

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

ANÁLISE NUMÉRICA DA FLAMBAGEM DE PLACAS FINAS DE AÇO COM  
ENRIJECEDORES ATRAVÉS DO MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

por

João Paulo Silva Lima

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica

Rio Grande, novembro, 2016

ANÁLISE NUMÉRICA DA FLAMBAGEM DE PLACAS FINAS DE AÇO COM  
ENRIJECEDORES ATRAVÉS DO MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

Por

João Paulo Silva Lima

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Co-Orientador: Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos

PPGEO/FURG

Prof. PhD. Luiz Alberto Oliveira Rocha

PROMECC/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira

PPGEO/FURG

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 18 de novembro de 2016

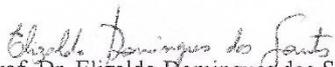
ANÁLISE NUMÉRICA DA FLAMBAGEM DE PLACAS FINAS DE AÇO COM  
ENRIJECEDORES ATRAVÉS DO MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

JOÃO PAULO SILVA LIMA

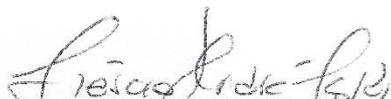
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

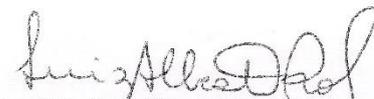
**MESTRE EM ENGENHARIA OCEÂNICA**

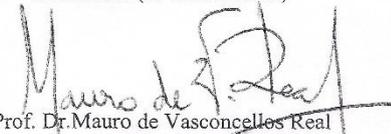
Tendo sido aprovado em sua forma final pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica.

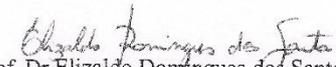
  
Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos  
Coordenador do PPGE0

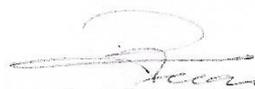
Banca examinadora:

  
Prof. Dr. Liércio André Isoldi  
Orientador (PPGEO/FURG)

  
Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha  
Professor Externo (PROMEG/UERGS)

  
Prof. Dr. Mauro de Vasconcelos Real  
Coorientador (PPGEO/FURG)

  
Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos  
Professor Convidado (PPGEO/FURG)

  
Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira  
Professor Convidado (PPGEO/FURG)

## AGRADECIMENTOS

Ao Amor Divino que me conduz, ampara e orienta.

Ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Liércio André Isoldi, incentivador de minha caminhada cheia de tropeços e sonhos.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real, e demais professores que contribuíram com meu conhecimento nesta fase de minha vida.

Ao Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos, coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica pela atenção, orientação e amizade.

À minha família, Adeir, Eliana, Matheus e Sinara, pelo amor, paciência, incentivo e apoio incondicional.

À minha companheira, namorada e confidente Fernanda, pela paciência, apoio e conselhos.

À minha companhia de quatro patas Pirelli, que sem precisar falar uma palavra sequer, esteve o tempo todo ao meu lado.

Aos velhos e novos amigos, estando perto ou longe. Especialmente André, Rodrigo e Martim, que contribuíram significativamente para meu crescimento, escolhas e bem-estar na cidade de Rio Grande.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do trabalho.

À FURG por ofertar o Curso de Mestrado em Engenharia Oceânica.

Enfim, a todos que fizeram parte desse processo, intelectualmente ou sentimentalmente. “Se cheguei até aqui foi porque me apoiei em ombros de gigantes” Isaac newton

## RESUMO

A crescente participação da indústria naval e offshore no mercado acarretou impactos positivos sobre a economia brasileira. Com isso, a produção naval deparou-se com uma necessidade de criação de estruturas cada vez maiores e mais resistentes. As estruturas navais são constituídas basicamente por painéis ortotrópicos de aço formados pela soldagem de vigas em placas finas. Placas ortotrópicas possuem vigas dispostas longitudinalmente e transversalmente, chamadas de enrijecedores, com o objetivo de aumentar a resistência mecânica. Assim, é desejável obter uma geometria ótima de forma a maximizar sua tensão última de flambagem. Nesse contexto, empregou-se o Método dos Elementos Finitos através do software ANSYS e o Método Design Construtal associado ao método da Busca Exaustiva, em um estudo de otimização geométrica de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica. Inicialmente adotou-se uma placa fina simplesmente apoiada sem enrijecedores, usando como referência o valor da tensão última de flambagem da mesma. Após, parte deste volume foi transformado em enrijecedores, os quais foram incorporados à placa. Para isso, a variável fração de volume ( $\phi$ ), que representa a relação entre o volume de enrijecedores ( $V_e$ ) e o volume total do elemento estrutural placa/enrijecedores ( $V_t$ ), foi adotada, mantendo o volume da placa. Foram analisadas ao todo 16 combinações diferentes de enrijecedores do tipo P( $N_{el}, N_{et}$ ), sendo  $N_{el} = 2, 3, 4$  e  $5$  o número de enrijecedores longitudinais, e  $N_{et} = 2, 3, 4$  e  $5$  o número de enrijecedores transversais da placa. Quatro valores de fração volumétrica foram adotados  $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$  e  $0,4$  em todos os arranjos geométricos. Para cada análise, os painéis enrijecidos apresentaram uma relação  $h_s/t_s$ , relacionando a altura do enrijecedor e sua espessura. O estudo considerando dois valores de volume inicial  $V_{t1} = 0,040 \text{ m}^3$  e  $V_{t2} = 0,028 \text{ m}^3$ . Os resultados obtidos foram comparados entre si e com as placas sem enrijecedores, indicando que a variação da configuração geométrica afeta significativamente o comportamento mecânico dos painéis enrijecidos sob flambagem. Sendo assim, é possível determinar a geometria ótima que conduz a uma carga última maximizada, próxima à tensão de escoamento do material. As placas enrijecidas com volume  $V_{t1}$  não apresentaram melhorias relevantes com a adição de enrijecedores, onde a geometria ótima do tipo P(2,5) com  $\phi = 0,3$  e relação  $h_s/t_s = 4,501$ , dentre todas as geometrias analisadas apresentou uma melhoria de apenas 7,38% em relação à tensão última da placa de referência após a adição de enrijecedores. Já o estudo feito com placas de volume  $V_{t2}$  apresentou melhorias significativas no valor da tensão última de flambagem, de forma que a configuração ótima dentre todas as geometrias foi do tipo P(2,2), com  $\phi = 0,3$  e relação  $(h_s/t_s) = 14,09$ , apresentou uma melhoria de 88,50% em relação à tensão última para a placa com mesmo volume inicial de material, porém sem enrijecedores.

**Palavras-chave:** Flambagem, Placa, Enrijecedores, Método Design Constructal, Simulação Numérica

## ABSTRACT

The increasing participation of the shipbuilding and offshore industry in the market resulted in a positive impact on the Brazilian economy. Thus, the naval production had to create bigger and stronger structures. The naval structures basically consist of steel orthotropic panels formed by welding beams in thin plates. Orthotropic plates have beams arranged longitudinally and transversely, called stiffeners, whose objective is to increase the mechanical strength. So it is desirable to obtain an optimal geometry which maximizes its ultimate buckling stress. In this context, it has been used the Constructal Design Method associated with the Finite Element Method by ANSYS software in a geometric optimization study of plates with stiffeners subjected to elasto-plastic buckling. Initially, it was adopted a thin plate simply supported without stiffeners, using as a reference its ultimate buckling stress value. After, part of its volume has been transformed into stiffeners, which were incorporated into the plate. For this, the variable volume fraction ( $\phi$ ), which represents the ratio of the volume of stiffeners ( $V_e$ ) and the total volume of the structural element plate/stiffeners ( $V_l$ ) have been adopted, maintaining a null variation of the final volume of the plate. Sixteen different combinations P( $N_{el}, N_{et}$ ) type were analyzed altogether, where  $N_{el} = 2, 3, 4$  and  $5$  are the number of longitudinal stiffeners, and  $N_{et} = 2, 3, 4$  and  $5$ , the number of transverse stiffeners of the plate. Four volume fraction values were adopted  $\phi = 0.1; 0.2; 0.3$  and  $0.4$  in all geometric arrangements. For each analysis, the stiffening plates showed a ratio  $h_s/t_s$ , relating the height of the stiffener and its thickness. The study considered two initial volume values  $V_{l1}$  and  $V_{l2} = 0.040 \text{ m}^3 = 0.028 \text{ m}^3$ . The results obtained were compared among themselves and to the plates without stiffeners, indicating that the variation of the geometrical configuration significantly affects the mechanical behavior of stiffened panels under buckling. Therefore, it is possible to determine the optimum geometry that leads to a maximized ultimate buckling stress, near the yield strength of the material. The stiffened plates with volume  $V_{l1}$  did not present significant improvements with the addition of stiffeners, where the optimal geometry of the type P(2,5) with  $\phi = 0.3$  and ratio  $h_s/t_s = 4.501$ , among all analyzed geometries showed an improvement of only 7.38% from the ultimate buckling stress reference plate after the addition of stiffeners. The study of the plates with volume  $V_{l2}$  showed significant improvements in the value of the ultimate buckling stress, so that the optimum configuration of all the geometries was the P(2,2) type, with  $\phi = 0.3$  and ratio  $h_s/t_s = 14.09$ , with an improvement of 88.50% compared with the ultimate buckling stress to the plate with the same initial volume of material, but without stiffeners.

**Keywords:** Buckling, Plate, Stiffeners, Constructal Design Method, Numerical Simulation.

# SUMARIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>9</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>13</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>14</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
1.1 ESTADO DA ARTE.....	22
1.2 OBJETIVOS.....	28
1.2.1 Objetivo Geral.....	28
1.2.2 Objetivos específicos .....	28
1.3 METODOLOGIA .....	28
1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	29
<b>2 TEORIA DAS PLACAS.....</b>	<b>31</b>
2.1 TEORIA CLÁSSICA DE PEQUENA DEFLEXÃO DE PLACAS FINAS.....	31
2.2 RELAÇÃO ENTRE TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTOS .....	35
2.3 FORÇAS INTERNAS EXPRESSAS EM TERMOS DE $W$ .....	37
2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA .....	39
2.5 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL.....	42
2.6 FLAMBAGEM DE PLACAS.....	43
2.6.1 Flambagem e estabilidade.....	43
2.6.2 Equação diferencial para placas finas sob carregamento no plano.....	44
2.6.3 Determinação da carga crítica de placas pelo Método do Equilíbrio .....	46
2.6.4 Flambagem elástica de uma placa.....	48
2.6.5 Flambagem inelástica e elasto-plástica de uma placa.....	49
2.6.6 Resistência pós-flambagem.....	50
2.7 FLAMBAGEM DE PLACAS COM ENRIJECEDORES .....	54
2.7.1 Flambagem em placas com um enrijecedor longitudinal.....	56
2.7.2 Flambagem em placas com dois enrijecedores longitudinais .....	57
2.7.3 Flambagem em placas com um enrijecedor transversal.....	58
2.7.4 Flambagem em placas ortotrópicas.....	59
<b>3 MODELAGEM COMPUTACIONAL .....</b>	<b>61</b>
3.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	62
3.1.1 Modelos computacionais no software ANSYS.....	64
3.1.2 Teste de refinamento e convergência da malha .....	67
3.2 VERIFICAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL .....	72

3.2.1	Verificação da geometria modelada no Software ANSYS .....	73
3.2.2	Verificação da utilização do Elemento SHELL93 .....	74
3.2.3	Painel sem enrijecedores sob flambagem elástica e elasto-plástica.....	76
3.2.4	Painel com um enrijecedor longitudinal .....	78
3.2.5	Painel com dois enrijecedores longitudinais .....	79
3.2.6	Painel com um enrijecedor transversal .....	81
3.2.7	Painel ortotrópico com enrijecedores longitudinais e transversais – análise analítica-numérica .....	82
3.2.8	Painel ortotrópico com enrijecedores longitudinais e transversais – análise numérico-experimental .....	83
<b>4</b>	<b>O MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL.....</b>	<b>86</b>
4.1	ESTUDO DE CASO: MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADO EM PLACAS ENRIJECIDAS SOB FLAMBAGEM .....	89
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>92</b>
5.1	ANÁLISE COM $V_{T1} = 0,040 \text{ M}^3$ .....	92
5.2	ANÁLISE COM $V_{T2} = 0,028 \text{ M}^3$ .....	95
5.2.1	Determinação da geometria ótima através do Método Design Construtal.....	107
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>116</b>
6.1	PROPOSTAS DE CONTINUIDADE.....	117
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>119</b>
	<b>ANEXO A - VALORES DO FATOR <math>K_Q</math> PARA PAINÉIS ENRIJECIDOS COM UM REFORÇO LONGITUDINAL.....</b>	<b>126</b>
	<b>ANEXO B - VALORES DO FATOR <math>K_Q</math> PARA PAINÉIS ENRIJECIDOS COM DOIS REFORÇOS LONGITUDINAIS.....</b>	<b>129</b>
	<b>APÊNDICE A – RESULTADOS DE TENSÃO ÚLTIMA NORMALIZADA OBTIDOS PARA <math>V_{T1}</math>.....</b>	<b>130</b>
	<b>APÊNDICE B – RESULTADOS DE TENSÃO ÚLTIMA NORMALIZADA OBTIDOS PARA <math>V_{T2}</math>.....</b>	<b>133</b>
	<b>APÊNDICE C – COMPARAÇÃO ENTRE MELHOR E PIOR VALOR DE TENSÃO ÚLTIMA PARA OS CASOS COM <math>V_{T2}</math>.....</b>	<b>136</b>
	<b>APÊNDICE D – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO PARA AS MELHORES CONFIGURAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA CADA ARRANJO GEOMÉTRICO <math>P(N_{EL}, N_{ET})</math> COM <math>V_{T2}</math>.....</b>	<b>141</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$  – Comprimento da placa [m]

$A_s$  – Área da seção transversal do enrijecedor [m<sup>2</sup>]

$b$  – Largura da placa [m]

$b_e$  – Largura efetiva da placa [m]

$c$  – Primeiro fator de redução para equação de placa com um enrijecedor longitudinal

$c_1$  – Espaçamentos dos enrijecedores na direção  $X$  [m]

$c_2$  – Espaçamentos dos enrijecedores na direção  $Y$  [m]

$d$  – Segundo fator de redução para equação de placa com um enrijecedor longitudinal

$D$  – Rigidez flexural

$D_x$  – Rigidez flexural em  $X$

$D_y$  – Rigidez flexural em  $Y$

$E$  – Módulo de elasticidade (módulo de Young) [Pa]

$\{F\}$  – Vetor força

$\{F_{NL}\}$  – Vetor de forças internas nodais não lineares

$G$  – Módulo de elasticidade transversal [Pa]

$h_s$  – Altura do enrijecedor [m]

$I_s$  – Momento de inércia do enrijecedor [m<sup>4</sup>]

$I_x$  – Momento de inércia na direção  $X$  do enrijecedor [m<sup>4</sup>]

$I_y$  – Momento de inércia na direção  $Y$  do enrijecedor [m<sup>4</sup>]

$[K]$  – Matriz de rigidez do sistema

$[K_E]$  – Matriz de rigidez convencional para pequenas deformações

$[K_G]$  – Matriz de rigidez geométrica

$[K_t]$  – Matriz de rigidez tangente

$K_q$  – Coeficiente de flambagem da placa

$l$  – Tamanho do elemento finito [m]

$l_{ef}$  – Comprimento efetivo do enrijecedor [m]

$l_s$  – Comprimento do enrijecedor [m]

$m$  – Número de meias-ondas senoidais (direção longitudinal)

$M_x$  – Momento fletor em  $X$

$m_x$  – Momento fletor por unidade de comprimento em  $X$  [Nm/m]  
 $M_{xy}$  – Momento torsor no plano  $XY$  [Nm]  
 $m_{xy}$  – Momento torsor por unidade de comprimento no plano  $XY$  [Nm/m]  
 $M_y$  – Momento fletor em  $Y$  [Nm]  
 $m_y$  – Momento fletor por unidade de comprimento em  $Y$  [Nm/m]  
 $M_{yx}$  – Momento torsor no plano  $YX$  [Nm]  
 $m_{yx}$  – Momento torsor por unidade de comprimento no plano  $YX$  [Nm/m]  
 $n$  – Número de meias-ondas senoidais (direção transversal)  
 $N_{el}$  – Número de enrijecedores na direção longitudinal  
 $N_{et}$  – Número de enrijecedores na direção transversal  
 $n_x$  – Esforço normal na direção  $X$  (longitudinal) [N/m]  
 $\bar{n}_x$  – Força coplanar longitudinal no plano médio da placa [N/m]  
 $n_{xy}$  – Esforço normal contido no plano  $XY$  [N/m]  
 $\bar{n}_{xy}$  – Força coplanar no plano  $XY$  médio da placa [N/m]  
 $n_y$  – Esforço normal na direção  $Y$  (transversal) [N/m]  
 $\bar{n}_y$  – Força coplanar longitudinal no plano  $Y$  médio da placa [N/m]  
 $n_{yx}$  – Esforço normal contido no plano  $YX$  [N/m]  
 $\{P\}$  – Carga compressiva aplicada à placa [N/m]  
 $\{P_0\}$  – Esforço interno existente no início do carregamento [N/m]  
 $p_z$  – Carga externa aplicada à placa [N]  
 $p_z^*$  – Carga fictícia [N]  
 $P_z$  – Carga distribuída aplicada à placa [N/m]  
 $(P_{cr})_s$  – Carga crítica do enrijecedor [N]  
 $P_{ult}$  – Carga última aplicada em uma placa [N]  
 $Q_x$  – Força de cisalhamento transversal em  $X$  [N]  
 $q_x$  – Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em  $X$  [N/m]  
 $Q_y$  – Força de cisalhamento transversal em  $Y$  [N]  
 $q_y$  – Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em  $Y$  [N/m]  
 $R_0$  – Força resultante de canto da placa [N]  
 $t$  – Espessura da placa sem enrijecedores [m]  
 $t_p$  – Espessura da placa com enrijecedores [m]  
 $t_s$  – Espessura do enrijecedor [m]  
 $\{U\}$  – Vetor de incógnitas

$\{\Delta U\}$  – Vetor de incrementos de deslocamentos  
 $u$  – Componente de deslocamento na direção  $X$  [m]  
 $v$  – Componente de deslocamento na direção  $Y$  [m]  
 $V_e$  – Volume de material transformado em enrijecedores [m<sup>3</sup>]  
 $V_t$  – Volume total de material [m<sup>3</sup>]  
 $w$  – Componente de deslocamento na direção  $Z$  [m]  
 $w_0$  – Deslocamento máximo inicial [m]  
 $x$  – Direção longitudinal  
 $y$  – Direção transversal  
 $z$  – Direção normal  
 $\beta$  – Parâmetro de cálculo para placa enrijecida  
 $\beta$  – Índice de esbeltez da placa  
 $\beta_{cr}$  – Índice de esbeltez crítico da placa  
 $\gamma$  – Deformação por cisalhamento  
 $\gamma$  – Parâmetro de cálculo para placa enrijecida  
 $\gamma_{xy}$  – Deformação por cisalhamento associada às direções  $x$  (longitudinal) e  $y$  (transversal) [m]  
 $\delta$  – Parâmetro de cálculo para placa enrijecida  
 $\nabla$  – Operador diferencial delta  
 $\varepsilon_x$  – Deformação específica na direção  $x$  (longitudinal)  
 $\varepsilon_y$  – Deformação específica na direção  $y$  (transversal);  
 $\theta$  – Variação angular imposta à barra [rad]  
 $\lambda$  – Fator escalar de carga  
 $\lambda_{min}$  – Fator escalar de carga mínimo  
 $\lambda_{cr}$  – Fator escalar de carga crítico  
 $\pi$  – Constante matemática = 3,141516...  
 $\sigma_{cr}$  – Tensão crítica de flambagem [Pa]  
 $(\sigma_{cr})_s$  – Tensão crítica crítica do enrijecedor [Pa]  
 $\sigma_{máx}$  – Tensão máxima atuante [Pa]  
 $\sigma_m$  – Tensão média atuante [Pa]  
 $\sigma_{ult}$  – Tensão última atuante [Pa]  
 $\sigma_{uR}$  – Tensão última das placas de referência [Pa]  
 $\sigma_{uN}$  – Tensão última normalizada [Pa]  
 $\sigma_x$  – Tensão normal na direção  $x$  (longitudinal) [Pa]  
 $\sigma_y$  – Tensão normal na direção  $y$  (transversal) [Pa]

$\sigma_y$  – Tensão de escoamento do material [Pa]

$\sigma_z$  – Tensão normal na direção transversal à placa [Pa]

$\tau$  – Tensão de cisalhamento [Pa]

$\tau_{xy}$  – Tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção  $x$  (longitudinal) e paralela à direção  $y$  (transversal) [Pa]

$\phi$  – Fração volumétrica

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$\{\psi\}$  – Vetor de cargas em desequilíbrio

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Análise da convergência das malhas quadriculares.....	69
Tabela 3.2 - Análise da convergência das malhas triangulares.....	69
Tabela 3.3 - Análise da convergência das malhas quadriculares para a placa enrijecida. ....	71
Tabela 3.4 - Análise da convergência das malhas triangulares para a placa enrijecida.....	71
Tabela 3.6 - Resultados de tensão crítica obtidos para as duas geometrias modeladas.....	74
Tabela 5.1 - Características da geometria que apresenta o melhor desempenho, usando $N_{el}$ como parâmetro .....	97
Tabela 5.2 - Características da geometria que apresenta o melhor desempenho, usando $N_{et}$ como parâmetro .....	97
Tabela 5.3 - Características das geometrias comparando a influência do $N_{et}$ , ambas com $\phi = 0,3$ ..	98
Tabela 5.4 - Características da geometria que apresenta o melhor desempenho, usando $\phi$ como parâmetro .....	102
Tabela 5.5 - Valores de $(\sigma_{uN})_m$ e de $(h_s/t_s)_o$ para as combinações $P(N_{el}, N_{et})$ , com $\phi = 0,1$ . ....	108
Tabela 5.6 - Valores de $(\sigma_{uN})_m$ e de $(h_s/t_s)_o$ para as combinações $P(N_{el}, N_{et})$ , com $\phi = 0,2$ . ....	108
Tabela 5.7 - Valores de $(\sigma_{uN})_m$ e de $(h_s/t_s)_o$ para as combinações $P(N_{el}, N_{et})$ , com $\phi = 0,3$ . ....	109
Tabela 5.8 - Valores de $(\sigma_{uN})_m$ e de $(h_s/t_s)_o$ para as combinações $P(N_{el}, N_{et})$ , com $\phi = 0,4$ . ....	109
Tabela 5.9 - Configuração geométrica com $(N_{et})_o$ , $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(\sigma_{uN})_{mm}$ para cada $N_{el}$ , com $\phi = 0,1$ . .	111
Tabela 5.10 - Configuração geométrica com $(N_{et})_o$ , $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(\sigma_{uN})_{mm}$ para cada $N_{el}$ , com $\phi = 0,2$ .111	
Tabela 5.11 - Configuração geométrica com $(N_{et})_o$ , $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(\sigma_{uN})_{mm}$ para cada $N_{el}$ , com $\phi = 0,3$ .112	
Tabela 5.12 - Configuração geométrica com $(N_{et})_o$ , $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(\sigma_{uN})_{mm}$ para cada $N_{el}$ , com $\phi = 0,4$ .112	
Tabela 5.13 - Determinação da geometria com $(\sigma_{uN})_{mmm}$ para cada valor de $\phi$ .....	113

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Setor da construção naval em contexto nacional (Fonte: MORAES, 2012).....	18
Figura 1.2 - Placa com enrijecedores (Fonte: AMANTE, 2006).....	19
Figura 1.3 - Carregamentos coplanares de placas enrijecidas sob flexão longitudinal da viga-navio (Fonte: GHAVAMI E KHEDMATI, 2006).....	20
Figura 1.4 - Estrutura interna de um navio com elementos de placa (Fonte: ANDERSEN, 2000)...	21
Figura 2.1- Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado (Fonte: SZILARD, 2004). .....	32
Figura 2.2 - Esforços resultantes atuantes em um elemento de placa (Fonte: SZILARD, 2004). ....	33
Figura 2.3 - Estado de equilíbrio de um elemento de superfície média da placa (Fonte: SZILARD, 2004). .....	34
Figura 2.4 - Tensões no elemento de placa (Fonte: SZILARD, 2004). .....	35
Figura 2.5 - Seção antes e depois da deflexão (Fonte: SZILARD, 2004).....	36
Figura 2.6 - Distorção angular (Fonte: SZILARD, 2004).....	37
Figura 2.7 - Condições de contorno para placas (Fonte: SZILARD, 2004). .....	40
Figura 2.8 - Efeito de bordo do momento torsor na placa (Fonte: SZILARD, 2004).....	41
Figura 2.9 - Forças de canto levantando os cantos da placa (Fonte: SZILARD, 2004). .....	42
Figura 2.10 - Placa retangular sob carregamento de compressão uniaxial aplicado no plano (Fonte: SZILARD, 2004). .....	43
Figura 2.11 - Elemento de placa submetido a um sistema de forças (Fonte: SZILARD, 2004). ....	44
Figura 2.12 - Forças de membrana em um elemento de placa deformado (Fonte: SZILARD, 2004). .....	45
Figura 2.13 - Placa submetida a esforços distribuídos em seus bordos (Fonte: SZILARD, 2004). .	47
Figura 2.14 - Valores de $K_q$ para os tipos usuais de condições de contorno de placas (Fonte: SALMON e JOHNSON, 1990). .....	49
Figura 2.15 - Comportamento pós-flambagem de placas elásticas esbeltas (Fonte: TRAHAIR E BRADFORD, 1988).....	50
Figura 2.16 - Sistema de redistribuição de carga no estado limite último (Fonte: ÅKESSON, 2007). .....	51
Figura 2.17 - Largura efetiva de placas apoiadas em ambas as bordas longitudinais (Fonte: ZIEMIAN, 2010). .....	52
Figura 2.18 - A dependência da tensão crítica e tensão última sobre a esbeltez. (Fonte: ZIEMIAN, 2010). .....	53

Figura 2.19 - Largura efetiva constante para diferentes larguras de placas (Fonte: ÅKESSON, 2007). .....	54
Figura 2.20 - Seções típicas para enrijecedores (Fonte: SZILARD, 2004). .....	55
Figura 2.21 - Esquema geométrico para uma placa com um enrijecedor longitudinal.....	56
Figura 2.22 - Esquema geométrico para uma placa com dois enrijecedores longitudinais. ....	57
Figura 2.23 - Esquema geométrico para uma placa com um enrijecedor transversal.....	58
Figura 2.24 - Placa com enrijecedores armados em duas direções (Fonte: SZILARD, 2004). .....	59
Figura 2.25 - Seção da placa reforçado com vários reforços na direção X. (Fonte: SZILARD, 2004). .....	59
Figura 3.1 - Divisão do domínio em subdomínios (Fonte: MADANCI e GUVEN, 2006).....	63
Figura 3.2 - Geometrias de elementos do MEF (Fonte: MADANCI e GUVEN, 2006).....	64
Figura 3.3 - Elemento finito SHELL93 (Fonte: KOHNKE, 1999).....	67
Figura 3.4 - Detalhamento da placa de espessura constante e sem enrijecedores. ....	68
Figura 3.5 - Esquema prático da malha com elementos finitos quadrangulares para a placa sem enrijecedores. ....	68
Figura 3.6 - Esquema prático da malha com elementos finitos triangulares para a placa sem enrijecedores. ....	68
Figura 3.7 - Análise da convergência das malhas com elementos finitos quadrangulares e triangulares para a placa sem enrijecedores. ....	69
Figura 3.8 - Detalhamento da placa com a presença de dois enrijecedores longitudinais e dois transversais.....	70
Figura 3.9 - Esquema prático da malha com elementos finitos quadrangulares para a placa com enrijecedores. ....	70
Figura 3.10 - Esquema prático da malha com elementos finitos triangulares para a placa sem enrijecedores. ....	71
Figura 3.11 - Análise da convergência das malhas com elementos finitos quadrangulares e triangulares para a placa com enrijecedores. ....	72
Figura 3.12 - Esquema de modelagem da placa enrijecida utilizando o elemento finito SHELL93.	73
Figura 3.13 - Modelo de placa do tipo P(2,2) adotado. ....	73
Figura 3.14 - Curva tensão crítica pela relação $h_s/t_s$ para as duas geometrias modeladas. ....	74
Figura 3.15 - Seção transversal de uma coluna birotulada. ....	75
Figura 3.16 - Descrição cinemática de Kirchhoff-Love (Fonte: SIMO E VU-QUOC, 1986).....	76
Figura 3.17 - Configuração flambada do enrijecedor analisado como coluna birrotulada. ....	76
Figura 3.18 - Configuração flambada para a placa sem enrijecedores, sob flambagem elástica. ....	77

Figura 3.19 - Deslocamentos finais para a placa sem enrijecedores, em mm.....	78
Figura 3.20 - Distribuição de tensões para a placa sem enrijecedores.....	78
Figura 3.21 - Placa com um enrijecedor longitudinal para flambagem elástica.....	79
Figura 3.22 - Configuração flambada para a placa com um enrijecedor longitudinal, sob flambagem elástica.....	79
Figura 3.23 - Placa com dois enrijecedores longitudinais para flambagem elástica.....	80
Figura 3.24 - Configuração flambada para a placa com dois enrijecedores longitudinais, sob flambagem elástica.....	80
Figura 3.25 - Placa com um enrijecedor transversal para flambagem elástica.....	81
Figura 3.26 - Situação deformada para a placa com um enrijecedor transversal.....	81
Figura 3.27 - Placa ortotrópica com quatro enrijecedores longitudinais e quatro enrijecedores transversais para flambagem elástica.....	82
Figura 3.28 - Configuração flambada para a placa ortotrópica, sob flambagem elástica.....	83
Figura 3.29 - Detalhamento da placa ortotrópica para validação de flambagem elasto-plástica.....	84
Figura 3.30 - Situação deformada para a placa ortotrópica com enrijecedores nas duas direções. ...	85
Figura 3.31 - Resultados obtidos por Kumar et al. (2009) (Fonte: KUMAR et al., 2009).....	85
Figura 4.1 - Exemplo de uma arquitetura de fluido ponto-volume: árvores e folhas (Fonte: REIS, 2006).....	87
Figura 4.2 - Esquema prático aplicado.....	91
Figura 4.3 - Representação esquemática da placa P(2,3).....	91
Figura 5.1 - Valores de tensão última normalizada em função da variação do grau de liberdade $h_s/t_s$ para a configuração P(2,5).....	93
Figura 5.2 - Distribuição de tensões para a geometria com (a) melhor e (b) pior desempenho elasto-plástico do arranjo P(2,5) e $\phi = 0,3$ considerando volume inicial $V_{t1}$ .....	94
Figura 5.3 - Distribuição de tensões para a geometria com pior desempenho elasto-plástico dentre todos os casos analisados de $V_{t1}$ .....	94
Figura 5.4 - Curvas de melhor desempenho, usando o $N_{el}$ como parâmetro.....	96
Figura 5.5 - Curvas de melhor desempenho, usando o $N_{et}$ como parâmetro.....	97
Figura 5.6 - Deslocamentos finais para a placa P(2,2), em mm. ....	99
Figura 5.7 - Deslocamentos finais para a placa P(2,4), em mm. ....	99
Figura 5.8 - Deslocamentos finais para a placa P(3,5), em mm.. ....	100
Figura 5.9 - Deslocamentos finais para a placa P(4,3), em mm. ....	100
Figura 5.10 - Deslocamentos finais para a placa P(4,5), em mm. ....	100
Figura 5.11 - Deslocamentos finais para a placa P(5,2), em mm. ....	101

Figura 5.12 - Curvas de melhor desempenho, usando $\phi$ como parâmetro.....	102
Figura 5.13- Curvas do melhor e pior valor tensão última normalizada $\sigma_{uN}$ pela relação $\phi$ , para o arranjo geométrico P(2,2). .....	103
Figura 5.14 - Distribuição de tensões para a geometria com (a) melhor e (b) pior desempenho elasto-plástico do arranjo P(2,2) e $\phi = 0,3$ considerando volume inicial $V_{t2}$ .....	104
Figura 5.15- Distribuição de tensões para a geometria com pior desempenho elasto-plástico dentre todos os casos analisados de $V_{t2}$ . .....	104
Figura 5.16 - Comportamento do arranjo geométrico com a placa com melhor desempenho global, bem como a transformação geométrica presente na variação dos enrijecedores.....	105
Figura 5.17- Distribuição de tensão para os três casos distintos de configuração geométrica dos enrijecedores apresentados.....	107
Figura 5.18 - Influência do $N_{et}$ no valor de $(\sigma_{uN})_m$ : (a) $\phi = 0,1$ , (b) $\phi = 0,2$ , (c) $\phi = 0,3$ e (d) $\phi = 0,4$ . .....	110
Figura 5.19 - Influência do $N_{et}$ no valor de $(h_s/t_s)_o$ : (a) $\phi = 0,1$ , (b) $\phi = 0,2$ , (c) $\phi = 0,3$ e (d) $\phi = 0,4$ . .....	110
Figura 5.20 - Variação de $(N_{et})_o$ , $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(\sigma_{uN})_{mm}$ em função de $N_{el}$ : (a) $\phi = 0,1$ , (b) $\phi = 0,2$ , (c) $\phi = 0,3$ e (d) $\phi = 0,4$ .....	113
Figura 5.21 - Geometrias com $(\sigma_{uN})_{mmm}$ para cada valor de $\phi$ .....	114
Figura 5.22 – Distribuição de tensão da geometria com $(\sigma_{uN})_{mmm}$ para: (a) $\phi = 0,1$ , (b) $\phi = 0,2$ , (c) $\phi = 0,3$ e (d) $\phi = 0,4$ . .....	115

# 1 INTRODUÇÃO

O setor da indústria naval compreende a atividade de fabricação de embarcações e veículos de transporte aquático em geral. Esse setor envolve desde construções de pequenas embarcações à construção de estaleiros, plataformas e sondas de perfuração para a produção de petróleo em alto-mar, além de toda a rede de fornecimento de navipeças.

A indústria naval no Brasil possui um mercado crescente, porém antigo, o qual vem desde a vinda dos portugueses, que aproveitaram as vantagens de se construir navios em nosso país, visto que se tinha abundância e excelência das madeiras e a mão-de-obra indígena. Desde então, muitos estaleiros foram fundados em vários pontos do litoral brasileiro, podendo atualmente ser encontrados inclusive estaleiros em cursos fluviais como o Estaleiro do Rio Maguari em Belém (PA) e o Estaleiro Bibi em Manaus (AM). A Figura 1.1 mostra a expansão do mercado da construção naval em contexto nacional.



Figura 1.1- Setor da construção naval em contexto nacional (Fonte: MORAES, 2012).

Segundo Campos Neto e Pompermayer (2014), no início do século XXI, a forte retomada dos investimentos das indústrias naval e offshore trouxe impactos positivos na economia brasileira. Este advento resultou em uma forte geração de emprego e renda, além de um desenvolvimento de uma rede de fornecedores nacionais de insumos, peças e componentes. E, juntamente a esse crescimento, houve uma expansão de estudos e pesquisas de inovação em tecnologias de produtos e processos aplicados.

A grande competitividade da indústria naval mundial fez com que estaleiros evoluíssem em relação aos seus processos produtivos, procurando reduzir custos e o tempo de construção. Segundo Santos (2011), esta tarefa não é simples, pois os pedidos são personalizados para se atender às necessidades específicas do cliente, exigindo assim, um cuidado no planejamento do projeto e no processo de construção. Isso faz com que a missão básica da indústria naval seja suprir e atender o mercado com novos navios, a partir do desenvolvimento de uma série de atividades em um ambiente econômico-industrial complexo, sofisticado e altamente competitivo.

Atualmente, programas de incentivos e medidas de política industriais estão sendo lançadas visando estimular o setor naval brasileiro. Porém, a expansão da construção naval nacional depara-se com uma necessidade de criação de estruturas cada vez maiores e mais resistentes

Tendo essa necessidade de execução de grandes estruturas, painéis e elementos do tipo placa ganharam importância especial e nomeadamente aumentaram-se suas aplicações nos últimos anos dentro da indústria naval e offshore. As estruturas navais são constituídas basicamente por painéis enrijecidos que, em seu processo de fabricação, necessitam de procedimentos de corte e soldagem. Esses painéis são formados pela aplicação de vigas finas em uma chapa de pequena espessura, dispostas longitudinalmente e transversalmente, de forma a enrijecer a chapa. Esse conjunto possui uma capacidade para resistir às combinações de momento de flexão global. A Figura 1.3 exemplifica um tipo de placa com enrijecedores utilizado em uma estrutura naval e offshore.

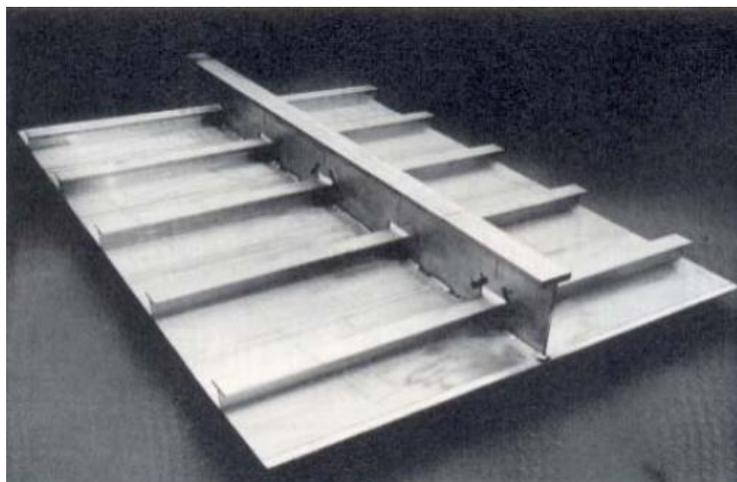


Figura 1.2 - Placa com enrijecedores (Fonte: AMANTE, 2006).

Segundo Timoshenko e Gere (1961), as placas finas são componentes estruturais planos, nos quais uma de suas dimensões, referida como espessura, é muito menor quando comparada com suas outras dimensões. Geometricamente seus contornos são feitos por linhas retas ou curvas, sendo as do tipo retangulares e circulares mais utilizadas. As condições de apoio podem ser dos tipos livres, apenas apoiadas ou engastadas, podendo ainda ocorrer situações de apoios em elementos estruturais pontuais, e elásticos. As cargas estáticas e dinâmicas aplicadas nas placas são predominantemente

perpendiculares à superfície da mesma. Essas cargas externas geram internamente momentos de flexão, momentos de torção e forças de cisalhamento transversais.

Szilard (2004) afirma que, uma vez que a ação de fluxo de cargas de uma placa se assemelha ao de vigas, as placas podem ser aproximadas por uma grelha de vários elementos de vigas ortogonais. Podendo assim, as mesmas resistirem a um maior esforço mecânico e, conseqüentemente, a ação estrutural bidimensional de placas resulta em estruturas mais leves, oferecendo assim, vantagens econômicas.

Manrique (1989) afirma que as placas enrijecidas são componentes estruturais de particular uso nas estruturas navais para resistir às cargas longitudinais provenientes da flexão do navio assim como as cargas devido à pressão hidrostática e aos diferentes itens a transportar. Já Ghavami e Khedmati (2006), indicam que um dos carregamentos mais importantes aplicados em placas enrijecidas existentes em cascos de navios é gerado pela flexão longitudinal do casco do navio, que pode ser aproximado por uma viga, como mostrado na Fig. 1.3. Assim, as placas enrijecidas do casco do navio são submetidas a cargas de compressão, que podem causar a ocorrência de flambagem.

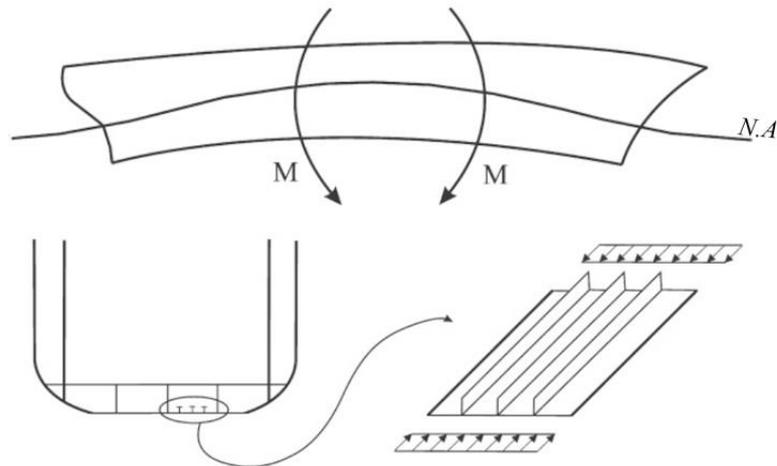


Figura 1.3 - Carregamentos coplanares de placas enrijecidas sob flexão longitudinal da viga-navio (Fonte: GHAVAMI E KHEDMATI, 2006).

O processo de fabricação de um navio é um projeto de engenharia complexo, que envolve inúmeras atividades em diversos setores, desempenhadas em um longo período de tempo. Esse processo envolve quantitativos estimáveis de recursos de diversas naturezas e envolve um alto valor financeiro. O dimensionamento da estrutura das embarcações é um fator preponderante em um projeto de estruturas navais e oceânicas, resultando em um equipamento de navegação seguro, independentemente do tipo de serviço ou finalidade (SANTOS, 2011; YASUHISA et al., 2009).

Esse bom funcionamento é realizado mediante a capacidade de resistência a diferentes solicitações mecânicas nos componentes estruturais, podendo essas, de acordo com Ventsel e Krauthammer (2001) ser do tipo cisalhamento, flexão e torção, quando esses componentes estão

sujeitos a cargas transversais ou axiais. A estrutura formada por esses componentes pode ser verificada na Fig. 1.4, formando um caixão de grandes dimensões, que devido à esbelteza dos elementos de placa, passa a ser reforçado para resistir às forças compressivas. Por fim, a presença dos enrijecedores, que além de contribuir com a resistência global da viga-navio, são responsáveis por evitar a flambagem dos painéis.

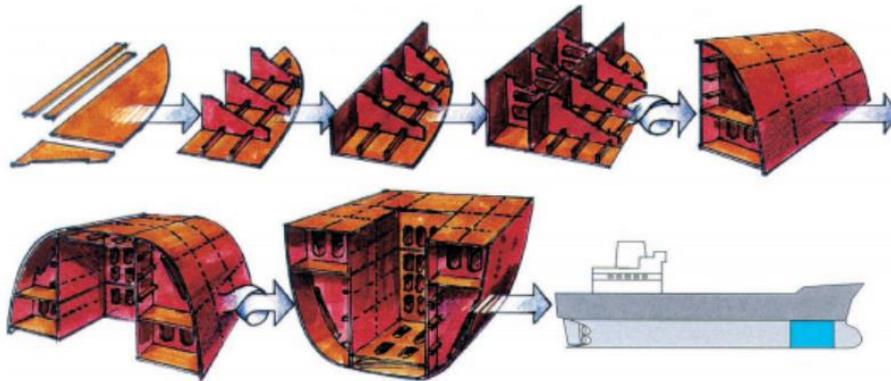


Figura 1.4 - Estrutura interna de um navio com elementos de placa (Fonte: ANDERSEN, 2000).

Quando aplicada uma força de pequena amplitude ao longo do comprimento da borda transversal da placa, as deformações serão contidas no próprio plano médio da mesma, resultando em um deslocamento lateral  $w$  nulo. Porém, o aumento da magnitude dessa carga altera o modo de deformação da placa ocasionando a flambagem. Sendo assim, esse fenômeno acontece quando a peça sofre flexão transversal devido à compressão axial. Devido sua instabilidade ser de caráter elástico, a peça pode perder sua estabilidade sem que o material tenha atingido a tensão de escoamento  $\sigma_y$ . O fenômeno de flambagem acontece em torno do eixo de menor momento de inércia da seção transversal do elemento. Além disso, para cada caso, existe um determinado valor de carga que começa a causar deslocamentos transversais ao plano médio da placa, conhecida como carga crítica. A carga crítica depende, principalmente da esbelteza do membro a ser analisado (PFEIL, 2012; ABED et al, 2015).

Segundo Rackow (2015), o processo de utilização de enrijecedores é uma prática bastante comum, porém carece de equações e soluções analíticas que realizem seus dimensionamentos. A complexidade de dimensionamento dos elementos de placas enrijecidas é explicada através da dificuldade da análise de flambagem desses elementos esbeltos sob carregamentos axiais, uma vez que envolve uma grande quantidade de parâmetros geométricos.

Tendo essa barreira em se obter resultados através da solução analítica, a simulação numérica torna-se uma importante ferramenta para a análise desses elementos estruturais. Dentre diferentes metodologias, o método dos elementos finitos, que se baseia no método dos deslocamentos e na discretização de uma estrutura em subestruturas, sendo altamente indicado para a análise de estruturas

complexas, como os painéis enrijecidos. Cada uma dessas subestruturas designa-se por elemento finito e tem comportamento conhecido, sendo o todo considerado como a soma das partes (AZEVEDO, 2003).

Ainda segundo Azevedo (2003), o advento de tecnologias computacionais permitiu aos engenheiros estruturais utilizarem de softwares, que permitem a interpretação de resultados obtidos e credíveis, de forma que, mesmo não tendo acesso à fonte do código computacional, tem-se conhecimento das características do modelo numérico que está sendo usado. A capacidade de realização da simulação computacional permite a obtenção de resultados de forma eficaz, e quando é utilizado um modelo adequado, a mesma também é segura. Essa capacidade de trabalho e obtenção de resultados permite a realização da otimização estrutural.

