, permitindo que um estudo de otimização geométrica da placa fosse realizado. Com o Design Construtal foi possível encontrar relações ótimas de (H_0/L_0) que conduziram a valores máximos de carga crítica, para cada fração volumétrica $\emptyset$ analisada.

Em se tratando de placas sem furos, como pode ser observado nas Tab. 6.1 até Tab. 6.19 e nas Fig. 6.2 até Fig. 6.20, o valor da carga crítica de flambagem biaxial é afetado diretamente pelo esquema de laminação. Uma placa laminada proposta por Barbero (ANO) foi alterada quanto à configuração de laminação e isto refletiu em 10,47% de incremento na carga crítica de flambagem biaxial, para a placa sem furo. Previamente a laminação $(0^\circ/90^\circ)_3s$ apresentou uma carga crítica igual a 252,70 N/mm (Barbero, ANO). Após alteração, com as laminações $(45^\circ/45^\circ)_3s$ e $(-45^\circ/45^\circ)_3s$, foi atingida uma carga crítica de flambagem biaxial igual a 282,25 N/mm. Percebe-se que quando os ângulos de laminação são próximos à 45° há um incremento na carga crítica de flambagem biaxial. Segundo Mendonça (2005), esse comportamento é efeito do menor nível de anisotropia de flexão, devido ao menor valor da razão D_{16}/D_{11} . De forma oposta, os ângulos de laminação próximos à 0° e 90° apresentam decréscimo da carga crítica de flambagem biaxial. Isso pode ser observado na Tab. 6.1 e na Fig. 6.2 bem como nas demais figuras e tabelas da seção 6.

Em se tratando de placas de material compósito, simetricamente laminadas, retangulares e com perfurações elípticas, o MEF associado ao Design Construtal foi efetivo para obtenção dos resultados da carga crítica de flambagem. Foi possível observar que a presença de um furo centralizado na placa laminada retangular reduz a carga crítica de flambagem biaxial para todos os casos. . O mesmo comportamento é relatado por Baba e Baltaci (2007), Dhurvey e Mittal (2012), Komur et al. (2010),

Reddy et al. (2014). O mesmo comportamento é relatado por Baba e Baltaci (2007), Dhurvey e Mittal (2012), Komur et al. (2010), Reddy et al. (2014).

Como pode ser visto na Fig. 6.29, quanto maior a fração volumétrica ($\emptyset$) do furo elíptico, menor será a carga crítica de flambagem. Além disso, foi possível identificar na Fig. 6.30 um decréscimo do valor de $(H_0/L_0)_o$ em função da variação da fração volumétrica ($\emptyset$), e também na Fig. 6.31 onde a curva trás o decréscimo do valor da carga crítica de flambagem maximizada, $(P_{Cr})_m$ à medida que a fração volumétrica ($\emptyset$) aumenta.

Comportamento similar ao encontrado em Komur et al. (2010), Joshi et al. (2013), Reddy et al. (2014) e Shakya et al. (2015), foi observado quando a posição ou o ângulo de orientação do furo são variados e nota-se que quando o eixo maior da elipse está perpendicular à borda de aplicação do carregamento o valor da carga crítica aumenta.

Observa-se que na condição de flambada, todas as placas analisadas apresentaram apenas uma semi-onda. Isso pode ser visto nas Figs. 6.25 à 6.29. Mesmo comportamento flambado foi observado por Barbero (2007) (ver Fig. 4.11.), Joshi et al. (2013) (ver Fig. 6.22) e Shakya et al. (2015) (ver Fig. 1.14).

Outra característica observada nos valores de carga crítica ao longo da avaliação é que a variação dos valores não apresenta um comportamento constante, o que gera oscilações no gráfico. Para $\emptyset = 0,05$ a oscilação dos valores atingiu 1,30 % , para $\emptyset = 0,10$ a variação máxima observada é de 1,92%, para $\emptyset = 0,15$ a variação chegou a 1,50%, com a fração volumétrica $\emptyset = 0,20$, 1,64% de variação presente e em $\emptyset = 0,25$ obteve-se a menor variação que foi de 0,57%. O mesmo comportamento é observado para $\emptyset = 0,05$ e em Komur et al. (2010) (ver Fig. 1.4), Joshi et al. (2013) (ver Fig. 1.9 e 1.10), Reddy et al. (2014) (ver Fig. 1.12), Shakya et al. (2015) (ver Fig. 1.15) e Babu e Rao (2016) (ver Fig. 1.17).

Para $\emptyset = 0,05$, a relação ótima de H_0/L_0 foi encontrada quando $(H_0/L_0)_o = 2,46$, o que resulta em uma carga crítica de flambagem biaxial maximizada de $(P_{Cr})_m = 229,86$ N/mm. Este é o melhor valor de carga crítica de flambagem obtido para todas as análises de placas perfuradas feitas neste estudo, porém, quando comparado à carga crítica obtida para a placa sem perfuração, este valor apresenta uma redução de 18,56% na carga crítica, devido à presença do furo.

Já para $\emptyset = 0,10$, a relação ótima $(H_0/L_0)_o$ é igual a 1,32, quando $(P_{Cr})_m = 209,72$ N/mm. Este valor é 8,76% menor do que o $(P_{Cr})_m$ obtido para o $(H_0/L_0)_o =$

2,46 quando $\varnothing = 0,05$. Ainda, a $(P_{Cr})_m$ obtida para $\varnothing = 0,10$ apresenta uma redução de 25,70% na carga crítica, se comparada com o valor da carga crítica de flambagem biaxial obtida para a placa sem perfuração.

Das análises para a fração volumétrica $\varnothing = 0,15$, observou-se um valor para $(P_{Cr})_m = 198,01$ N/mm, quando $(H_0/L_0)_o = 0,88$. Quando comparado ao melhor valor de $(P_{Cr})_m$, quando $\varnothing = 0,05$ e $(H_0/L_0)_o = 2,46$, este valor é 13,86% menor. Em relação à placa sem furo elíptico, a $(P_{Cr})_m$ para $\varnothing = 0,15$ apresenta uma redução de 29,84%, consequência do efeito da aplicação do furo à placa.

Para a quarta fração volumétrica estudada, $\varnothing = 0,20$, foi encontrado um $(H_0/L_0)_o = 0,71$, o qual apresenta uma carga crítica maximizada igual a $(P_{Cr})_m = 190,66$ N/mm. Este valor é 17,05% menor do que o $(P_{Cr})_m$ para $(H_0/L_0)_o = 2,46$ quando $\varnothing = 0,05$. Se comparado ao melhor resultado obtido para a placa sem perfuração, a $(P_{Cr})_m$ para $\varnothing = 0,20$ apresenta uma redução de 32,45% no resultado, o que reflete em uma menor resistência à flambagem biaxial da placa perfurada.

Por fim, para $\varnothing = 0,25$ a relação ótima de H_0/L_0 foi encontrada quando $(H_0/L_0)_o = 0,53$, o que resulta em uma $(P_{Cr})_m = 182,83$ N/mm, sendo este valor 20,46% menor do que $(P_{Cr})_m$ para $(H_0/L_0)_o = 2,46$ quando $\varnothing = 0,05$. Quando $(P_{Cr})_m$ de $\varnothing = 0,25$ é comparado à carga crítica para uma placa simétrica, $(-45^\circ/45^\circ)_{3s}$, sem furos pode-se constatar que há uma redução de 35,22% na carga crítica, como efeito da presença do furo elíptico.

Com base no estudo realizado e nos resultados obtidos é possível afirmar que o método Design Construtal associado à simulação numérica pode ser usado para a análise estrutural de placas de material compósito, perfuradas e submetidas à flambagem biaxial, sendo essa uma contribuição inédita desta pesquisa.

Para trabalhos futuros sugere-se o estudo de diferentes tipos de perfurações (retangulares, oblongas, losangulares, triangulares, etc.), a investigação da influência do esquema de laminação na flambagem biaxial de placas perfuradas, a consideração de outras condições de contorno e de carregamento para a placa.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÅKESSON, B. Plate buckling in bridges and other structure. Taylor & Francis. 2007.
- AKIN, J. M. Finite element analysis with errors estimators. Elsevier. 2005.
- AL HUMDANY, Abdulkareem e HUSSEIN, Emad. Theoretical and numerical analysis for buckling of antisymmetric simply supported laminated plates under uniaxial loads. *Journal of Kerbala University*, v. 10, n. 4, p. 149-160, 2012.
- AL-QABLAN, H., DWAIRI, H., SHATARAT, N., ROSAN, T., AL-QABLAN, T. Stability Analysis of Composite Panels with Stiffeners and Circular Cutouts. *Jordan Journal of Civil Engineering*, v. 4, n. 2, p. 119-131, 2010.
- ANSYS Element Reference Manual (version 12.1). Technology Drive, Canonsburg. 2009.
- ANSYS User's Manual (version 10.0). Swanson Analysis System Inc, Houston. 2005.
- ARZ, Y.R. Studying the effect of cutouts on the composite laminate plates. *Anbar Journal for Engineering Sciences*, v. 1, n. 2, p. 69-77, 2008.
- AUSTIN, Calvin D. Buckling of symmetric laminated fiberglass reinforced plastic (FRP) plates. Pittsburgh, 2003. 173p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), University of Pittsburgh.
- BABA, Buket Okutan, BALTACI, Aysun. Buckling Characteristics of Symmetrically and Antisymmetrically Laminated Composite Plates with Central Cutout. *Appl Compos Mater*, 2007. 12p.
- BABU, S. M., RAO, M. V. Eigen Value Buckling Analysis of Thin FRP Cross Ply 4-Layered Hexagonal Cut on Rectangular Laminated Composites. *International Journal of Composite Materials*. n.6, v.1, p. 26-33. 2016.
- BARBERO, E. J. Finite Element Analysis of Composite Material. Taylor & Francis Group. Boca Raton. 2007. 359p. 978-1-4200-5433-0.
- BLAAUWENDRAAD, J. Plates and FEM: Surprises and Pitfalls. Springer. 2010. 414 p.
- BEJAN, A. Shape and structure, from engineering to nature, Cambridge University Press, Cambridge. 2000.
- BEJAN, A. e LORENTE, S. Design with Constructal Theory. Wiley, Hoboken. 2008.
- BEJAN, A. e ZANE, J. P. Design in nature. Doubleday. 2012.