De acordo com Cordeiro (2007) os projetos de otimização estrutural apresentam resultados satisfatórios na construção civil, indústria naval, automobilística e aeroespacial. Esses projetos têm como objetivo básico a redução do custo financeiro, além de uma garantia de que a estrutura suporte todas as restrições mecânicas impostas, sejam elas estáticas ou dinâmicas. Segundo o *American Institute of Steel Construction (AISC)* (1963), uma condição essencial para a economia em uma estrutura em aço consiste na utilização eficiente do mesmo, trabalhando em sua configuração geométrica.

Portanto, com base no exposto, o presente trabalho tem como finalidade analisar numericamente placas com enrijecedores, submetidas à flambagem causada por carregamento de compressão uniaxial, visando sua otimização geométrica. Nesse estudo questões econômicas e construtivas não serão diretamente consideradas, sendo o foco a determinação da geometria que conduz ao melhor comportamento mecânico da estrutura.

## **1.1 Estado da arte**

Ainda na ausência de auxílio computacional, a investigação da flambagem de placas tem origem na observação do comportamento de placas planas de navios. Desenvolvido por Bryan (1891), esse estudo apresentou a primeira solução para a equação diferencial de placa de Saint-Venant (1883). Esse estudo teve como fundamento a análise da tensão crítica elástica de uma placa fina retangular simplesmente apoiada em suas bordas e submetida à uma tensão de compressão uniforme longitudinal.

Mais tarde, novos estudos voltados à análise elástica foram desenvolvidos, como Reissner (1909) e Timoshenko (1910), os quais apresentaram soluções para diferentes casos, variando geometria e condições de contorno. Logo, Bleich (1924) apresentou uma análise para o regime inelástico.

Essas análises serviram como base para o estudo de estabilidade linear de placas, onde, desde então várias pesquisas têm sido realizadas e concretizadas por diferentes autores, podendo-se destacar Timoshenko e Gere (1961), Ugural (1981), Trahair e Bradford (1988) e Reddy (1999), nos quais são apresentados diferentes resultados para a tensão de placas com diversas condições de contorno e carregamento.

A princípio acreditava-se que o início de flambagem de uma placa, resultava em seu colapso, assim como em barras comprimidas. Porém, o advento da indústria aeronáutica resultou em estudos voltados à estabilidade em estruturas esbeltas, a fim de se analisar o comportamento de pós-flambagem estável do material. Esses estudos concluíram que a carga de colapso de uma placa plana era realmente superior à sua carga de flambagem, gerando assim resistência pós-flambagem (ROORDA, 1980; TRAHAIR e BRADFORD, 1988; COX, 1934; MARGUERRE e TREFFTZ, 1937 E SCHUMAN E BACK, 1959).

Dessa forma, considerando-se a flambagem elasto-plástica de placas, a sua análise consiste na utilização da tensão crítica elástica, porém, com a substituição do módulo elástico por um módulo reduzido através do uso de um fator de plastificação. Diversas expressões desse fator de plastificação foram obtidas adotando teorias rigorosas e induzindo a cargas críticas aceitáveis quando comparadas a testes. Visto a dificuldade do uso dessas expressões Bleich (1952) apresentou uma expressão simplificada, porém obtendo-se resultados conservadores e indiferentes à condição de contorno.

Chajes (1974) ressalta a diferença entre colunas e placas, onde, além de apresentar a solução analítica para a carga crítica de placas utilizando o método da energia, método de Galerkin, diferenças finitas e elementos finitos, realizou também a análise do comportamento pós-flambagem de placas comprimidas axialmente. Dessa forma enfatizou a presença da resistência pós-flambagem das placas, além de que o principal fator para a ocorrência deste fenômeno seria as tensões de tração transversais que surgem após o início da deformação das placas. Por fim, enfatizou que as bordas longitudinais das mesmas resistem à maior parte do aumento de carga que ocorre durante a pós-flambagem.

Von Kármán (1932) apresentou o conceito de largura efetiva, de modo a amenizar as dificuldades referentes à obtenção da resistência última de uma placa. Segundo ele, a distribuição real de tensões últimas em uma placa simplesmente apoiada em suas bordas é substituída por uma distribuição simplificada, onde a porção central da placa é ignorada e a largura efetiva remanescente fica submetida à tensão de escoamento.

Com a finalidade de se obter um melhor desempenho em estruturas de placas, são aplicados enrijecedores em seu corpo, os quais são distribuídos longitudinalmente, transversalmente, ou até mesmo como uma combinação dos mesmos. Os enrijecedores podem ser utilizados adotando diversas geometrias.

Timoshenko e Gere (1963) e Bares (1981) apresentaram soluções analíticas para painéis enrijecidos com geometria simples. Os resultados foram dispostos em forma de tabelas e equações, adotando diferentes condições de contorno, carregamento e número de reforços.

Já Szilard (2004), considera uma placa enrijecida nas duas direções como sendo uma placa ortotrópica homogênea. Desta forma, conseguiu obter uma solução analítica aproximada para a tensão crítica de flambagem, independentemente do tipo de apoio, para uma placa nessas condições.

Devido à grande dificuldade em se obter soluções das equações diferenciais que governam o estudo das placas, soluções aproximadas são sempre recorridas. Sendo assim, métodos numéricos e experimentais geralmente são as opções de análise para estudos desse fenômeno de instabilidade. Porém apenas no avanço tecnológico e computacional que esta análise obteve uma diferente abordagem. Sendo assim, observou-se que dentre os métodos, destacou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) na resolução dos problemas propostos. Dentre inúmeros estudos que foram desenvolvidos dentro da área analisada, alguns se destacam e são citados a seguir.

Kapur e Hartz (1966), Zienkiewicz (1967) e Rockey e Evans (1966), propuseram soluções para a placa simplesmente apoiada sujeita a carregamento compressivo unidirecional, utilizando a técnica dos elementos finitos. Nessa situação foi assumido um modelo longitudinal de flambagem senoidal. As condições de bordo longitudinal modificam a deflexão transversal, de forma que, alteram a condição de equilíbrio. Além do carregamento compressivo uniforme, foram abordados outros, com estes, variando de forma linear. Na determinação do coeficiente de flambagem do esforço crítico adotou-se o método da energia.

Maki (1968) realizou um estudo que desenvolveu técnicas de elementos finitos para aplicabilidade a problemas de planos sob tensão, além da análise de placa envolvendo materiais ortotrópicos, como madeira e madeira compensada. Adotou-se dois diferentes métodos para a realização do estudo, primeiramente o Método de Armação (*Framework Method*) que consiste em substituir o corpo sólido elástico para ser analisado por um modelo matemático através de uma armação imaginária, e posteriormente o Método dos Elementos Rígidos. Os resultados para os exemplos propostos mostram que os métodos tiveram mérito, especialmente lidando com grandes sistemas de equações.

Existem estudos para se desenvolver elementos específicos para a análise de estabilidade de cascas, como Sivakumaran e Abdel-Rahman (1998), cujo objetivo é desenvolver um modelo de análise por elementos finitos, com a finalidade de estudar o comportamento de pós-flambagem local de barras de aço formadas a frio. Esses elementos são submetidos à compressão axial com a utilização de elemento de casca isoparamétrico não-linear de nove nós Lagrangeanos. Essa situação inclui tanto grandes deslocamentos quanto formulação elasto-plástica, além de modelos, cujas propriedades de

material foram obtidas de forma experimental, a fim de representar o corpo da seção de aço formada a frio. Para a análise, foram incorporadas variações de tensões residuais obtidas experimentalmente, e também imperfeições geométricas iniciais. A comparação com resultados experimentais indicou que o modelo de análise por elementos finitos fornece resultados precisos e consistentes para o comportamento de barras de aço formadas a frio e submetidas à compressão axial.

Paik, Thayamballi e Kim (2001), realizaram um estudo cujo objetivo foi desenvolver formulações mais avançadas do que as disponíveis na época para determinar a resistência final de chapas de navio. Para tanto, considerou-se as mesmas sujeitas a qualquer combinação das quatro seguintes: de carga de compressão/tração longitudinal, compressão/tração transversal, cisalhamento na borda, e cargas de pressão laterais. As formulações desenvolvidas foram projetadas para serem mais sofisticadas do que os métodos simplificados baseados teoricamente que já existiam. Foi levada em consideração a influência de imperfeições iniciais pós-soldadura sob a forma de deflexões iniciais e tensões residuais. Tendo conhecimento de que uma única equação não pode representar com sucesso o estado limite último de uma placa em todas as suas combinações possíveis, este trabalho derivou três conjuntos de formulações para resistência última de placas, sendo estas, uma combinação das equações individuais para cada tipo de carregamento. Para a validação do estudo, fez-se uma comparação dos resultados obtidos analiticamente com a solução não-linear gerada pelo MEF.

Diferentes trabalhos de caráter numérico e experimental voltados à teoria de flambagem de placas foram apresentados. Bradford e Azhari (1995a) expuseram um estudo de flambagem elástica de placas através do método numérico das faixas finitas semi-analítico com o uso de funções bolha, ou seja, funções de deslocamento as quais representam modos extras da faixa finita correspondentes a graus de liberdade internos. Além disso, Bradford e Azhari (1997) apresentaram também outro estudo usando dois tipos de funções diferentes para diferentes condições de contorno. Os mesmos também realizaram um estudo relacionado à flambagem elasto-plástica de placas onde Bradford e Azhari (1995b) apresentaram um estudo que utiliza o método das faixas finitas, o qual inclui inelasticidades, de modo que as funções de deslocamento das faixas finitas são determinadas por funções bolha. As funções se apresentaram mais adequadas para o caso elasto-plástico em relação às normalmente utilizadas nas faixas finitas por reduzirem os graus de liberdade da estrutura e, reduzindo consequentemente o gasto computacional.

Shanmugam e Narayanan (1998) apresentaram em seu estudo, um método aproximado e simples para prever o comportamento pós-flambagem e de colapso das placas carregadas axialmente ao longo de duas direções perpendiculares entre si. Este estudo foi feito através dos efeitos da imperfeição inicial, esbeltez e proporções da placa, condições de contorno e as taxas de variação de tensão nos dois sentidos da carga, são apresentados no método. Os resultados de ensaios foram

mostrados através de um modelo em placas quadradas biaxialmente comprimidas propositalmente para obedecer a esse efeito. Os valores obtidos a partir dos experimentos são comparados com os teóricos correspondentes usando o método proposto, a fim de verificar a exatidão do mesmo. Comparações adicionais com resultados de elementos finitos não lineares são também apresentados, mostrando suas curvas de interação em placas quadradas sujeitas a esforços nas direções longitudinal e transversal, aplicáveis às condições típicas de contorno.

Wang et al. (2006) investigaram o comportamento de quatro placas enrijecidas longitudinalmente, com reforços do tipo T, em escala real de maneira numérica e experimental. O objetivo principal deste estudo foi o de conseguir uma relação flambagem sob compressão uniaxial em diferentes excentricidades de carga. Imperfeições iniciais e tensões residuais foram medidas para as amostras. Os testes confirmaram a existência de flambagem, e o modelo de elementos finitos foi validado pelo teste de uma série de placas enrijecidas em escala real. A análise numérica indicou que o modelo era capaz de prever as capacidades e modos de falha das placas.

Choi et al. (2009) realizaram um estudo de caráter experimental a fim de verificar as equações propostas para determinar a rigidez mínima exigida para reforços longitudinais ligados em placas comprimidas. Foram modelados experimentalmente nove corpos de prova enrijecidos e testados aplicando-se sua carga última. Os resultados do teste foram comparados com as forças máximas previstas para placas enrijecidas por análise através do MEF, mostrando significativa correlação com as equações propostas.

Kumar et al. (2009) realizaram estudos de caráter numérico e experimental em seis painéis enrijecidos, de forma que o principal objetivo foi determinar a capacidade de carga máxima e estudar o comportamento interativo de placas enrijecidas ortogonais sob cargas axiais e laterais. Foram utilizados macacos hidráulicos e balões infláveis com mecanismos de controle de carga, capazes de aplicar cargas axiais e laterais sobre as amostras. Análise não linear de elementos finitos dos corpos de prova foi realizada utilizando o ANSYS. Os resultados obtidos a partir do MEF foram relativamente coerentes com os observados nos testes.

Além disso, vários outros estudos propondo uma análise de flambagem de placas enrijecidas são propostos, como Chujutalli (2010) e Bastos (2012) os quais propuseram uma análise de painéis enrijecidos de unidades offshore utilizando ferramentas computacionais através de modelos detalhados de elementos finitos, a fim de se analisar a não-linearidade dos elementos sob flambagem.

Por fim, tem-se estudos relacionados à otimização de placas quando essas estão atuando em flambagem. Dentre várias análises são consideradas algumas, como Correia (2013) que utilizou do Método Design Construtal para determinar a melhor geometria de placas finas perfuradas apresentando um ótimo valor de tensão crítica de flambagem, sob compressão axial. Para a realização

do estudo, foram analisadas placas retangulares simplesmente apoiadas, com furos centrados. As geometrias do mesmo variaram entre retangulares, losangulares e elípticos. O objetivo foi obter a geometria ideal que maximize a carga crítica.

Rocha et. al (2013) apresentaram em seu trabalho, um projeto construtivo para otimizar a geometria de placas perfuradas retangulares, simplesmente apoiadas, sujeitas à flambagem elástica. Foram consideradas três diferentes formas de furos centrados: elípticos, retangulares e losangulares. A função objetivo foi maximizar a carga crítica de flambagem. O grau de liberdade  $H/L$  (relação entre largura e comprimento da placa) foi mantido constante, enquanto  $H_0/L_0$  (relação entre as dimensões características dos furos) foi otimizado para várias frações de volume de orifício ( $\phi$ ). Utilizou-se um modelo numérico empregando o método de Lanczos e baseado no Método dos Elementos Finitos. Os resultados mostraram que, para valores inferiores de  $\phi$ , a geometria ótima se encontra em furos losangulares. Para valores intermediários e superiores de  $\phi$ , o furo elíptico e retangular, respectivamente, apresentaram melhor desempenho.

Silva (2015) apresentou um estudo em que se analisam placas esbeltas mediante perfurações. Segundo ele, a realização de perfurações nestes componentes estruturais gera uma redistribuição de tensões nas placas, causando mudanças nas características de flambagem e no desempenho mecânico da placa. Sendo assim, seu estudo analisou o fenômeno de flambagem em placas quadradas ou retangulares, simplesmente apoiadas e com perfurações hexagonais centralizadas. A simulação numérica foi utilizada, com o auxílio do software ANSYS, para determinar a carga crítica de flambagem e a carga última da placa. O método Design Construtal foi aplicado, permitindo verificar a influência da variação da relação entre as dimensões para cada tipo de perfuração (hexagonal longitudinal e transversal), no comportamento mecânico das placas, buscando definir qual tipo de perfuração consegue distribuir melhor as imperfeições e conduzir a placa a um melhor desempenho.

Rackow (2015) teve como objetivo em seus estudos realizar, através da análise numérica não linear de painéis enrijecidos, um estudo que avaliasse o efeito da variação da espessura da chapa, da alma e do flange do enrijecedor, individualmente e em conjunto, na resistência à flambagem dos mesmos. Para tal, um modelo foi desenvolvido computacionalmente no software ANSYS, baseando-se assim no MEF. Os resultados apontam a espessura da chapa como o parâmetro que mais influencia na determinação da resistência à flambagem, seguida da espessura da alma do enrijecedor. A variação da espessura do flange do enrijecedor pouco influenciou na carga última de flambagem.

Por fim, Helbig et al. (2016) analisaram placas finas de aço perfuradas sob flambagem. Para tanto, a modelagem computacional juntamente com o método Design Construtal foram abordados para avaliar a influência da configuração geométrica no comportamento das mesmas. O método da busca exaustiva foi utilizado para determinar as geometrias ótimas que conduziram à um

comportamento mecânico excelente. Para isso, os modelos numéricos foram empregados para a análise de flambagem elástica e elasto-plástica das placas com uma perfuração centralizada, sob compressão axial. Diferentes tipos de furos (longitudinal oblongo, transversal oblongo, elíptico, retangular, losangular, hexagonal longitudinal, ou hexagonais transversal) com formas diferentes (variação das características de dimensões de cada tipo de furo) foram analisados. As curvas-limite para evitar a encurvadura foram obtidos, bem como a definição das geometrias que apresentaram uma melhoria de 107% no desempenho da placa.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Aliando a simulação numérica e o Método Design Construtal juntamente com o método da Busca Exaustiva, o objetivo geral do trabalho consiste em determinar a configuração geométrica otimizada de uma placa fina com enrijecedores (ortotrópica), visando maximizar a carga última de flambagem da mesma, quando submetida à compressão axial.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Dessa forma, para concretizar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos serão desenvolvidos:

1. Avaliar a influência do grau de liberdade  $h_s/t_s$ , que representa a relação entre a altura ( $h_s$ ) e largura ( $t_s$ ) dos enrijecedores, no comportamento mecânico da placa submetida à flambagem elasto-plástica.
2. Avaliar a influência do grau de liberdade  $N_{el}$ , que representa o número de enrijecedores longitudinais, no comportamento mecânico da placa submetida à flambagem elasto-plástica.
3. Avaliar a influência do grau de liberdade  $N_{et}$ , que representa o número de enrijecedores transversais, no comportamento mecânico da placa submetida à flambagem elasto-plástica.
4. Avaliar a influência do parâmetro  $\phi$ , que representa a relação entre o volume de enrijecedores ( $V_e$ ) e o volume total ( $V_t$ ) da placa de referência, no comportamento mecânico da placa submetida à flambagem elasto-plástica.
5. Realizar um estudo de caso considerando dois valores de volume total ( $V_t$ ) de material para a placa de referência.

## 1.3 Metodologia

A metodologia adotada para a realização da presente pesquisa consiste, inicialmente, no desenvolvimento de modelos computacionais para a simulação numérica do problema de flambagem elástica e elasto-plástica de placas finas de aço. Para isso, primeiramente, uma placa sem enrijecedores foi simulada numericamente e os resultados obtidos na análise elástica e elasto-plástica

foram comparados com soluções analíticas existentes na literatura. Posteriormente, diferentes placas enrijecidas foram consideradas, comparando os resultados numéricos para a flambagem elástica, com os resultados analíticos encontrados na literatura. Além dessas verificações, uma validação do modelo computacional para a análise não linear foi também realizada, através da comparação entre os resultados obtidos numericamente e resultados experimentais apresentados por Kumar et al. (2010).

Após a verificação e validação dos modelos computacionais, o Método Design Construtal foi empregado para a determinação das configurações geométricas das placas com enrijecedores avaliadas neste trabalho. Para tanto, uma placa sem enrijecedores foi usada como referência: a largura, o comprimento e o volume total de material dessa placa foram mantidos constantes nas placas com enrijecedores. Foi necessário empregar o parâmetro  $\phi$  (relação entre o volume de enrijecedores ( $V_e$ ) e o volume total ( $V_l$ ) da placa de referência), que representa a fração de volume dos enrijecedores, ou seja, representa a quantidade de material da placa de referência que foi transformada em enrijecedores. Cabe destacar que como o volume total de aço, a largura e a espessura da placa de referência foram preservados, quanto maior for o valor de  $\phi$  menor será a espessura ( $t_p$ ) da placa. Além disso, a distribuição do volume de enrijecedores com seção transversal retangular foi feita considerando os graus de liberdade  $N_{el}$  (número de enrijecedores na direção longitudinal) e  $N_{et}$  (número de enrijecedores na direção transversal). Por fim, após a definição de  $N_{el}$  e  $N_{et}$ , o grau de liberdade  $h_s/t_s$  (relação entre a altura ( $h_s$ ) e a espessura ( $t_s$ ) dos enrijecedores) foi também considerado. Com isso, foi possível definir diferentes configurações geométricas para as placas com enrijecedores, permitindo avaliar a influência da geometria das placas em seu comportamento mecânico sob flambagem elasto-plástica.

## 1.4 Organização da dissertação

Nesta pesquisa diversos conceitos foram abordados, que juntamente aos resultados obtidos serão apresentados da seguinte maneira:

No Capítulo 1 uma introdução abrangendo todo o conteúdo abordado no trabalho foi feita, bem como um levantamento da literatura já existente sobre o conteúdo abordado, a metodologia utilizada e os objetivos referentes à pesquisa.

No Capítulo 2 são apresentadas soluções analíticas empregadas para o problema de placas. Ainda neste capítulo, são exibidas as diferenças entre as flambagem linear e não-linear, seus métodos de solução, e aplicação das mesmas em placas enrijecidas.

No Capítulo 3 é feita uma descrição do processo de Modelagem Computacional, bem como a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) no software ANSYS e do modelo escolhido a ser usado nele, bem como as devidas verificações e validações com diferentes situações presentes na literatura.

No Capítulo 4 é apresentado o Método Design Construtal, o qual servirá como base para a determinação das configurações geométricas das placas com enrijecedores estudadas no trabalho. É nesse capítulo que será apresentado também o estudo de caso a ser feito.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos a fim de avaliar o efeito da variação dos graus de liberdade e das frações de volume na resistência à flambagem. Além disso, uma análise final, contemplando todas as configurações geométricas propostas, visando determinar tensão última maximizada e, conseqüentemente, a geometria otimizada para a placa com enrijecedores, é realizada.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões a respeito da pesquisa realizada e sugestões para trabalhos futuros.

Também constam a lista de referências bibliográficas, anexos e apêndices referentes à dissertação.

## 2 TEORIA DAS PLACAS

Com a intenção de analisar a flambagem em placas enrijecidas longitudinalmente e transversalmente, deve-se realizar um estudo do comportamento deste fenômeno, abordando diversos assuntos aplicados na Engenharia Estrutural e Resistência dos Materiais. Sendo assim neste capítulo será feita uma revisão bibliográfica a respeito do comportamento de placas finas metálicas abordadas ao longo do trabalho.

De acordo com Szilard (2004), existe uma gama de aplicações de elementos de placas na engenharia, onde que, a análise de tensões matematicamente exata de uma placa fina – submetida a cargas que atuam normais a sua superfície – exige solução das equações diferenciais de elasticidade em três dimensões. Porém, na maioria dos casos, essa abordagem se depara com dificuldades matemáticas existentes. Então, a teoria clássica de placas finas de Kirchhoff e Love, que é largamente empregada na grande maioria das aplicações, permite a obtenção de resultados suficientemente precisos, sem a necessidade de realizar uma análise de tensões tridimensional completo.

### 2.1 Teoria Clássica de pequena deflexão de placas finas

De acordo com Szilard (2004), a Teoria de Kirchhoff é formulada em termos de deflexões transversais  $w(x,y)$  para os quais a equação diferencial que rege é de quarta ordem, exigindo apenas duas condições de contorno a serem satisfeitas em cada extremidade. As simplificações utilizadas na derivação da equação da placa baseiam-se nos seguintes pressupostos:

1. Deve-se considerar o material da placa homogêneo, isotrópico e linear-elástico;
2. A placa inicialmente plana, e o plano médio da placa não sofrendo deformação durante a flexão;
3. Sua espessura  $t$  deve ser constante, sendo a menor dimensão lateral da placa no mínimo dez vezes maior que a sua espessura;
4. As deflexões transversais  $w(x,y)$  da placa são pequenas se comparadas com sua espessura  $t$ , sendo considerada como deflexão máxima o valor de um décimo da espessura  $t$ ;
5. As inclinações do plano médio da placa (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade;
6. As seções planas e normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais ao plano médio após a deformação;
7. A tensão normal  $\sigma_z$  na direção transversal à placa pode ser desprezada.

Essas hipóteses são consideradas para a dedução da equação diferencial governante da placa em termos de suas deflexões transversais  $w(x,y)$ , podendo ser observadas na Fig. 2.1. Com a ajuda

dessas hipóteses, os problemas de tensão, que a princípio eram tridimensionais são reduzidos a problemas bidimensionais de placas.

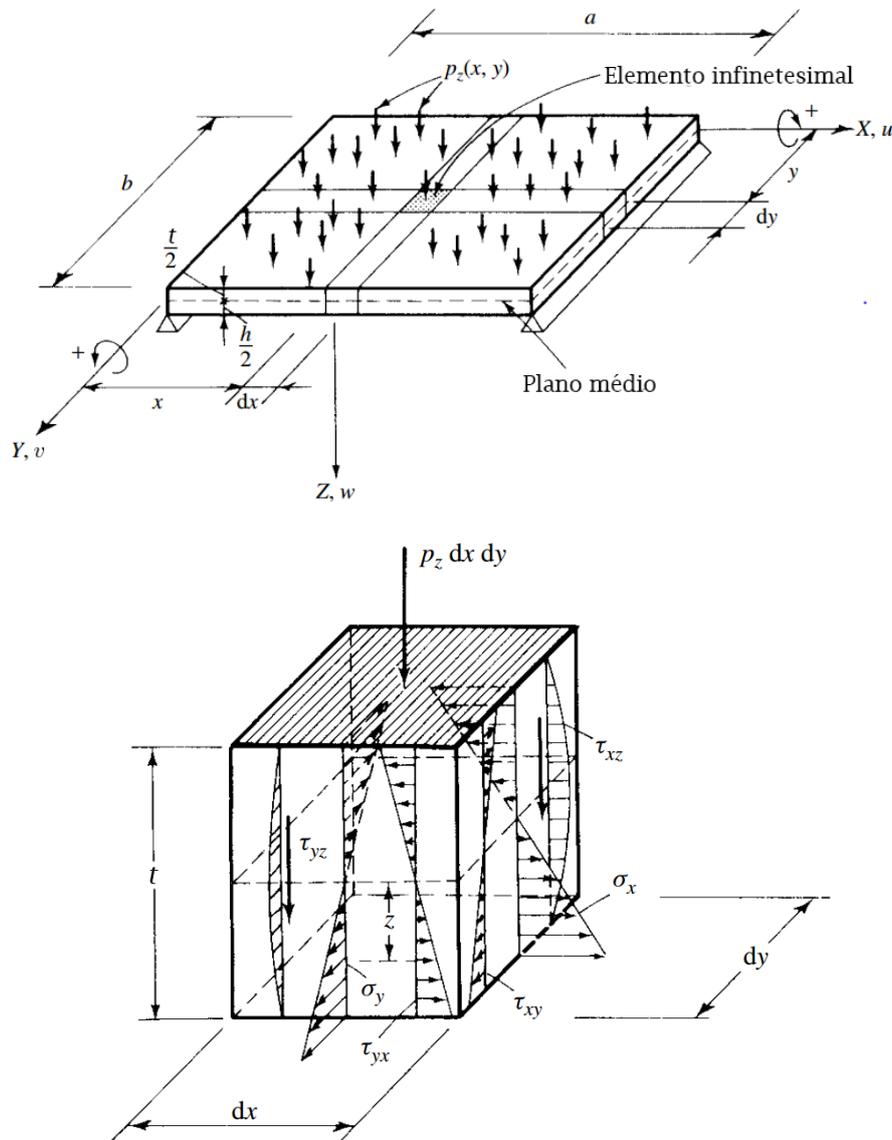


Figura 2.1- Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado (Fonte: SZILARD, 2004).

Para placas retangulares, é conveniente usar o sistema de coordenadas cartesianas. Além disso, as componentes de deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$  e as componentes de forças internas e externas são consideradas positivas quando apontarem para o sentido positivo dos eixos coordenados  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Para as análises será adotada a convenção usual de engenharia que considera como positivos os momentos fletores que tracionam as fibras inferiores da placa. A Figura 2.2 apresenta as solicitações resultantes que agem transversalmente sobre um elemento extraído do interior da placa

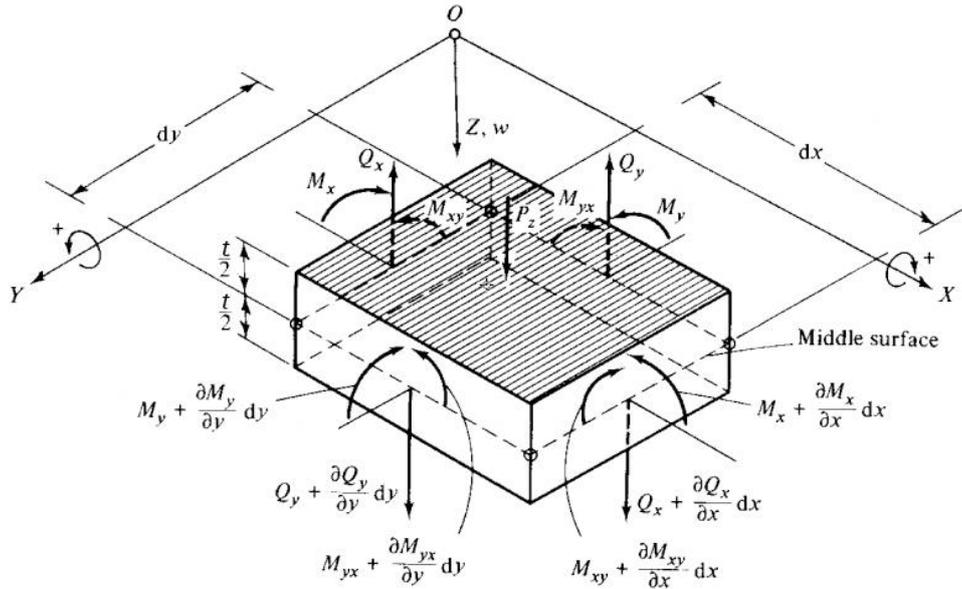


Figura 2.2 - Esforços resultantes atuantes em um elemento de placa (Fonte: SZILARD, 2004).

Partindo do princípio de que a placa está sujeita apenas a esforços laterais, a partir das equações de equilíbrio fundamentais, empregam-se as seguintes:

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0 \text{ e } \sum P_z = 0 \quad (2.1)$$

O comportamento de uma placa fina se assemelha a uma malha de vigas bidimensionais. Deste modo, a carga externa  $p_z$  é equilibrada por forças de cisalhamento transversal  $Q_x$  e  $Q_y$ , além dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ . A principal diferença quando se compara a malha de vigas bidimensionais à placa é a presença dos momentos de torção  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ , os quais também contribuem na resistência ao carregamento interno. Além disso, na teoria de placas é comum analisar os esforços solicitantes por unidade de comprimento da superfície média. Sendo assim, diferenciam-se os esforços distribuídos acima mencionados dos esforços resultantes adotando a seguinte notação para os esforços por unidade de comprimento:  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ , e  $m_{xy}$ . Na Figura 2.3 é apresentado um elemento da superfície média em estado de equilíbrio sob a ação de uma carga distribuída  $P_z$ .

Primeiramente faz-se o somatório dos momentos de todas as forças em torno do eixo  $Y$  igual a zero:

$$\left( m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_x dy + \left( m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - m_{yx} dx - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.2)$$

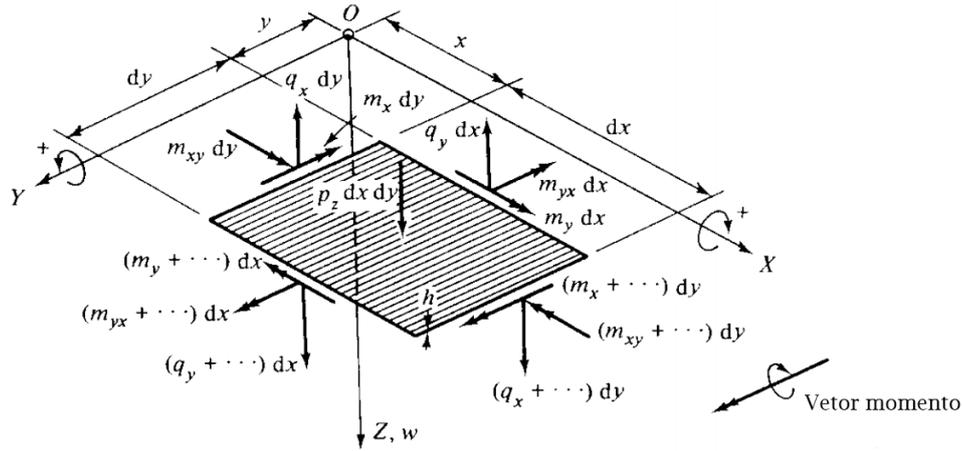


Figura 2.3 - Estado de equilíbrio de um elemento de superfície média da placa (Fonte: SZILARD, 2004).

Após, realiza-se a expansão e simplificação da Eq. (2.2). Além disso, negligencia-se o termo contendo  $1/2(\partial q_x/\partial x)(dx)^2 dy$  uma vez que este é uma pequena parcela de ordem superior, fazendo com que a Eq. (2.2) se torne:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0 \quad (2.3)$$

onde que, dividindo por  $dx dy$  tem-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.4)$$

De forma similar, o equilíbrio de momentos em torno do eixo  $X$ , supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento, resulta em:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.5)$$

Agora, fazendo o equilíbrio de forças em  $Z$ , tem-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy + p_z dx dy = 0 \quad (2.6)$$

onde que, dividindo por  $dx dy$  tem-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z \quad (2.7)$$

Substituindo as Eq. (2.4) e (2.5) em (2.7) e observando que  $m_{xy} = m_{yx}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (2.8)$$

sendo os momentos de flexão e de torção da Eq. (2.8) funções das componentes de deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$  da placa.

## 2.2 Relação entre tensão, deformação e deslocamentos

A Lei de Hooke bidimensional passa a ser usada, a partir do pressuposto de que o material é linear-elástico:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y \quad (2.9a)$$

e

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x \quad (2.9b)$$

relacionando tensão e a deformação em um elemento de placa. Substituindo a Eq. (2.9b) na Eq. (2.9a), obtém-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (2.10)$$

E de maneira similar:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (2.11)$$

Os momentos de torção  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$  produzem no plano, as tensões de cisalhamento  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$  (conforme a Fig. 2.4) que são relacionadas com a deformação de cisalhamento  $\gamma$  através da Lei de Hooke para o cisalhamento, resultando em:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.12)$$

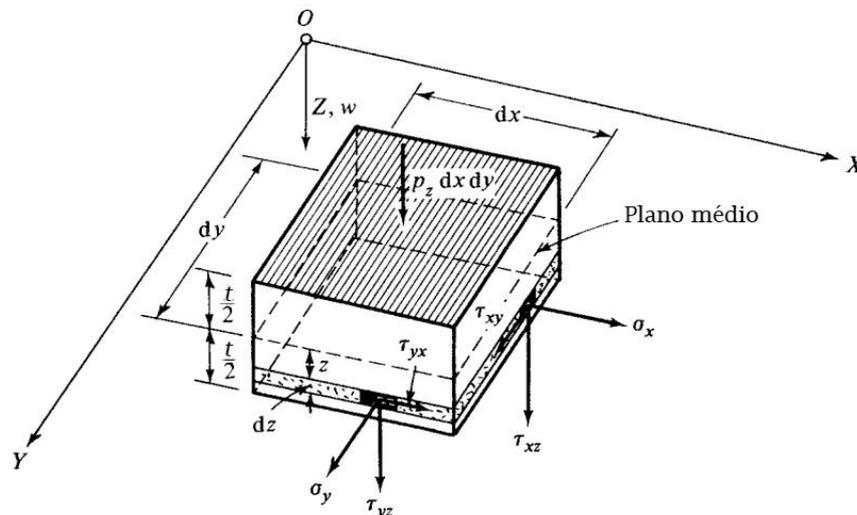


Figura 2.4 - Tensões no elemento de placa (Fonte: SZILARD, 2004).

A seguir, considera-se a geometria da placa defletida para expressar a deformação em termos dos coeficientes de deslocamento. Tomando uma seção com  $y$  constante, como mostrado na Fig.2.5, compara-se a seção antes e depois de deflexão.

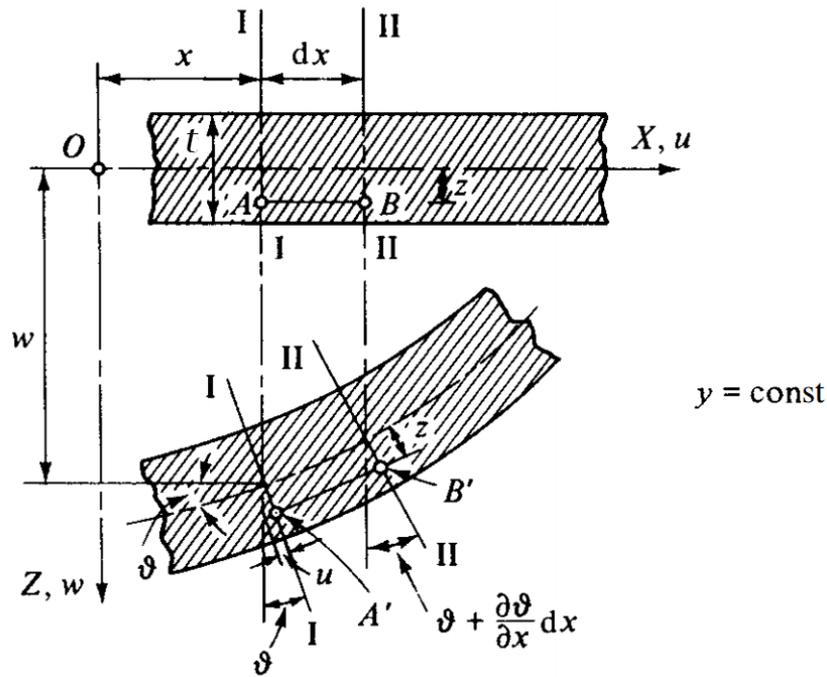


Figura 2.5 - Seção antes e depois da deflexão (Fonte: SZILARD, 2004).

Além disso, pressupondo que as inclinações do plano médio da placa (rotações) sejam pequenas quando comparadas com a unidade, e que as seções planas e normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais ao plano médio após a deformação, o ângulo de rotação das linhas I-I e II-II (ver Fig. 2.5) são expressos, respectivamente, por:

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{ e } \theta + \dots = \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \quad (2.13)$$

Posteriormente, a deformação do comprimento  $\overline{AB}$  de uma fibra, localizado a uma distância  $z$  a partir da linha central, torna-se  $\overline{A'B'}$ . Utilizando a definição de deformação, pode-se escrever:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\overline{AB} - \overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{[dx + z(\partial\theta/\partial x)dx] - dx}{dx} = z \frac{\partial\theta}{dx} \quad (2.14)$$

Então, substituindo na Eq. (2.14) a primeira equação presente nas Eqs. (2.13), obtém-se:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Um raciocínio semelhante é adotado para  $\varepsilon_y$ , que é a deformação normal na direção  $Y$ , dada por:

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

A partir da Fig. 2.6 determina-se também a distorção angular  $\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma''$ , como sendo:

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad e \quad \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.17)$$

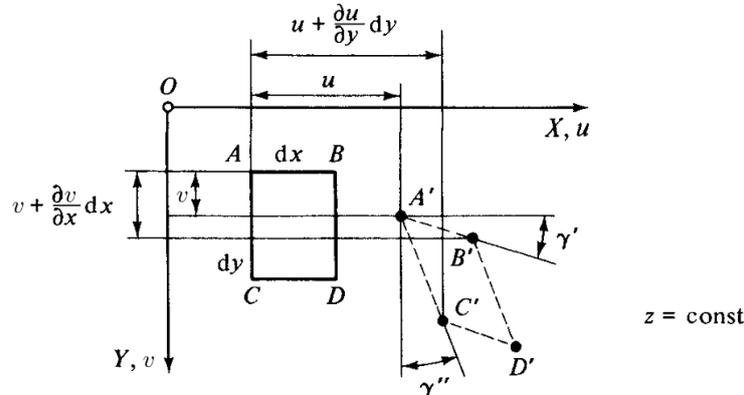


Figura 2.6 - Distorção angular (Fonte: SZILARD, 2004).

Podendo concluir-se que o deslocamento axial  $u$  no ponto  $A'$  pode ser calculado a partir da expressão:

$$u = -z\theta = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.18)$$

E de forma análoga para  $v$ :

$$v = -z\theta = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.19)$$

E considerando as Eq. (2.17), a deformação de cisalhamento  $\gamma_{xy}$  relaciona-se com os deslocamentos axiais  $u$  e  $v$  através da expressão:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.20)$$

onde que, substituindo as Eq. (2.18) e (2.19) na Eq. (2.20) tem-se:

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.21)$$

Fazendo com que as curvaturas da placa nas direções  $X$  e  $Y$ , bem como o seu empenamento sejam dados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad e \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.22)$$

### 2.3 Forças internas expressas em termos de $w$

As componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  produzem momentos de flexão no elemento de placa conforme Fig. 2.4 de uma forma semelhante à teoria de vigas. Assim, através da integração das

componentes normais de tensão, os momentos de flexão, que atuam no elemento de placa, são obtidos:

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad \text{e} \quad m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad (2.23)$$

De forma similar, os momentos de torção produzidos pelas tensões de cisalhamento  $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$  podem ser calculados a partir de:

$$m_{xy} = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{e} \quad m_{yx} = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \tau_{yx} z dz \quad (2.24)$$

e como  $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ , conseqüentemente  $m_{xy} = m_{yx}$ .

Substituindo as Eq. (2.15) e (2.16) nas Eq. (2.10) e (2.11), as tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  passam a ser expressas em função da deflexão transversal  $w$ .

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.25)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.26)$$

Integrando as Eqs. (2.23) e (2.24), após a substituição das Eqs. (2.25) e (2.26) para  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , respectivamente, tem-se:

$$m_x = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad (2.27)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad (2.28)$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)D\chi \quad (2.29)$$

sendo  $D$  a rigidez flexural da placa, dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.30)$$

sendo  $t$  a espessura da placa,  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

Por fim, substituindo as Eqs. (2.27), (2.28) e (2.29) na Eq. (2.8), é deduzida a equação diferencial que governa o problema de uma placa fina, de material elástico linear, no regime de pequenos deslocamentos, submetida a um carregamento transversal, como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (2.31)$$

E considerando o operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.32)$$

a Eq. (2.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p_z \quad (2.33)$$

A Eq. (2.31) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem, não-homogênea do tipo elíptica, com coeficientes constantes, que geralmente é chamada de equação bi-harmônica não-homogênea. A equação é do tipo linear, uma vez que os expoentes das derivadas parciais de  $w$  não são superiores a um.

Além disso, os esforços cortantes podem ser expressos em função do deslocamento transversal  $w$ . Para isto, devem-se substituir as Eqs. (2.27), (2.28) e (2.29) nas Eqs. (2.4) e (2.5), obtendo:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2.34)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2.35)$$

## 2.4 Condições de contorno do problema

Uma solução exata para placas finas sob carregamento transversal, além de satisfazer a equação diferencial, tem de obedecer às condições de contorno que regem o problema. Tratando-se de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, em cada direção de todos os bordos, há duas condições de contorno a serem satisfeitas. As condições podem ser do tipo de deslocamento, conhecidas como condições de contorno geométricas, além das condições em termos de esforços internos, as quais são as condições de contorno estáticas, ou ainda pela combinação destas. Na Figura 2.7 são apresentadas as principais condições de contorno presentes em placas.

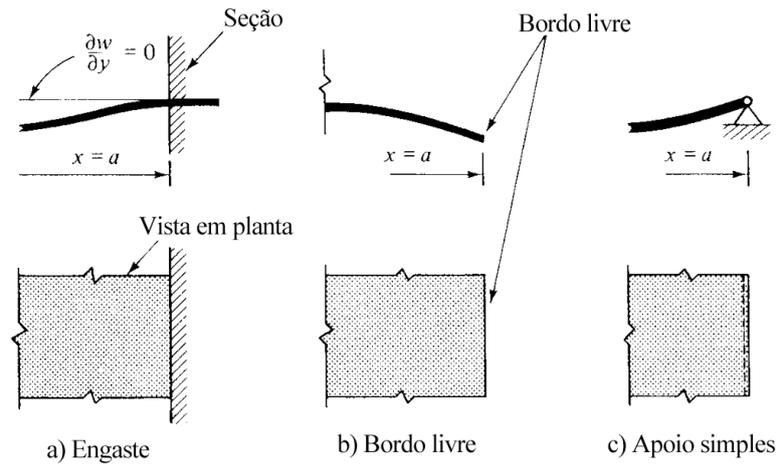


Figura 2.7 - Condições de contorno para placas (Fonte: SZILARD, 2004).

#### a) Condições de contorno geométricas

Uma condição de contorno geométrica pode ser imposta em um bordo da placa ao se fixar o valor do deslocamento transversal ou da inclinação da placa na direção normal ao bordo. Por exemplo, ao se analisar uma placa em que todos os bordos são perfeitamente engastados, as condições de contorno seriam:

$$w = 0 \text{ e } \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2.36)$$

e

$$w = 0 \text{ e } \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (2.37)$$

#### b) Condições de contorno estáticas:

Quando uma placa em que um de seus bordos está completamente livre para se deslocar, suas condições de contorno neste bordo serão estáticas, pois o esforço cortante e o momento fletor neste bordo serão nulos. Estas condições podem ser expressas a partir das seguintes equações:

$$v_x = m_x = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2.38)$$

e

$$v_y = m_y = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (2.39)$$

É importante ressaltar a existência de três esforços solicitantes em uma placa, que são: os esforços cortantes, momentos fletores e momentos torsões. Sendo assim, em um bordo completamente livre, serão necessárias as três condições de contorno, uma para cada tipo de solicitação. Essa situação pode ser resolvida por Kirchhoff, através da transformação do efeito do momento torsor nos bordos em um esforço cortante adicional, reduzindo os esforços solicitantes a dois. Esse processo é esquematizado na Fig. 2.8.

A força cortante no bordo da placa consiste em dois termos, isto é, a força de cortante transversal e o efeito do momento de torção. Considerando-se os bordos das placas normais às direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente, as forças verticais dos bordos por unidade de comprimento podem ser escritas como:

$$u_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (2.40)$$

e

$$u_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \quad (2.41)$$

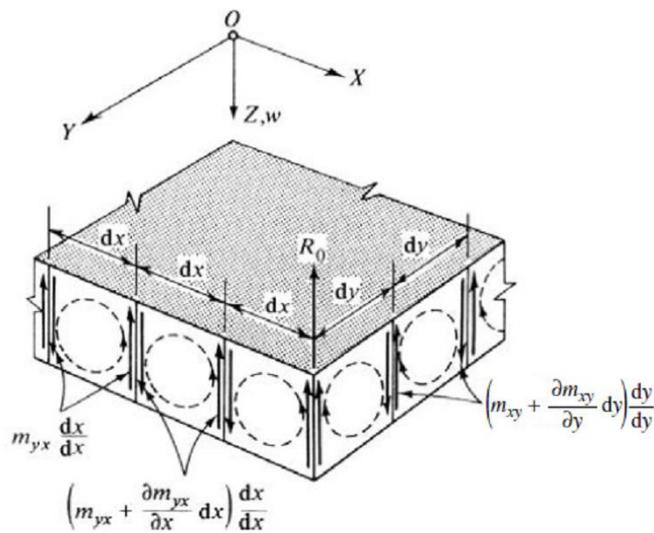


Figura 2.8 - Efeito de bordo do momento torsor na placa (Fonte: SZILARD, 2004).

Assim, reduz-se de três para duas, as condições de contorno em um bordo simples, as quais são dadas por:

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a \quad (2.42)$$

e

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = b \quad (2.43)$$

A Figura 2.9 ilustra o caso de placas simplesmente apoiadas. Nos cantos as forças cortantes adicionais geradas pelo momento torsor se somam, em vez de se cancelarem, dessa forma é gerado uma força resultante de canto  $R_0$ , tendendo a levantar os cantos da placa. Essa força é definida por:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

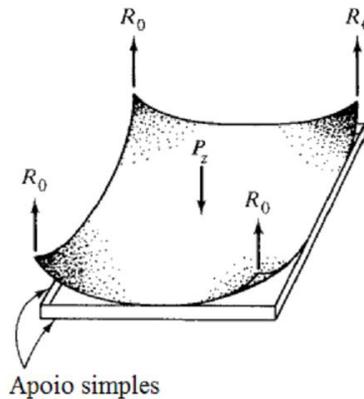


Figura 2.9 - Forças de canto levantando os cantos da placa (Fonte: SZILARD, 2004).

c) Condições de contorno mistas:

As placas com a presença de um bordo simplesmente apoiado apresentam condições de contorno mistas. Essa situação é facilmente representada nas condições de deslocamento transversal nulo e de momento fletor nulo na direção normal ao bordo, quando a placa encontra descarregada. Essa situação é expressa pelas equações:

$$w=0, \quad m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{em } x=0 \text{ ou } x = a \quad (2.45)$$

$$w=0, \quad m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \text{em } y=0 \text{ ou } y = b \quad (2.46)$$

## 2.5 Solução da equação diferencial

A solução exata para a equação diferencial proposta pela Eq. (2.31), é uma função  $w(x,y)$  e deve satisfazer as respectivas condições de contorno prescritas anteriormente. Porém, a solução só é possível para casos muito simples de carregamento e condições de contorno.

Sendo assim, a solução poderá ser obtida através da sobreposição de duas soluções, partindo do pressuposto da linearidade da Eq. (2.31), sendo estas: uma solução homogênea  $w_H(x,y)$  que satisfaz as condições de contorno ao longo dos bordos da placa; e uma solução particular  $w_P(x,y)$ , que satisfaz o equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa. Desta forma, a solução geral será dada por:

$$w(x,y) = w_H(x,y) + w_P(x,y) \quad (2.47)$$

As soluções para os casos de maior interesse prático encontram-se tabeladas nas bibliografias clássicas sobre a teoria de placas como Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Szilard (2004).

## 2.6 Flambagem de Placas

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), placas finas com diferentes configurações geométricas são usadas em estruturas navais, sendo muitas vezes submetidas a cargas de compressão e de cisalhamento agindo em seu plano médio, que podem causar a flambagem da placa. A Figura 2.10 esquematiza uma placa sujeita à carregamentos normais contidos em seu próprio plano.

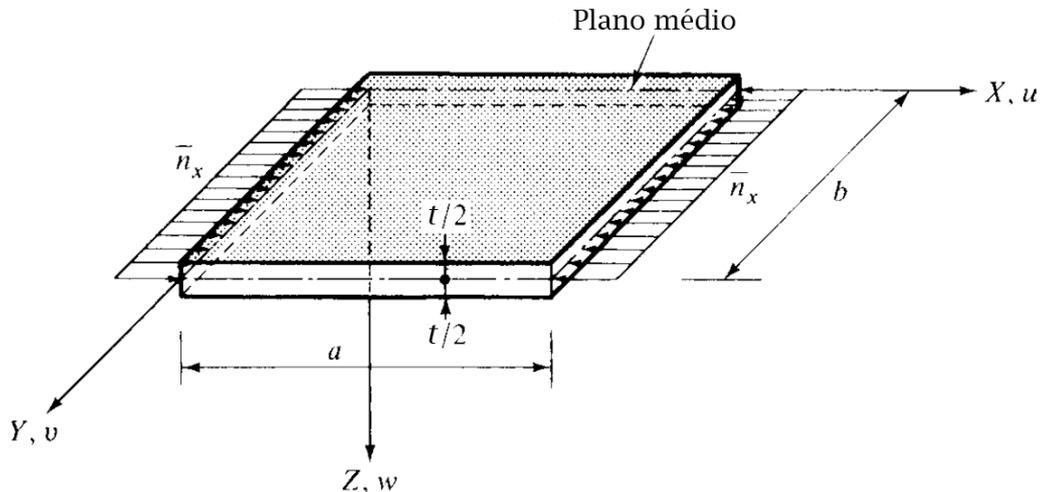


Figura 2.10 - Placa retangular sob carregamento de compressão uniaxial aplicado no plano (Fonte: SZILARD, 2004).

Quando aplicada uma força de pequena amplitude, as deformações para a placa serão contidas no plano médio da mesma, resultando em um deslocamento lateral  $w$  nulo. Porém, o aumento da magnitude destas cargas altera o modo de deformação da placa. Sendo assim, para cada caso, existe um determinado valor de carga que começa a causar deslocamentos transversais ao plano médio da placa. Nessa situação, o equilíbrio que antes era considerado estável para pequenos carregamentos, se torna instável quando aplicadas cargas de maior intensidade (SZILARD, 2004).

Este fenômeno é denominado de flambagem, e a carga que o determina é conhecida como carga crítica. Flambagem é um modo de falha que se observa em membros sob compressão devido principalmente à instabilidade estrutural. A carga crítica depende principalmente da esbelteza do membro a ser analisado (PFEIL, 2012; ABED et al., 2015).

### 2.6.1 Flambagem e estabilidade

Segundo Trahair e Bradford (1988), o comportamento de placas planas pós-flambagem é de bastante interesse prático. Ao contrário do que acontece com as colunas, a carga crítica de uma placa não coincide com a sua carga de ruptura.

De acordo com Baptista (2014), a análise pós-flambagem de placas é consideravelmente complexa, uma vez que é basicamente um problema de caráter não-linear. As não-linearidades podem ser de origem geométrica, como grandes deslocamentos, além de origens física como o

comportamento elasto-plástico do material. Nesses casos é necessário o uso de métodos numéricos para a solução do problema.

Szilard (2004) afirma que a carga crítica de uma placa pode ser formulada utilizando os seguintes métodos: (1) Emprego da equação diferencial de equilíbrio estático da placa sob carregamento no plano, (2) utilizando diferenciados métodos de energia, ou ainda (3) abordagens dinâmicas do problema proposto.

Na abordagem de flambagem em placas deste trabalho será empregada a equação diferencial de equilíbrio de placa submetida a carregamento no plano.

### 2.6.2 Equação diferencial para placas finas sob carregamento no plano

Conforme Szilard (2004), a derivação da equação diferencial que rege as placas finas de material elástico linear, baseia-se na suposição de que as forças atuam sobre a superfície média da placa. O carregamento presente na superfície média da placa pode ser originado por esforços coplanares aplicados em suas fronteiras ou que surgem através de variações de temperatura.

Além disso, os deslocamentos no plano da placa  $u$  e  $v$  podem ser restringidos, surgindo assim, forças reativas nos bordos. No entanto, estes esforços podem ser desprezados quando os deslocamentos transversais  $w$  da placa são pequenos.

Então, considera-se o equilíbrio do elemento infinitesimal  $dx dy$  e espessura  $t$  mostrado na Fig. 2.11, que é submetido as forças coplanares no eixo  $X$   $n_x$ , no eixo  $Y$   $n_y$  e a força de cisalhamento nos eixos  $XY$   $n_{xy} = n_{yx}$  por unidade de comprimento.

Os esforços normais e tangenciais apresentados anteriormente são comumente chamados de esforços de membrana. Os incrementos destas forças internas, atuando no lado mais próximo do elemento, são expressos pelos primeiros termos da expansão em série de Taylor com truncamento no segundo termo.

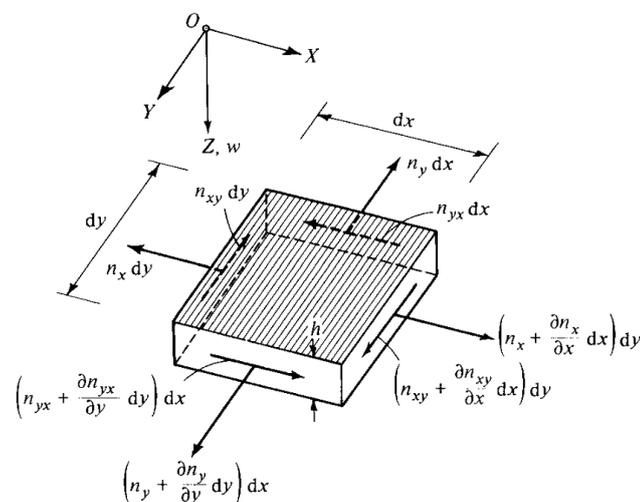


Figura 2.11 - Elemento de placa submetido a um sistema de forças (Fonte: SZILARD, 2004).

Dado que não existem forças de volume em  $X$  e  $Y$ , a projeção das forças de membrana sobre o eixo  $X$  é dada por:

$$\left( n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) dy - n_x dy + \left( n_{yx} \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - n_{yx} dx = 0 \quad (2.48)$$

Simplificando a Eq. (2.48) tem-se:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.49)$$

De maneira similar é obtida a relação das forças no eixo  $Y$ :

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \quad (2.50)$$

As Eqs. (2.49) e (2.50) formam um sistema de equações diferenciais de equilíbrio homogêneas. Quando  $t$  permanece constante, as Eqs. (2.49) e (2.50) podem ser reduzidas a:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.51)$$

onde  $\Phi(x,y)$  representa uma função de Airy, de forma que:

$$n_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad n_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \text{ e } n_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.52)$$

Em seguida, considera-se o equilíbrio do elemento  $dx dy$  na direção do eixo  $Z$ . Por uma questão de simplicidade, assume-se que os lados mais distantes do elemento de placa são fixos e se encontram no plano  $XY$  (Fig. 2.12).

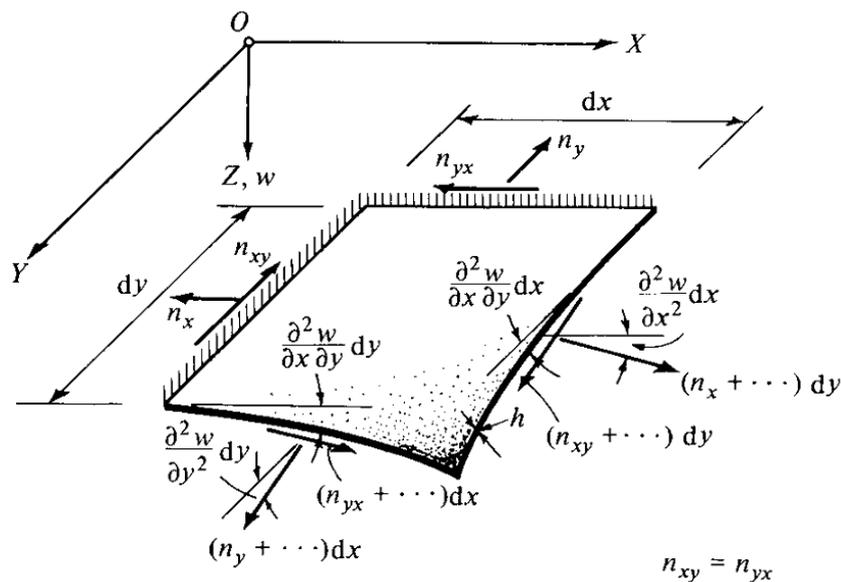


Figura 2.12 - Forças de membrana em um elemento de placa deformado (Fonte: SZILARD, 2004).

A projeção das forças de membrana sobre o eixo  $Z$  dá:

$$\begin{aligned} \sum F_z = & \left( n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left( n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \\ & + \left( n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \left( n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \end{aligned} \quad (2.53)$$

Após as devidas simplificações e desconsiderando-se os termos de ordem superior se tem:

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p_z^*(x, y) \quad (2.54)$$

O efeito das forças no plano pode ser considerado com uma carga lateral fictícia  $p_z^*$  que atua sobre a placa. Ao somar esta parcela fictícia de carga lateral com a Eq. (2.31) encontra-se:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y) + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.55)$$

Ou usando a função de tensão de Airy definidas na Eq. (2.52) tem-se:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.56)$$

Se as forças coplanares não são conhecidas, a solução da Eq. (2.51) pode ser obtida apenas quando uma equação diferencial adicional, que expressa a relação entre a função de tensão de Airy  $\Phi(x, y)$  com a função que define os deslocamentos transversais  $w(x, y)$ , for utilizada. Neste caso, o problema pode ser resolvido por iteração. Caso não seja possível, deve-se utilizar algum método numérico, como o Método dos Elementos Finitos, por exemplo.

### 2.6.3 Determinação da carga crítica de placas pelo Método do Equilíbrio

No Método de Equilíbrio, assume-se que a placa possui uma ligeira deflexão. É de fundamental importância que a equação diferencial de equilíbrio seja escrita para esta situação deformada.

Assim, a equação de equilíbrio é obtida considerando a flexão simultânea e alongamento da placa. Quando as cargas coplanares das bordas são ligeiramente superiores à carga crítica, os desvios laterais  $w$  se aproximam de valores muito grandes, independentemente de quão pequeno se torna o aumento das cargas nos extremos. A menor carga correspondente a essa condição é a carga crítica.

Investiga-se agora uma placa retangular plana submetido à ação de forças coplanares, sendo  $\bar{n}_x$ ,  $\bar{n}_y$  e  $\bar{n}_{xy}$  aplicadas nas fronteiras da superfície média, como mostrado na Fig. 2.13.

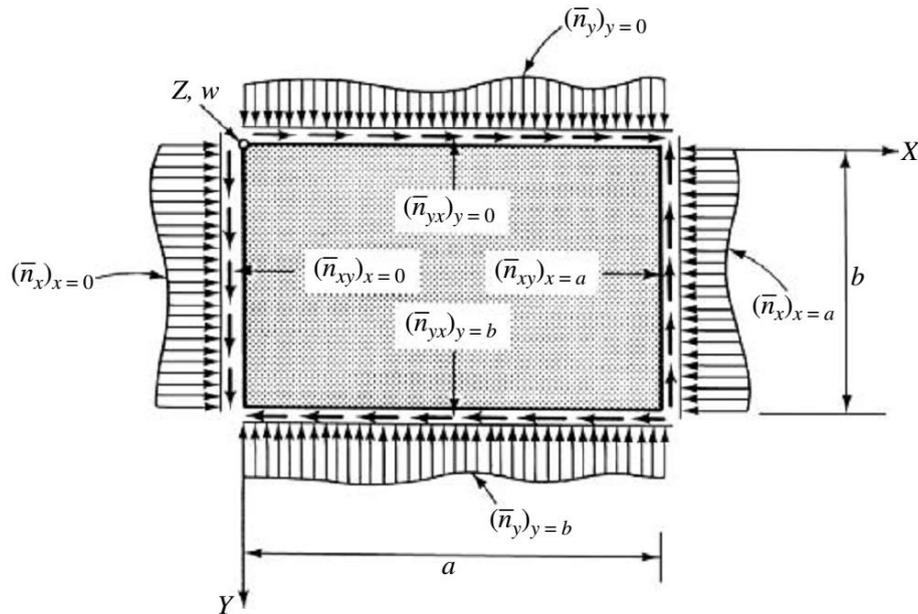


Figura 2.13 - Placa submetida a esforços distribuídos em seus bordos (Fonte: SZILARD, 2004).

Especificando as forças do bordo pela sua magnitude relativa, e não por seu valor absoluto, é possível escrever:

$$\bar{n}_x = -\lambda \bar{n}_{x0}, \quad \bar{n}_y = -\lambda \bar{n}_{y0} \quad \text{e} \quad \bar{n}_{xy} = -\lambda \bar{n}_{xy0} \quad (2.57)$$

onde o fator comum  $\lambda$  é o fator de carga. Um aumento gradual deste fator resulta em um conseqüente aumento de cargas coplanares das bordas, fazendo com que o equilíbrio da placa deixe de ser estável, alcançando assim o equilíbrio neutro. Durante o estado neutro de equilíbrio, a placa encontra-se no modo de deformação em pleno ponto de bifurcação. A partir do ponto de bifurcação, ocorrem deslocamentos transversais  $w$ , mesmo sem o carregamento transversal  $p_z$ . Além disso, a superfície média da placa, que inicialmente era plana, passa a apresentar uma curvatura.

Como a carga transversal é igual à zero, a equação diferencial para o estado de equilíbrio neutro, Eq. (2.55), transforma-se na equação diferencial homogênea:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{D} \left( \bar{n}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{n}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \bar{n}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.58)$$

Substituindo as Eqs. (2.57) na Eq. (2.58), obtém-se uma forma alternativa para a equação diferencial governante da instabilidade elástica de placas:

$$\nabla^4 w + \frac{\lambda}{D} \left( \bar{n}_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{n}_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \bar{n}_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (2.59)$$

Assim, a determinação da carga crítica de uma placa consiste em definir o menor valor do fator de carga  $\lambda$ , para o qual a placa atinja o estado de equilíbrio neutro, de forma a ocorrer a

bifurcação do modo de deformação da mesma. Em outras palavras, que a placa seja capaz de atingir o equilíbrio na forma de uma superfície com uma leve curvatura.

A Equação (2.59) é de caráter diferencial homogêneo de modo que o fator de carga  $\lambda$  multiplica apenas os valores de ordem inferior das derivadas. A solução para esta equação, em termos matemáticos, é denominada solução de um problema de autovalores. Sendo assim, o resultado do problema deve satisfazer a Eq. (2.59) e as condições de contorno propostas.

#### 2.6.4 Flambagem elástica de uma placa

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), a flambagem ou instabilidade elástica de placas é de grande importância prática. A carga de flambagem depende da espessura da chapa: quanto mais fina a placa, menor é a carga de flambagem. Em muitos casos, a falha de placas finas pode ser atribuída a uma instabilidade elástica e não à capacidade de carga. Assim, a análise de flambagem em placas apresenta uma grande importância nos estudos de elementos estruturais.

De acordo com Ugural (1981), a equação diferencial da superfície elástica de flambagem de uma placa comprimida uniaxialmente, que foi definida por Saint-Venant (1883), pode ser obtida matematicamente pela Eq. (2.58). A tensão crítica elástica de uma placa fina é determinada pela relação largura-espessura  $b/t$ , pelas condições de contorno ao longo da borda, e pelas propriedades do material elástico: módulo de elasticidade ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). A tensão crítica elástica é expressa como:

$$\sigma_{cr} = K_q \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (2.60)$$

sendo  $t$  a espessura da placa,  $b$  sua largura e  $K_q$  o coeficiente de flambagem da placa, dado por:

$$K_q = \left( \frac{m b}{n a} + \frac{n a}{m b} \right)^2, \text{ para } m=1,2,3, \dots \quad (2.61)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $m$  e  $n$  são, respectivamente, o comprimento da borda longitudinal descarregada, comprimento da borda transversal carregada, o número de semi-ondas durante a flambagem na direção de  $\sigma_{cr}$ , e na direção transversal à  $\sigma_{cr}$  que é considerado igual a 1, ou seja, formando apenas uma semi-onda transversal.

O valor do coeficiente de flambagem  $K_q$  da placa de acordo com Ziemian (2010) é determinado por uma análise teórica de carga crítica. Sendo assim o coeficiente  $K_q$  depende da geometria da placa e das condições de contorno a ela submetidas, tais como aqueles mostrados na Fig. 2.14.

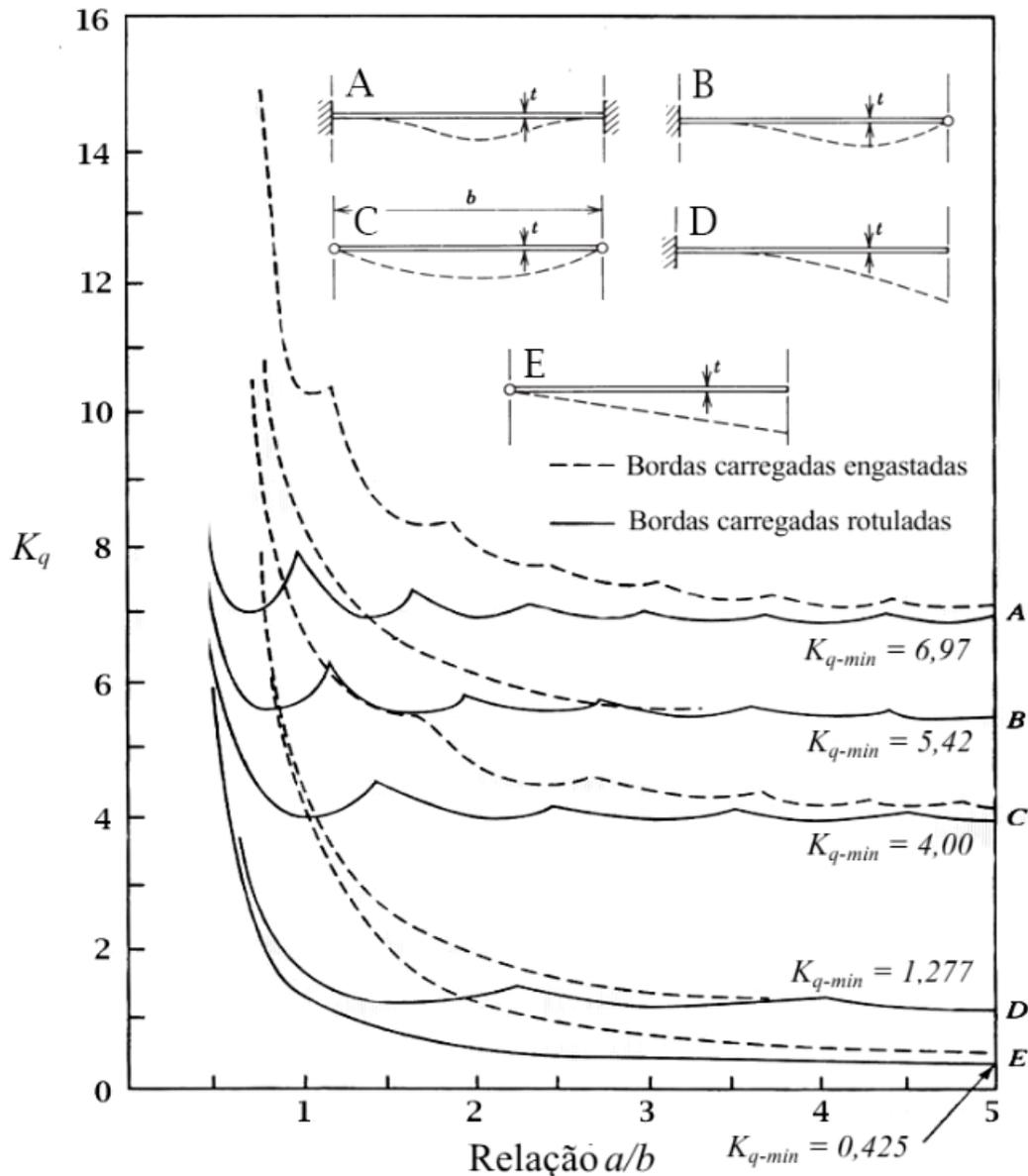


Figura 2.14 - Valores de  $K_q$  para os tipos usuais de condições de contorno de placas (Fonte: SALMON e JOHNSON, 1990).

Para uma placa simplesmente apoiada, para qualquer valor de  $m$ , o valor  $K_q$  tende para um valor mínimo (sendo neste caso  $K_q = 4$ ), independentemente do tipo de vinculação na borda transversal. Adotando-se então este valor, sempre que se tiver a condição de contorno rotulada-rotulada na placa (TRAHAIR E BRADFORD, 1988; SALMON E JOHNSON, 1990).

### 2.6.5 Flambagem inelástica e elasto-plástica de uma placa

De acordo com Ziemian (2010), as tensões elásticas críticas de flambagem das placas, ou os correspondentes coeficientes de flambagem ( $K_q$ ) são fundamentais para a compreensão do comportamento de placas finas. No entanto, as tensões críticas elásticas de flambagem não representam diretamente o comportamento real que pode ocorrer nas placas, uma vez que o material e os efeitos geométricos influenciam diretamente no comportamento das mesmas.

É comum, embora artificial, usar a tensão crítica elástica para determinar as diferentes formas de flambagem da placa. Ainda segundo Ziemian (2010), quando o escoamento do material ocorre antes da tensão crítica elástica de flambagem, isto é conhecido como flambagem inelástica. Tensões em magnitudes maiores que a tensão crítica de flambagem elástica, e as deformações associadas que ocorrem sob tal carga, são denominadas pós-flambagem, podendo essas serem elásticas ou inelásticas. Finalmente, refere-se à tensão última como sendo o valor máximo de tensão que a placa pode suportar, tipicamente independente da deformação, o qual pode ser bastante grande.

### 2.6.6 Resistência pós-flambagem

Uma placa fina esbelta não apresenta situação de colapso no momento da flambagem elástica, podendo esta suportar cargas significativamente maiores que sua carga crítica, mantendo seu estado de deformação não alterado de forma excessiva. Trahair e Bradford (1988) analisaram esse comportamento e comparou-o ao de uma barra elástica comprimida que consegue suportar apenas um pequeno aumento de carga antes que sua deformação seja excessiva. Situação que é mostrada na Fig. 2.15.

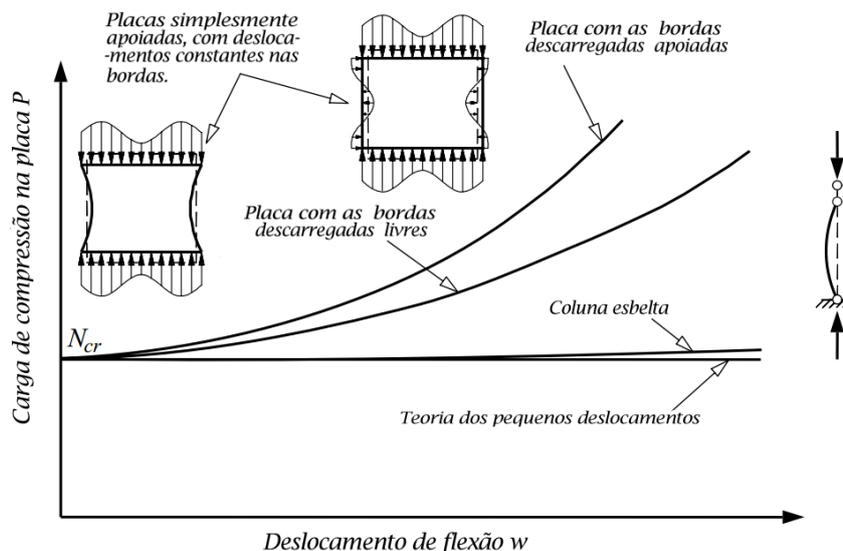


Figura 2.15 - Comportamento pós-flambagem de placas elásticas esbeltas (Fonte: TRAHAIR E BRADFORD, 1988).

Sendo assim, a capacidade de carga pós-flambagem admite a adição de um novo carregamento mesmo após a ocorrência da flambagem local, ou seja, o colapso da peça não ocorre ao se atingir a carga crítica de flambagem, mas sim em um grau de carga mais elevado. Essa premissa é adotada no projeto do estado limite último de placas, fazendo com que a capacidade máxima das placas sob compressão axial seja definida como o somatório da carga de flambagem e da carga pós-crítica adicional.

Pode-se inferir da Fig. 2.15 que a placa possui a capacidade de suportar um incremento de carga mesmo após a flambagem elástica. E, de acordo com Åkesson (2007), pode-se também presumir que a placa não sofre colapso no ponto de bifurcação, ou seja, no estado de equilíbrio neutro. Este fato pode ser explicado pela formação de uma membrana que estabiliza a flambagem a através de uma faixa de tensão transversal.

A eficiência desse efeito estabilizante cresce do centro para as bordas longitudinais apoiadas da placa, conforme indica a Fig. 2.20. Para isso, é habitual admitir, de forma conservadora, que o colapso da placa ocorrerá quando a tensão máxima atuante ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ) for igual à tensão de escoamento do material ( $\sigma_y$ ). Porém, a obtenção do valor da carga última real da placa depende do conhecimento, em nada trivial, da forma de distribuição dessa tensão atuante (MAQUOI, 1992).

Segundo Åkesson (2007), o fato de que grande parte da carga é transportada para regiões da placa nas imediações das extremidades, surge a hipótese simplificadora de que a tensão máxima na borda age de maneira uniforme ao longo de duas faixas da placa.

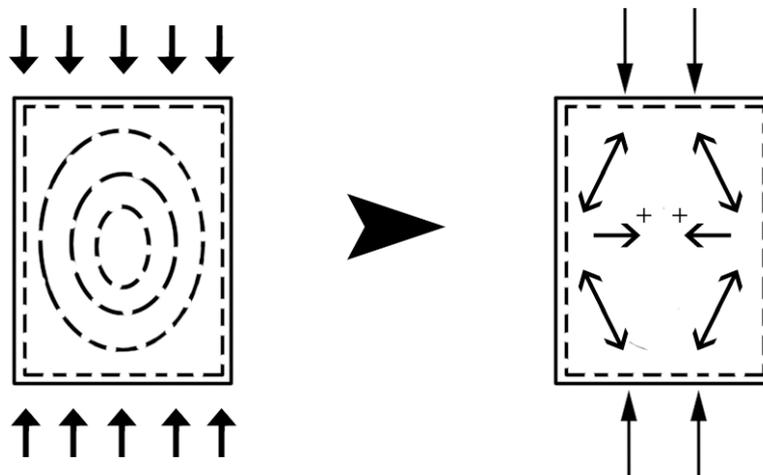


Figura 2.16 - Sistema de redistribuição de carga no estado limite último (Fonte: ÅKESSON, 2007).

De acordo com Ziemian (2010), uma compressão uniforme na direção longitudinal da placa, resulta em uma distribuição de tensões não-uniforme pós-flambagem (Fig. 2.17). Além disso, a placa flambada deriva quase toda a sua rigidez dos suportes dos bordo longitudinais.

A capacidade máxima de carga redistribuída, segundo Ziemian (2010), é regida pela deformação das zonas de borda mais rígidas que já atingiram o escoamento, como foi sugerido por Von Kármán em 1932. O fato de que parte da carga é transportada para a região das imediações das extremidades da placa, surge a hipótese simplificadora de que a tensão máxima age na borda de maneira uniforme ao longo de duas faixas de placa de modo que a região central possui uma carga não acentuada (Fig. 2.17). Considerando uma placa na faixa pós-crítica, o mesmo introduziu o método

da largura efetiva ( $b_e$ ), sendo essa largura definida como a largura de uma placa fictícia, simplesmente apoiada, com mesma espessura e mesma razão entre os lados que a placa real e que flamba para uma tensão crítica igual à tensão de escoamento  $\sigma_y$ .

O conceito de largura efetiva é aplicado substituindo-se o valor médio da tensão  $\sigma_{máx}$  atuante na largura  $b$ , pelo valor  $\sigma_y$  aplicado na largura  $b_e$ , conforme ilustra a Fig. 2.17, de modo que a carga última é calculada então com base nessa área efetiva igual a  $b_e \cdot t$ .

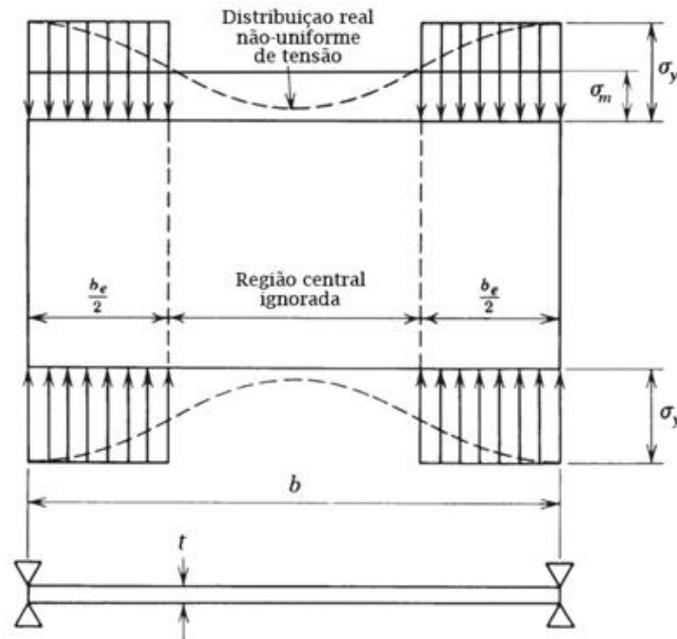


Figura 2.17 - Largura efetiva de placas apoiadas em ambas as bordas longitudinais (Fonte: ZIEMIAN, 2010).

Para placas sob compressão uniforme, enrijecidas ao longo de ambas as bordas paralelas à direção da força de compressão aplicada, von Kármán (1932) desenvolveu a seguinte fórmula aproximada para a largura efetiva:

$$b_e = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} t \quad (2.62)$$

A largura efetiva depende do módulo de elasticidade do material e é proporcional à espessura da chapa. A carga total da placa pode ser expresso em duas formas:

$$P_{ult} = b_e \sigma_y = b \sigma_m \quad (2.63)$$

Pela Equação (2.63) e Fig. 2.17, a tensão média é:

$$\sigma_m = \frac{b_e}{b} \sigma_y \quad (2.64)$$

onde  $\sigma_m = \sigma_{ult}$  é a tensão média na extremidade carregada em seu ponto de resistência máxima. Substituindo a Eq. (2.62) na Eq. (2.64), tem-se:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{b_e}{b} = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} = 1,90 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \quad (2.65)$$

O grupo de parâmetros

$$\beta = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad (2.66)$$

é referido como o índice de esbeltez da placa. Usando o parâmetro  $\beta$ , a tensão última da placa normalizada pela tensão de escoamento é:

$$\frac{\sigma_{ult}}{\sigma_y} = \frac{1,90}{\beta} \quad (2.67)$$

Além disso, a relação da tensão crítica elástica do material pela sua tensão de escoamento fornece:

$$\frac{\sigma_{crt}}{\sigma_y} = \left( \frac{1,90}{\beta} \right)^2 \quad (2.68)$$

As funções apresentadas nas Eqs. (2.67) e (2.68) são plotadas na Fig. 2.18.

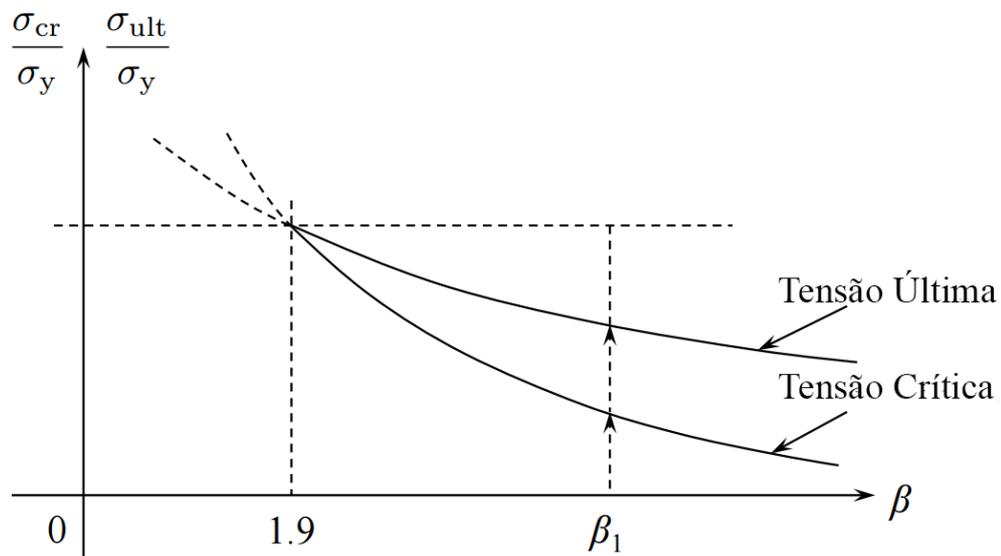


Figura 2.18 - A dependência da tensão crítica e tensão última sobre a esbeltez. (Fonte: ZIEMIAN, 2010).

A partir da figura é possível identificar o índice de esbeltez crítico:

$$\beta_{cr} = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1,90 \quad (2.69)$$

quando ambas a carga última, quanto a carga crítica alcançam o escoamento. Isolando o índice de esbeltez nas Eqs. (2.67) e (2.68) e igualando-as, tem-se a equação da tensão última proposta por Ramberg et al. (1939):

$$\sigma_{ult} = \sqrt{\sigma_{cr}\sigma_y} \quad (2.70)$$

Através da Eq. (2.65) nota-se que a largura efetiva é diretamente proporcional à raiz do módulo de elasticidade do material, e também à espessura da placa, mostrando que esses parâmetros são diretamente proporcionais à rigidez das zonas de borda. Dessa forma é possível se controlar a capacidade de transporte de carga anterior à flambagem (CORREIA, 2013). Ainda observando a Eq. (2.65) nota-se que a largura efetiva é inversamente proporcional à raiz limite da elasticidade de  $\sigma_y$ . Porém, um aumento do limite de elasticidade ocasiona uma redução da largura efetiva, a critério de compensar a resistência.

Seguindo ainda a hipótese de von Kármán, pode-se afirmar que a largura efetiva da placa não é dependente de sua largura teórica. Conforme a Fig. 2.19, se a largura placa for aumentada, a capacidade máxima de suporte de carga permanece constante, consequentemente, sua largura efetiva também.

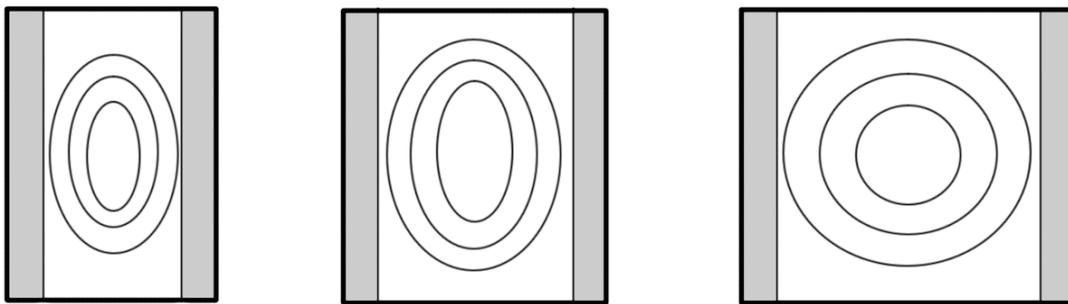


Figura 2.19 - Largura efetiva constante para diferentes larguras de placas (Fonte: ÅKESSON, 2007).

A Figura 2.19 permite constatar que, quanto maior a largura da placa, maior sua curvatura. Dessa forma é possível manter a largura efetiva constante. Além disso, a tensão crítica de flambagem diminui com o aumento da largura, porém, a capacidade máxima de suporte de carga permanece constante.

## 2.7 Flambagem de Placas com Enrijecedores

De acordo com Szilard (2004), as cargas relativamente baixas que uma placa pode suportar sem sofrer flambagem podem ser consideravelmente aumentadas pela adição de enrijecedores. Porém, além do aumento da carga crítica, a inclusão de enrijecedores em uma placa causa também uma maior complexidade para sua análise devido ao aumento do número de variáveis. Além disso, os modos de flambagem são normalmente mais complexos. Consequentemente, na prática da engenharia, equações simplificadas e gráficos são utilizados para o projeto de placas.

Ainda segundo Szilard (2004), enquanto enrijecedores longitudinais dispostos paralelamente às cargas coplanares suportam parte da força aplicada, enrijecedores transversais são usados

meramente para subdividir a placa em unidades menores, uma vez que, a carga suportada por ele é relativamente pequena. Combinações de enrijecedores paralelos e transversais resultam em placas com enrijecedores ortogonais. Os perfis estruturais convencionais usados para enrijecedores são angulares, em forma de canais e seções T normais ou invertidas. Em estruturas aeroespaciais perfis Z, U e Y também são comuns (Fig. 2.19).



Figura 2.20 - Seções típicas para enrijecedores (Fonte: SZILARD, 2004).

Ainda segundo Szilard (2004), na análise da estabilidade de placas enrijecidas, usualmente duas formas de flambagem são consideradas. Um modo possível é a flambagem local da placa entre os enrijecedores, desde que a placa seja reforçada com nervuras resistentes. No segundo caso, uma flambagem global da combinação de placa-enrijecedor ocorre.

Em algumas estruturas pode-se necessitar que uma flambagem local da placa ocorra primeiramente, sem a distorção das nervuras em si. Nesse caso, há pouca interação entre a placa e os enrijecedores, os enrijecedores meramente definem os modos de flambagem das placas. Consequentemente, o problema é reduzido a encontrar a carga crítica dos painéis não enrijecidos e determinar a mínima rigidez de flexão dos enrijecedores que confere a flambagem precoce da placa.

Considerando apenas a geometria do enrijecedor, aplicando uma carga de compressão axial no mesmo, a carga crítica pode ser determinada pela fórmula apropriada para a flambagem de colunas, a qual segundo Hibbeler (2010) é dada por:

$$(P_{cr})_s = \frac{\pi^2 EI_s}{l_{ef}^2} \quad (2.71)$$

Sendo a tensão crítica para o enrijecedor  $(\sigma_{cr})_s$ , com extremidades simplesmente apoiadas, dada por:

$$(\sigma_{cr})_s = \frac{\pi^2 EI_s}{l_{ef}^2 A_s} \quad (2.72)$$

Nas propriedades estruturais dos enrijecedores,  $A_s$  e  $I_s$ , são respectivamente, a área do enrijecedor e seu momento de inércia.

Um projeto mais econômico pode ser obtido se forem permitidas flambagens local e global simultâneas e aproximadamente sob o mesmo nível de tensão. Consequentemente, na análise da estabilidade elástica de placas enrijecidas, a interação estrutural entre a placa e os enrijecedores pode ser levada em conta. Se a placa é reforçada com muitos enrijecedores de mesmo tamanho, paralelos

e igualmente espaçados esse arranjo pode ser aproximado pela teoria das placas ortotrópicas. Além desse caso geral, problemas mais específicos, como as placas reforçadas com três ou menos nervuras, precisam ser tratados. Sendo assim, não há diferenças marcantes na carga crítica se o número de enrijecedores é infinito ou maior que três (SEIDE e STEIN, 1949; RATZERSDOFER, 1942).

### 2.7.1 Flambagem em placas com um enrijecedor longitudinal

De acordo com Timoshenko e Gere (1963) e Bares (1981) é possível se obter a solução analítica para a tensão crítica em uma placa na presença de enrijecedores. Em seus estudos, os mesmos apresentam equações e tabelas, que variam mediante as condições de contorno da placa, carregamento e número de reforços, as quais permitem a solução analítica de painéis enrijecidos.

Para a situação de uma placa com um enrijecedor longitudinal, como visto na Fig. 2.21, Timoshenko e Gere (1963) propõem soluções simplificadas.

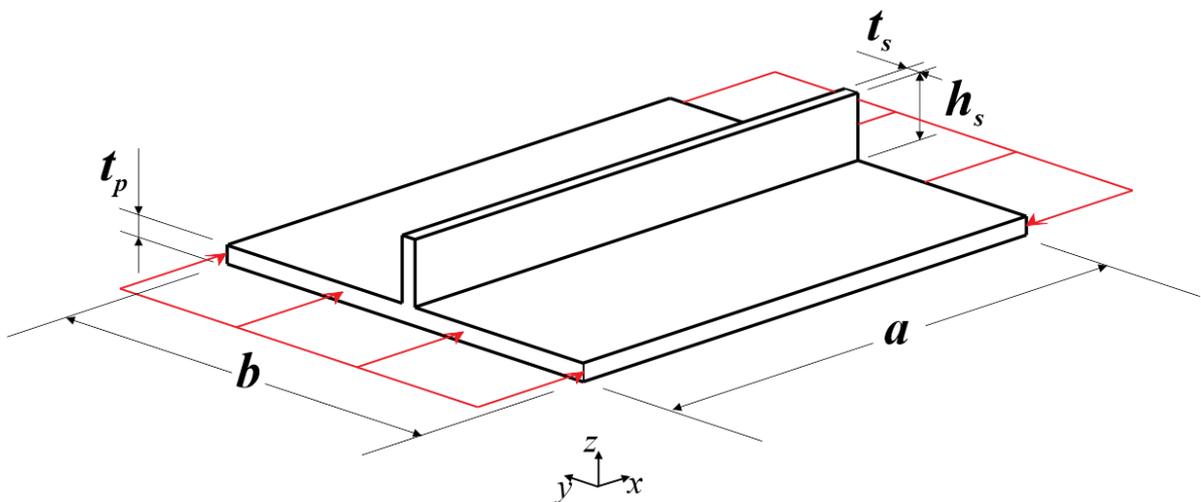


Figura 2.21 - Esquema geométrico para uma placa com um enrijecedor longitudinal.