- BEZNEA, E. F., CHIRICA, I. Buckling and Post-buckling Analysis of Composite Plates. *Advances in Composite Materials – Ecodesign and Analysis*. p. 383-408. Dr. Brahim Attaf. 2011.
- BURNETT, D. S. *Finite Element Analysis: From Concepts to Applications*. Addison Wesley Publishing Company. 1987.
- CHODRAUI, G.M. de B. Flambagem por distorção da seção transversal em perfis de aço formados a frio submetidos à compressão centrada e à flexão. São Carlos, 2003. 186p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), USP.
- CORREIA, Anderson Luis Garcia. Simulação numérica e constructal design aplicados à análise do comportamento mecânico de placas de aço submetidas à flambagem elástica usadas em estruturas oceânicas. Rio Grande, 2013. 123p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- DA SILVA, Caio Cesar Cardoso. Simulação numérica e método constructal design aplicados ao estudo de flambagem em placas com furos hexagonais utilizadas em estruturas navais oceânicas. Rio Grande, 2015. 143p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande
- DHURVEY, Priyanka e MITTAL, N.D. Buckling Behavior of An Orthotropic Composite Laminate using Finite Element Analysis. *International Journal of Scientific Engineering and Technology*, v. 1, n. 4, p. 93-95, out. 2012.
- FAGUNDES, Florentino Augusto. Modelagem de Vigas de Compósitos Laminados usando Elementos Finitos Formulados na Notação Strain Gradient. Curitiba, 2002. 92 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) PUC-PR – Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
- GAGLIARDO, D.P. Análise de estruturas sanduíche: Parâmetros de projeto. Campinas. 2008. 171p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas.
- HELBIG, D., REAL, M.V., CORREIA, A.L.G., SANTOS, E.D., ISOLDI, L.A. Constructal Design of perforated steel plates subject to linear elastic and non linear elasto-plastic buckling. In: *Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, XXXIV, 2013*, Pirenópolis – GO.
- <http://www.swge.inf.br/sitecilamce2013/cd/PDFS/CILAMCE2013-0160.PDF>

- HELBIG, D., DA SILVA, C. C. C., REAL, M. V., DOS SANTOS, E. D., ISOLDI, L. A., ROCHA, L. A. O. Study About Buckling Phenomenon In Perforated Thin Steel Plates Employing Computational Modeling And Constructal Design Method. *Latin American Journal of Solids and Structures*. v. 13, n. 10, p. 1912-1936, maio. 2016.
- ISOLDI, Liércio André. *Análise estática e dinâmica de estruturas delgadas de materiais compostos laminados incluindo materiais piezelétricos*. Porto Alegre, 2008. 197 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- ISOLDI, L. A., REAL, M. V., CORREIA A. L. G., VAZ, J., DOS SANTOS, E. D., ROCHA, L. A. O. Flow of Stresses: Constructal Design of Perforated Plates Subjected to Tension or Buckling. In: *Constructal Law and the Unifying Principle of Design*. p. 195-217. Springer Science, 2013.
- JAMEEL, A. N., SADIQ, I. A., NSAIF, H. I. Buckling Analysis of Composite Plates under Thermal and Mechanical Loading. *Journal of Engineering*. n. 12, v. 18, p. 1365-1390. 2012.
- JONES, Robert Millard. *Mechanics of Composite Materials*. Segunda Edição. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999. 519 p. 1-56032-712-X.
- JOSHI, A., REDDY, P. R., KRISHNAREDDY, V. N., SUSHMA, CH. V. Buckling Analysis of Thin Carbon/Epoxy Plate with Circular Cut-outs Under Biaxial Compression By Using FEA. *International Journal of Research in Engineering and Technology*, v. 02, p. 296 – 301, Bangalore, India. 2013.
- KOMUR, M. A., SEN, F., ATAS, A., ARSCAN, N. Buckling analysis of laminated composite plates with an elliptical/circular cutout using FEM. *Advances in Engineering Software*. n. 41, p. 161-164. 2010.
- LEE, S. J., REDDY, J. N., ROSTAM-ABADI, F. Nonlinear Finite Element Analysis of Laminated Composite Shells with Actuating Layers. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 43, pp.1-21. 2006.
- LORENTE, S. e BEJAN, A. Few Large and Many Small: Hierarchy in Movement on Earth. *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*. v. 5, n. 3, p. 1-14, 2010.
- LORENTE, S., LEE, J. e BEJAN, A. The “flow of stresses” concept: the analogy between mechanical strength and heat convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 53, p. 2963-2968. 2010.