Portanto, a solução analítica proposta pela literatura para determinar a tensão crítica de uma placa retangular simplesmente apoiada na presença de um enrijecedor é dada por:

$$\sigma_{cr} = K_q \frac{\pi^2 D}{t_p b^2} \quad (2.73)$$

onde  $t_p$  é a espessura da placa com enrijecedores,  $b$  sua largura e  $K_q$  o coeficiente de flambagem da placa e  $D$  a rigidez à flexão do material dado na Eq. (2.30). Pode-se perceber a semelhança entre a Eq. (2.73) e a Eq. (2.60) proposta para uma placa sem a presença de enrijecedores. Porém na Eq. (2.69), o fator  $K_q$  dependerá das propriedades geométricas tanto da placa, quanto do enrijecedor. Além disso, para se determiná-lo, faz-se necessário o cálculo dos seguintes parâmetros:

$$\beta = \frac{a}{b} \quad (2.74a)$$

$$\delta = \frac{t_s h_s}{b t_p} \quad (2.74b)$$

$$\gamma = \frac{EI}{bD} \quad (2.74c)$$

De acordo com a Fig. 2.20 e a Eq. (2.70),  $a$  é o comprimento da placa enrijecida,  $t_s$ ,  $h_s$  e  $I$  são, respectivamente, a espessura, altura da alma do enrijecedor e seu momento de inércia.

Tendo os parâmetros da placa, o fator  $K_q$  pode ser calculado a partir da seguinte equação:

$$(K_q \beta_2)^2 (1 + 4\delta) - (K_q \beta_2)^2 [(1 + 2\delta)(c + d) - 8\gamma\delta] + cd - 4\gamma^2 = 0 \quad (2.75)$$

onde os parâmetros  $c$  e  $d$  são utilizados como fator de redução de equação e podem ser expressos por:

$$c = (1 + \beta^2)^2 + 2\gamma \quad \text{e} \quad d = (1 + 9\beta^2)^2 + 2\gamma \quad (2.76)$$

O Anexo A fornece tabelas que facilitam a obtenção de  $K_q$ , de forma que os valores de  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  estejam dentro dos limites da tabela de valores para  $K_q$ .

### 2.7.2 Flambagem em placas com dois enrijecedores longitudinais

Quando uma placa possui dois enrijecedores longitudinais idênticos e equidistantes dividindo a placa em três partes iguais (Fig. 2.22), Timoshenko e Gere (1963) propõem que a equação da tensão crítica pode ser obtida definida como:

$$\sigma_{cr} = K_q \frac{\pi^2 D}{t_p b^2} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 3\gamma}{\beta^2 (1 + 3\gamma)} \quad (2.77)$$

sendo os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  obtidos pela Eqs. (2.74a) e (2.74c),  $a$ ,  $b$  e  $t_p$ , respectivamente, o comprimento, a largura e espessura da placa, e  $t_s$  e  $h_s$ , respectivamente, a espessura e altura dos enrijecedores.

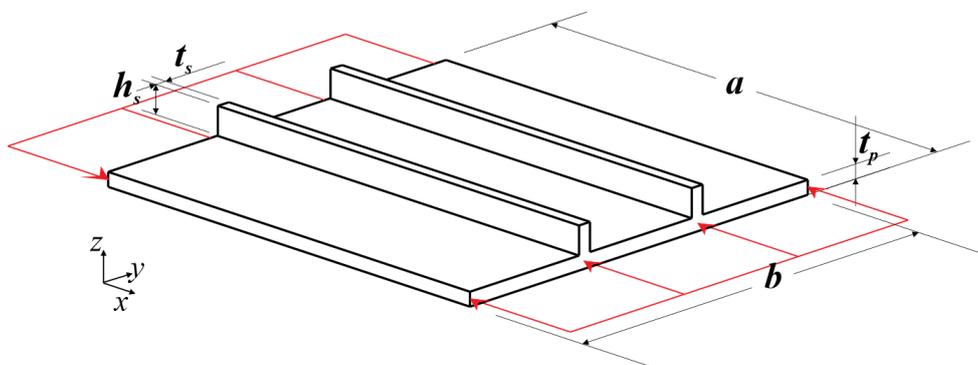


Figura 2.22 - Esquema geométrico para uma placa com dois enrijecedores longitudinais.

A Equação (2.77) tem a mesma estrutura que a Eq. (2.63), que foi definida para o caso de da placa com um enrijecedor. Vários valores do fator numérico  $K_q$  são dados na tabela presente no Anexo B. Utilizando a Eq. (2.70a), é possível estabelecer em cada caso particular, o valor de  $\beta$  em que o fator  $K_q$  presente na Eq. (2.73) torna-se mínimo.

### 2.7.3 Flambagem em placas com um enrijecedor transversal

Este caso é exemplificado na Fig. 2.23, onde tem-se  $a$ ,  $b$  e  $t_p$  sendo, respectivamente, o comprimento, a largura e espessura do painel, enquanto  $t_s$  e  $h_s$  são, respectivamente, a espessura e a altura do enrijecedor.

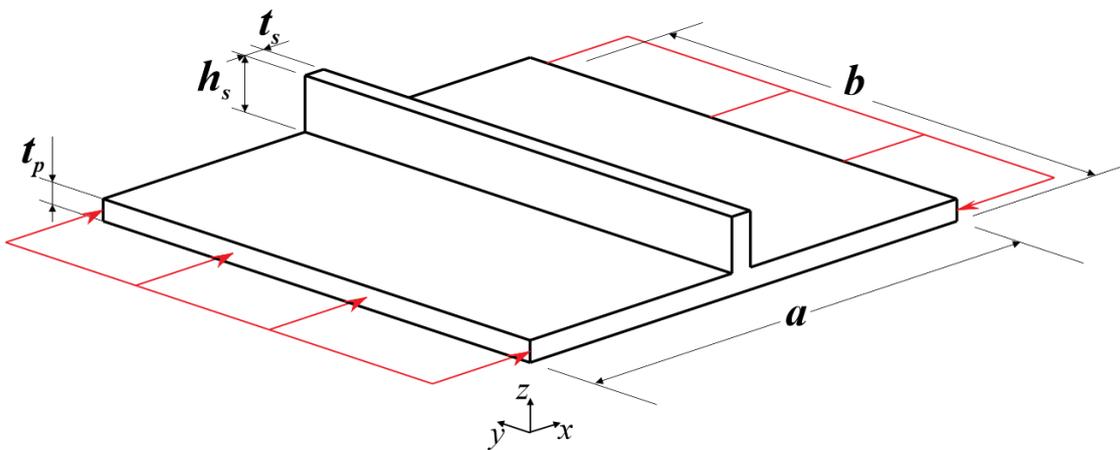


Figura 2.23 - Esquema geométrico para uma placa com um enrijecedor transversal.

Timoshenko e Gere (1963) propõem uma equação aproximada para a tensão crítica como sendo:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D (m^2 + \beta^2)^2 + r\gamma\beta^2}{t_p b^2 \beta^2 m^2} \quad (2.78)$$

onde que  $r - 1$  representa o número de enrijecedores e  $m$  o número de meias ondas. Em cada caso particular  $m$  deve ser escolhido de forma a tornar o valor da tensão crítica obtido pela Eq. (2.78) mínimo. No caso de uma placa comparativamente curta em que existe apenas uma nervura transversal que atravessa a mesma, assume-se como uma primeira aproximação para a tensão:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D (1 + \beta^2)^2 + 2\gamma\beta^2}{t_p b^2 \beta^2} \quad (2.79)$$

A Equação (2.79) mostra como a tensão crítica é afetada pela presença do enrijecedor se a placa flamba em uma meia onda.

### 2.7.4 Flambagem em placas ortotrópicas

Szilard (2004) apud Wittrick (1952) apresentou uma solução aproximada para uma placa na presença de enrijecedores longitudinais e transversais baseando-se na Teoria de Placas Ortotrópicas. Quando o número de reforços paralelos em uma ou ambas as direções principais de uma placa é grande, a carga crítica da placa enrijecida pode ser aproximada assumindo que a mesma atua como uma placa rígida ortotrópica homogênea (Fig. 2.24).

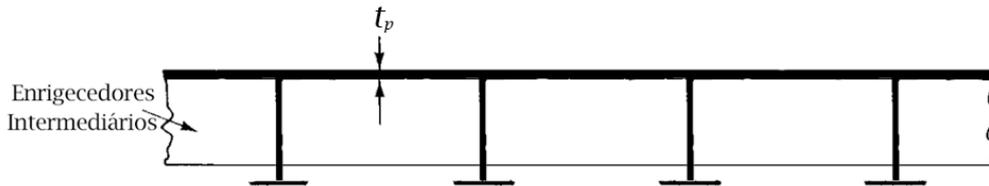


Figura 2.24 - Placa com enrijecedores armados em duas direções (Fonte: SZILARD, 2004).

Para este caso, se tem a seguinte equação diferencial de estabilidade elástica:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \lambda \left( \bar{n}_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{n}_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{n}_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (2.80)$$

Se possível, a rigidez à flexão em  $X$  e em  $Y$  e a rigidez à torção, respectivamente representados por  $D_x$ ,  $D_y$  e  $B$  devem ser determinadas por testes. Valores de referência para estas propriedades, para uma placa isotrópica reforçada com enrijecedores paralelos simetricamente distribuídos em ambos os lados da superfície média, conforme a Fig. 2.25, são:

$$B \approx D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{EI_y}{c_2} \quad (2.81)$$

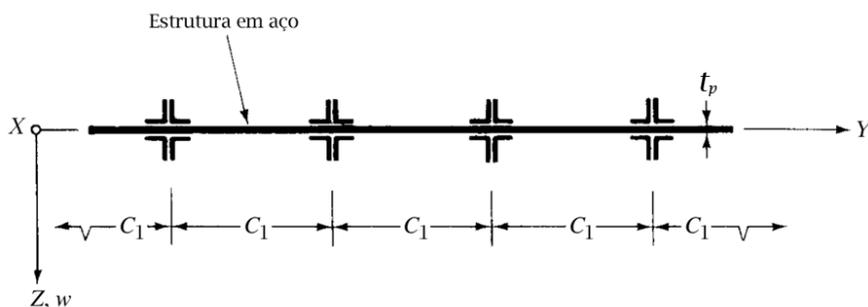


Figura 2.25 - Seção da placa reforçada com vários reforços na direção  $X$ . (Fonte: SZILARD, 2004).

Caso os reforços estejam dispostos nas duas direções, essas equações podem ser escritas da forma:

$$D_x = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{EI_x}{c_1}, \quad B = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)} \quad e \quad D_y = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{EI_y}{c_2} \quad (2.82)$$

onde que  $I_x$  e  $I_y$  são os momentos de inércia das nervuras considerando como referência a superfície média da placa, e  $c_1$  e  $c_2$  representam os espaçamentos dos enrijecedores nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Utilizando a Eq. (2.76), o menor fator de carga requerida ( $\lambda_{min} = \lambda_{cr}$ ) pode ser determinado quer por método variacional de Galerkin ou por técnicas de diferenças finitas comumente aplicáveis.

Wittrick (1952) derivou cargas críticas de placas retangulares reforçadas com diferentes condições de contorno utilizando a idealização do problema de placas ortotrópicas. Se os reforços longitudinais são flexíveis o suficiente para permitir a flambagem global da placa, conseqüentemente, a tensão crítica pode ser estimada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t_p}{b} \right)^2 \left\{ 1 + \left[ 1 + 12(1-\nu^2) \frac{I_x}{c_1 t_p^3} \right]^{1/2} \right\} \quad (2.83)$$

assumindo-se que os reforços longitudinais se encontram na direção  $X$ .

### 3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

A modelagem computacional simula diversos fenômenos físicos utilizando uma metodologia envolvendo engenharia, matemática e ciência da computação. Os fenômenos físicos podem ser os mais variados, indo da simulação estrutural à simulação de fluidos e gases, ou até mesmo circuitos elétricos. A simulação numérica consiste em uma técnica que avalia o comportamento de um determinado sistema por meio de modelos computacionais, que reproduzem na totalidade ou em parte as propriedades e comportamentos do sistema, permitindo assim sua manipulação e estudo detalhado (KARDESTUNDER e NORRIE, 1987; ZIENKIEWICZ, 1971).

A modelagem computacional realiza a simulação de soluções para problemas científicos, analisando os fenômenos e desenvolvendo modelos matemáticos para sua descrição, além de elaborar algoritmos computacionais para obtenção dessas soluções. Segundo Maliska (2004), a utilização de modelos numéricas para a solução de problemas complexos da engenharia e da física é hoje uma realidade, devido ao desenvolvimento de potentes computadores com grande capacidade de armazenamento de dados. Em função disso, se torna possível o avanço e crescimento em relação ao desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas. Além disso, a versatilidade e generalidade dos métodos numéricos para simulação de problemas de engenharia, e a relativa simplicidade de aplicação dessas técnicas, são outros fatores motivadores para seu uso.

O estudo de estruturas, analisando principalmente tensões e deformações mecânicas, através de simulações computacionais, é conhecido como Mecânica dos Sólidos Computacional. Os softwares comerciais para a Mecânica de Sólidos Computacional tornam-se atrativos pois apresentam sofisticadas interfaces aos usuários, facilitando a definição e a solução do problema e a análise dos resultados.

É comum no contexto da engenharia, surgirem problemas em que a análise de uma estrutura possui condições de carregamento e geometria complexas, tornando impossível a determinação de suas soluções analíticas. Estes problemas são resolvidos com a aplicação de métodos numéricos que permitem a definição da solução aproximada com boa precisão. No presente trabalho foi empregado o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise estrutural de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica devido a uma carregamento de compressão uniaxial.

Além disso, a aplicabilidade do processo de modelagem e simulação em modelos de um sistema real ou idealizado para o estudo de problemas reais de natureza complexa, permite testar diferentes alternativas a fim de encontrar e propor melhores formas geométricas que visem à otimização do sistema como um todo.

Atualmente, existe uma gama de programas computacionais dotados de algoritmos específicos para a análise de estruturas através do MEF. Isso implica em uma implementação de um processo numérico completo, compreendendo a formulação matricial dos elementos, sua integração e a solução numérica dos sistemas de equações. Para a realização das simulações numéricas do presente trabalho o software ANSYS, que é baseado no MEF, foi empregado.

### **3.1 O Método dos Elementos Finitos**

De acordo Manrique (1989), métodos numéricos são altamente empregados em análises estruturais. Ao se analisar painéis enrijecidos sob esforços mecânicos, o uso de métodos numéricos é imprescindível, pois os mesmos são praticamente impossíveis de se resolver quando se tenta por meio da aplicação das equações diferenciais da teoria da elasticidade. Para a análise desses problemas, segundo Maki (1968) se procura outros métodos de solução. Uma das alternativas consiste na aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF), resultando em soluções aproximadas para esses problemas.

O MEF, originalmente introduzido por Turner et al. (1956), é uma técnica com elevada capacidade para se ter soluções computacionais aproximadas para uma grande variedade de problemas reais de engenharia, os quais possuem domínios complexos submetidos a diversas condições de contorno.

O MEF baseia-se na decomposição do domínio de integração em um número finito de subdomínios (elementos finitos) transformando o meio contínuo em discreto. A divisão de domínio é nomeada de rede de elementos finitos, onde os pontos de intersecção das linhas dos elementos são denominados nós. Apesar de cada elemento ter o comportamento arbitrado de forma aproximada, a malha dos elementos se comporta de forma semelhante ao contínuo original. Além disso, no modelo de deslocamentos presente no MEF, um campo de deslocamentos nodais é arbitrado, fazendo com que a interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes seja substituída pela interação de forças nodais entre os elementos. Sendo assim, o equilíbrio infinitesimal considerado no modelo matemático do meio contínuo é substituído pelo equilíbrio presente em cada elemento finito, trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas do elemento como um todo (ASSAN, 2003; MADENCI E GUVEN, 2006; SORIANO, 2003).

Segundo Szilard (2004) e Rao (2004), o MEF emprega soluções locais aproximadas para a análise de tensões em placas. Este procedimento é chamado discretização de elementos finitos (apresentado na Fig. 3.1), onde um domínio é dividido em um número finito de elementos, não sobrepostos e interligados por pontos nodais, conforme Fig. 4.28.

O nó especifica a posição do elemento no espaço, além de ser responsável por conectar os elementos discretos. Além disso são nos nós que existem graus de liberdade e as ações do problema

físico. Os graus de liberdade (DOF) de um nó são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento (SZILARD, 2004; RAO, 2004; MADENCI e GUVEN, 2006).

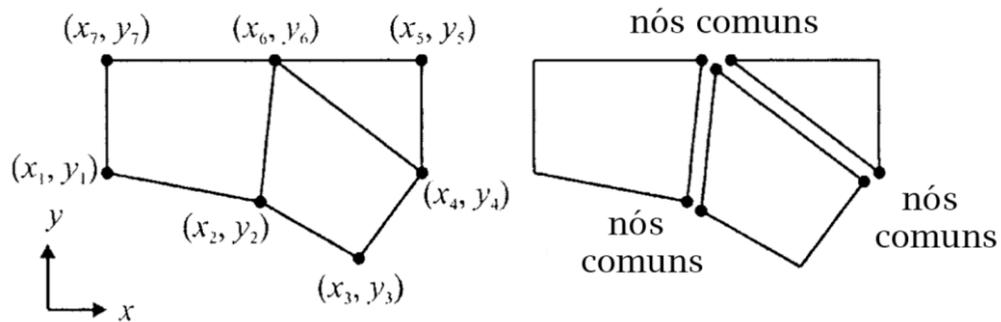


Figura 3.1 - Divisão do domínio em subdomínios (Fonte: MADANCI e GUVEN, 2006)

A determinação dos deslocamentos nodais se dá por um conjunto de equações algébricas de equilíbrio, formando um sistema de equações equivalente à malha utilizada. A solução do sistema pode ser obtida aplicando-se as condições de contorno externas do problema.

Madenci e Guven (2006) apresentam as principais etapas requeridas à utilização do MEF:

- a) Discretização do domínio em um número finito de subdomínios, ou elementos;
- b) Determinação de funções interpoladoras;
- c) Desenvolvimento de uma matriz de elementos para o subdomínio;
- d) Montagem das matrizes de elementos para cada subdomínio, a fim de se obter a matriz global para todo o domínio;
- e) Imposição das condições de contorno;
- f) Solução das equações;
- g) Cálculos adicionais, se necessário.

Em notação matricial, o sistema global, pode ser escrito como:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez do sistema,  $\{U\}$  o vetor de incógnitas, e  $\{F\}$  o vetor força. Dependendo da natureza do problema, a matriz  $[K]$  poderá depender de  $\{U\}$ , isto é  $[K] = [K(U)]$  e  $\{F\}$  pode ser dependente do tempo, sendo  $\{F\} = \{F(t)\}$ .

Dependendo da geometria e das características físicas do problema, o domínio de interesse pode ser discretizado em elementos de linha, área ou volume. Os elementos frequentemente aplicados no MEF são mostrados na Fig. 3.2. Cada elemento, identificado por um número de elemento, é definido por uma sequência específica de números de nós globais. A sequência específica (usualmente no sentido horário) baseia-se na numeração do nó ao nível dos elementos, e é chamada de conectividade (MADENCI e GUVEN, 2006).

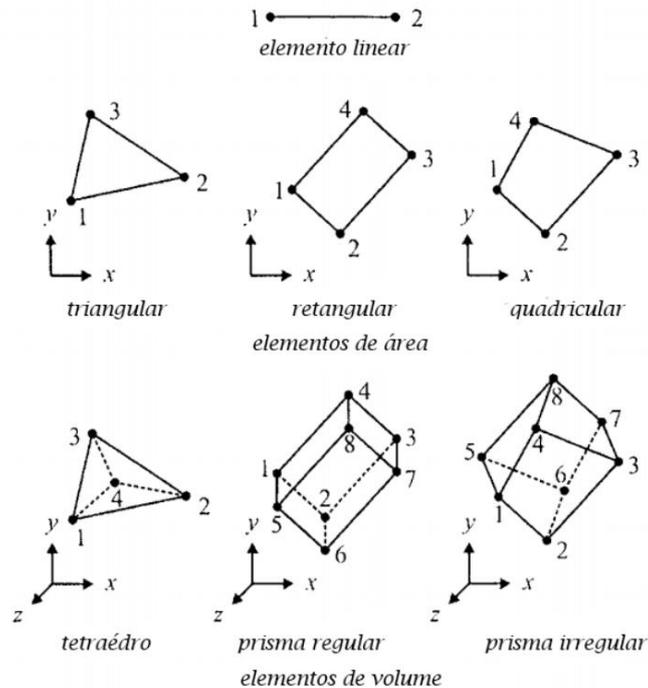


Figura 3.2 - Geometrias de elementos do MEF (Fonte: MADENCI e GUVEN, 2006)

À medida que o tamanho do elemento finito se aproxima da situação do elemento diferencial, os resultados gerados pelo método se comparam favoravelmente com os obtidos a partir de uma análise matemática rigorosa. A partir do momento em que o elemento apresente um tamanho relativamente maior quando comparado ao elemento diferencial, a malha de elementos já não produz resultados equivalentes, mas deve representar uma aproximação (ASSAN, 2003; SORIANO, 2003).

Segundo Teixeira et al. (2009), os erros de aproximação, inerentes aos métodos numéricos, recebem grandes parcelas referentes ao erro devido à discretização do domínio computacional, em outras palavras, o erro devido ao refino da malha adotado.

A teoria básica envolvendo o MEF é bastante difundida, podendo ser encontrada facilmente na literatura como Zienkiewicz (1971), Gallagher (1975), Zienkiewicz e Taylor (1989 e 1991), Kleiber e Hien (1992), Bathe (1996) e Przemieniecki (2009).

### 3.1.1 Modelos computacionais no software ANSYS

Para a análise numérica de flambagem elástica será adotada a análise elástica de autovalores. A solução de equações algébricas homogêneas é utilizada para analisar as equações de equilíbrio por elementos finitos para esse tipo de análise. O autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor a ele associado representa o primeiro modo de flambagem (MADENCI e GUVEN, 2008).

Para essa formulação, segundo Przemieniecki (2009), são considerados tanto os termos lineares como os não-lineares. Assim, tem-se a matriz de rigidez total  $[K]$ , que é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações,  $[K_E]$ , com a matriz de rigidez geométrica

$[K_G]$ . A matriz  $[K_G]$  além da geometria, depende também do esforço normal de compressão existente no início do carregamento,  $\{P_0\}$ . Então, a matriz de rigidez total da coluna para um nível de carga  $\{P_0\}$  pode ser escrita como:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (3.2)$$

Quando a carga atinge o nível de  $\{P\} = \lambda\{P_0\}$ , a matriz de rigidez pode ser definida como:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  é um escalar. As equações de equilíbrio governantes para a coluna podem ser escritas como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{P_0\} \quad (3.4)$$

sendo  $\{U\}$  o vetor de deslocamento total, que pode, portanto, ser determinado por:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{P_0\} \quad (3.5)$$

Na análise de flambagem, a placa tem um grande crescimento nos deslocamentos sem crescimento da carga. Matematicamente é possível determinar a matriz inversa de forma que, os deslocamentos  $\{U\}$  tendem ao infinito quando:

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \quad (3.6)$$

A Eq. (3.6) representa um problema de autovalores, que resolvido gera o menor autovalor,  $\lambda_1$ , que corresponde à carga crítica  $\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\}$  ocorrendo flambagem. Além disso, o vetor de deslocamento associado  $\{U\}$  define o modo de flambagem. Segundo o ANSYS User's Manual (2005), o problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos.

Já a determinação da carga última de flambagem não-linear é uma análise complexa, se comparada à análise de flambagem elástica, devido a maior complexidade da relação tensão-deformação para além do estado de flambagem elástica (SZILARD, 2004). Consequentemente, métodos numéricos são altamente recomendados e amplamente empregados para a análise do comportamento pós-flambagem de placas.

De acordo com El-Sawy et al. (2004), para a análise do comportamento pós-flambagem de placas, é adotado um comportamento linear elástico–perfeitamente plástico, isto é, sem encruamento, considerado o caso mais crítico do material. Para a análise do comportamento pós-flambagem é necessário considerar uma imperfeição geométrica inicial na placa. Para isso, a geometria inicial imperfeita é definida a partir do primeiro modo de flambagem elástica com um deslocamento máximo  $w_0$  considerado igual a:

$$w_0 = \frac{b}{2000} \quad (3.4)$$

Para a análise da carga última da placa, de acordo com Helbig et al. (2014), uma carga de referência é dada por  $P_y = \sigma_y t$ , onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material, aplicada em pequenos

incrementos às arestas paralelas ao eixo  $Y$  da placa. Em cada incremento de carga o método de Newton-Raphson, que é um método que envolve um procedimento iterativo foi aplicado. A fim de se determinar os deslocamentos correspondentes à configuração de equilíbrio da placa, são utilizadas as seguintes equações:

$$\{P\}_{i+1} = \{P\}_i + \{\Delta P\} \quad (3.5)$$

$$\{\psi\}_{i+1} = \{P\}_{i+1} - \{F_{NL}\} \quad (3.6)$$

$$[K_t]\{\Delta U\} = \{\psi\} \quad (3.7)$$

$$\{U\}_{i+1} = \{U\}_i + \{\Delta U\} \quad (3.8)$$

onde,  $[K_t]$  é a matriz de rigidez tangente,  $\{\Delta U\}$ , o vetor de incrementos de deslocamentos necessários para se atingir a configuração de equilíbrio,  $\{F_{NL}\}$  o vetor de forças internas nodais não lineares e  $\{\psi\}$  o vetor de cargas em desequilíbrio. Os vetores  $\{U\}_i$  e  $\{U\}_{i+1}$  correspondem aos deslocamentos, enquanto os vetores  $\{P\}_i$  e  $\{P\}_{i+1}$  correspondem às cargas externas aplicadas em duas configurações de equilíbrio sucessivas da estrutura.

De acordo com Helbig et al. (2016), se em um determinado passo de carga a convergência não pode ser atingida, ou seja, um incremento finito no vetor de deslocamentos não pode ser determinado de forma que o vetor de forças desequilibradas  $\{\Psi\}$  seja anulado, significa que a carga última da estrutura foi atingida. Isso ocorre porque independente de quão grandes os deslocamentos e deformações possam ser, as tensões, e as correspondentes forças internas, não atingirão a magnitude necessária para equilibrar o carregamento externo, indicando que o material chegou ao limite de sua capacidade resistente

Como o presente estudo é relacionado a placas finas, optou-se pelo uso do elemento finito SHELL93 (Fig. 3.3) do software ANSYS, que é um elemento do tipo casca estrutural bidimensional. Cabe destacar que o elemento SHELL93 vem sendo utilizado em diversos trabalhos acadêmicos, como em Correia (2013), Baptista (2014), Sentano (2014), Rackow (2015), Silva (2015) e Helbig et al. (2016), apresentando resultados satisfatórios.

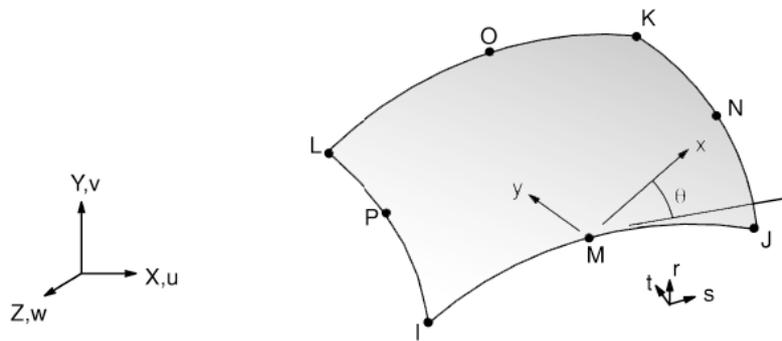


Figura 3.3 - Elemento finito SHELL93 (Fonte: KOHNKE, 1999).

De acordo com Kohnke (1999), o elemento SHELL93 é um elemento finito do tipo casca de caráter isoparamétrico. Cada um de seus oito nós possui seis graus de liberdade, sendo três translações nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , além de três rotações também em torno desses eixos.

Caracterizado como um elemento finito 2D, é considerado de caráter tridimensional devido à sua não restrição ao plano  $X$ - $Y$ , podendo ser empregado em qualquer posição do espaço tridimensional, além de ser deformável na direção fora de seu plano. Os elementos finitos tipo casca são usados para modelar componentes estruturais do tipo placa que possuem espessura pequena se comparada às suas outras dimensões. Podem ser carregados em seu plano (carregamentos de membrana) bem como fora de seu plano por momentos fletores e/ou torsões. Além disso, o elemento finito SHELL93 pode considerar grandes deslocamentos e plasticidade (DUFOUR, 2003; ROSS, 2011).

### 3.1.2 Teste de refinamento e convergência da malha

Existe uma gama de fatores que irão influenciar a acurácia de um resultado numérico. Considerando um elemento finito adotado, o mesmo irá apresentar características específicas em relação aos demais elementos. Sendo assim, a escolha do elemento acarreta em uma necessidade de avaliação do tamanho de cada elemento da malha, de forma a se obter uma convergência de valores, baseando-se nos tamanhos analisados.

Para a determinação do refinamento adequado para a malha de elementos finitos a ser utilizada nas simulações numéricas, foi realizado um teste de convergência de malha.

Primeiramente adotou-se uma placa retangular sem enrijecedores, simplesmente apoiada com dimensões  $a = 2$  m,  $b = 1$  m e  $t = 0,02$  m (ver Fig. 3.4) e feita de Aço AH-36 ( $E = 210$  GPa e  $\nu = 0,3$ ). A mesma foi discretizada com malhas regulares geradas com elementos finitos quadrangulares (Fig. 3.5) e triangulares (Fig. 3.6), visando também fazer uma comparação de desempenho entre esses dois tipos de elementos. Fez-se o refinamento das malhas variando o tamanho dos elementos finitos, considerando como dimensão máxima  $l = 1000; 750; 50; 40; 25; 20; 15$  e  $10$  mm.

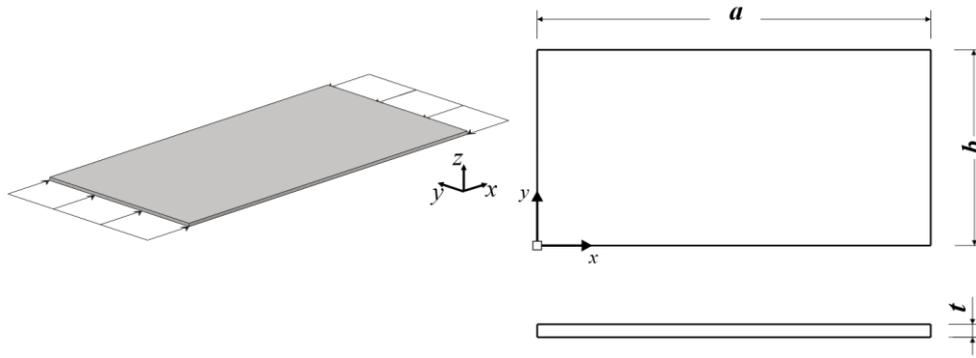


Figura 3.4 - Detalhamento da placa de espessura constante e sem enrijecedores.

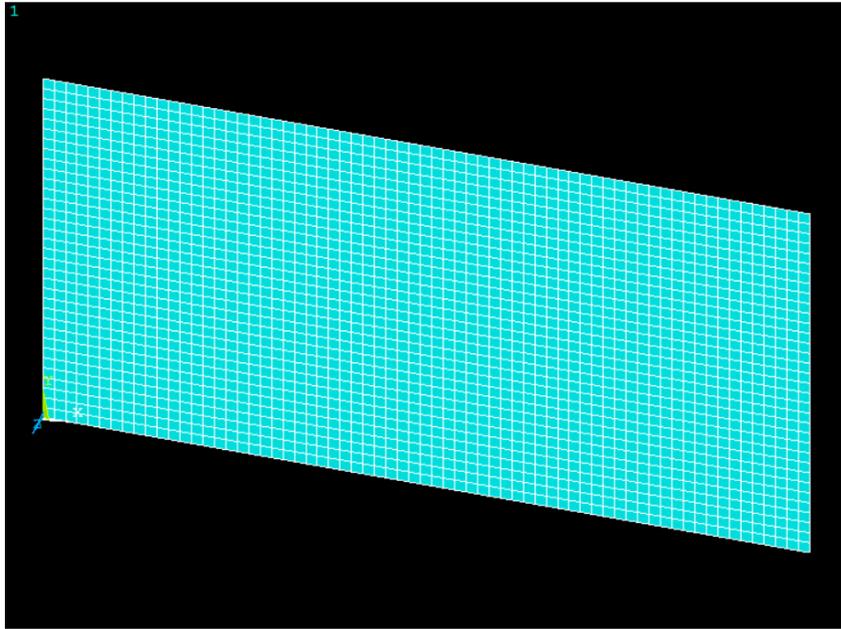


Figura 3.5 - Esquema prático da malha com elementos finitos quadrangulares para a placa sem enrijecedores.

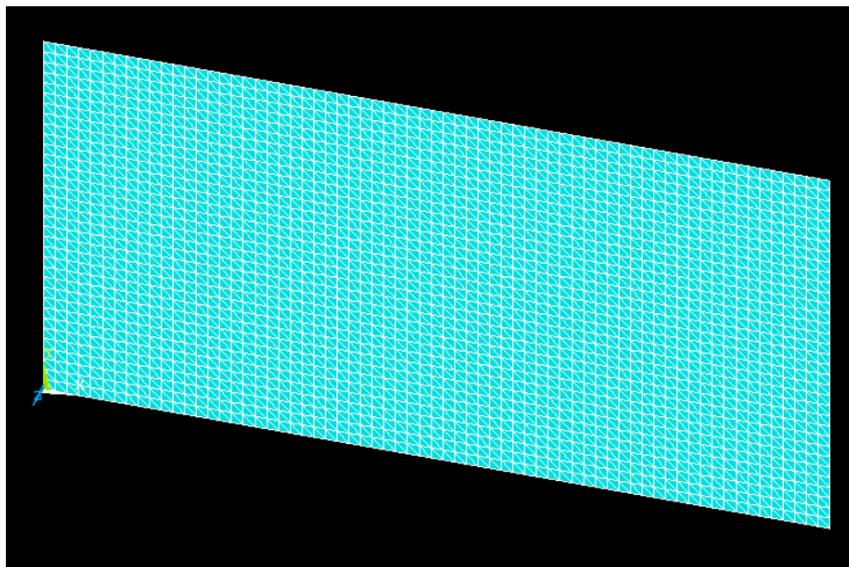


Figura 3.6 - Esquema prático da malha com elementos finitos triangulares para a placa sem enrijecedores.

A tensão crítica de flambagem da placa foi determinada para cada uma das malhas consideradas. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Tab. 3.1 e 3.2, respectivamente, para as malhas com elementos finitos quadrangulares e triangulares. Já na Fig. 3.6 é possível avaliar a convergência causada pelo refinamento do tamanho dos elementos finitos.

Tabela 3.1- Análise da convergência das malhas quadrangulares.

Tamanho elemento (mm)	Nº de elementos	Tensão (MPa)	Erro (%)
100	200	305,950	2,2708
75	378	299,002	0,0013
50	800	298,998	0,0003
40	1250	298,997	0,0005
25	3200	298,996	----
20	5000	298,996	----
15	8978	298,996	----
10	20000	298,996	----

Tabela 3.2 - Análise da convergência das malhas triangulares.

Tamanho elemento (mm)	Nº de elementos	Tensão (MPa)	Erro (%)
100	400	304,469	1,0851
75	756	301,165	0,4711
50	1600	299,746	0,1174
40	2500	299,394	0,0997
25	6400	299,096	0,0167
20	10000	299,046	0,0103
15	17956	299,015	----
10	40000	299,000	----

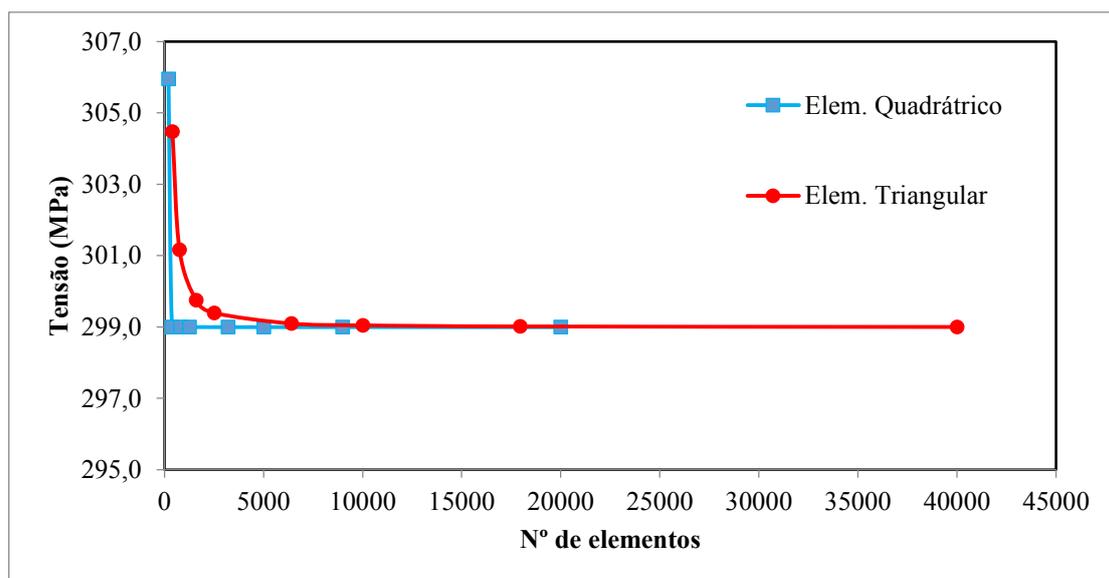


Figura 3.7 - Análise da convergência das malhas com elementos finitos quadrangulares e triangulares para a placa sem enrijecedores.

Uma análise similar foi realizada em uma placa, simplesmente apoiada, com dois enrijecedores longitudinais e dois enrijecedores transversais, ou seja,  $N_{el} = N_{et} = 2$ , conforme mostra a Fig. 3.8. A placa é feita de também de Aço AH-36 ( $E = 210$  GPa e  $\nu = 0,3$ ) e possui as seguintes dimensões:  $a = 2$  m,  $b = 1$  m,  $t_p = 0,02$  m,  $t_s = 0,025$  m e  $h_s = 0,080$  m (ver Fig. 3.8). O carregamento de compressão uniaxial é aplicado na direção  $Y$ .

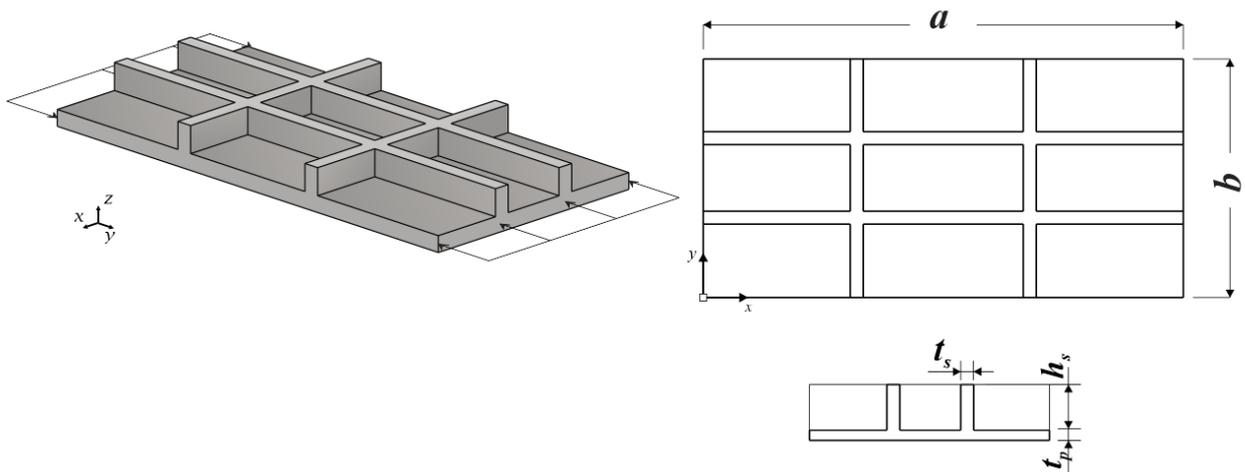


Figura 3.8 - Detalhamento da placa com a presença de dois enrijecedores longitudinais e dois transversais.

Nas Figuras 3.9 e 3.10 são apresentado exemplos de malhas regulares geradas com elementos finitos quadrangulares e triangulares, respectivamente, para a placa da Fig. 3.8.

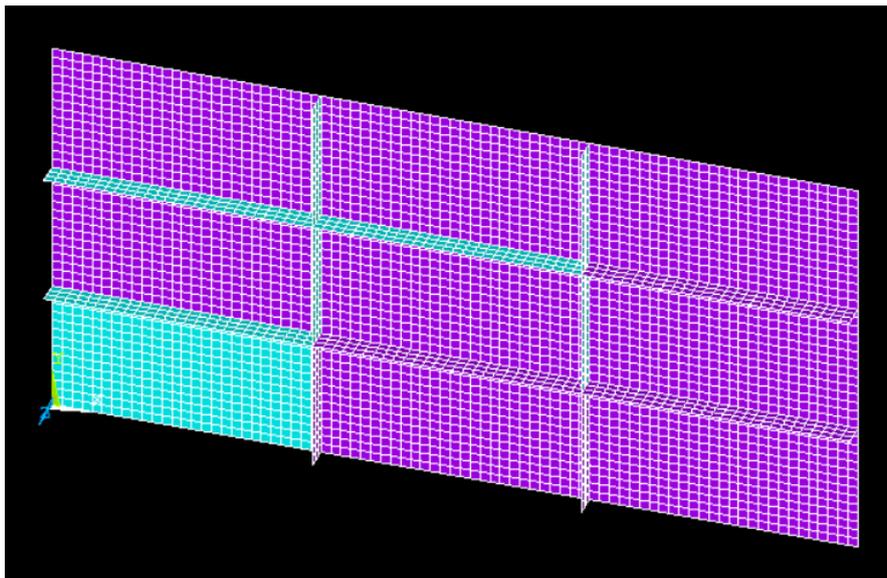


Figura 3.9 - Esquema prático da malha com elementos finitos quadrangulares para a placa com enrijecedores.

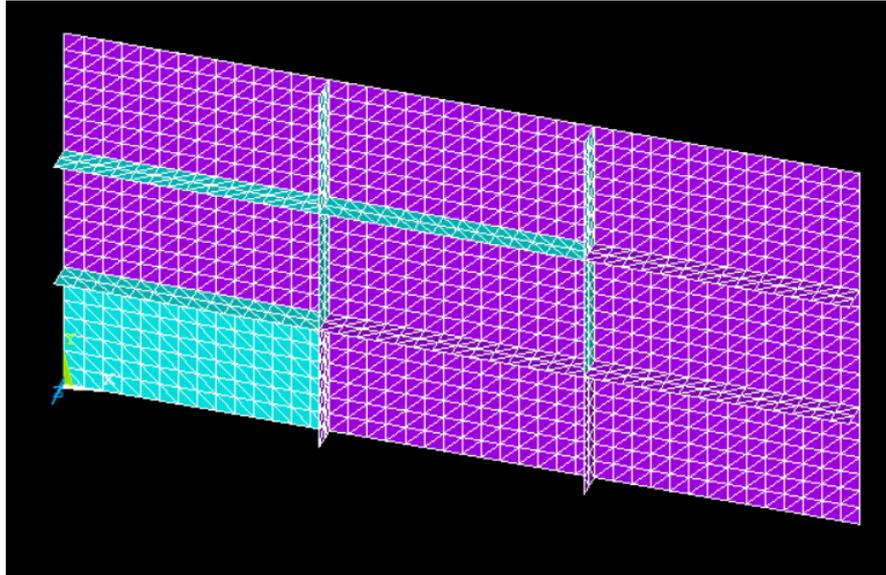


Figura 3.10 - Esquema prático da malha com elementos finitos triangulares para a placa sem enrijecedores.

Os resultados obtidos para a tensão crítica na análise de convergência de malha para a placa da Fig. 3.8 estão apresentados nas Tabs. 3.3 e 3.4, respectivamente, para as malhas com elementos finitos quadrangulares e triangulares. E, na Fig. 3.11, os resultados das Tabs. 3.3 e 3.4 são apresentados na forma de uma gráfico, permitindo avaliar a evolução da convergência da malha.

Tabela 3.3 - Análise da convergência das malhas quadrangulares para a placa enrijecida.

Tamanho do Elemento (mm)	Nº de elementos	Tensão (MPa)	Erro (%)
100	318	1481,049	0,4290
75	573	1474,695	0,2412
50	1134	1471,137	0,0700
40	1689	1470,106	0,0876
25	4386	1468,817	0,0131
20	6426	1468,624	----
15	11763	1468,624	----
10	25350	1468,624	----

Tabela 3.4 - Análise da convergência das malhas triangulares para a placa enrijecida.