- LORENZINI, G., HELBIG, D., REAL, M.V., DOS SANTOS, E.D., ISOLDI, L.A. e ROCHA, L.A.O. Computational modeling and constructal design method applied to the mechanical behavior improvement of thin perforated steel plates subject to buckling. *Journal of Engineering Thermophysics*. v. 25, p. 197-215, abr. 2016.
- MADENCI, E. e GUVEN, I. *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®*. Ed. Springer. 2006.
- MARINCOVIC, D., KÖPPE, H., GABBERT, U. Finite Element Development for Generally Shaped Piezoelectric Active Laminates Part I – Linear Approach, *Facta Universitatis: Mechanical Engineering*, vol. 2, n. 1, pp. 11-24. 2004.
- MARQUES, D. C. dos S. C. *Análise Não Linear Estática e Dinâmica de Cascas e Placas Anisotrópicas*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 182 p. 1994.
- MATTHEWS, F.L., DAVIES, G.A.O., HITCHINGS, D. e SOUTIS, C. *Finite Element Modelling of Composite Materials and Structures*. Boca Raton: CRC Press, 2003. 214 p.
- MENDONÇA, Paulo de Tarso R. *Materiais Compostos & Estruturas Sanduíche: Projeto e Análise*, Edição 1, Barueri – SP: Editora Manole, 2005. 625 p. ISBN 85-204-1882-1.
- OKUMOTO, Y., TAKEDA, Y., MANO, M. e OKADA, T. *Design of Ship Hull Structures - A Practical Guide for Engineers*. Springer. 2009.
- PRZEMIENIECKI, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. Ed. Dover Publications. 1985.
- REDDY, P. R., REDDY, P. S., REDDY, P. S. Buckling Analysis of Orthotropic Laminated Composite Plates With Rectangular Cut-outs By Using FEA. *International Journal of Engineering Technologies in Computational and Applied Sciences (IJETCAS)*. n. 10, v. 1, p. 75-81. 2014.
- REIS, A. H. e GAMA, C. Sand size versus beachface slope – an explanation based on the Constructal Law. *Geomorphology*. v. 114, p. 276-283, 2010.
- ROCHA, L.A.O., ISOLDI, L.A., REAL, M.V., SANTOS, E.D., CORREIA, A.L.G., LORENZINI, G., BISERNI, C. Constructal design applied to the elastic buckling of thin plates with holes. *Central European Journal of Engineering*, v. 3, p. 475-483, 2013.

- SHAKYA, R., SHARMA, T., BAHADUR, R. Effect of various cut-out on buckling analysis of laminated composite plate using FE simulation. ELK Asia Pacific Journals. v.1. 2015.
- SOARES, R. R. et al. Influência do tipo de fibra nas propriedades de compósitos processados por moldagem por transferência de resina. Departamento de Engenharia Química da Universidade de Caxias do Sul, RS, Anais do 9º Congresso Brasileiro de Polímeros, 2007.
- SOO KIM, Young. Biaxial Buckling of Laminated Composite Plates. Montreal, 1995. 243 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade de Concórdia.
- VANALLI, L. O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e composto. São Carlos, 2004. Tese, SET, Universidade São Paulo.
- YAMAGUCHI, E. Basic Theory of Plates and Elastic Stability. Structural Engineering Handbook. CRC Press LLC. 1999.
- YOUNG, W. ., BUDYNAS, R. G. Roark's formulas for stress and strain. New York: Mc Graw-Hill. 2002.