Tamanho do Elemento (mm)	Nº de elementos	Tensão (Mpa)	Erro (%)
100	636	1515,604	1,0034
75	1146	1500,395	0,8933
50	2268	1486,991	0,4593
40	3378	1480,160	0,5921
25	8772	1471,395	0,0963
20	12852	1469,977	0,0701
15	23526	1468,946	0,0307
10	50700	1468,495	----

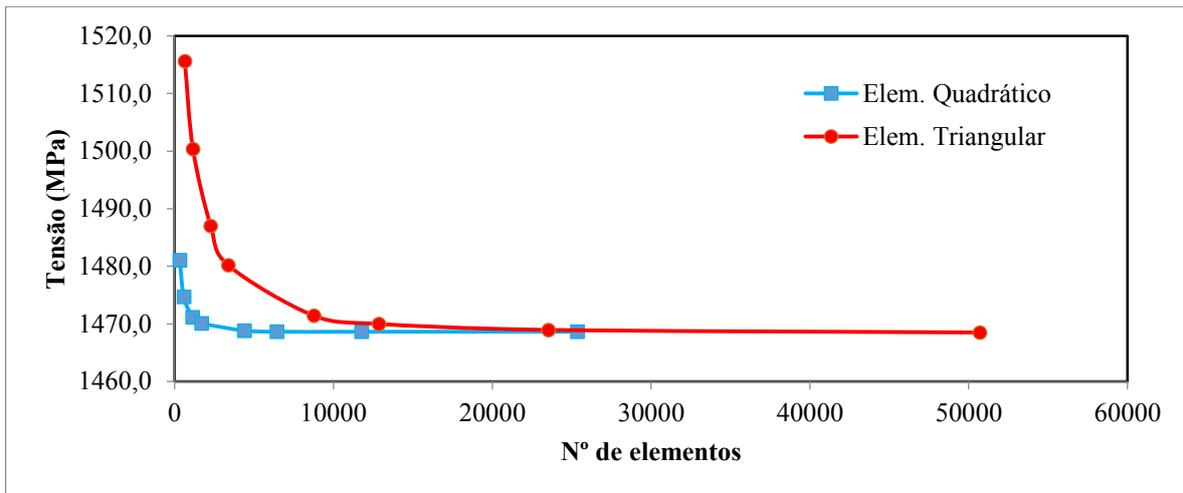


Figura 3.11 - Análise da convergência das malhas com elementos finitos quadrangulares e triangulares para a placa com enrijecedores.

Considerando os resultados apresentados nas Tabs. 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 e nas Figs. 3.6 e 3.10, foi escolhido o elemento finito quadrangular com dimensão máxima de 0.02 m para ser utilizado nas simulações numéricas do presente estudo. Ressalta-se que apesar de o elemento triangular apresentar uma diferença relativamente pequena para esse tamanho de elemento, o tempo de processamento maior para o elemento triangular conduziu para a escolha do elemento finito quadrangular, uma vez que as geometrias que serão analisadas não exigem o uso de elementos finitos triangulares.

### 3.2 Verificação do Modelo Computacional

Segundo Azar (2012), testes de validação e verificação são inevitáveis em qualquer processo de modelagem computacional. Esses processos ajudam os modeladores e outras partes interessadas a adquirir confiança na adequação e utilidade do modelo. Seja qual for o modelo a ser estudado ou técnicas de solução que serão usadas, as medidas de desempenho extraídas do modelo só terão alguma influência sobre o sistema real representado, se o modelo for uma boa representação do sistema.

A capacidade dos modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS para a determinação da carga (ou tensão) crítica elástica e da carga (ou tensão) última elasto-plástica em painéis enrijecidos é aqui apresentada. Primeiramente, foi verificada a aplicação do elemento SHELL93, especificamente, para a discretização dos enrijecedores. Na sequência, foi realizado um estudo da situação de uma placa de espessura constante e sem enrijecedores, comparando o valor de sua tensão crítica elástica e tensão última elasto-plástica com valores obtidos na literatura. Após, foi verificada a tensão crítica elástica para uma placa que contém um e dois enrijecedores longitudinais, e para uma placa com um enrijecedor transversal. Em seguida, foi feita a verificação do modelo computacional de flambagem elástica, comparando a carga crítica de flambagem de uma placa ortotrópica obtida numericamente, com o resultado determinado a partir de uma solução aproximada

proposta. Por fim, foi feita uma verificação e validação para o modelo computacional para a análise da flambagem elasto-plástica, considerando uma placa ortotrópica proposta em Kumar et al. (2009).

### 3.2.1 Verificação da geometria modelada no Software ANSYS

Considerando a utilização do elemento SHELL93, que é considerado bidimensional para a análise tridimensional de placas finas, foi realizada uma verificação para avaliar a geometria modelada no software ANSYS.

Um importante ponto a ser ressaltado é a região de intersecção entre a placa e os enrijecedores apresentada em vermelho na Fig. 3.12. Sabendo que o elemento SHELL93 representa o plano médio da superfície modelada, se torna de suma importância a verificação da altura do enrijecedor a ser implantada na geometria modelada.

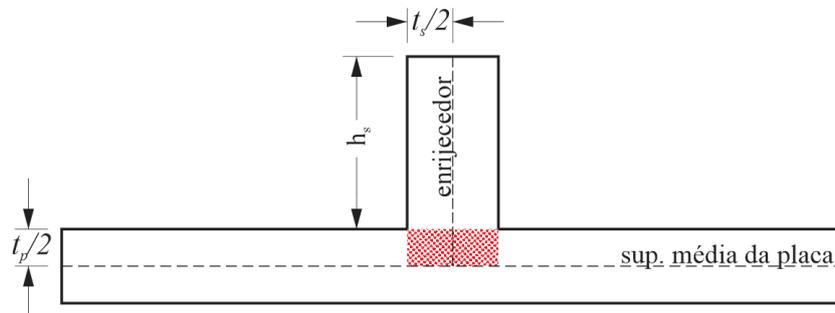


Figura 3.12 - Esquema de modelagem da placa enrijecida utilizando o elemento finito SHELL93.

Primeiramente é feita uma análise considerando a altura do enrijecedor modelado no software ANSYS como sendo a parcela referente à altura do próprio enrijecedor acrescida de uma parcela referente à superfície média da placa sendo a metade do valor da espessura da placa enrijecida ( $t_p/2$ ) (Geometria 01). Posteriormente, uma segunda análise é feita considerando apenas a dimensão da altura do enrijecedor na geometria do mesmo (Geometria 02).

Considerou-se uma placa com volume total  $V_I = 0,04 \text{ m}^3$ , sendo  $V_e = 0,004 \text{ m}^3$  o volume destinado aos enrijecedores. Para essa análise, analisou-se uma placa simplesmente apoiada do tipo P(2,2), ou seja, dois enrijecedores longitudinais e dois transversais como apresentado na Fig. 3.13.

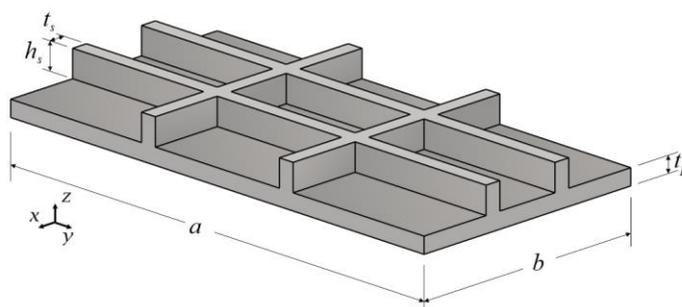


Figura 3.13 - Modelo de placa do tipo P(2,2) adotado.

A tensão crítica adotada como referência se refere ao valor da tensão crítica de flambagem para a placa sem enrijecedores e com comprimento, largura e espessura, respectivamente  $a$ ,  $b$  e  $t_p$ . Esse valor é adotado pois se refere ao menor valor de tensão obtido para a placa enrijecida com mesma espessura  $t_p$ , em um caso extremo em que os enrijecedores com uma relação baixa de  $h_s/t_s$  não iriam contribuir para a tensão crítica de flambagem. Os resultados obtidos são encontrados na Fig. 3.14 e Tab. 3.6.

Tabela 3.5 - Resultados de tensão crítica obtidos para as duas geometrias modeladas.

$t_s$ (m)	$h_s$ (m)	$h_s/t_s$	Tensão Crítica Geometria 01 (MPa)	Tensão Crítica Geometria 02 (MPa)
0,010	0,066	6,600	748,66	600,98
0,015	0,044	2,933	511,27	398,29
0,020	0,033	1,650	416,67	323,97
0,025	0,027	1,080	375,65	292,68
0,030	0,022	0,733	340,90	269,21
0,035	0,019	0,543	324,01	247,29
0,040	0,016	0,400	305,74	242,84
0,045	0,014	0,311	295,09	238,07

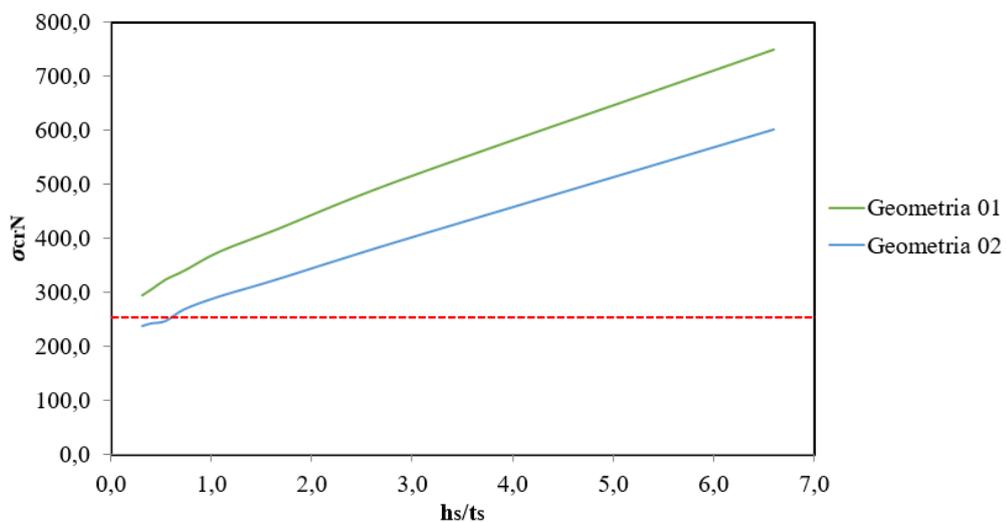


Figura 3.14 - Curva tensão crítica pela relação  $h_s/t_s$  para as duas geometrias modeladas.

Pode-se perceber que ausência da parcela referente à metade da espessura da placa ( $t_p/2$ ) influencia negativamente nos resultados obtidos, visto que o valor obtido para grandes valores de  $h_s/t_s$  são inferiores à tensão crítica de referência analisando a Geometria 02 modelada. Sendo assim, deve-se adotar a Geometria 01 no modelo computacional.

### 3.2.2 Verificação da utilização do Elemento SHELL93

Considerando que o elemento SHELL93 é característico de placas finas, foi realizada uma verificação para avaliar seu desempenho em estudos de flambagem. Apesar de apresentar

plasticidade, tensão de enrijecimento, grande deflexão, e capacidades de grande deformação, necessita-se verificar a sua aplicabilidade além do campo de placas finas.

Essa verificação é feita considerando isoladamente um enrijecedor com  $h_s = 2$  cm e  $t_s = 8$  cm, presente em uma placa ortotrópica simplesmente apoiada de 2 m de comprimento, logo o mesmo também apresentará um comprimento  $l_s = 2$  m. Esse enrijecedor está sofrendo um esforço de compressão axial na direção  $Y$  (Fig. 3.15). As condições geométricas do enrijecedor implicam que a sua altura é quatro vezes menor que sua espessura. A região hachurada representa a modelagem com o elemento de casca SHELL93.

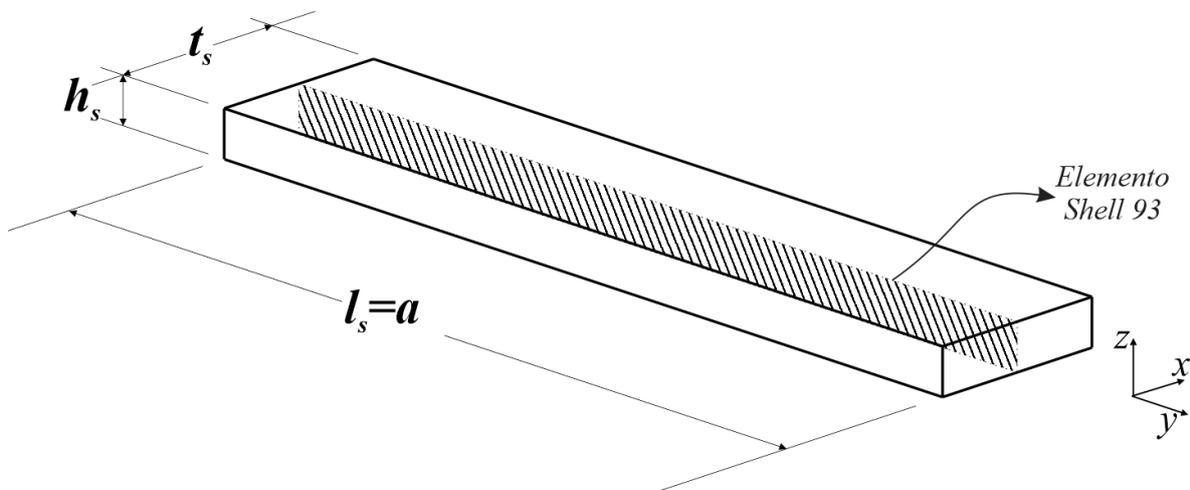


Figura 3.15 - Seção transversal de uma coluna birotulada.

Quando analisado separadamente, o enrijecedor apresenta um comportamento de uma coluna sob flambagem, como já descrito no Capítulo 2. Então, através da Eq. (2.69) é possível determinar analiticamente o valor da carga crítica que será suportada apenas por um enrijecedor:  $P_{cr} = 27,635$  kN.

A utilização do elemento SHELL93 para essa análise consiste em verificar sua acurácia para situações em que se tem espessura do elemento maior que sua altura. De acordo com Tripathi (2008) o elemento SHELL93 se baseia na teoria de Kirchhoff-Love, a qual segundo Ayache (2004) assume que uma superfície média passa a ser usada para reproduzir uma placa tridimensional de forma bidimensional. Além disso, essa teoria afirma que linhas normais à superfície permanecem em linha reta e normal após a deformação, negligenciando a influência da deformação de cisalhamento transversal. Sendo assim a teoria de Kirchhoff-Love afirma que a espessura das placas permanece constante após a deformação. Essa situação é exemplificada na Fig. 3.16.

Apesar de se tratar de uma teoria voltada às placas finas, considerando a situação proposta teve-se um valor numérico de carga crítica de flambagem de  $P_{cr} = 27,590$  kN para o enrijecedor

estudado. O primeiro modo de flambagem para o enrijecedor é visto na Fig. 3.17, onde a região em vermelho indica a maior deflexão sofrida e a região em azul indica uma deflexão nula.

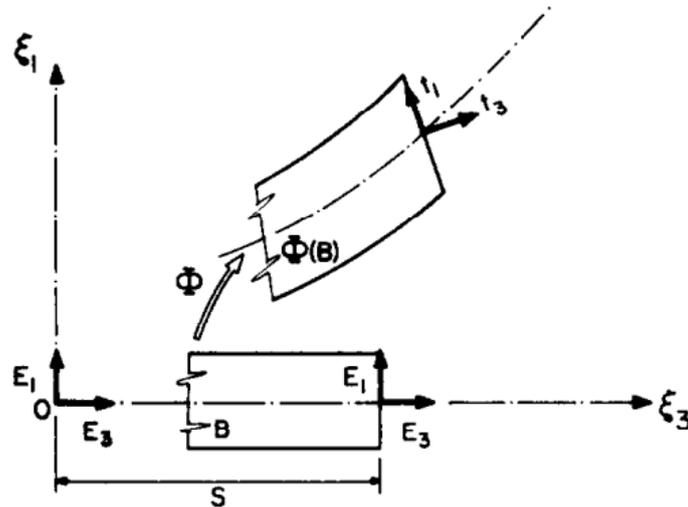


Figura 3.16 - Descrição cinemática de Kirchhoff-Love (Fonte: SIMO E VU-QUOC, 1986).

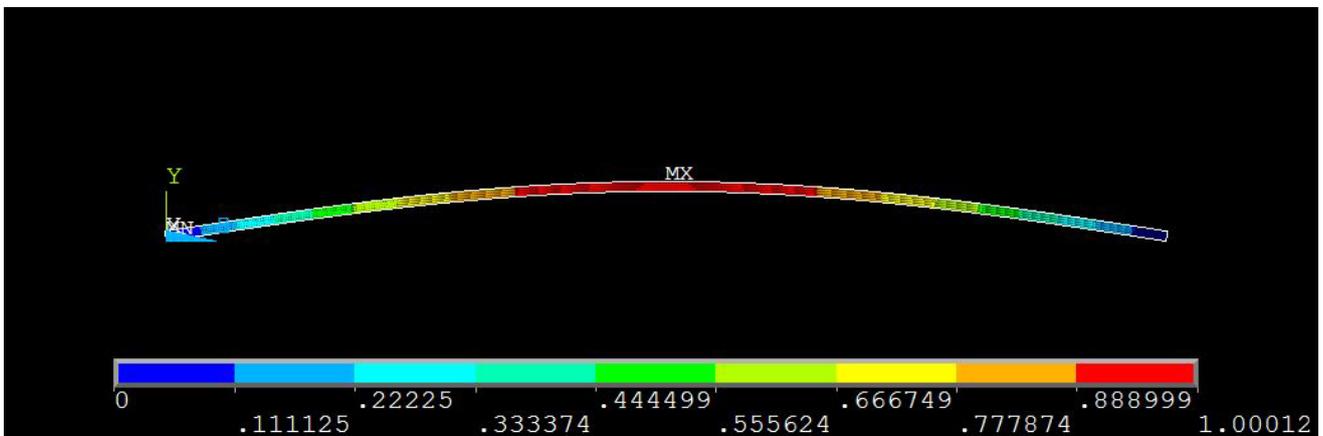


Figura 3.17 - Configuração flambada do enrijecedor analisado como coluna birrotulada.

Portanto, comparando os resultados para a carga crítica obtidos analiticamente e numericamente, uma diferença de 0,16% foi encontrada. Além disso, na Fig. 3.13 uma análise qualitativa pode ser feita, uma vez que primeiro modo de flambagem obtido numericamente está de acordo com a configuração flambada de uma coluna birrotulada, segundo Hibbeler (2010).

### 3.2.3 Painel sem enrijecedores sob flambagem elástica e elasto-plástica

Para essa verificação, utilizou-se um painel retangular fino com espessura constante sob compressão axial e simplesmente apoiado em seus quatro bordos. De acordo com a Fig. 3.4, esse painel possui comprimento  $a = 2$  m, largura  $b = 1$  m e espessura  $t = 0,02$  m.

Nesta análise adotou-se o material Aço AH-36, que possui tensão de escoamento, módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material são respectivamente  $\sigma_y = 355$  MPa,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

Primeiramente realizou-se uma verificação do modelo computacional para análise de flambagem elástica, através da tensão crítica de flambagem, cuja solução analítica é proposta por Szilard (2004) e apresentada no Capítulo 2. Para a placa proposta, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica, Eq. (2.64), é  $\sigma_{cr} = 303,68$  MPa. Através da modelagem computacional, tem-se a tensão crítica  $\sigma_{cr} = 299,00$  MPa, cujo modo de flambagem elástica pode ser visto na Fig. 3.18.

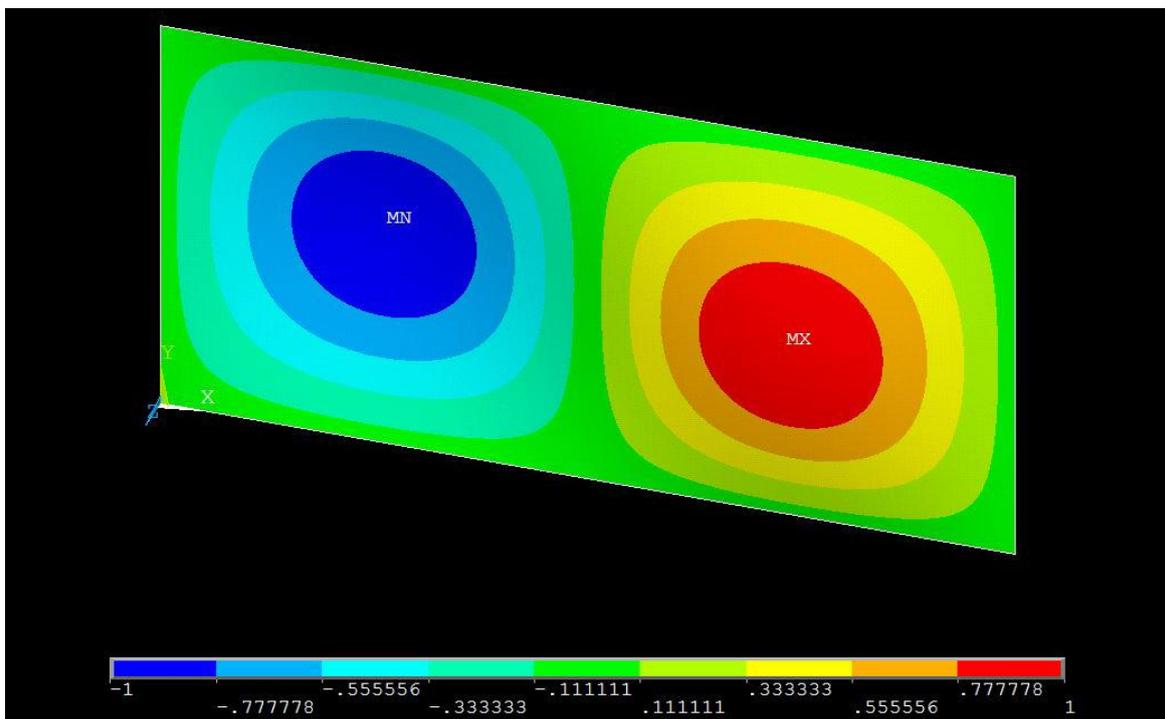


Figura 3.18 - Configuração flambada para a placa sem enrijecedores, sob flambagem elástica.

Para essa situação obteve-se uma diferença de 1,54%, apresentando assim, uma pequena diferença entre o resultado numérico e a solução analítica, verificando o modelo computacional.

Posteriormente, foi verificado o modelo computacional para a análise de flambagem elasto-plástica, através da tensão última desta mesma placa, considerando os efeitos da não-linearidade. Para a placa de espessura constante da Fig. 3.14, a carga de colapso é calculada através do método da largura efetiva  $b_{ef}$  proposto por Von Kármán (1932). Baseando-se na tensão escoamento do material estudado (Aço AH-36), obteve-se uma tensão última no valor de  $\sigma_{ult} = 327,970$  MPa.

Através da modelagem computacional, tem-se a tensão última no valor de  $\sigma_{ult} = 328,33$  MPa, sendo a situação deformada da placa apresentada na Fig. 3.19 e a distribuição de tensões (von Mises) apresentada na Fig 3.20.

Os valores obtidos, mostram concordância entre o resultado analítico e numérico, uma vez que os mesmos apresentam uma diferença de 0,1%.

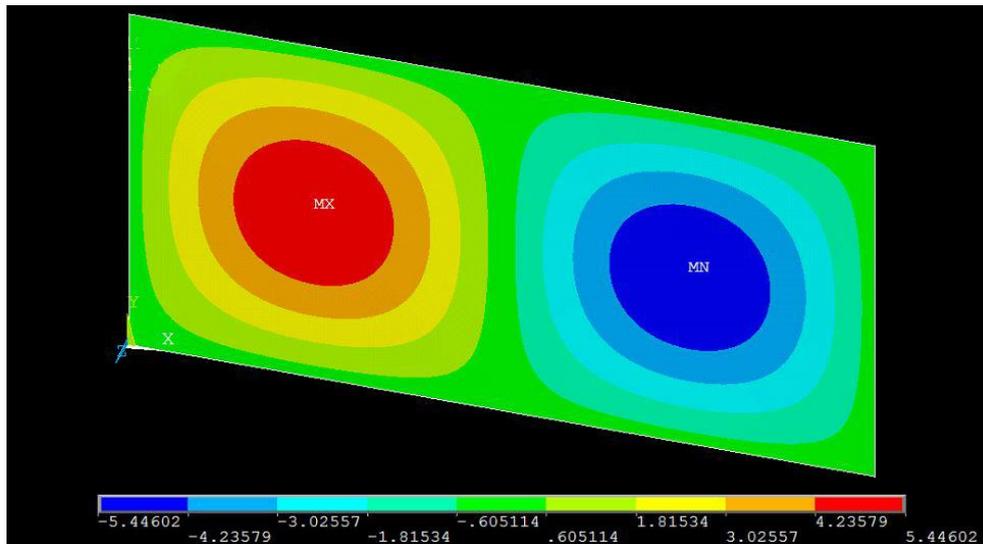


Figura 3.19 - Deslocamentos finais para a placa sem enrijecedores, em mm.

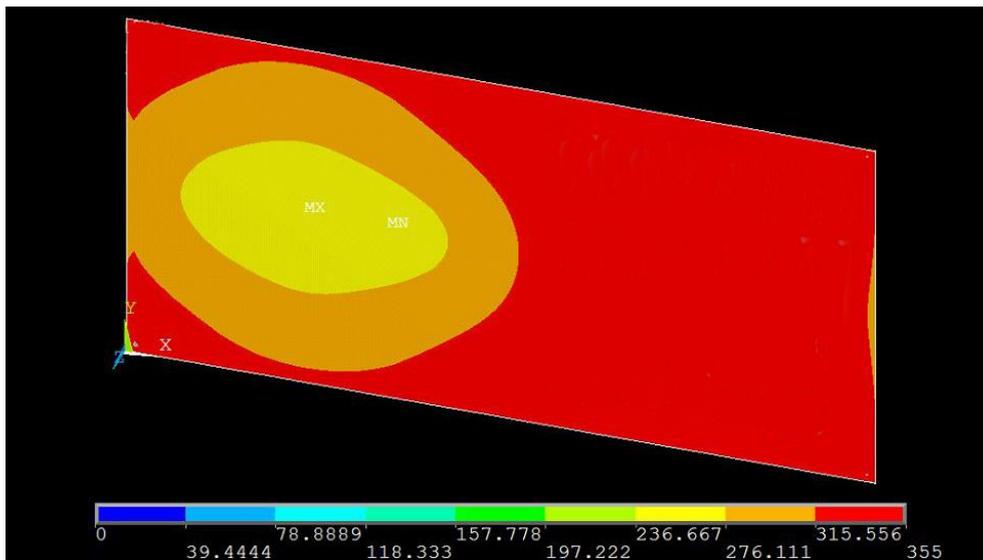


Figura 3.20 - Distribuição de tensões para a placa sem enrijecedores.

### 3.2.4 Painel com um enrijecedor longitudinal

Para essa verificação, utilizou-se uma placa fina retangular, simplesmente apoiada, sob compressão axial, contendo em seu eixo  $X$  um enrijecedor longitudinal centralizado, como Rackow (2015). De acordo com a Fig. 3.21, este painel possui comprimento  $a = 1$  m, largura  $b = 0,5$  m e espessura  $t_p = 0,009$  m. Já o enrijecedor possui altura  $h_s = 0,05$  m, espessura  $t_s = 0,009$  m, e comprimento  $l_s = a = 1$  m.

Adotou-se também o Aço AH-36, portanto, as propriedades do material estudado mantém-se as mesmas dos casos anteriormente apresentados. Nesse estudo realizou-se uma verificação para a

flambagem elástica, cuja solução analítica é proposta por Timoshenko e Gere (1963), apresentada na Eq. (2.71).

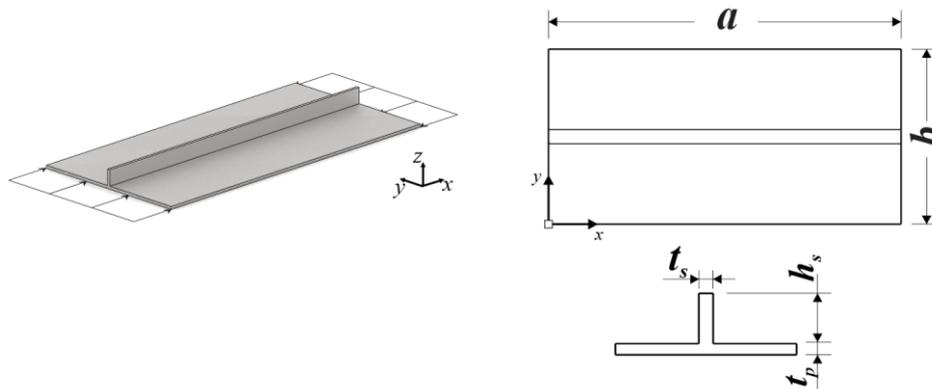


Figura 3.21 - Placa com um enrijecedor longitudinal para flambagem elástica.

Para a placa da Fig. 3.18, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica é  $\sigma_{cr} = 606,12$  MPa. Através da modelagem computacional, tem-se a tensão crítica como sendo  $\sigma_{cr} = 624,36$  MPa, cujo modo de flambagem elástica é mostrado na Fig. 3.22. Portanto, nesse caso, uma diferença de 3,01% entre os valores numérico e analítico foi encontrada.

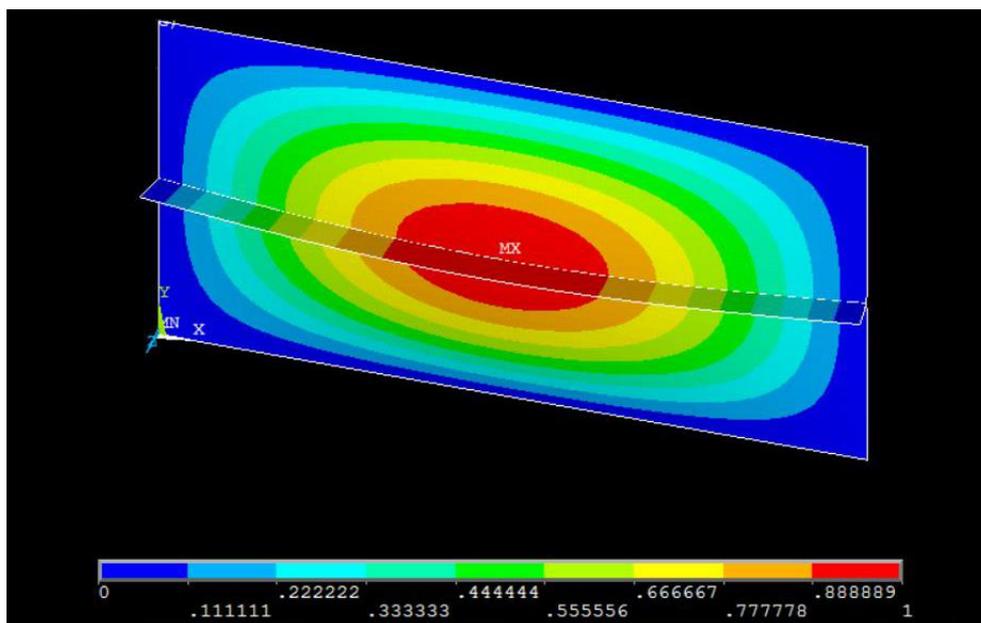


Figura 3.22 - Configuração flambada para a placa com um enrijecedor longitudinal, sob flambagem elástica.

### 3.2.5 Paineis com dois enrijecedores longitudinais

Para esta verificação, utilizou-se um painel proposto por Rackow (2015). Trata-se de uma placa fina retangular sob compressão axial, contendo em seu eixo longitudinal (eixo  $X$ ), dois enrijecedores idênticos espaçados igualmente em  $b/3$ . De acordo com a Fig. 3.23, este painel simplesmente apoiado possui comprimento  $a = 3$  m, largura  $b = 1,5$  m e espessura  $t_p = 0,013$  m,

enquanto os enrijecedores possuem altura  $h_s = 0,07$  m e espessura  $t_s = 0,013$  m. Além disso, seu comprimento  $l_s$  é equivalente ao comprimento da placa.

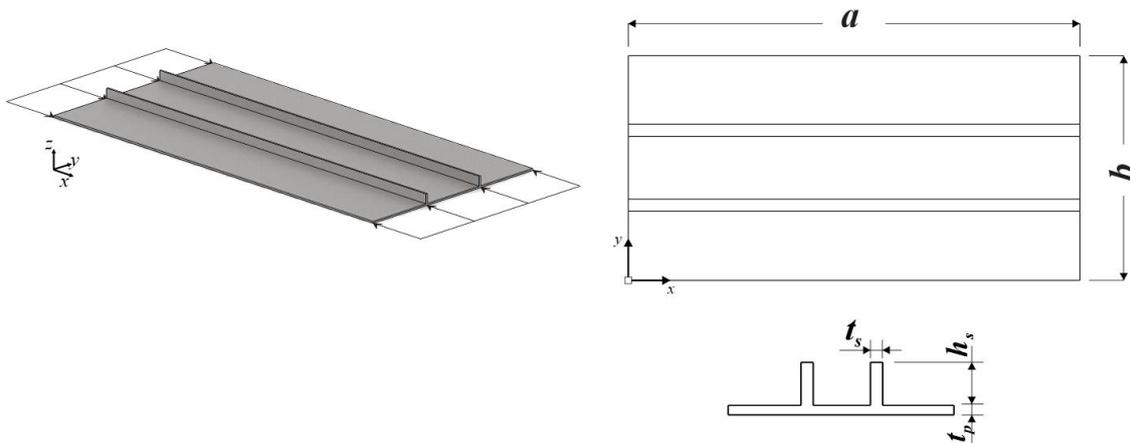


Figura 3.23 - Placa com dois enrijecedores longitudinais para flambagem elástica.

Esse estudo verificou a flambagem elástica na placa, cuja solução analítica é proposta por Timoshenko e Gere (1963) e definida pela Eq. (2.75). Para a placa proposta, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica é  $\sigma_{cr} = 124,03$  MPa. Na modelagem computacional, obteve-se a tensão crítica como sendo  $\sigma_{cr} = 131,74$  MPa, cujo modo de flambagem elástica pode ser visto na Fig. 3.24. Assim, uma diferença de 6,21% entre os valores numérico e analítico foi observada. A solução analítica proposta também é uma solução aproximada utilizando métodos de Energia. Sendo assim diferenças dessa ordem são aceitáveis.

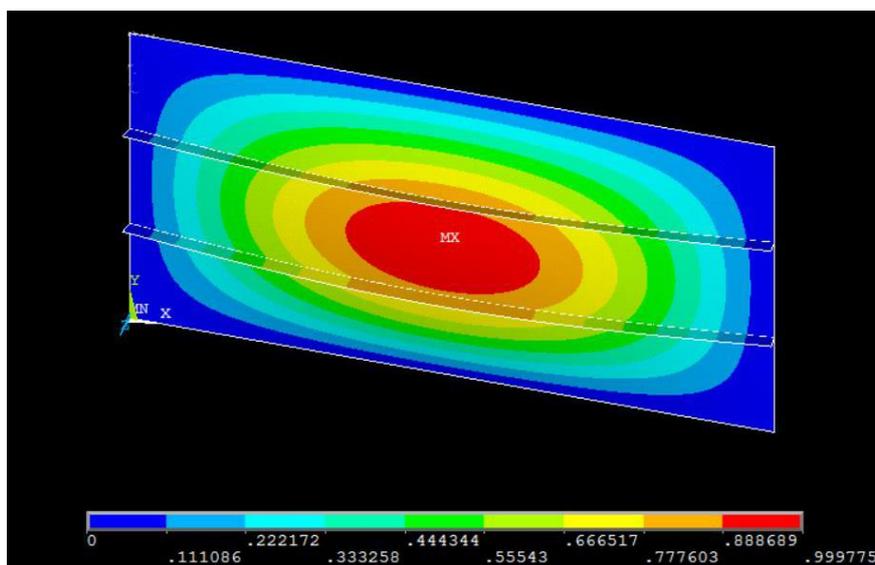


Figura 3.24 - Configuração flambada para a placa com dois enrijecedores longitudinais, sob flambagem elástica.

### 3.2.6 Painel com um enrijecedor transversal

Nesta simulação, verificou-se a situação em que um painel quadrado fino com espessura constante sob compressão axial possui um enrijecedor em seu eixo central transversal. De acordo com a Fig. 3.25, este painel simplesmente apoiado possui comprimento  $a = 1,0$  m, largura  $b = 1,0$  m e espessura  $t_p = 0,01$  m. O enrijecedor transversal possui altura  $h_s = 0,1$  m, espessura  $t_s = 0,01$  m e  $l_s = 1,0$  m (equivalente à largura  $b$  da placa).

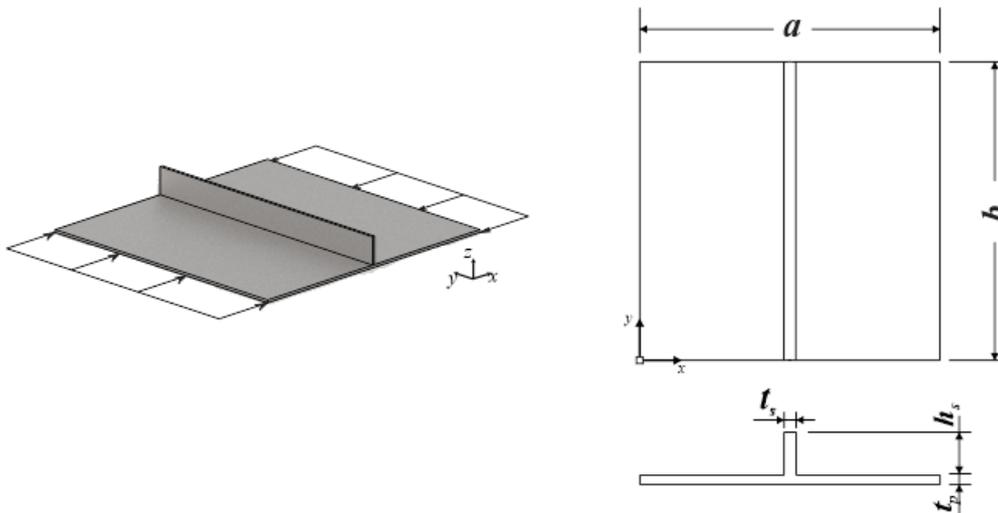


Figura 3.25 - Placa com um enrijecedor transversal para flambagem elástica.

Nessa análise de flambagem elástica, a solução analítica proposta por Timoshenko e Gere (1963), dada pela Eq. (2.76), foi usada como referência. Para a placa proposta, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica é  $\sigma_{cr} = 121,09$  MPa. Na modelagem computacional, obteve-se a tensão crítica como sendo  $\sigma_{cr} = 121,32$  MPa, cujo modo de flambagem elástica é mostrado na Fig. 3.26.

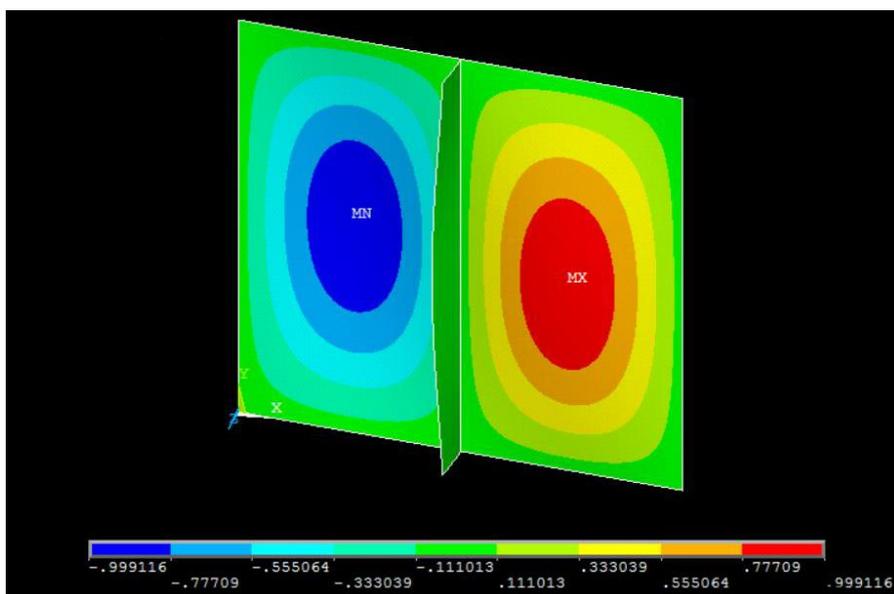


Figura 3.26 - Situação deformada para a placa com um enrijecedor transversal.

Analisando esse estudo foi possível observar uma diferença de 0,18%, entre os valores numérico e analítico. O modelo pode ser verificado através da pequena diferença presente entre os métodos.

### 3.2.7 Painel ortotrópico com enrijecedores longitudinais e transversais – análise analítica-numérica

Analisou-se a situação em que uma placa retangular fina sob compressão axial, possui uma grade de enrijecedores dispostos longitudinalmente e transversalmente, contendo quatro em ambas as direções. De acordo com a Fig. 3.27, este painel simplesmente apoiado possui comprimento  $a = 2,0$  m, largura  $b = 1,0$  m e espessura  $t_p = 0,01$  m. Os enrijecedores possuem altura  $h_s = 0,05$  m e espessura  $t_s = 0,01$  m. Os mesmos foram dispostos com um espaçamento em  $X$  e  $Y$ , de respectivamente,  $c_1 = 0,2$  m e  $c_2 = 0,4$  m.

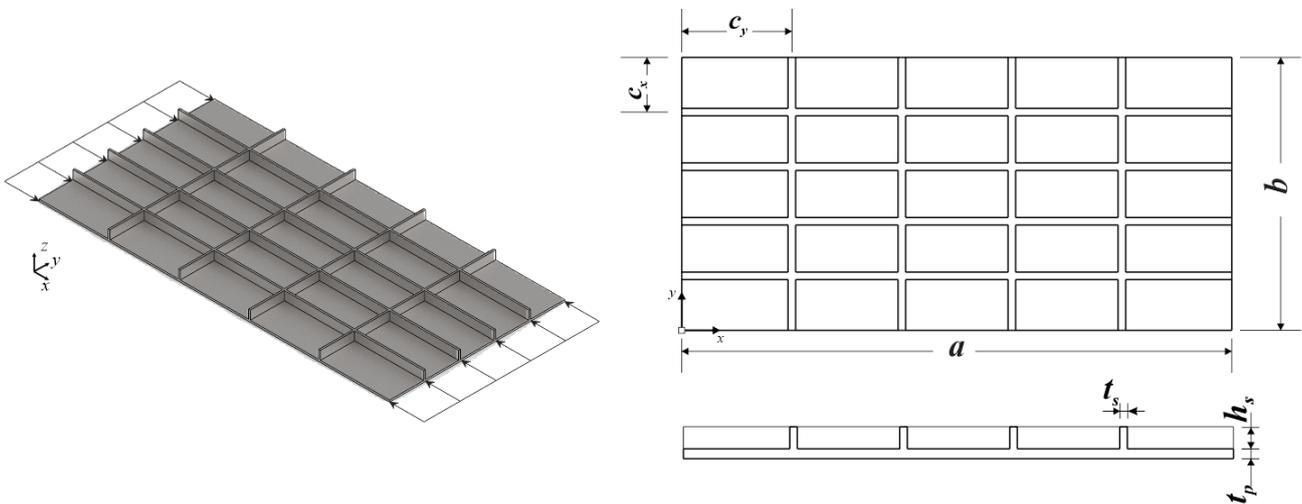


Figura 3.27 - Placa ortotrópica com quatro enrijecedores longitudinais e quatro enrijecedores transversais para flambagem elástica.

Para essa verificação de flambagem elástica na placa da Fig. 3.27, a solução analítica proposta por Wittrick (1952), dada pela Eq. (2.81), foi considerada. Para a placa proposta, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica é  $\sigma_{cr} = 351,36$  MPa. Na modelagem computacional, obteve-se a tensão crítica como sendo  $\sigma_{cr} = 349,83$  MPa, cujo modo de flambagem elástica está ilustrado na Fig. 3.28.

Analisando a solução proposta por Wittrick (1952) e o resultado numérico foi possível observar uma diferença de 0,43%, entre os valores, verificando o modelo computacional adotado.

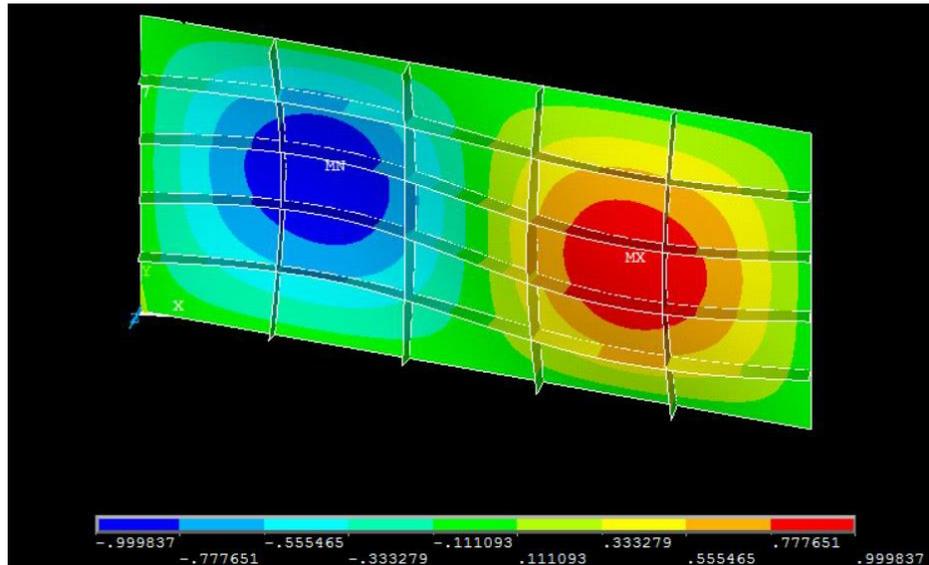


Figura 3.28 - Configuração flambada para a placa ortotrópica, sob flambagem elástica.

### 3.2.8 Painel ortotrópico com enrijecedores longitudinais e transversais – análise numérico-experimental

Por fim, foi feita a validação e a verificação do modelo computacional para a flambagem elasto-plástica em uma placa possuindo enrijecedores longitudinais e transversais. Para tanto, optou-se em comparar o resultado numérico do presente estudo com os resultados experimental e numérico apresentados em Kumar et al. (2009).

Em seu trabalho Kumar et al. (2009), realizaram um estudo de caráter numérico-experimental em painéis enrijecidos, com a finalidade de obter o valor para a carga última dos mesmos. Sendo assim, foi escolhido o modelo SP1, que de acordo com a Fig. 3.29, possui as dimensões em  $a = 1,16$  m,  $b = 0,96$  m e  $t_p = 0,01$  m.

Ainda analisando a Fig. 3.26, tem-se a presença de quatro enrijecedores longitudinais espaçados em  $c_1 = 0,28$  m e quatro transversais espaçados em  $c_2 = 0,32$  m. Em ambas as direções eles apresentam as mesmas características geométricas, sendo enrijecedores de seção transversal retangular com altura  $h_s = 0,05$  m e espessura  $t_s = 0,005$  m. Os mesmos são dispostos simetricamente espaçados em relação aos eixos centrais da placa. Nas extremidades existem espaçamentos  $a_1 = 0,1$  m e  $b_1 = 0,06$  m a serem considerados.

Para determinação da carga última para a placa da Fig. 3.26 foi considerado um material com tensão de escoamento, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, respectivamente,  $\sigma_y = 218$  MPa,  $E = 180$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

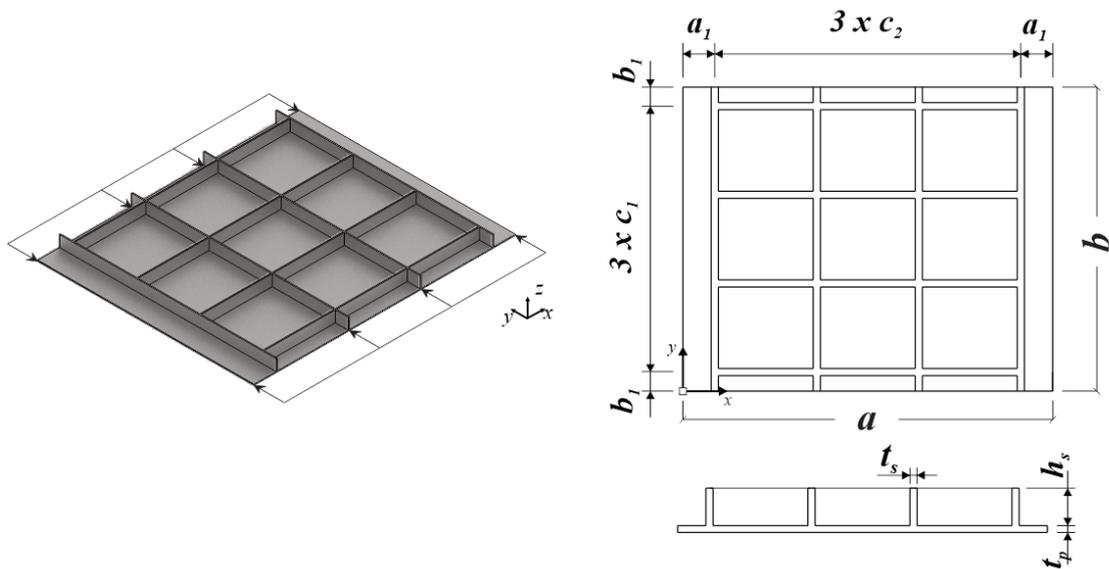


Figura 3.29 - Detalhamento da placa ortotrópica para validação de flambagem elasto-plástica.

Em seu estudo experimental Kumar et al. (2009) testaram uma série de amostras submetidas à carga axial e cargas laterais. Para a placa SP1, a análise não linear foi feita em uma amostra que foi submetida à cargas axiais incrementais de compressão, sem a presença de cargas laterais, levando ao colapso da peça. Em Kumar et al. (2009) uma solução numérica também foi apresentada.

Então, a carga última de flambagem determinada experimentalmente e numericamente, por Kumar et al. (2009) são de  $P_{uE} = 983,00$  kN e  $P_{uN} = 1036,20$  kN, respectivamente.

Já na análise computacional desenvolvida no presente estudo, obteve-se a carga última como sendo  $P_u = 1075,55$  kN, cuja configuração deformada pode ser vista na Fig. 3.30.

Comparando o resultado obtido aqui com os resultados experimental e numérico de Kumar et al. (2009), um erro de 9,41% e uma diferença de 3,79%, respectivamente, foram encontrados.

Na Figura 3.31 a configuração deformada obtida numericamente por Kumar et al. (2009) é apresentada, sendo possível observar uma mesma tendência de comportamento quando comparada com a Fig. 3.27. As diferenças observadas entre as Figs. 3.30 e 3.31 podem estar relacionadas com as condições iniciais para a geometria da placa. Em Kumar et al. (2009) não é comentado como a geometria inicial imperfeita para a placa é definida. No presente estudo foi usado o procedimento proposto por El-Sawy et al. (2004), anteriormente descrito. Existem também incertezas associadas ao ensaio experimental com as propriedades reais dos materiais, a geometria inicial da placa e a forma de aplicação do carregamento.

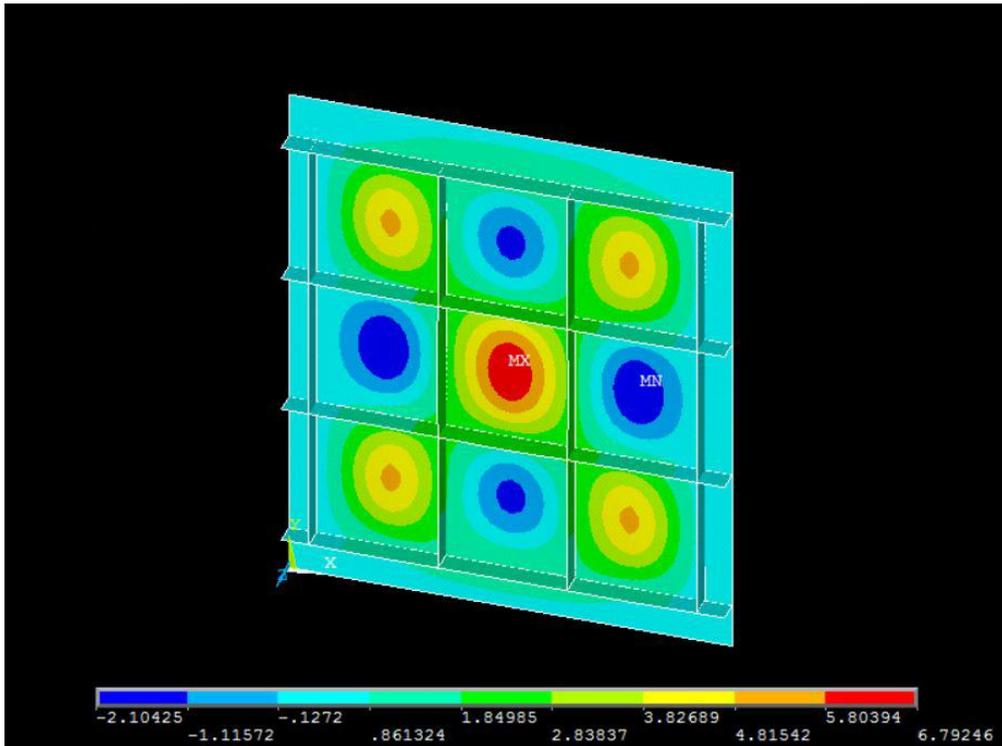


Figura 3.30 - Situação deformada para a placa ortotrópica com enrijecedores nas duas direções.

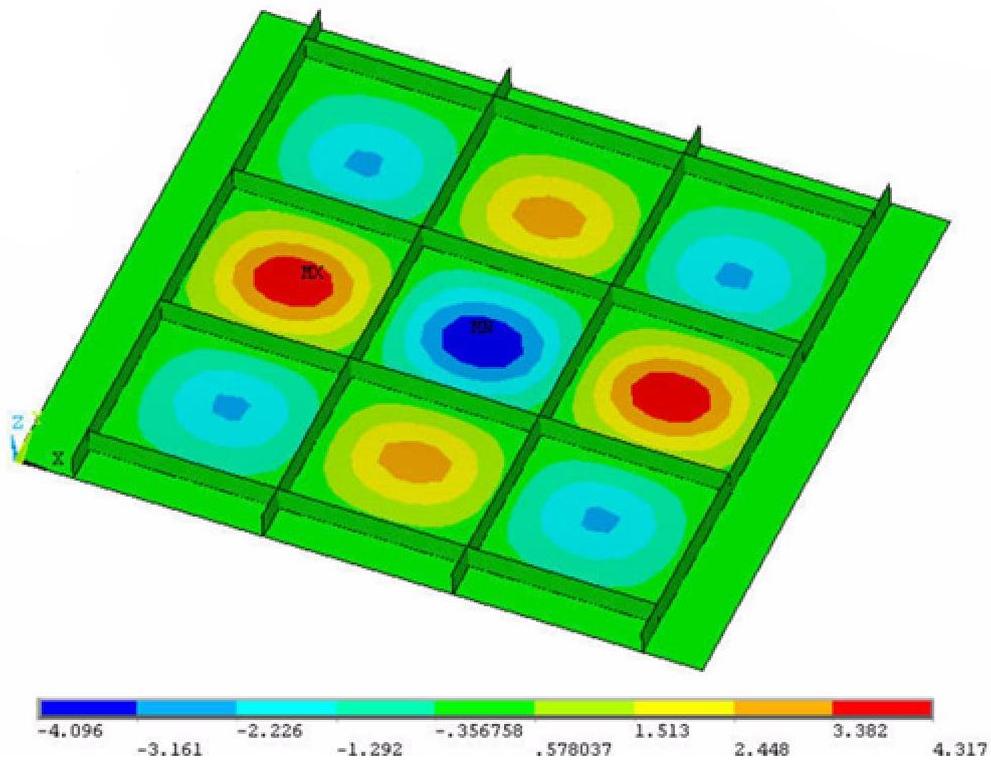


Figura 3.31 - Resultados obtidos por Kumar et al. (2009) (Fonte: KUMAR et al., 2009)

## 4 O MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

Existe um princípio que, de acordo com Bejan e Lorente (2006), resume observações comuns que se um sistema de fluxo, movimento ou escoamento possui liberdade suficiente para alterar a sua configuração, em seguida, o sistema exhibe configurações que dão progressivamente melhores vias de acesso para as correntes que fluem através dele. Este princípio foi formulado em 1996, como a Lei Construtal da geração de configuração de fluxo e evolução, de forma que para um sistema de fluxo persistir no tempo, o mesmo deve evoluir de tal modo que proporcione o acesso mais fácil para as correntes que fluem através dele.

Esta lei é a base para a Teoria Construtal da geração de configuração do fluxo. Segundo Bejan e Lorente (2008), este princípio prevê a forma natural de bacias hidrográficas, na concepção do design animal, engenharia, dinâmicas sociais, dentre outros.

De uma forma simplificada, Bejan e Zane (2013) propõem que o método científico sugerido possui três etapas:

1. Usa-se a Lei Construtal para prever o que deve ocorrer na natureza - que os projetos surgem e evoluem no tempo facilitando o acesso de fluxo; além de que, o fluxo é um sistema vivo, seja animado ou inanimado;
2. De forma antecipada, determina-se o design correto para o que está fluindo.
3. Apenas posteriormente a isso, a ideia é abordada de forma aberta, onde se compara as previsões obtidas com o que se encontra na natureza.

Ao se considerar a Teoria Construtal, Bejan e Lorente (2008) mostram que os fluxos são tratados e configurados como um fenômeno baseado em um princípio científico, de forma que a geometria ali presente representa a capacidade de movimento e luta de um mecanismo pelo qual o sistema de fluxo alcança o objetivo global sob restrições globais, conseguindo dessa forma sobreviver no tempo e ser eficiente.

Reis (2006) afirma que a Teoria Construtal conseguiu atrair muitos educadores e pesquisadores de diversas áreas (engenharia, física, sociologia, dentre outras), que juntos possuem uma nova direção, que consiste em aplicar a Lei Construtal para uma melhor engenharia, além de uma melhor organização de movimentação e conexão de pessoas, produtos e informações. Essa finalidade é denominada Método Design Construtal. Através dele, se obtém não só as melhores condições de geometria, mas também melhores estratégias, como rapidez, custo, direção, confiabilidade, para gerar a geometria que está se necessitando.

Pode-se exemplificar essa situação mostrando que, as melhores configurações que conectam um componente da geometria de fluxo com os demais componentes são em forma de árvore, e por

esta razão arquiteturas de fluxo dendríticas ocupam uma posição central no campo. As árvores são exemplos de fluxos que conseguem fazer conexões entre pontos discretos e contínuos de uma geometria. Em outras palavras, entre um ponto e infinitudes de pontos, ou seja, entre um volume e um ponto, uma área e um ponto, e uma curva e um ponto, podendo o fluxo emanar em qualquer direção, por exemplo, volume-para-ponto e ponto-para-volume. A Figura 3.1 exemplifica uma arquitetura de fluido ponto-volume, como sendo a distribuição de seiva em uma árvore do tronco para as folhas (BEJAN e LORENTE, 2008; BEJAN e ZANE, 2012).



Figura 4.1 - Exemplo de uma arquitetura de fluido ponto-volume: árvores e folhas (Fonte: REIS, 2006).

Contudo Bejan e Lorente (2008) mostram que as formas ramificadas não são a única classe de modelos a ser descoberta e usada. Existem fluxos que são percolados de forma não uniforme, estruturas de fluxo com mais de um objetivo, além de estruturas que devem executar ambas as funções de suporte mecânico e de fluxo.

A Teoria Construtal diz que a geração de formas e evolução física são considerados fenômenos macroscópicos que surgem naturalmente com a finalidade de fornecer condições de fluxo cada vez melhores. A evolução é de caráter multiescalar, de forma que cada componente de um fluxo do sistema evolui de maneira conjunta. Como esses elementos se fundem em estruturas cada vez maiores, uma hierarquia emerge de tal forma que os componentes de tamanho variados conseguem trabalhar juntos para que tudo flua de forma mais fácil. Essa situação é explicitada quando componentes menores de um sistema como riachos, árvores e ruas, se fundem em bacias hidrográficas, florestas e redes de transportes. Além dos exemplos dados, as redes neurais em um cérebro e os alvéolos pulmonares são também exemplos clássicos de um sistema de ramificação (BEJAN e LORENTE, 2011).

Bejan e Lorente (2008) dizem que, a partir da Teoria Construtal o sistema de fluxo é unicamente destinado a permanecer imperfeito. Sendo assim, a direção da evolução do sistema irá ocorrer no sentido que melhor distribua essas imperfeições, fazendo que todo o corpo fluido escoe de maneira mais fácil, mas sempre permitindo a evolução do mesmo. Dessa forma, o fenômeno natural não eliminará essas imperfeições, mas irá distribuí-las, gerando assim a geometria do sistema.

Uma configuração de sistema de fluxo não existe por si só. Segundo Bejan e Lorente (2008) elas são limitadas e suportadas por estruturas sólidas que proporcionam força e rigidez. Essa estrutura que suporta, transforma e se une com a estrutura de fluxo. Sendo assim, o Design Construtal se torna uma ótima ferramenta para se combinar os propósitos termo-fluido com os objetivos de busca de configuração em elementos mecânicos. A princípio, a aplicação da Teoria Construtal na análise de estruturas mecânicas possui tratamento semelhante ao dado para as configurações de fluxo, de forma que, estruturas mecânicas são consideradas redes através do qual enfatiza-se um fluxo de tensão de componentes para os seus vizinhos.

A estrutura sólida equivalente a este princípio é aquela em que não se tenha concentrações de tensões máximas, uma vez que esse comportamento não é o ideal para se obter o melhor desempenho da estrutura. O melhor desempenho e uso mecânico do material é conseguido quando as tensões máximas admissíveis são distribuídas uniformemente através do material disponível, mostrando que este princípio decorre da Lei Construtal, e que a aplicação do princípio é um setor importante na concepção construtal (BEJAN e LORENTE, 2008).

Sendo possível se determinar os parâmetros para a escolha do arranjo geométrico, torna-se necessário a determinação de um método que permita se determinar a geometria ótima que apresente o melhor desempenho dentre todas as presentes no arranjo geométrico. Para se determinar essa geometria ótima utilizou-se o método de busca por Força Bruta, também conhecido por método da Busca Exaustiva.

O método de Busca Exaustiva segundo Khoury e Harder (2016) é um método de pesquisa estocástico simples, funcional e útil. Além disso, sua simplicidade o torna um bom método para a realização de um processo de otimização. O método de Busca Exaustiva refere-se a qualquer algoritmo de busca que sistematicamente analisa possíveis soluções uma após a outra, até que se encontre uma solução que seja aceitável ou até que o número máximo de tentativas seja predefinido. Um algoritmo de otimização pela Busca Exaustiva consiste, portanto, avaliar valor após valor para um determinado intervalo, e retornar o valor com o resultado ideal como sua solução no final.

Embora o método de Busca Exaustiva possa parecer pouco sofisticado, ele tem a vantagem de ser capaz de pesquisar qualquer função, mesmo que tenha um comportamento complexo e irregular, múltiplos ótimos locais e até mesmo funções descontínuas. O método de Busca Exaustiva

não faz suposições sobre a função e não requer um ponto de partida, uma interpolação ou uma derivada, ele só precisa de um intervalo de análise. Portanto, esse método pode realizar uma busca e gerar um bom resultado em uma situação de completa ausência de conhecimento (KHOURY e HARDER, 2016).

No entanto, ainda de acordo com Khoury e Harder (2016), quando esse método obtém um ponto próximo ao ótimo global, ele não há condições melhora, exceto se, possivelmente gerando uma nova análise de um ponto ainda mais próximo. Em outras palavras, embora a aproximação da Busca Exaustiva possa encontrar um ponto próximo ao ótimo global, é muito improvável que ele encontre realmente o ótimo global. Por essa razão, o algoritmo é muitas vezes seguido por algumas iterações de um algoritmo determinístico como o método de Newton, que pode facilmente e rapidamente convergir para o ótimo global a partir do ponto de partida encontrado pela Busca exaustiva.

#### **4.1 Estudo de caso: Método Design Construtal aplicado em placas enrijecidas sob flambagem**

Para a aplicação do Método Design Construtal no problema da flambagem elasto-plástica de placas com enrijecedores, fez-se a transformação de uma fração de volume ( $\phi$ ) de uma placa sem enrijecedores e que será usada como referência, em elementos enrijecedores, através da seguinte equação:

$$\phi = \frac{V_e}{V_t} = \frac{N_{el}(ah_s t_s) + N_{et}[(b - N_{el} t_s)h_s t_s]}{abt} \quad (4.1)$$

onde  $V_e$  é o volume de material convertido em enrijecedores,  $V_t$  o volume total de material da placa de referência (sem enrijecedores),  $N_{el}$  e  $N_{et}$  são, respectivamente, o número de enrijecedores nas direções longitudinal e transversal da placa;  $a$ ,  $b$  e  $t_p$  são, respectivamente, o comprimento, a largura e a espessura da placa; e  $h_s$  e  $t_s$  são, respectivamente, a altura e a espessura dos enrijecedores. Cabe destacar que todos os enrijecedores apresentam uma mesma geometria, com seção transversal retangular, permitindo a realização de uma variação no grau de liberdade  $h_s/t_s$ , correspondente à relação entre a altura e largura do enrijecedor.

Sendo assim, a transformação na configuração geométrica sofrida pela placa acarretará em uma variação nula de volume, entre a placa sem enrijecedores, usada como referência, e a placa com enrijecedores. Cabe destacar que uma variação geométrica sem variação volumétrica é um aspecto que está diretamente relacionado à aplicação do Método Design Construtal, o que permite uma comparação adequada entre todas as configurações propostas.

Dois valores para o volume total de material da placa foram considerados:  $V_{tl} = 0,040$  e  $V_{t2} = 0,028 \text{ m}^3$ . Além disso, para cada volume, diferentes valores de  $\phi$  foram adotados, representando diferentes frações de volume da placa de referência transformadas em enrijecedores.

Além disso, para o presente estudo foram consideradas 16 combinações de enrijecedores longitudinais e transversais. Adotou-se o número de enrijecedores na direção longitudinal  $N_{el} = 2, 3, 4$  e  $5$ , da mesma forma para o número de enrijecedores na direção transversal  $N_{et} = 2, 3, 4$  e  $5$ . Sendo assim, as combinações possíveis são P(2,2), P(2,3), P(2,4), P(2,5), P(3,2), P(3,3), P(3,4), P(3,5), P(4,2), P(4,3), P(4,4), P(4,5), P(5,2), P(5,3), P(5,4) e P(5,5), conforme esquematizado na Fig. 4.2.  $N_{el}$  e  $N_{et}$  são considerados graus de liberdade para aplicação do método Design Construtal.

A Figura 4.3 representa esquematicamente todos os parâmetros da placa enrijecida P(2,3), onde  $N_{el} = 2$  e  $N_{et} = 3$ . Já o espaçamento entre enrijecedores nas direções longitudinal ( $S_{el}$ ) e transversal ( $S_{et}$ ) são dados, respectivamente, por:

$$S_{el} = \frac{b}{(N_{el} + 1)} \quad (4.2)$$

$$S_{et} = \frac{a}{(N_{et} + 1)} \quad (4.3)$$

Nesta análise adotou-se o material Aço AH-36. A placa possui comprimento  $a = 2 \text{ m}$ , largura  $b = 1 \text{ m}$ , e espessura  $t_p$  de acordo com os valores de  $V_t$  e de  $\phi$ . Foram adotadas frações de volume dos enrijecedores, definidas pela Eq. (4.1), como valores de  $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$  e  $0,4$ . Além disso, para cada fração volumétrica, foi avaliada a influência do grau de liberdade  $h_s/t_s$  no comportamento elasto-plástico sob compressão axial da estrutura. A Figura 4.2 representa um esquema prático do estudo realizado, que tem como função objetivo a maximização da tensão última obtida para a flambagem elasto-plástica das placas com enrijecedores.

Como restrições para a aplicação do Método Design Construtal, além do valor do volume total da placa  $V_t$  e da fração de volume  $\phi$ , a espessura dos enrijecedores  $t_s$  foi definida a partir de valores comerciais de chapas de aço. Com isso, os valores do grau de liberdade  $h_s/t_s$  foram determinados a partir dos valores de  $t_s$  previamente definidos.

Todas as bordas das placas são consideradas como simplesmente apoiadas. Todos os nós ao longo das quatro bordas são restringidos à deflexão e rotação ao longo da direção da espessura ( $UZ, RZ = 0$ ). As bordas descarregadas podem se deformar no plano, porém continuam em linha reta. Isto ocorre impedindo duas extremidades da borda descarregada com  $UY = 0$ , fazendo com que os

deslocamentos sejam uniformes ao longo do comprimento da placa. O bordo reativo é restringido para a deformação axial em  $UX = 0$ .

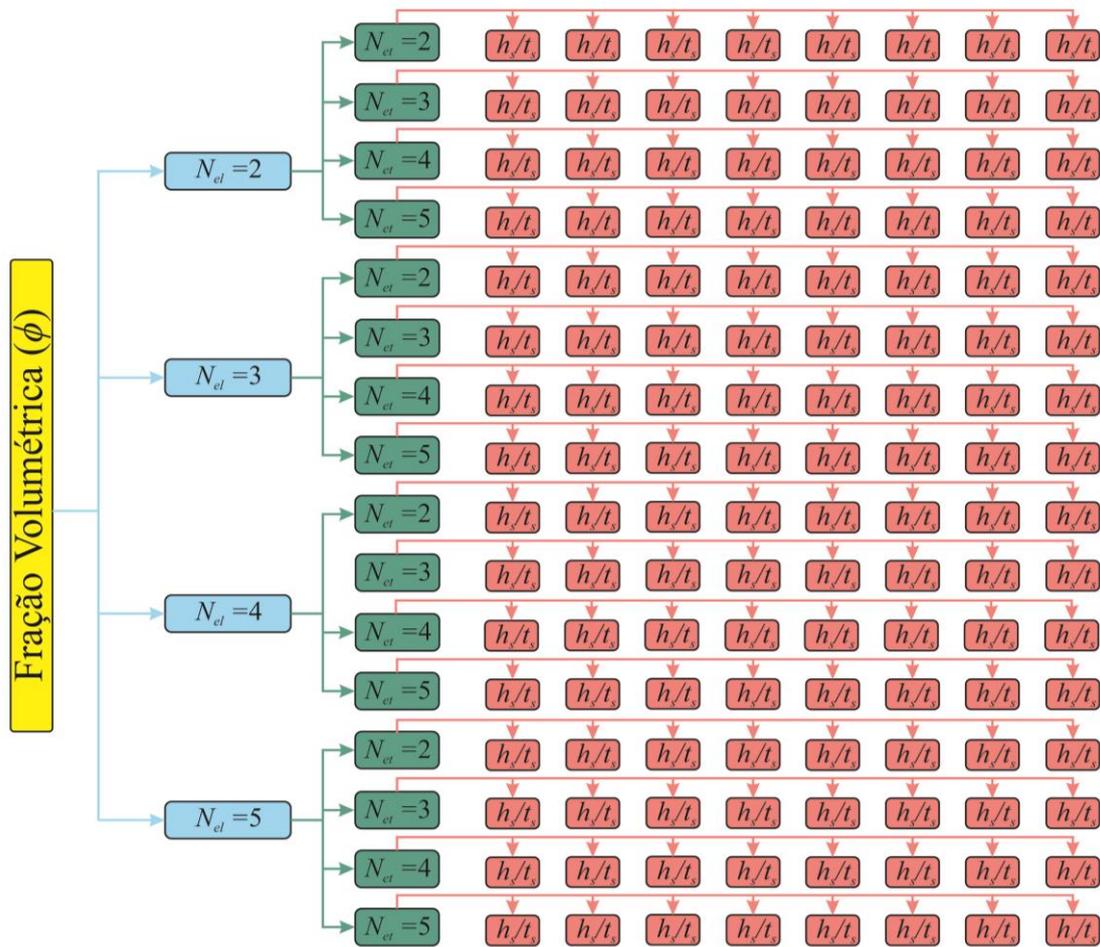


Figura 4.2 - Esquema prático aplicado.

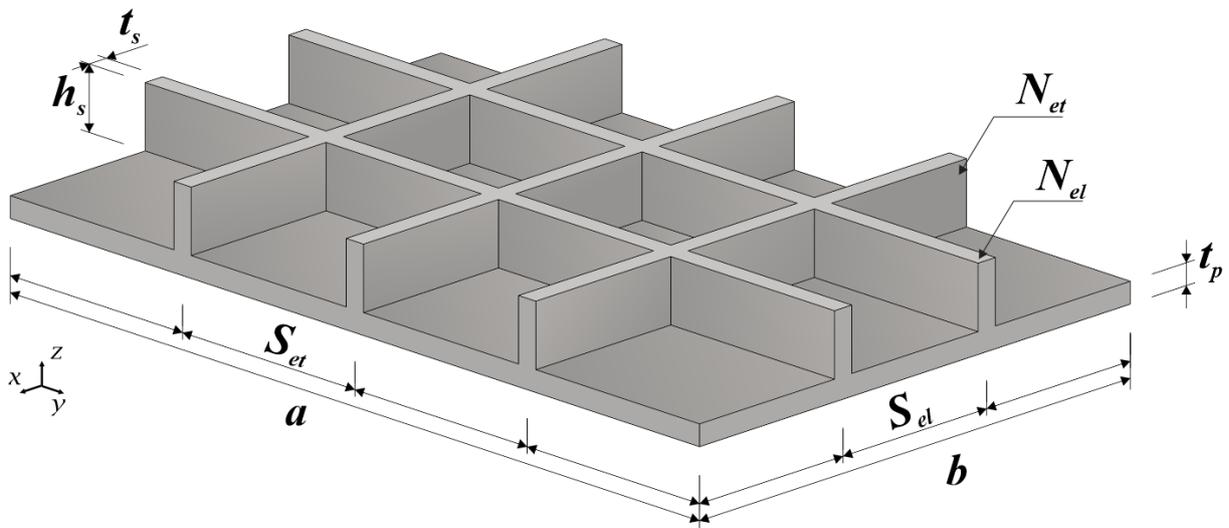


Figura 4.3 - Representação esquemática da placa P(2,3).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tendo duas situações propostas com  $V_{t1} = 0,040 \text{ m}^3$  e  $V_{t2} = 0,028 \text{ m}^3$ , a análise dos resultados foi feita usando como referência a tensão última de flambagem da correspondente placa de referência (sem enrijecedores), sendo  $\sigma_{u1} = 342,77 \text{ MPa}$  e  $\sigma_{u2} = 187,61 \text{ MPa}$ , respectivamente. Os valores para a tensão última de flambagem das placas enrijecidas ( $\sigma_{ult}$ ) foram normalizados em relação ao valor da tensão última das placas de referência ( $\sigma_{uR}$ ) para cada valor de volume total, obtendo  $\sigma_{uN}$ , ou seja:

$$\sigma_{uN} = \frac{\sigma_u}{\sigma_{uR}} \quad (5.1)$$

### 5.1 Análise com $V_{t1} = 0,040 \text{ m}^3$

Considerando os valores de  $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$  e  $0,4$ , a variação da tensão última normalizada devido à variação do grau de liberdade  $h_s/t_s$  para as configurações geométricas P(2,2), P(2,3), P(2,4), P(2,5), P(3,2), P(3,3), P(3,4), P(3,5), P(4,2), P(4,3), P(4,4), P(4,5), P(5,2), P(5,3), P(5,4) e P(5,5) estão apresentadas, respectivamente, nas Figs. A.1 a A.3 do Apêndice A.

Considerando as Figs. A.1 a A.3 é possível observar que, a presença de enrijecedores permitiu em alguns casos uma melhoria no comportamento mecânico das placas sob compressão axial em relação à placa de mesmo volume e sem enrijecedores. Entretanto, na maioria dos casos estudados, a inclusão dos enrijecedores somente conduziu a tensões últimas inferiores àquela obtida para a placa de referência.

Além disso, os gráficos presentes no Apêndice A indicam que, para cada variação volumétrica  $\phi$ , a análise elasto-plástica apresentou uma relação ótima  $h_s/t_s$  que maximiza a carga última de flambagem. Desta forma, é possível observar que, à medida que se aumenta o valor da relação  $h_s/t_s$  das placas, as mesmas tendem a apresentar um comportamento semelhante onde se tem um crescente aumento de carga última de flambagem até atingir um valor máximo. Após isso, tem-se um subsequente decréscimo no valor da carga última. Portanto, em todos os casos analisados, existe uma geometria ótima obtida com valor intermediário de  $h_s/t_s$ , mostrando que a variação geométrica proposta pelo Método Design Construtal permite a obtenção de desempenhos superiores mantendo constante a quantidade de material.

Analisando os resultados obtidos pelas placas cujo volume total é  $V_{t1} = 0,040 \text{ m}^3$ , observou-se o melhor desempenho para a placa P(2,5) com  $\phi = 0,3$  e relação  $h_s/t_s = 4,501$ , dentre todas as configurações geométricas analisadas. Essa configuração apresentou uma melhoria de 7,38% em relação à tensão última da placa de referência. O gráfico da variação da tensão última de flambagem em função da variação da relação  $h_s/t_s$ , para a placa P(2,5) e para os quatro valores de  $\phi$  considerados na pesquisa, é mostrado na Fig. 5.1 (ou na Fig. A.1d).

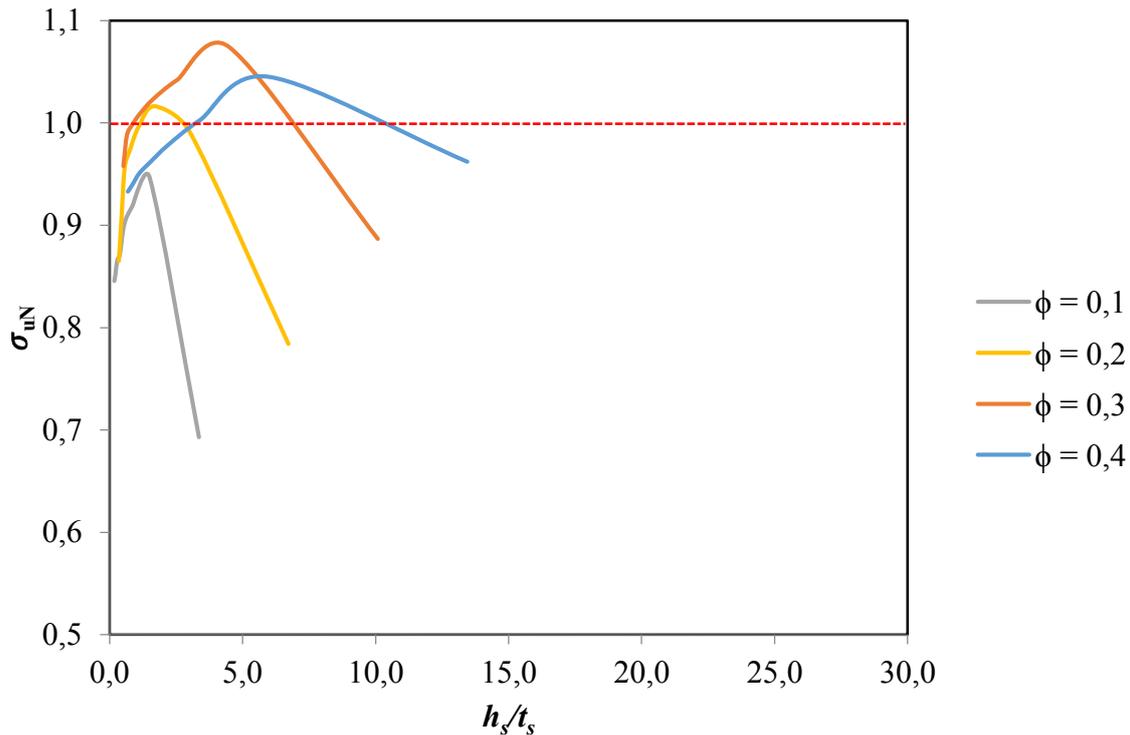


Figura 5.1 - Valores de tensão última normalizada em função da variação do grau de liberdade  $h_s/t_s$  para a configuração P(2,5).

Ainda analisando a configuração geométrica P(2,5), para esse mesmo valor de  $\phi = 0,3$ , a relação  $h_s/t_s = 10,084$  apresentou o pior comportamento elasto-plástico (ver Fig. 5.1). Houve uma redução de 11,33% do valor da tensão última de flambagem quando comparada à tensão última de uma placa de mesmo volume sem enrijecedores. A Figura 5.2 apresenta as distribuições de tensões (von Mises) para a melhor e a pior geometria analisando  $\phi = 0,3$  para a configuração geométrica P(2,5).

É possível notar na Fig. 5.2 que a geometria otimizada (Fig. 5.2a) possui uma maior região da placa submetida à tensão última (região em vermelho) em comparação com a Fig. 5.2b que apresenta uma concentração da tensão última nas extremidades carregadas da placa e dos enrijecedores. Isso é explicado pelo princípio Construtal da ótima distribuição de imperfeições, ou seja, a melhor geometria é aquela que consegue distribuir as imperfeições (tensão última) de maneira mais uniforme.

Considerando a Fig. A.2e, para o arranjo geométrico P(4,4) com  $\phi = 0,4$  e relação  $h_s/t_s = 0,700$ , teve-se a geometria com o rendimento menos favorável entre todos os casos analisados, apresentando uma redução de 44,18% no valor da tensão última, quando comparada à placa de referência. A distribuição de tensões para essa geometria é apresentada na Fig. 5.3. Esse caso ilustra a influência da configuração geométrica no desempenho mecânico da estrutura, uma vez que, mantendo constante o volume total de material essa geometria conduziu a uma tensão última para a flambagem elasto-plástica bastante inferior à que foi obtida para a placa sem enrijecedores.

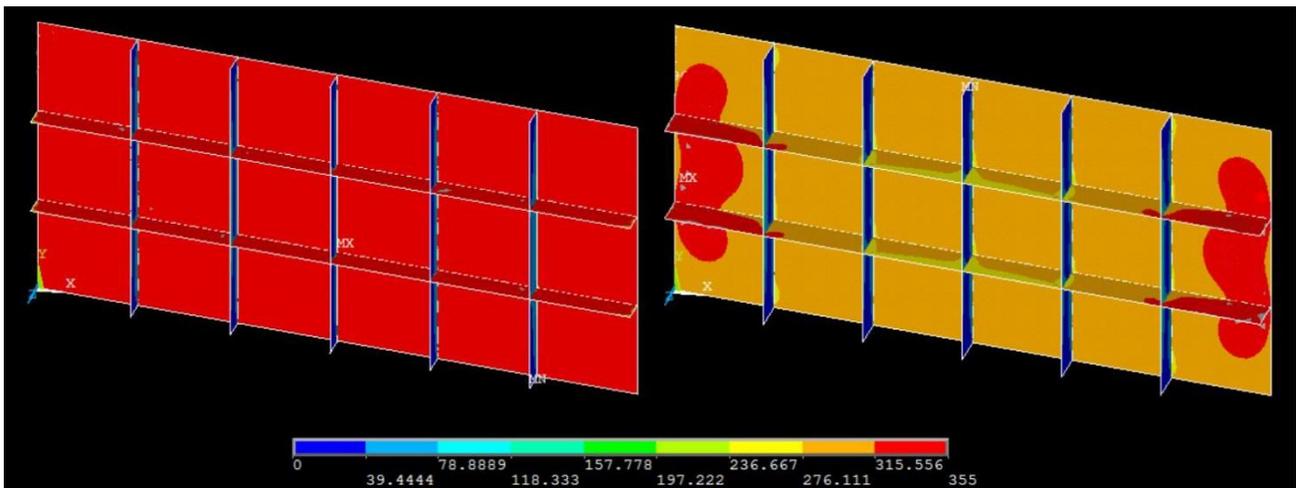


Figura 5.2 - Distribuição de tensões para a geometria com (a) melhor e (b) pior desempenho elasto-plástico do arranjo P(2,5) e  $\phi = 0,3$  considerando volume inicial  $V_{II}$ .

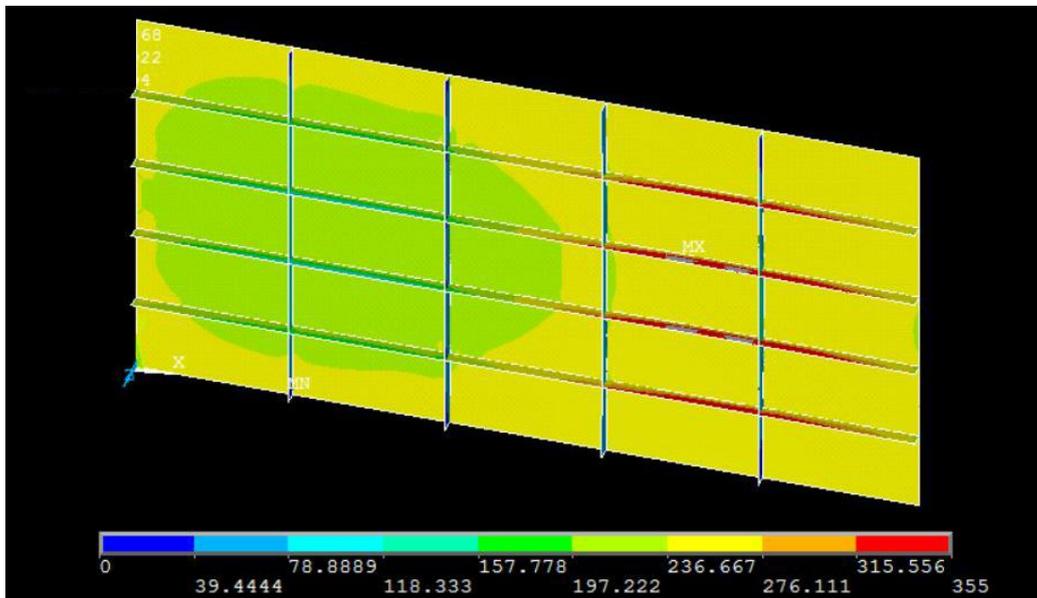


Figura 5.3 - Distribuição de tensões para a geometria com pior desempenho elasto-plástico dentre todos os casos analisados de  $V_{II}$ .

É possível ressaltar ainda que, comparando a melhor geometria global (Fig. 5.2a) com a pior geometria global (Fig. 5.3), é evidente que a geometria ótima conduz a uma distribuição mais uniforme da tensão última o que, conseqüentemente, gera um desempenho mecânico superior.

Portanto, ao analisar os resultados apresentados no Apêndice A obtidos para as placas enrijecidas com volume total  $V_{II} = 0,040 \text{ m}^3$ , é possível observar que as geometrias ótimas na maioria dos casos apresentam um valor de tensão última próxima à tensão de escoamento do material ( $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$ ). Porém, é perceptível que o processo de transformação de volume da placa em enrijecedores não apresentou um ganho significativo em capacidade de carga. Isso é explicado pelo fato de a tensão última da placa de referência  $\sigma_{URI} = 328,33 \text{ MPa}$  ser um valor próximo à tensão de

escoamento do material. Sendo assim, o ganho que a presença dos enrijecedores proporcionou não foi significativo.

Por fim, observa-se a influência da espessura da placa inicialmente sem enrijecedores para a realização de uma busca pela geometria ótima de placa enrijecida. Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), a tensão de flambagem depende da espessura da placa, de forma que quanto mais fina a placa, mais baixa é a carga de flambagem. Sendo assim, realizou-se a mesma análise para placas enrijecidas, porém com um volume total  $V_{t2} = 0,028 \text{ m}^3$ .

## 5.2 Análise com $V_{t2} = 0,028 \text{ m}^3$

Com a intenção de obter resultados de melhoria mais significativos em relação à tensão última das placas enrijecidas, foi feita uma segunda análise, utilizando agora um volume de material  $V_{t2} = 0,028 \text{ m}^3$ . Como as dimensões  $a$  e  $b$  da placa não foram alteradas em relação ao estudo de caso feito com  $V_{t1} = 0,040 \text{ m}^3$ , a redução no volume causou uma diminuição na espessura  $t_p$  da placa de referência. Os resultados obtidos para essa situação são apresentados nos Apêndices B, C e D.

A variação da tensão última normalizada em função do grau de liberdade  $h_s/t_s$ , para todas as frações de volume analisadas ( $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$  e  $0,4$ ), das configurações geométricas das placas com enrijecedores P(2,2), P(2,3), P(2,4), P(2,5), P(3,2), P(3,3), P(3,4), P(3,5), P(4,2), P(4,3), P(4,4), P(4,5), P(5,2), P(5,3), P(5,4) e P(5,5) são mostradas, respectivamente, nas Figs. B.1 até B.3 do Apêndice B.

A partir destes gráficos é possível observar que, dentre os casos estudados, normalmente, a presença de enrijecedores permitiu melhorar de forma significativa o comportamento mecânico sob flambagem elasto-plástica das placas em relação àquela sem enrijecedores. Entretanto, em alguns casos, a inclusão dos enrijecedores conduziu a tensões últimas inferiores a obtida para a placa sem enrijecedores. Esses resultados demonstram, mais uma vez, a importância de avaliar a influência da geometria em problemas de engenharia, mais especificamente, na engenharia estrutural.

Assim como nos resultados obtidos para  $V_{t1} = 0,040 \text{ m}^3$ , em cada fração volumétrica  $\phi$ , a variação da relação  $h_s/t_s$  permitiu identificar uma geometria ótima  $(h_s/t_s)_o$  que conduziu a uma tensão última normalizada máxima  $(\sigma_{uN})_m$  através da análise elasto-plástica de flambagem realizada. Sendo assim, observa-se uma mesma tendência no comportamento mecânico das placas devido à variação do valor da relação  $h_s/t_s$  dos enrijecedores: primeiramente, tem-se um crescente aumento de carga última de flambagem até ser atingido o valor uma vez maximizado de tensão última,  $(\sigma_{uN})_m$ , considerado como o valor referente à geometria uma vez otimizada,  $(h_s/t_s)_o$ ; então, ao atingir  $(\sigma_{uN})_m$ , tem-se um subsequente decréscimo no valor da tensão última de flambagem. Portanto, para todos os casos analisados, existe uma geometria ótima obtida através de um valor intermediário de  $h_s/t_s$ . Esse fato indica que sem uma avaliação geométrica não é possível definir uma configuração que permita

o melhor desempenho mecânico da estrutura. Isso comprova que a variação no arranjo geométrico proposta pelo Método Design Construtal permite a obtenção de desempenhos superiores, mantendo constante a quantidade de material.

Como já foi comentado, a variação das geometrias através da aplicação do Método Design Construtal é realizada mediante a presença de graus de liberdade, sendo assim, é possível analisar o comportamento das placas enrijecidas, observando também a influência dos parâmetros  $N_{el}$  e  $N_{et}$ . Além disso, também é possível realizar uma análise da influência da variação da fração volumétrica  $\phi$ .

Primeiramente, analisou-se o comportamento das placas através da variação do número de enrijecedores longitudinais e posteriormente pelos enrijecedores transversais. A partir dos resultados mostrados no Apêndice B, as curvas de tensão última normalizada em função da variação relação  $h_s/t_s$  que apresentam a configuração geométrica ótima para cada valor de  $N_{el}$  e  $N_{et}$ , respectivamente, estão apresentadas nas Figs. 5.4 e 5.5.

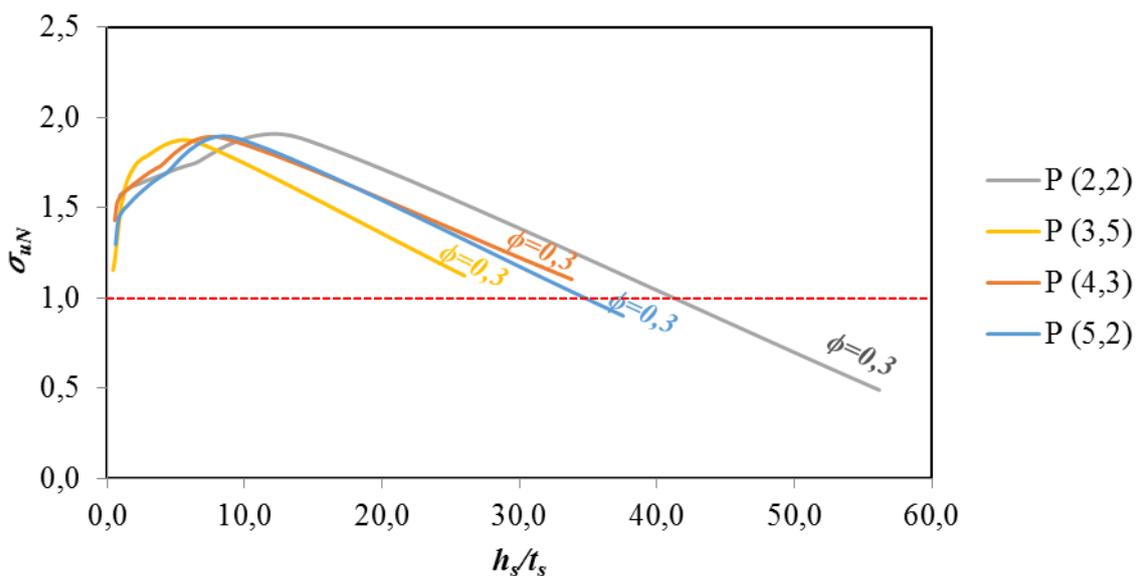


Figura 5.4 - Curvas de melhor desempenho, usando o  $N_{el}$  como parâmetro.

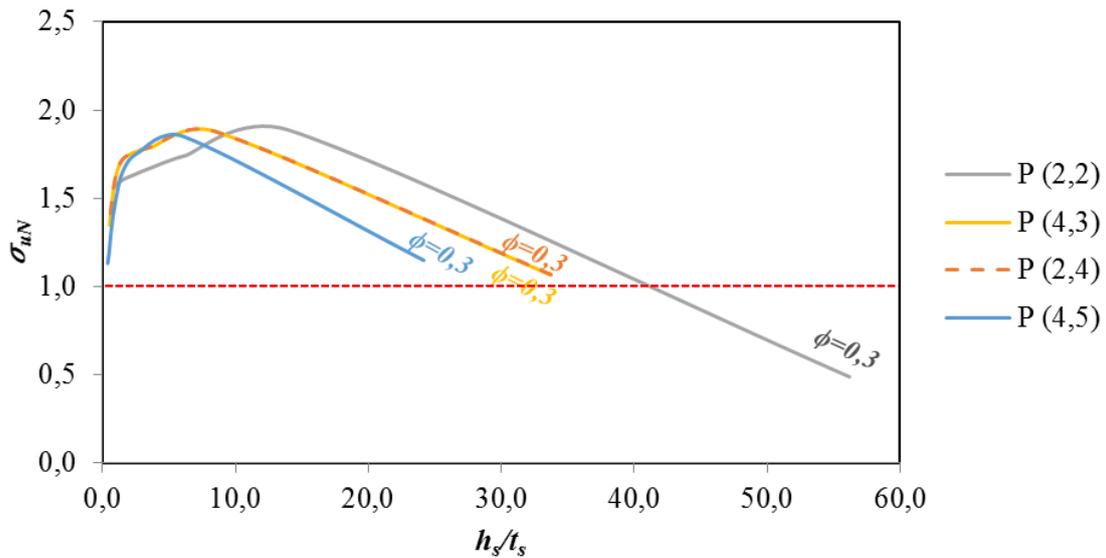


Figura 5.5 - Curvas de melhor desempenho, usando o  $N_{el}$  como parâmetro.

A partir dos gráficos apresentados nas Figs. 5.4 e 5.5, é possível notar que para cada análise feita considerando o número de enrijecedores dispostos tanto longitudinalmente ( $N_{el}$ ), quanto transversalmente ( $N_{et}$ ), os resultados ótimos se concentraram na fração volumétrica  $\phi = 0,3$ . As Tab. 5.1 e 5.2, apresentam as melhorias obtidas através do processo de otimização:

Tabela 5.1 - Características da geometria que apresenta o melhor desempenho, usando  $N_{el}$  como parâmetro

$N_{el}$	Configuração	$\phi$	$(h_s/t_s)_o$	Tipo de flambagem	$(\sigma_{uN})_m$
2	P(2,2)	0,3	14,094	flambagem local	1,885
3	P(3,5)	0,3	6,537	flambagem global	1,862
4	P(4,3)	0,3	8,502	flambagem global	1,885
5	P(5,2)	0,3	9,438	flambagem global	1,886

Tabela 5.2 - Características da geometria que apresenta o melhor desempenho, usando  $N_{et}$  como parâmetro

$N_{et}$	Configuração	$\phi$	$(h_s/t_s)_o$	Tipo de flambagem	$(\sigma_{uN})_m$
2	P(2,2)	0,3	14,094	flambagem local	1,886
3	P(4,3)	0,3	8,502	flambagem global	1,863
4	P(2,4)	0,3	8,468	flambagem local	1,885
5	P(4,5)	0,3	6,087	flambagem global	1,886

Outro aspecto observado a partir dos resultados obtidos, está relacionado ao comportamento mecânico dos enrijecedores transversais. De acordo com Szilard (2004), em uma placa sob compressão uniaxial, os enrijecedores longitudinais, ou seja, que estão dispostos na mesma direção de aplicação das cargas coplanares, suportam a maior parte da força aplicada. Já os enrijecedores transversais (dispostos perpendicularmente à aplicação do carregamento) são usados meramente para subdividir a placa em unidades menores, uma vez que, a carga suportada por ele é relativamente pequena.

O fato anteriormente descrito pode ser observado nas Figs. D.1 até D.16, do Apêndice D, onde a distribuição de tensão de von Mises evidencia que os enrijecedores transversais estão submetidos a valores baixos de tensão. Na escala de cores utilizada, a cor azul representa tensões entre 0 e aproximadamente 10% da tensão última da estrutura. Cabe destacar que esse comportamento se repetiu em todas as geometrias de placas com enrijecedores analisadas.

Para comprovar essa tendência, adotou-se como exemplo as placas com  $\phi = 0,3$ ,  $N_{el} = 2$  e  $N_{et} = 2, 3, 4$  e  $5$ , conforme descrito na Tab. 5.3. Os resultados obtidos para os diferentes valores de  $N_{et}$ , apresentam uma pequena variação na magnitude da carga última, que é explicada pela alteração da geometria dos enrijecedores em cada caso, uma vez que o volume total de material é mantido constante.

Tabela 5.3 - Características das geometrias comparando a influência do  $N_{et}$ , ambas com  $\phi = 0,3$ .

$N_{et}$	Configuração	$\phi$	$(h_s/t_s)_o$	Tipo de flambagem	$(\sigma_{uN})_m$
2	P(2,2)	0,3	14,094	flambagem local	1,885
3	P(2,3)	0,3	10,579	flambagem local	1,878
4	P(2,4)	0,3	8,468	flambagem local	1,880
5	P(2,5)	0,3	7,059	flambagem local	1,858

Portanto, os resultados da Tab. 5.3 comprovam que a variação do número de enrijecedores transversais nas placas não causa influência significativa na resistência mecânica das mesmas.

Além disso, ainda com base nos resultados de tensão última pelo número de enrijecedores  $N_{el}$  e  $N_{et}$  apresentados nas Tab. 5.1 e 5.2, é possível perceber que as geometrias ótimas apresentam tanto configuração de flambagem local da placa entre os reforços, quanto global da estrutura, nos casos analisados. Nas situações em que se percebe a presença de flambagem local, à medida que se diminui o valor da relação  $h_s/t_s$  para cada análise de fração volumétrica  $\phi$ , menor se torna a altura do enrijecedor, apresentando uma transformação no comportamento das placas enrijecidas de flambagem local para global. A situação final de deslocamento para os casos apresentados nas Tabs. 5.1 e 5.2 são apresentados nas Fig. 5.6 à 5.11.

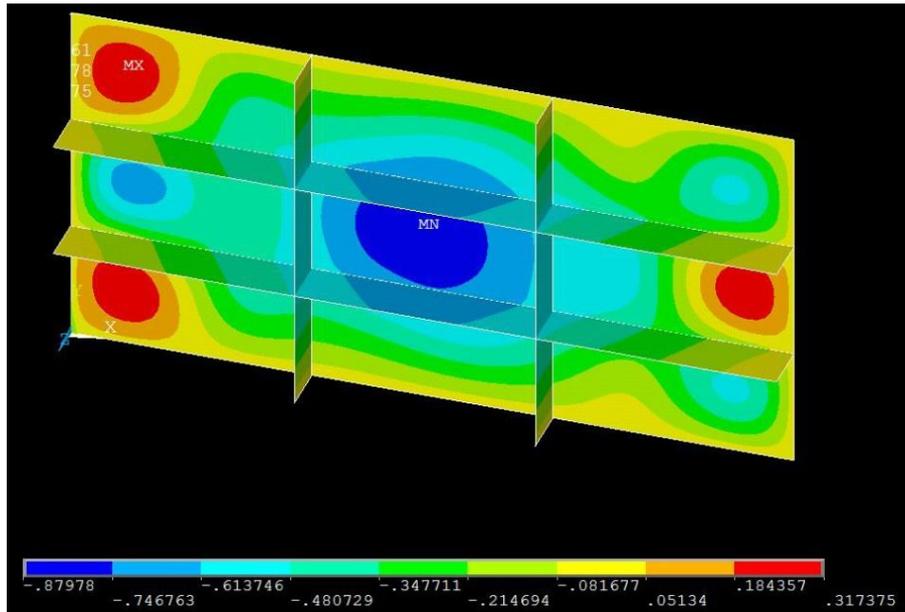


Figura 5.6 - Deslocamentos finais para a placa P(2,2), em mm.

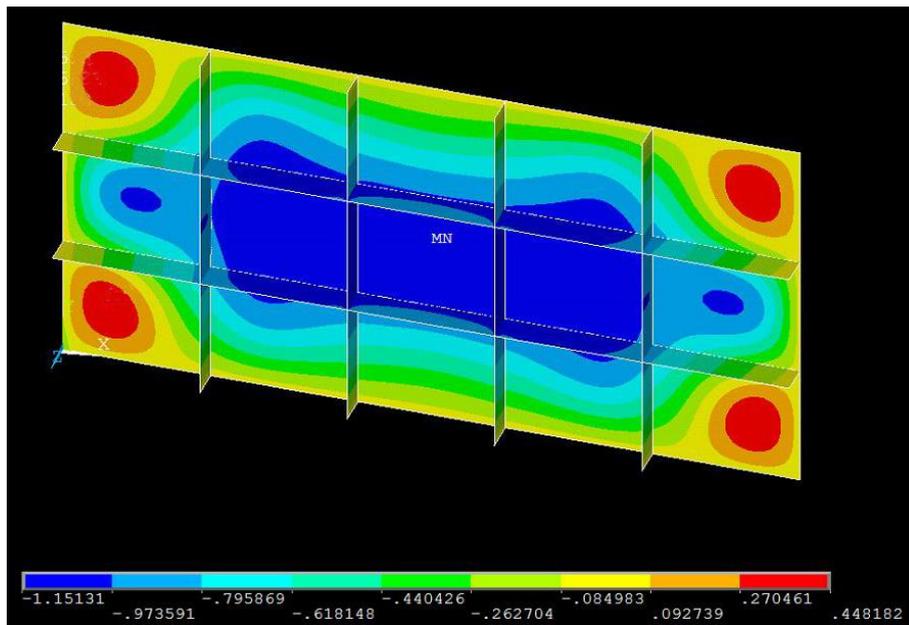


Figura 5.7 - Deslocamentos finais para a placa P(2,4), em mm.

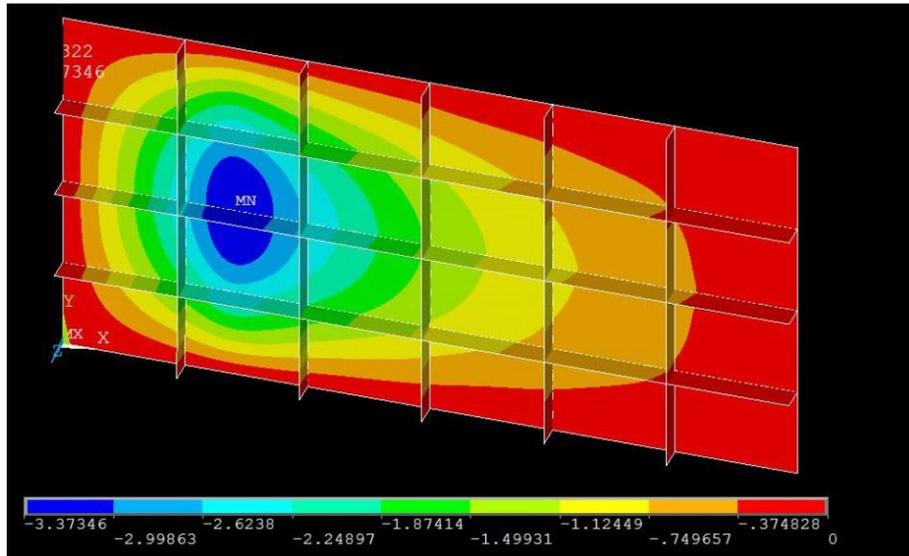


Figura 5.8 - Deslocamentos finais para a placa P(3,5), em mm..

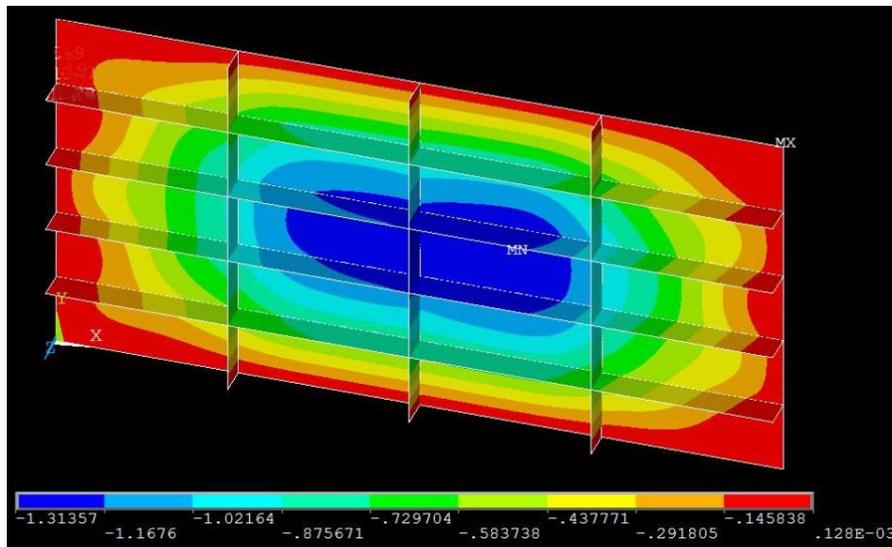


Figura 5.9 - Deslocamentos finais para a placa P(4,3), em mm.

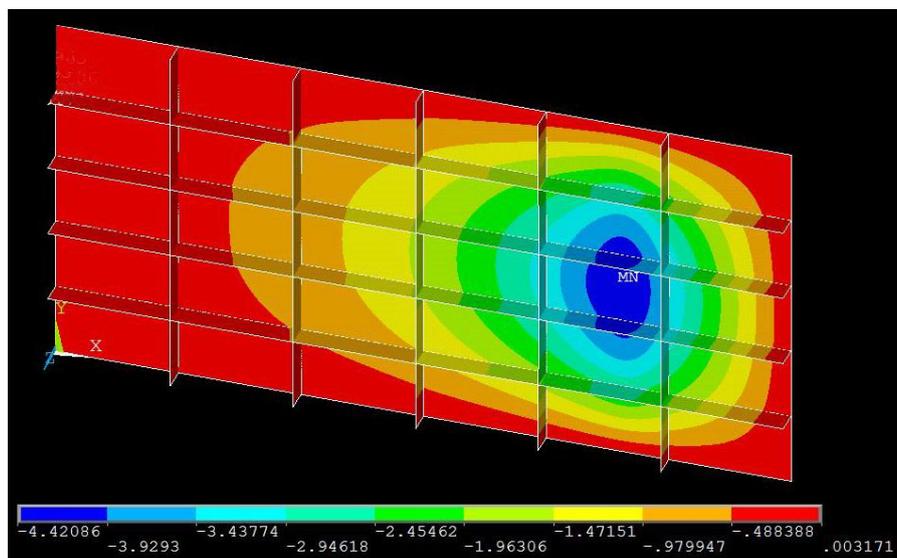


Figura 5.10 - Deslocamentos finais para a placa P(4,5), em mm.

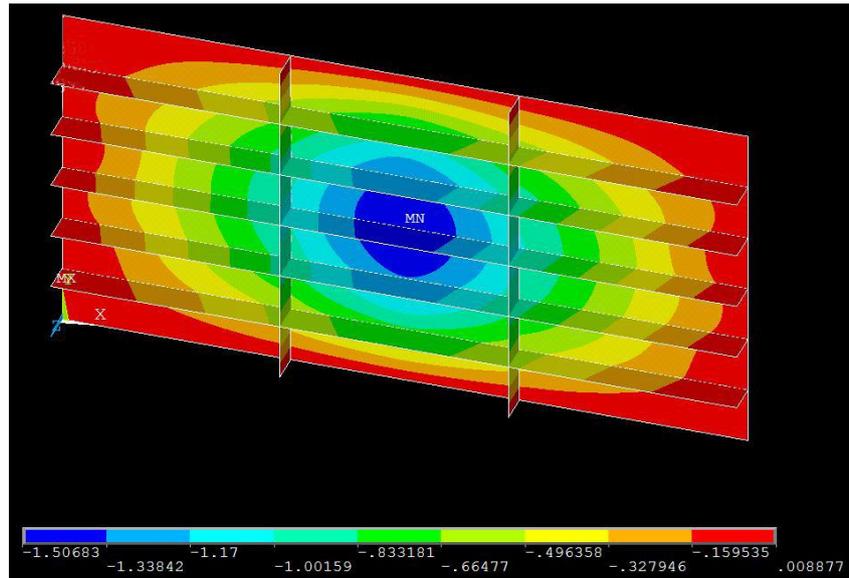


Figura 5.11 - Deslocamentos finais para a placa P(5,2), em mm.

É importante salientar que a partir da configuração deformada das placas sob flambagem elástica e empregando a Eq. (3.4), é obtida a configuração geométrica inicial para a análise da flambagem elasto-plástica, podendo a mesma ser do tipo local ou global. Assim, se a configuração inicial da análise elasto-plástica for gerada a partir de uma placa com flambagem elástica do tipo local, a configuração final da análise de flambagem elasto-plástica será necessariamente uma flambagem local. O mesmo ocorre se a configuração inicial da análise elasto-plástica for de uma placa com flambagem global.

Considerando somente os resultados gerados a partir da análise de flambagem elástica das placas, a mudança do comportamento de flambagem local para global sempre determina a geometria ótima de flambagem elástica, ou seja, a configuração geométrica da placa que conduz ao maior valor de carga crítica. Porém, não necessariamente, a geometria ótima de flambagem elástica será a mesma de flambagem elasto-plástica.

Considerando que as placas possuem comportamentos de flambagem elástica e de pós-flambagem elasto-plástica, Yoo e Lee (2011) afirmam que a magnitude relativa entre a tensão última e a tensão crítica de uma placa depende de vários parâmetros, como suas características dimensionais, condições de contorno, tipos de carregamento e do limite de escoamento do material. Sendo assim, El-Sawy et al. (2004) e Ziemian (2010) indicam que é possível a tensão última da placa ser atingida antes da tensão crítica, definindo a ocorrência direta de uma flambagem inelástica, ou seja, o escoamento do material acontece antes que uma considerável deflexão lateral ocorra. Portanto, avaliando os valores obtidos para a carga crítica e carga última dos casos analisados é possível notar que, em sua grande maioria, a presença dos enrijecedores faz com que ocorra uma flambagem inelástica, ou seja, a tensão última da placa possui um valor menor do que sua tensão crítica.

A análise para as melhores configurações geométricas também pode ser feita considerando as que apresentam o melhor desempenho para cada valor de fração volumétrica  $\phi$ , sendo as melhores configurações apresentadas na Tab. 5.4 e na Fig. 5.12.

Tabela 5.4 - Características da geometria que apresenta o melhor desempenho, usando  $\phi$  como parâmetro

$\phi$	Configuração	$h_s/t_s$	Tipo de flambagem	$\sigma_{uN}$
0,1	P(2,2)	2,095	flambagem global	1,374
0,2	P(2,2)	4,190	flambagem global	1,829
0,3	P(2,2)	14,094	flambagem local	1,885
0,4	P(4,5)	8,115	flambagem local	1,885

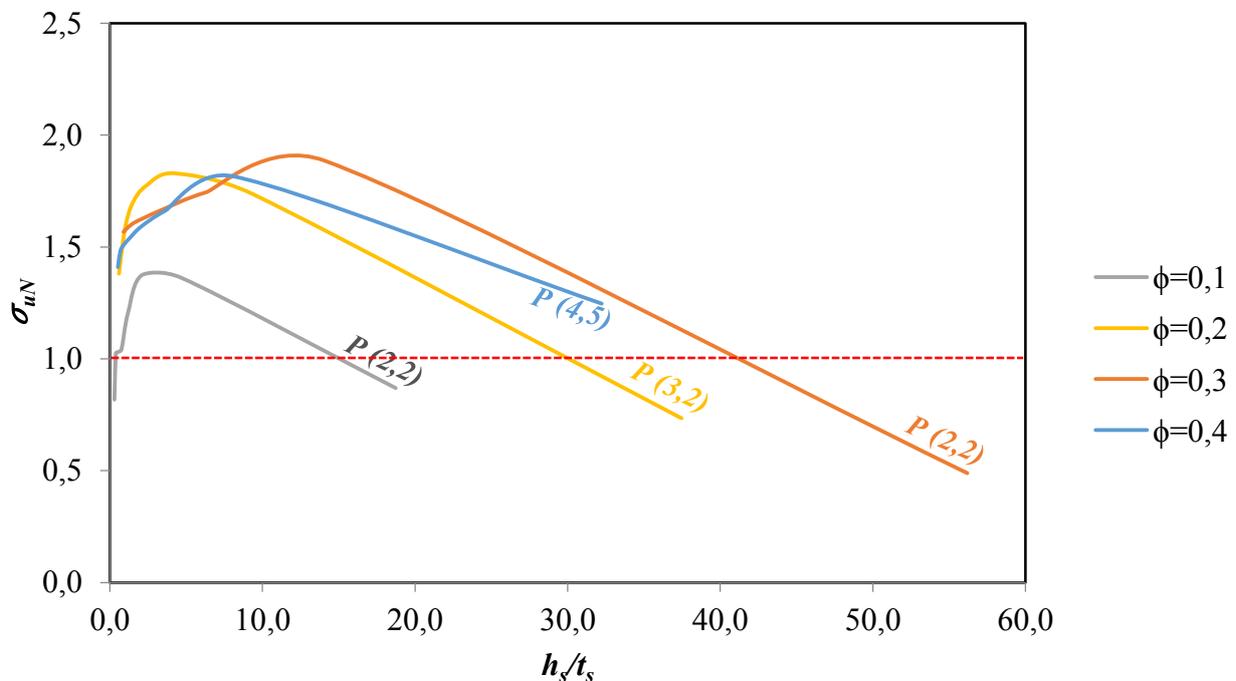


Figura 5.12 - Curvas de melhor desempenho, usando  $\phi$  como parâmetro.

Através da comparação feita na Fig. 5.12, é possível perceber que as geometrias que conduzem a uma maior tensão última de flambagem pertencem a placas com uma fração de volume  $\phi = 0,3$  transformada em enrijecedores. Para essa fração de volume percebe-se que na maioria dos casos, os valores ótimos se encontram próximos à tensão de escoamento  $\sigma_y$  do material. Porém, para valores de  $h_s/t_s$  até 10, as configurações geométricas das placas P(3,2) e P(4,5) conduzem a comportamentos mecânicos superiores que os das placas P(2,2).

Considerando apenas  $\phi = 0,1$ , percebe-se que dentre todas as geometrias analisadas para essa fração volumétrica, a que apresentou o maior valor de tensão última de flambagem teve uma melhoria de 37,4% quando comparada com uma placa com mesmo volume e sem enrijecedores. O arranjo

geométrico com  $\phi = 0,1$  apresentou valores de tensão última  $\sigma_{ult}$  com melhorias pouco significativas, sendo que, na maioria dos casos a geometria ótima possui rendimento inferior à tensão última  $\sigma_{ult}$  da placa de mesmo volume e sem enrijecedores.

Considerando todos os casos apresentados, pode-se perceber que a placa do tipo P(2,2),  $h_s/t_s = 14,094$  e  $\phi = 0,3$  apresentou a melhor configuração geométrica dentre todas as placas enrijecidas, devido à melhoria de 88,519% em relação à placa sem enrijecedores e de mesmo volume. A Figura 5.13 apresenta as curvas do melhor e pior valor para a tensão última normalizada  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$  para o arranjo que apresenta a geometria com melhor rendimento, sendo neste caso P(2,2).

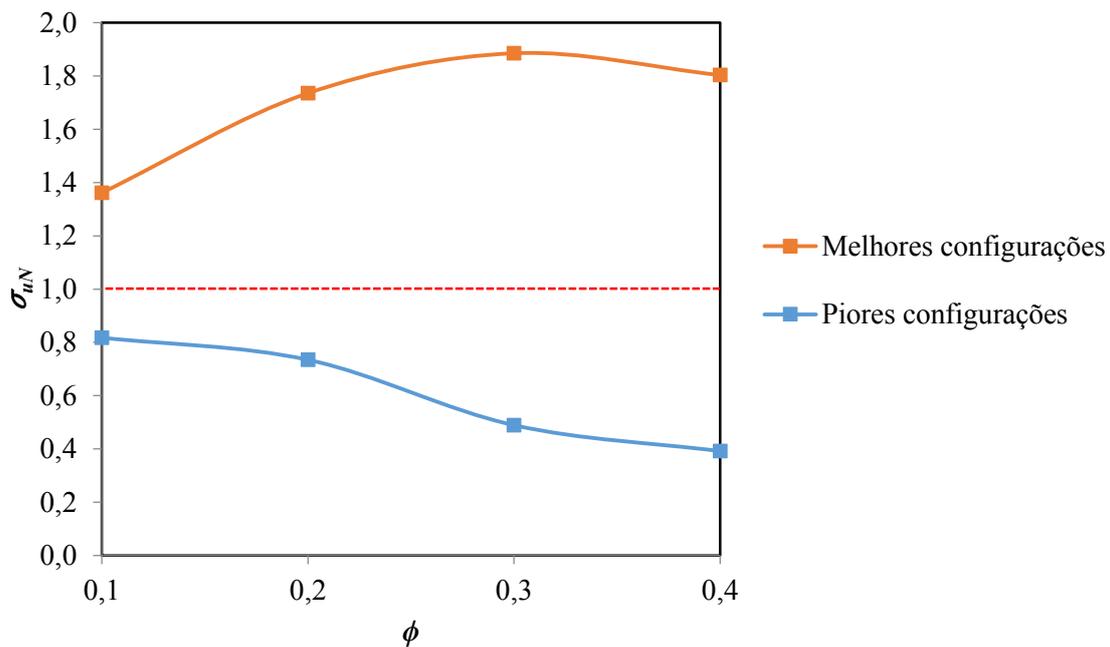


Figura 5.13- Curvas do melhor e pior valor tensão última normalizada  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(2,2).

Para o arranjo geométrico proposto na Fig. 5.13, nota-se uma grande diferença entre as piores e melhores configurações para cada valor de  $\phi$ . Para os valores de  $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$  e  $0,4$  obteve-se uma diferença percentual relativa, apresentando uma melhoria de 68,065%, 148,843%, 285,480% e 359,949%, respectivamente. Além disso, comparando a melhor e a pior geometria dentre todas as presentes no arranjo geométrico P(2,2), tem-se uma melhoria de 380,86% no valor da tensão última.

É apresentada na Fig. 5.14 a distribuição de tensões (von Mises) da melhor configuração geométrica, bem como para a pior geometria analisando a mesma fração volumétrica  $\phi = 0,3$ . Além disso, é apresentada na Fig. 5.15, a distribuição de tensão para o pior caso dentre todas as geometrias observadas, onde percebe-se pelo diagrama de cores, que a estrutura analisada não alcança grandes valores de tensão última de flambagem.

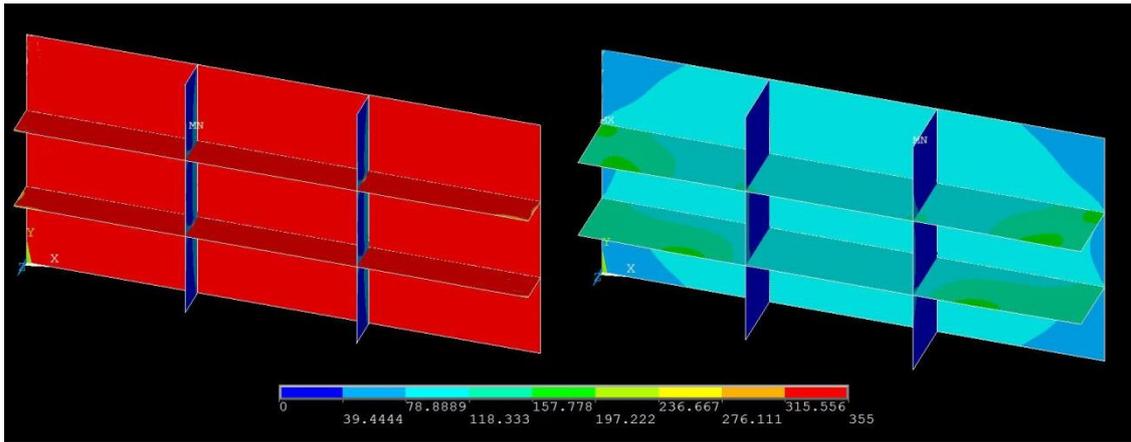


Figura 5.14 - Distribuição de tensões para a geometria com (a) melhor e (b) pior desempenho elasto-plástico do arranjo P(2,2) e  $\phi = 0,3$  considerando volume inicial  $V_{i2}$ .

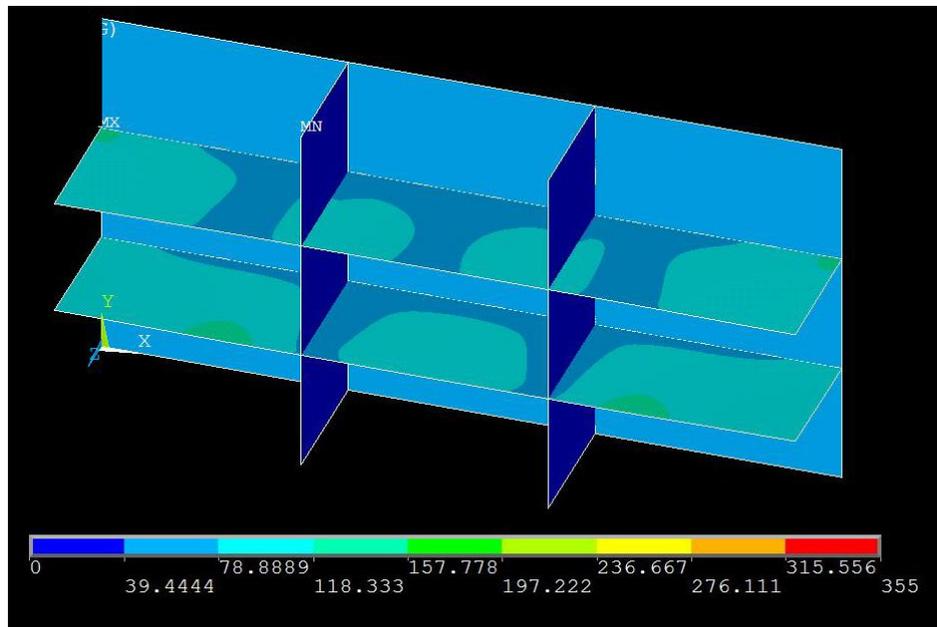


Figura 5.15- Distribuição de tensões para a geometria com pior desempenho elasto-plástico dentre todos os casos analisados de  $V_{i2}$ .

Já na Fig. 5.16, tem-se a curva de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$ , em que se encontra presente a melhor geometria dentre todas as estudadas, bem como a transformação geométrica causada nos enrijecedores, à medida em que se varia a relação  $h_s/t_s$ . Através das curvas de tendência apresentadas nos gráficos das Fig. 5.13 e 5.16 e nos Apêndices C e D, percebe-se que a configuração geométrica dos enrijecedores influenciam significativamente na tensão última de flambagem. Devido ao volume constante de material a ser transformado em enrijecedores, para um valor baixo da relação  $h_s/t_s$ , (configuração (1) apresentada na Fig. 5.16), os mesmos pouco contribuem para a tensão última de flambagem da placa. Nos casos em que uma pouca fração de material é transformada em enrijecedores, como acontece na maioria dos casos de  $\phi = 0,1$ , à medida que se reduz o valor da

relação  $h_s/t_s$ , a tensão última da placa irá tender ao valor da tensão última de uma placa sem enrijecedores com largura  $t_p$ .

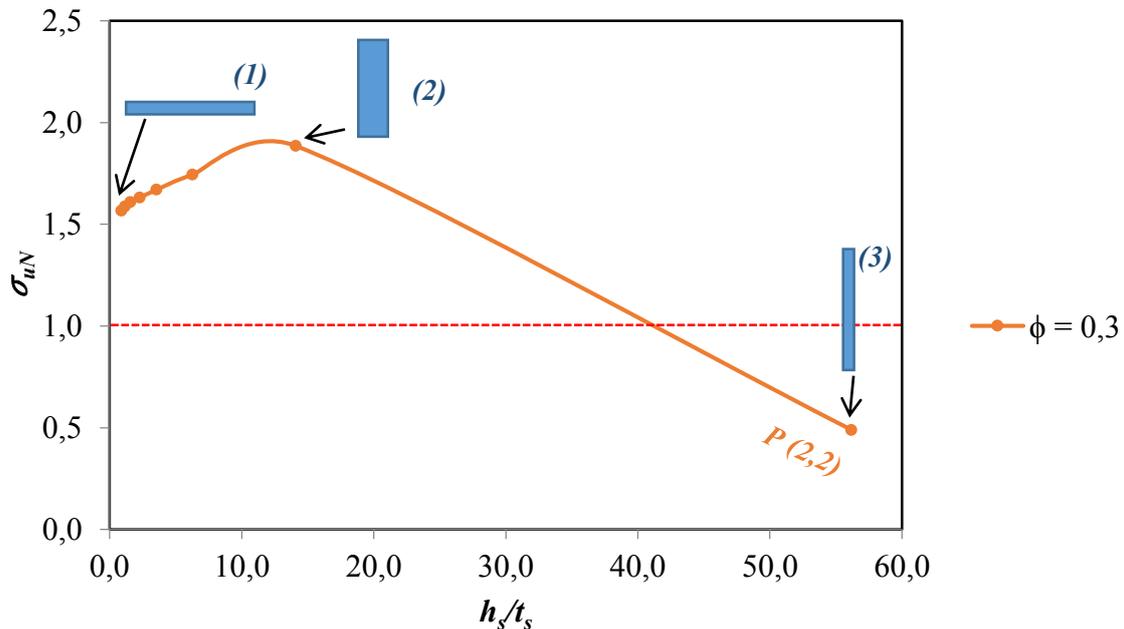


Figura 5.16 - Comportamento do arranjo geométrico com a placa com melhor desempenho global, bem como a transformação geométrica presente na variação dos enrijecedores.

As curvas atingem um valor máximo quando uma geometria de enrijecedores irá garantir a melhor tensão última de flambagem dentre todas as configurações presentes no arranjo geométrico. Para essa situação, os enrijecedores (configuração (2)) são apresentados na Fig. 5.16. Porém, aumentando-se o valor da relação  $h_s/t_s$ , se reduz o valor da tensão última de flambagem. Esse fato é explicado devido à presença de enrijecedores esbeltos (configuração (3)) apresentada na Fig. 5.16) que em razão da sua configuração passam a se comportar como elementos de placas, reduzindo sua capacidade de carga.

Sendo assim, analisando as geometrias que apresentaram os piores comportamentos elasto-plásticos, percebe-se que as mesmas se encontram nas extremidades da curva de tensão última normalizada  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$ . Os piores desempenhos podem ser característicos tanto de enrijecedores com alto valor de  $h_s/t_s$ , quanto de enrijecedores com baixo valor de  $h_s/t_s$ . Porém cabe ressaltar que apesar de apresentarem as piores geometrias do arranjo geométrico, na maioria dos casos, as mesmas levam a um valor de tensão última superior à de uma placa de mesmo volume e sem enrijecedores. Entretanto, em vários casos, a inclusão de enrijecedores, mantendo constante o volume total de material, conduz a um comportamento mecânico inferior ao apresentado pela placa sem enrijecedores.

Dentre todos os casos analisados, o pior desempenho é apresentado pela geometria P(2,2), com relação  $h_s/t_s = 74,916$  e  $\phi = 0,4$ . Para esse caso específico, a configuração geométrica com

enrijecedores apresentou uma redução de 60,827% no valor da tensão última, em relação ao valor da tensão última de uma placa com mesmo volume e sem enrijecedores.

Na Fig. 5.17 é apresentado as distribuições de tensão (von Misses) para os casos (1, 2 e 3) apresentados na Fig. 5.16.

Apesar de apresentarem um grande desempenho devido à presença de enrijecedores, as geometrias com  $\phi = 0,3$  e  $\phi = 0,4$  proporcionaram uma maior diferença entre os resultados obtidos de tensão última de flambagem para a melhor e a pior configuração geométrica, quando comparado com às análises de  $\phi = 0,1$  e  $\phi = 0,2$ . Essa comparação pode ser feita através do gráfico da Fig. 5.13 e dos gráficos presentes no Apêndice B. Além disso, as imagens de distribuição de tensões (von Mises), presentes no Apêndice D, mostram que sempre as melhores geometrias são as que possuem maiores regiões submetidas à tensão limite. Esse aspecto já foi anteriormente comentado, quando analisados os resultados das placas com  $V_t = 0,040 \text{ m}^3$ , estando de acordo com o Princípio Construtal da ótima distribuição de imperfeições.

Através das imagens de distribuição de tensão do Apêndice D, é possível perceber o que foi proposto por Åkesson (2007) e Ziemian (2010), de que grande parte da carga é transportada pela região da placa nas imediações das extremidades, de forma que a capacidade máxima de carga redistribuída é regida pela deformação das zonas de borda mais rígidas que já atingiram o escoamento. Essa teoria simplificadora da teoria da largura efetiva apresenta uma concentração de áreas submetidas à tensão de escoamento nas bordas descarregadas da placa. Pode-se perceber esse comportamento através da Fig. 5.17, onde nota-se que a medida em que se varia a relação  $h_s/t_s$ , a concentração da tensão última conserva-se nas extremidades da placa.

Ainda observando as figuras de distribuição de tensões presente no Apêndice D, para as piores situações, a tensão de escoamento foi atingida em uma porcentagem pouco significativa. Na maioria dos casos a mesma se concentrou somente nas extremidades dos enrijecedores, já em algumas situações na borda da placa e em alguns casos, nem se registrou a presença de situações submetidas à tensão de escoamento do material.

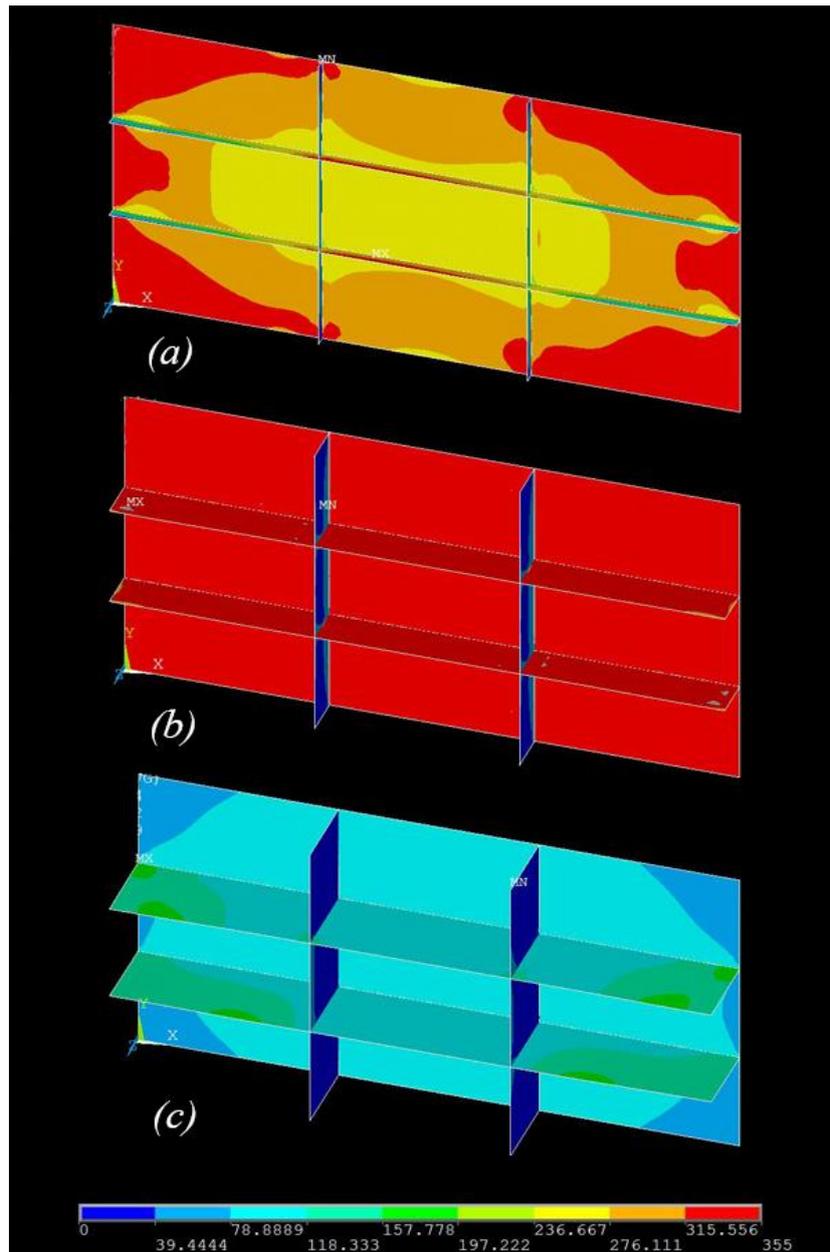


Figura 5.17- Distribuição de tensão para os três casos distintos de configuração geométrica dos enrijecedores apresentados.

### 5.2.1 Determinação da geometria ótima através do Método Design Construtal

A consideração de graus de liberdade para determinar a variação das geometrias através da aplicação do Método Design Construtal permitiu realizar uma análise completa da influência da geometria no comportamento mecânico de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica. Assim, foi avaliada a influência dos graus de liberdade  $N_{el}$ ,  $N_{et}$  e  $h_s/t_s$  na determinação das geometrias otimizadas para as placas com enrijecedores, tendo como função objetivo a maximização da tensão última de flambagem. Além disso, uma análise final da influência da variação da fração volumétrica  $\phi$  foi também realizada.

Considerando a Fig. 4.2 e com base nos resultados apresentados no Apêndice B, para cada configuração de placa  $P(N_{el}, N_{et})$  uma tensão última normalizada maximizada, denominada de  $(\sigma_{uN})_m$ , foi encontrada, conduzindo a uma geometria otimizada, chamada de  $(h_s/t_s)_o$ , conforme apresentado nas Tabs. 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8, respectivamente para  $\phi = 0,1, 0,2, 0,3$  e  $0,4$ .

Tabela 5.5 - Valores de  $(\sigma_{uN})_m$  e de  $(h_s/t_s)_o$  para as combinações  $P(N_{el}, N_{et})$ , com  $\phi = 0,1$ .

Placa	$N_{el}$	$N_{et}$	$(h_s/t_s)_o$	$(\sigma_{uN})_m$
P(2,2)	2	2	2,10	1,37
P(2,3)	2	3	3,53	1,24
P(2,4)	2	4	2,82	1,14
P(2,5)	2	5	2,35	1,04
P(3,2)	3	2	4,04	1,34
P(3,3)	3	3	3,14	1,06
P(3,4)	3	4	2,57	1,10
P(3,5)	3	5	2,18	1,00
P(4,2)	4	2	3,54	1,24
P(4,3)	4	3	2,83	1,15
P(4,4)	4	4	2,37	1,21
P(4,5)	4	5	0,91	0,98
P(5,2)	5	2	3,15	1,20
P(5,3)	5	3	2,58	1,10
P(5,4)	5	4	2,19	1,02
P(5,5)	5	5	0,48	0,97

Tabela 5.6 - Valores de  $(\sigma_{uN})_m$  e de  $(h_s/t_s)_o$  para as combinações  $P(N_{el}, N_{et})$ , com  $\phi = 0,2$ .

Placa	$N_{el}$	$N_{et}$	$(h_s/t_s)_o$	$(\sigma_{uN})_m$
P(2,2)	2	2	4,19	1,83
P(2,3)	2	3	3,15	1,78
P(2,4)	2	4	2,52	1,66
P(2,5)	2	5	4,71	1,58
P(3,2)	3	2	3,60	1,81
P(3,3)	3	3	2,81	1,66
P(3,4)	3	4	5,15	1,60
P(3,5)	3	5	4,36	1,54
P(4,2)	4	2	3,16	1,80
P(4,3)	4	3	2,54	1,67
P(4,4)	4	4	4,73	1,67
P(4,5)	4	5	4,07	1,52
P(5,2)	5	2	2,81	1,78
P(5,3)	5	3	2,31	1,62
P(5,4)	5	4	4,38	1,58
P(5,5)	5	5	3,80	1,71

Tabela 5.7 - Valores de  $(\sigma_{uN})_m$  e de  $(h_s/t_s)_o$  para as combinações  $P(N_{el}, N_{et})$ , com  $\phi = 0,3$ .

Placa	$N_{el}$	$N_{et}$	$(h_s/t_s)_o$	$(\sigma_{uN})_m$
P(2,2)	2	2	14,09	1,89
P(2,3)	2	3	10,58	1,88
P(2,4)	2	4	8,47	1,88
P(2,5)	2	5	7,06	1,86
P(3,2)	3	2	12,10	1,86
P(3,3)	3	3	9,43	1,81
P(3,4)	3	4	7,72	1,86
P(3,5)	3	5	6,54	1,86
P(4,2)	4	2	10,61	1,89
P(4,3)	4	3	8,50	1,89
P(4,4)	4	4	7,10	1,85
P(4,5)	4	5	6,09	1,85
P(5,2)	5	2	9,44	1,89
P(5,3)	5	3	7,74	1,88
P(5,4)	5	4	6,56	1,87
P(5,5)	5	5	5,69	1,80

Tabela 5.8 - Valores de  $(\sigma_{uN})_m$  e de  $(h_s/t_s)_o$  para as combinações  $P(N_{el}, N_{et})$ , com  $\phi = 0,4$ .

Placa	$N_{el}$	$N_{et}$	$(h_s/t_s)_o$	$(\sigma_{uN})_m$
P(2,2)	2	2	18,92	1,80
P(2,3)	2	3	14,11	1,79
P(2,4)	2	4	11,29	1,79
P(2,5)	2	5	9,41	1,80
P(3,2)	3	2	16,14	1,76
P(3,3)	3	3	12,57	1,69
P(3,4)	3	4	10,29	1,79
P(3,5)	3	5	8,72	1,80
P(4,2)	4	2	14,14	1,78
P(4,3)	4	3	11,34	1,79
P(4,4)	4	4	9,46	1,79
P(4,5)	4	5	8,12	1,82
P(5,2)	5	2	12,58	1,77
P(5,3)	5	3	10,32	1,78
P(5,4)	5	4	8,75	1,80
P(5,5)	5	5	7,59	1,81

Então, a partir dos resultados das Tabs. 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 foram gerados gráficos que relacionam a variação de  $(\sigma_{uN})_m$  e de  $(h_s/t_s)_o$  em função de  $N_{et}$ , que são mostrados, respectivamente, nas Figs. 5.18 e 5.19. Pode-se perceber através da Fig. 5.19 que para todos os valores de  $N_{et}$ , o valor da relação  $(h_s/t_s)_{oo}$  seguiu a mesma tendência para  $N_{el} = 4$  e 5. Além disso, é possível perceber a proximidade do valor da relação  $(h_s/t_s)_{oo}$  ótima para esses dois casos na Tab. 5.6.

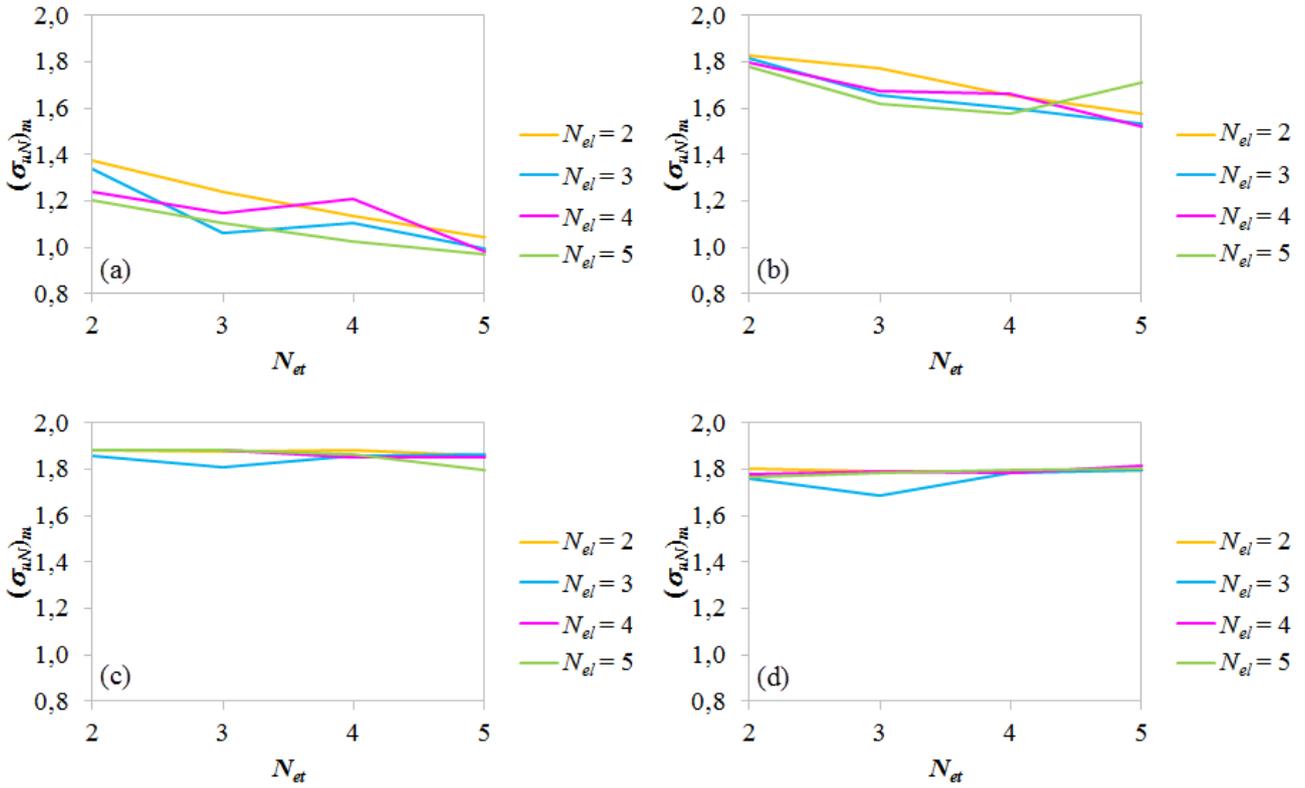


Figura 5.18 - Influência do  $N_{et}$  no valor de  $(\sigma_{uN})_m$ : (a)  $\phi = 0,1$ , (b)  $\phi = 0,2$ , (c)  $\phi = 0,3$  e (d)  $\phi = 0,4$ .

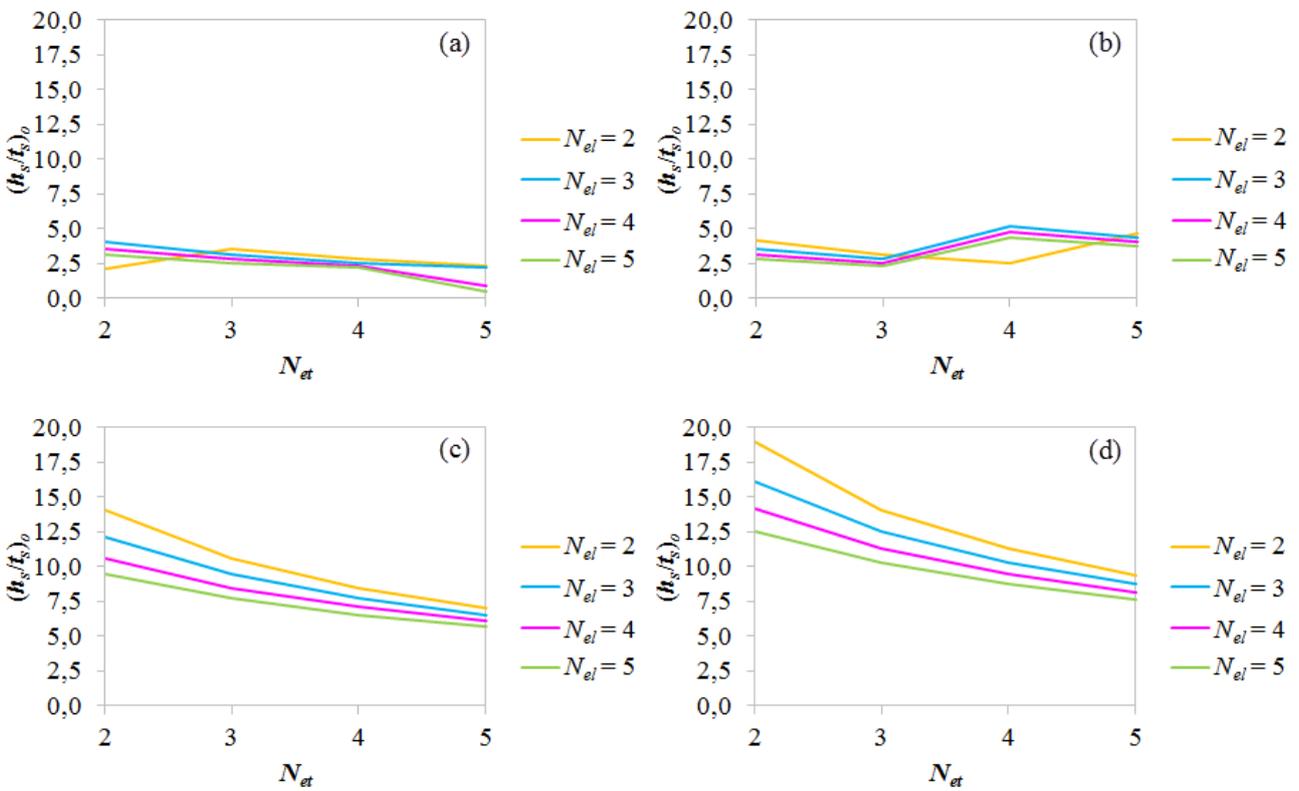


Figura 5.19 - Influência do  $N_{et}$  no valor de  $(h_s/t_s)_o$ : (a)  $\phi = 0,1$ , (b)  $\phi = 0,2$ , (c)  $\phi = 0,3$  e (d)  $\phi = 0,4$ .

É possível notar na Fig. 5.18 que existe uma tendência de diminuição da magnitude de  $(\sigma_{uN})_m$  com o aumento do  $N_{el}$ , especialmente para  $\phi = 0,1$  (Fig. 5.18a) e  $\phi = 0,2$  (Fig. 5.8b). Quando pouco material da placa de referência é transformado em enrijecedores (menores valores de  $\phi$ ), levando em conta que todos os enrijecedores possuem uma relação  $h_s/t_s$  constante em cada caso e que em todos os casos o valor de  $V_t$  é mantido constante, esse comportamento é coerente. Isso é explicado uma vez que o aumento do  $N_{el}$  faz com que seja necessária uma redução na quantidade de material usado nos enrijecedores longitudinais, que como observado antes, são os principais responsáveis pela resistência mecânica à flambagem das placas. Já para os maiores valores de  $\phi$ , Figs. 5.18c e 5.18d, ocorre uma estabilização dos valores de  $(\sigma_{uN})_m$  convergindo para o valor que conduz para o melhor desempenho global. Nesses casos, devido a maior quantidade de material usada como enrijecedores, existe essa melhoria no comportamento mecânico.

Com relação à Fig. 5.19, de uma maneira geral, o aumento de  $N_{el}$  causou uma redução no valor da relação  $(h_s/t_s)_o$ , principalmente para os valores mais altos de  $\phi$  como mostram as Figs. 5.19c e 5.19d.

Na sequência, para cada valor de  $N_{el}$  presente nas Tabs. 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 foi possível obter um valor correspondente ao  $N_{el}$  otimizado, indicado como  $(N_{el})_o$ , ou seja, o valor de  $N_{el}$  que para cada valor de  $N_{el}$  conduz a um desempenho superior. Com isso, são definidos também a tensão última de flambagem duas vezes maximizada, dada por  $(\sigma_{uN})_{mm}$ , e a relação  $h_s/t_s$  duas vezes otimizada, representada por  $(h_s/t_s)_{oo}$ . Esses resultados são descritos nas Tab. 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, respectivamente, para as frações de volume  $\phi = 0,1, 0,2, 0,3$  e  $0,4$ .

Tabela 5.9 - Configuração geométrica com  $(N_{el})_o$ ,  $(h_s/t_s)_{oo}$  e  $(\sigma_{uN})_{mm}$  para cada  $N_{el}$ , com  $\phi = 0,1$ .

Placa	$N_{el}$	$(N_{el})_o$	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(\sigma_{uN})_{mm}$
P(2,2)	2	2	2,10	1,37
P(3,2)	3	2	4,04	1,34
P(4,2)	4	2	3,54	1,24
P(5,2)	5	2	3,15	1,20

Tabela 5.10 - Configuração geométrica com  $(N_{el})_o$ ,  $(h_s/t_s)_{oo}$  e  $(\sigma_{uN})_{mm}$  para cada  $N_{el}$ , com  $\phi = 0,2$ .

Placa	$N_{el}$	$(N_{el})_o$	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(\sigma_{uN})_{mm}$
P(2,2)	2	2	4,19	1,83
P(3,2)	3	2	3,60	1,81
P(4,2)	4	2	3,16	1,80
P(5,2)	5	2	2,81	1,78

Tabela 5.11 - Configuração geométrica com  $(N_{el})_o$ ,  $(h_s/t_s)_{oo}$  e  $(\sigma_{uN})_{mm}$  para cada  $N_{el}$ , com  $\phi = 0,3$ .

Placa	$N_{el}$	$(N_{el})_o$	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(\sigma_{uN})_{mm}$
P(2,2)	2	2	14,09	1,89
P(3,2)	3	2	12,10	1,86
P(3,4)	3	4	7,72	1,86
P(3,4)	3	5	6,54	1,86
P(4,2)	4	2	10,61	1,89
P(4,3)	4	3	8,50	1,89
P(5,2)	5	2	9,44	1,89

Tabela 5.12 - Configuração geométrica com  $(N_{el})_o$ ,  $(h_s/t_s)_{oo}$  e  $(\sigma_{uN})_{mm}$  para cada  $N_{el}$ , com  $\phi = 0,4$ .

Placa	$N_{el}$	$(N_{el})_o$	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(\sigma_{uN})_{mm}$
P(2,2)	2	2	18,92	1,80
P(2,5)	2	5	9,41	1,80
P(3,5)	3	5	8,72	1,80
P(4,5)	4	5	8,12	1,82
P(5,5)	5	5	7,59	1,81

Os resultados apresentados nas Tabs. 5.9 - 5.12 são representados graficamente nas Fig. 5.20. Porém, destaca-se que na Tab. 5.11 para  $N_{el} = 3$  e  $N_{el} = 4$ , bem como na Tab. 5.12 para  $N_{el} = 2$ , mais de uma configuração de placa conduziu a valores de  $(\sigma_{uN})_{mm}$ . Então, para a elaboração da Fig. 5.20, nesses casos, foram consideradas as geometrias que possuem configuração geométrica de menor complexidade. Isso foi feito pois essas geometrias são construtivamente mais simples e possuem a mesma resistência à flambagem que as outras, em cada caso.

A partir da Fig. 5.20 percebe-se que  $(N_{el})_o = 2$  conduz, na maioria dos casos, a performances estruturais superiores, independentemente do valor de  $N_{el}$ . As exceções ocorrem para  $N_{el} \geq 3$  para  $\phi = 0,4$  (Fig. 5.20d), onde  $(N_{el})_o = 5$ . Entretanto, considerando os valores  $(\sigma_{uN})_m$  da Tab. 5.8 para  $N_{el} \geq 3$  é possível notar uma grande semelhança em suas magnitudes, indicando que o uso de um valor  $N_{el} = 2$  poderia ser considerado como  $(N_{el})_o$  também nesses casos. Já o valor de  $(h_s/t_s)_{oo}$  apresenta uma tendência de redução à medida que o  $N_{el}$  aumenta, sendo a única exceção para  $N_{el} = 2$  com  $\phi = 0,1$  (Fig. 5.19a).

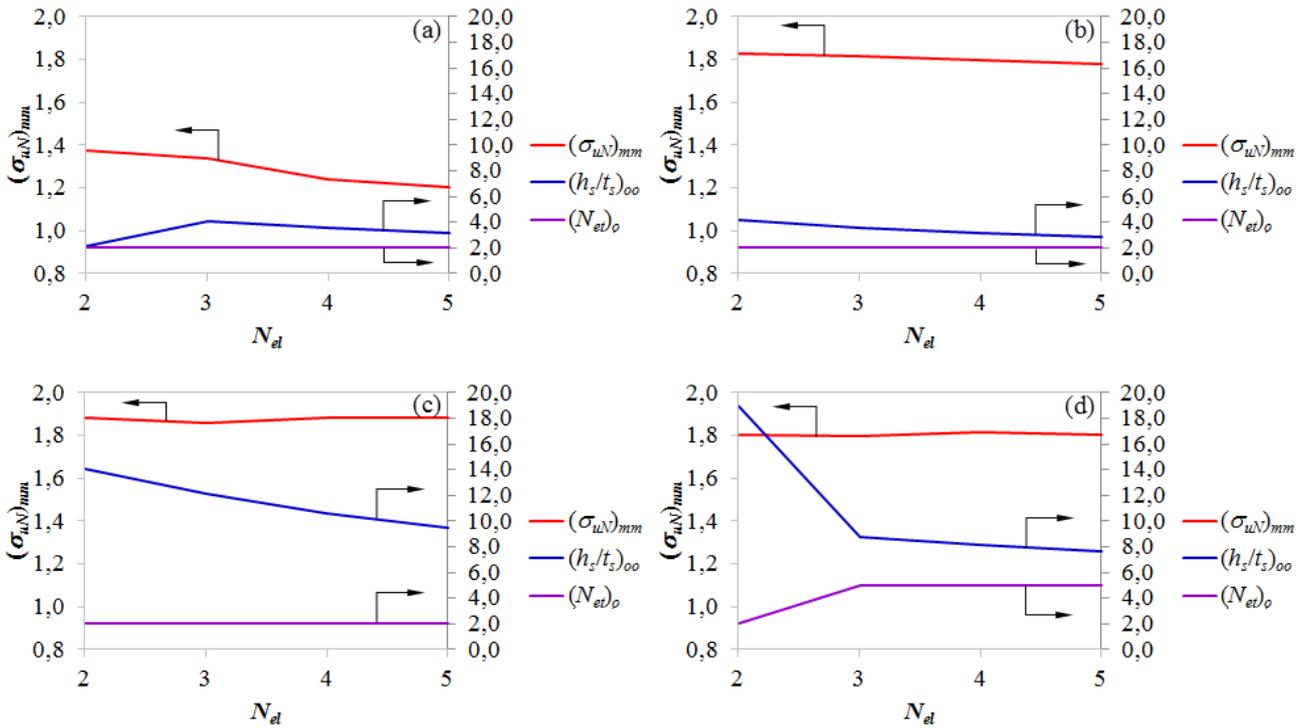


Figura 5.20 - Variação de  $(N_{el})_o$ ,  $(h_s/t_s)_{oo}$  e  $(\sigma_{uN})_{mm}$  em função de  $N_{el}$ : (a)  $\phi = 0,1$ , (b)  $\phi = 0,2$ , (c)  $\phi = 0,3$  e (d)  $\phi = 0,4$

O comportamento anteriormente descrito ainda ocorre, porém de maneira bem mais suave, para a placa com  $\phi = 0,2$  (Fig. 5.19b). Já para  $\phi = 0,3$  (Fig. 5.19c) e  $\phi = 0,4$  (Fig. 5.19d), a maior quantidade de material transformada em enrijecedores permite que uma performance superior seja alcançada e que, para os valores de  $N_{el}$  considerados, exista uma estabilização no valor de  $(\sigma_{uN})_{mm}$ . Cabe destacar que comportamentos similares foram observados anteriormente, quando analisada a influência do  $N_{el}$ .

Por fim, uma última análise foi feita considerando a variação da fração volumétrica  $\phi$ . Para cada valor de  $\phi$  é possível definir uma  $(\sigma_{uN})_{mmm}$ , ou seja, uma tensão última de flambagem três vezes maximizada. Então, com base nos resultados das Tabs. 5.9 - 5.12 e da Fig. 5.19, foram montadas a Tab. 5.13 e a Fig. 5.21, que apresentam a influência de  $\phi$  no comportamento mecânico das placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plásticas.

Tabela 5.13 - Determinação da geometria com  $(\sigma_{uN})_{mmm}$  para cada valor de  $\phi$ .

$\phi$	Placa	$(N_{el})_o$	$(N_{el})_{oo}$	$(h_s/t_s)_{ooo}$	$(\sigma_{uN})_{mmm}$
0,1	P(2,2)	2	2	2,10	1,37
0,2	P(2,2)	2	2	4,19	1,83
0,3	P(2,2)	2	2	14,09	1,89
0,4	P(4,5)	4	5	8,12	1,82

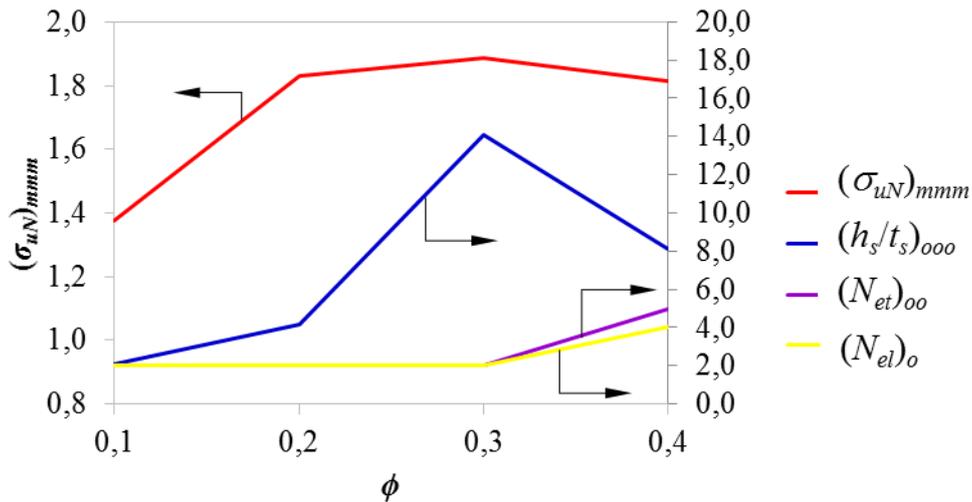


Figura 5.21 - Geometrias com  $(\sigma_{uN})_{mmm}$  para cada valor de  $\phi$ .

Através da Tab. 5.13 e Fig. 5.21 percebe-se que para cada valor de  $\phi$ , as geometrias ótimas que conduzem à um  $(\sigma_{uN})_{mmm}$  apresentaram uma melhoria significativa no valor da tensão última de flambagem em relação à placa de referência. Como a função objetivo do trabalho consiste em maximizar a tensão última de flambagem das placas enrijecidas, pode-se inferir que dentre todas as geometrias analisadas, tem-se a configuração P(2,2) com  $\phi = 0,3$  e  $(h_s/t_s)_{ooo} = 14,094$ , sendo considerada a geometria ótima global, pois foi a que apresentou a maior melhoria: de 89% quando comparada com uma placa de mesmo volume e sem enrijecedores (placa de referência).

Portanto, existe uma geometria ótima global entre todas as configurações geométricas propostas nesse estudo, que é definida pela placa P(2,2) com  $\phi = 0,3$ . Essa placa atingiu um valor de tensão última três vezes maximizada de  $(\sigma_{uN})_{mmm} = 1,89$  com uma relação  $h_s/t_s$  três vezes otimizada de  $(h_s/t_s)_{ooo} = 14,09$ , um  $N_{et}$  duas vezes otimizado de  $(N_{et})_{oo} = 2$  e um  $N_{el}$  uma vez otimizado de  $(N_{el})_o = 2$ . É fundamental destacar que essa geometria ótima global foi obtida com valores intermediários de  $\phi$ ,  $(h_s/t_s)_{ooo}$  e  $(\sigma_{uN})_{mmm}$  evidenciando, mais uma vez, a necessidade de um estudo de avaliação geométrica para a obtenção de desempenhos estruturais superiores. Intuitivamente, é possível imaginar que maiores valores de  $\phi$  conduziram a melhores performances, porém foi mostrado nessa pesquisa que existe um valor intermediário de  $\phi$  conduziu à melhor performance.

Na Figura 5.22 é ilustrada a distribuição de tensões de von Mises para as placas da Tab. 5.13 e Fig. 5.21. Como já foi dito, essas placas representam a melhor geometria para cada valor de fração de volume  $\phi$ . É possível observar que o princípio Construtal da ótima distribuição de imperfeições permite, novamente, explicar o motivo pelo qual a placa P(2,2) com  $\phi = 0,3$  (Fig. 5.22c) é a que tem o melhor desempenho global. Se for comparada a sua distribuição de tensões com as apresentadas nas Figs. 5.22a, 5.22b e 5.22d, nota-se que praticamente toda a placa P(2,2) com  $\phi = 0,3$  (Fig. 5.22c) está submetida à tensão limite (em vermelho), enquanto nas outras placas existem regiões submetidas

à tensões inferiores à tensão limite. Portanto, a geometria ótima global é aquela que melhor distribuiu as imperfeições.

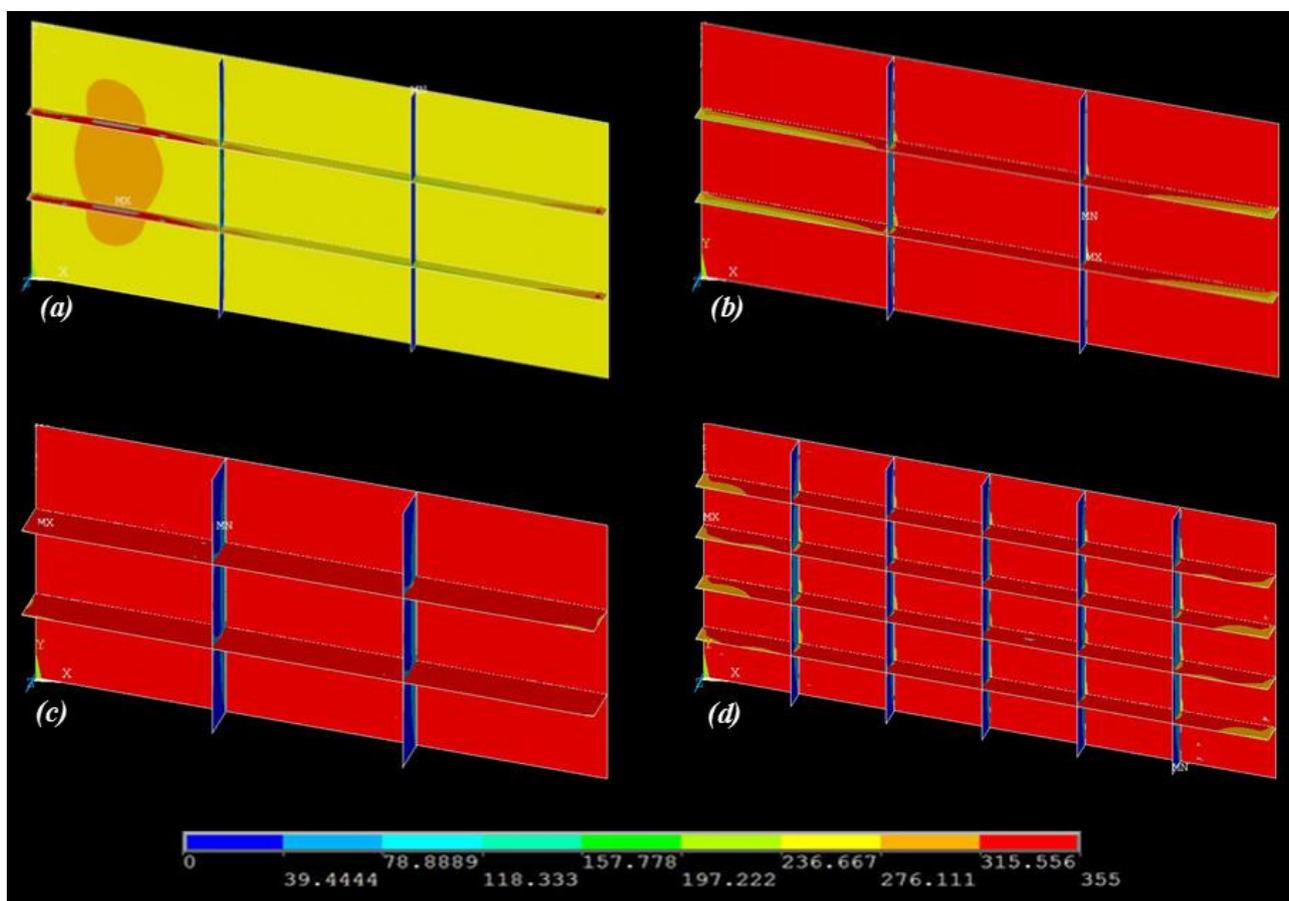


Figura 5.22 – Distribuição de tensão da geometria com  $(\sigma_{iN})_{mmm}$  para: (a)  $\phi = 0,1$ , (b)  $\phi = 0,2$ , (c)  $\phi = 0,3$  e (d)  $\phi = 0,4$ .

## 6 CONCLUSÕES

A notável importância das placas enrijecidas na indústria naval torna o objetivo principal deste trabalho a determinação de uma configuração geométrica otimizada de uma placa fina ortotrópica enrijecida, visando maximizar a carga última de flambagem da mesma, quando esta se encontra sob compressão axial. Para tanto, foi adotada uma abordagem numérica, aliada ao Método Design Construtal, a fim de se investigar vários parâmetros geométricos característicos da placa enrijecida,

Através do software ANSYS, foi possível a realização da modelagem computacional que proporcionou a análise, verificação, validação e obtenção de resultados preliminares do estudo proposto. Os modelos computacionais nele utilizados serviram para a obtenção de cargas críticas e últimas de flambagem em diversas situações que, de certa forma, contribuíram para a análise de flambagem em placas ortotrópicas enrijecidas.

A aplicação do Método Design Construtal como método de escolha do campo de busca de parâmetros para a análise da tensão última da placa, juntamente à busca exaustiva, possibilitou encontrar uma geometria ótima apresentando um valor máximo de tensão última dentre todos os casos analisados.

Primeiramente, avaliando o desempenho das placas com  $V_{11} = 0,04 \text{ m}^3$ , para a análise proposta, observou-se que o melhor desempenho com uma melhoria de apenas 7,38% em relação à tensão última da placa de referência. Sendo assim, uma segunda análise foi feita considerando um volume total  $V_{12} = 0,028 \text{ m}^3$ . Para essa análise proposta observou-se que a determinação da geometria ótima é diretamente influenciada pelos parâmetros estudados, sendo eles o  $N_{el}$ ,  $N_{et}$  a relação  $h_s/t_s$  e a fração volumétrica  $\phi$  transformada em enrijecedores.

A relação  $(h_s/t_s)_o$  ótima consiste em uma relação intermediária pertencente à uma geometria ótima obtida com o valor de  $h_s/t_s$ , mostrando que a variação geométrica proposta pelo Método Design Construtal permitiu a obtenção de desempenhos superiores mantendo constante a quantidade de material.

Os enrijecedores transversais pouco contribuíram para o desempenho da placa ortotrópica. Porém sua presença é de suma importância, pois apesar da carga suportada ser relativamente pequena, eles são responsáveis pela divisão da placa em unidades menores, influenciando diretamente nas configurações de flambagem local. Sendo assim, o valor de  $N_{et}$ , como observado pouco influencia para a determinação da carga última das placas enrijecidas. Além disso, percebe-se que para vários valores de  $N_{el}$ , várias geometrias apresentaram resultados semelhantes de tensão última maximizada.

Para a maioria dos arranjos geométricos do tipo  $P(N_{el}, N_{et})$ , grande parte das geometrias ótimas que maximizam a tensão última de flambagem apresentaram um valor de tensão próximo à tensão de

escoamento do material, de forma que para cada valor de fração volumétrica obteve-se uma geometria que maximizasse a tensão última de flambagem. Dentre todas as geometrias que apresentaram o melhor desempenho através da análise da fração volumétrica, percebe-se que para  $\phi = 0,1, 0,2, 0,3$ , as mesmas possuem  $N_{el} = N_{et} = 2$ . Dentre todos os arranjos geométricos  $P(N_{el}, N_{et})$ , a maioria das geometrias que maximizam a tensão última de flambagem pertencem à  $\phi = 0,3$ .

Além disso, é possível determinar a geometria ótima global dentre todas as configurações geométricas propostas nesse estudo. Definida pela placa  $P(2,2)$  com  $\phi = 0,3$ , a mesma atingiu um valor de tensão última três vezes maximizada de  $(\sigma_{uN})_{mmm} = 1,89$  com uma relação  $h_s/t_s$  três vezes otimizada de  $(h_s/t_s)_{ooo} = 14,09$ , um  $N_{et}$  duas vezes otimizado de  $(N_{et})_{oo} = 2$  e um  $N_{el}$  uma vez otimizado de  $(N_{el})_o = 2$ . Além disso, pode-se perceber que a mesma possui uma melhoria global de 481,24% comparada à geometria de pior situação para as placas enrijecidas e com o mesmo volume inicial  $V_{t2}$  ( $P(2,2)$  com  $\phi = 0,4$  e relação  $h_s/t_s = 74,916$ ).

Através das imagens de distribuição de tensão, é possível perceber que as melhores configurações geométricas possuem mais regiões submetidas à tensão de escoamento do material se comparada à pior geometria. Esse fato está de acordo com o Princípio Construtal da ótima distribuição de imperfeições.

Observa-se que, para as piores situações, a tensão última, na maioria dos casos foi atingida somente nas extremidades da placa e dos enrijecedores em uma porcentagem pouco significativa. Além disso, pode-se notar que, como esperado, dentre os enrijecedores, os longitudinais são os grandes responsáveis em absorver a maior parte da tensão aplicada, quando comparados aos resultados apresentados pelos transversais, justificando o uso do Método Design Construtal na busca das melhores geometrias na área da mecânica dos sólidos.

Observou-se ainda que a transformação de parte do volume de material da placa em enrijecedores fez com que, na maioria dos casos estudados, a placa ortotrópica resultante sofresse uma flambagem inelástica.

Sendo assim, a aplicação do Método Design Construtal, aliado à modelagem computacional, mostra que avaliar a variação da geometria dos enrijecedores em uma placa ortotrópica é de fundamental importância para a definição do comportamento da flambagem das mesmas.

## 6.1 Propostas de continuidade

Como proposta de continuidade do trabalho para a realização de pesquisas futuras dentro do tema, são feitas as seguintes sugestões:

1. Considerar diferentes valores de frações volumétricas  $\phi > 0,4$  para verificar a influência de uma grande fração volumétrica a ser transformada em enrijecedores.
2. Considerar diferentes combinações do tipo  $P(N_{el}, N_{et})$  com  $N_{el}$  e  $N_{et} > 5$ .

3. Realizar um estudo de placas ortotrópicas com enrijecedores com diferentes seções, realizando a inclusão de mais graus de liberdade e avaliar o comportamento das placas enrijecidas com novas geometrias sob flambagem.
4. Considerar compressão biaxial na placa para verificar o comportamento dos enrijecedores longitudinais e transversais sob compressão.
5. Aplicar outras imperfeições iniciais, diferentes das utilizadas no presente trabalho;
6. Utilização de outros tipos de materiais bem como materiais compósitos;

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABED, F. H.; MEGAHED, M.; AL-RAHMANI, ABDULLA. **On the improvement of buckling of pretwisted universal steel columns**. Sharjah, UAE, 2015.
- AISC, 1963. **Design manual for orthotropic steel plate deck bridges**. New York, 188 p.
- ÅKESSON, B. **Plate Buckling in Bridges and Other Structures**. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2007.
- ANDERSEN, F. L., **Residual Stresses and Deformations in Steel Structures**. Technical University of Denmark - Department of Naval Architecture and Offshore Engineering, Phd Thesis. 2000
- AMANTE, D. A. M. C, 2006. **Imperfeições de fabricação na construção naval e offshore**. Trabalho de conclusão de Curso em Engenharia Naval, Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- ANSYS. ANSYS User's Manual: Analysis Systems, Inc, 2005.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. Ed. Unicamp, Campinas, 2003.
- AYACHE, N. **Handbook of numerical analysis: Computational Models for the Human Body. Vol. XII**. Elsevier, 2004.
- AZAR, A. T. **Modeling and Control of Dialysis Systems: Volume 2: Biofeedback Systems and Soft Computing Techniques of Dialysis**. Springer, New York, 2013.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 1ª ed. Porto, 2003.
- BAPTISTA, L. G., 2014. **Simulação Numérica Não-Linear do Comportamento Pós Flambagem de Placas Finas de Aço Sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais e Offshore**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.
- BARES, R. **Tablas para el cálculo de placas y vigas pared**. 2ª ed. Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1981.
- BASTOS, E. T. **Análise de Painéis Enrijecidos de Unidades Offshore**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- BATHE, K.J. **Finite element procedures**. Revision of: Finite element procedures in engineering analysis, Prentice- Hall, 1996.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. Constructal Theory of generation of configuration in nature and engineering. **Journal of Applied Physics**, v. 100, pp. 041301, 2006.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory**. Wiley, Hoboken, 2008.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. The constructal law and the evolution of design in nature. **Physics of Life Reviews** , v. 8, pp. 209-240, 2011.

- BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in Nature: How the Constructal Law governs evolution in biology, physics, technology, and social organizations.** Anchor Books, 2013.
- BLEICH, F. **Theorie und Berechnung der eisernen Brücken.** Julius Springer, Berlim, 1924. (Em alemão).
- BLEICH, F. **Buckling Strength of Metal Structures.** McGraw- Hill, EUA, 1952.
- BRADFORD, M.A. e Azhari, M. Buckling of Plates with Different End Conditions Using the Finite Strip Method. **Computers and Structures**, v. 56, n. 1, p. 75- 83, 1995a.
- BRADFORD, M.A. e Azhari, M. Inelastic Local Buckling of Plates and Plate Assemblies Using Bubble Functions. **Engineering Structures**, v. 17, n. 2, p. 95- 103, 1995b.
- BRADFORD, M. A. e Azhari, M. The Use of Bubble Functions for the Stability of Plates with Different End Conditions. **Engineering Structures**, v. 19, n. 2, p. 151-161, 1997.
- BRYAN, G. H. On the Stability of a Plane Plate Under Thrusts in its Own Plane With Applications to the Buckling of The sides of a Ship. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Vol. 22, p. 54, 1891.
- CAMPOS NETO, C. A. S.; POMPERMAYER, F. M. **Ressurgimento da indústria naval no Brasil: (2000-2013).** Gráfs. Color, IPEA, Brasília, 2014.
- CHAJES, Alexander. **Principles of Structural Stability Theory.** Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- CHOI, B.H.; HWANG, M.; YOON, T.; YOO, C. H. Experimental Study of Inelastic Buckling Strength and Stiffness Requirements for Longitudinally Stiffened Panels. **Engineering Structures**, v. 31, p. 1141-1153, 2009.
- CHUJUTALLI, J. A. H., 2010. **Flambagem Torcional de Enrijecedores em Painéis de Navios Tanques Submetidos à Compressão Axial.** Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Metrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- CORDEIRO, M. F., 2007. **Uma Técnica para Otimização Estrutural Mediante a Derivada Topológica.** Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Metrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- CORREIA, A. L. G., 2013. **Simulação Numérica e Constructal Design Aplicados à Análise do Comportamento Mecânico de Placas de Aço Submetidas à Flambagem Elástica Usadas em Estruturas Oceânicas.** Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.
- COX, H. L. Buckling of thin plates in compression. **Aeronautical Research Communications**, Report and Memory, n. 1554, EUA, 1934.

- DUFOUR, P. Picking an Element Type for Structural Analysis. **Belcan Engineering Group**, Inc., 2003, p. 5.
- EL-SAWY, K.M., NAZMY, A.S., MARTINI, M.I. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression, **Thin-Walled Structures**, v. 42, p. 1083-1101, 2004.
- GALLAGHER, R.H. **Finite Element Analysis: Fundamentals**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1975.
- GHAVAMI, K., KHEDMATI, M. R. Numerical and experimental investigations on the compression behaviour of stiffened plates. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 62, p. 1087-1100, 2006.
- HELBIG, D.; ROCHA, L. A. O.; DA SILVA, C. C. C.; DOS SANTOS, E. D.; REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. **Numerical Simulation and Constructal Design Method Applied to the Study of the Cutouts Shape Influence in the Mechanical Behavior of Perforated Plates Subjected to Buckling**. XXXV CILAMCE. Fortaleza, 2014.
- HELBIG, D.; SILVA, C. C. C.; REAL, M. V.; dos SANTOS, E. D.; Isoldi, L. A.; ROCHA, L. A. O. Study About Buckling Phenomenon in Perforated Thin Steel Plates Employing Computational Modeling and Constructa Design Method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, p. 1912-1936, 2016.
- HIBBELER, R. C., 2010. **Resistência dos materiais**. 7ª Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- KAPUR, K.K.; HART. B.J. Stability of Plates Using the Finite Element Method. **Journal of Eng. Mech., Div., Proc. ASCE**, v. 92, n.2, 1966.
- KARDESTUNDER, H.; NORRIE, D. H. **Finite Element Handbook**. McGraw-Hill, 1987.
- KHOURY, R.; HARDER, D.W. **Numerical Methods and Modelling for Engineering**. Springer International Publishing, , 2016.
- KLEIBER, M.; HIEN, T.D. **The stochastic finite element method**. John Wiley e Sons, Chichester, U.K, 1992.
- KOHNKE, P. **ANSYS Theory Reference - Release 5.6**. ANSYS, Inc., 11th Ed., 1999, p. 1286.
- KUMAR, M.S.; KUMAR, C. L.; ALAGUSUNDARAMOORTHY, P.; SUNDARAVADIVELU, R. Ultimate Strength of Orthogonal Stiffened Plates Subjected to Axial and Lateral Loads. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 12, n. 2, p. 197-206, 2010.
- MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. Ed. Springer, 2006.
- MAKI, A. C. **Finite Element Techniques for Orthotropic Plane Stress and Orthotropic Plate Analysis**. U.S. Forest Service, Research Paper, p. 87, Madson, 1968.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 453 p., 2004.

- MANRIQUE, L. J. C., 1989. **Colapso de painéis planos enrijecidos**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- MAQUOI, R. Plate girders. Chapter 2.6 in **Constructional Steel Design – An International Guide**, Elsevier Applied Science, London, 133-173, 1992.
- MARGUERRE, K.; TREFFTZ, E. Über die tågfhigkeit eines längsbelasteten plattenstreifens nach überschreiten der beullast. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 17, p. 85-100, 1937. (em alemão)
- MORAES, R. 2012. Estaleiros no Brasil. Disponível em: <<http://www.robertomoraes.com.br/>>. Último acesso: 27 de outubro de 2016
- PAIK, J. K.; THAYAMBALLI, A. K.; KIM, B. B. Advanced Ultimate Strength Formulations for Ship Plating Under Biaxial Compression/Tension, Edge Shear, and Lateral Pressure Loads. **Marine Technology and SNAME News**, v. 38, n. 1, p. 9-25, 2001.
- PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de Aço: Dimensionamento Prático**. 8ª ed. LTC, Rio de Janeiro, 2012.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Finite Element Structural Analysis: New Concepts**. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), Reston, Virgínia, 2009.
- RACKOW, P. B., 2015. **Análise numérica não-linear de painéis com enrijecedores sob flambagem**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.
- RAMBERG, W., MCPHERSON, A. E., LEVY, S. **Experiments on Study of Deformation and of Effective Width in Axially Loaded Sheet-Stringer Panels**. NACA Tech. Note No. 684, 1939.
- RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 4<sup>th</sup> ed. Elsevier, Miami, 2004.
- RATZERSDOFER, J. Rectangular Plates with Stiffeners: The Buckling of Simply Supported Plates under Compressive Stress. **Aircraft Engineering and Aerospace Technology**, v. 14, n. 9, p.260 – 264, 1942.
- REDDY, J.N., **Theory and analysis of elastic plates**. Taylor e Francis, Filadélfia, 1999.
- REIS, A. H. Constructal theory: from engineering to physics, and how systems flow develop shape and structure. **Applied Mechanics Reviews**, v. 59, p. 269-281, 2006.
- REISSNER, H. Über die Knicksicherheit ebener bleche. **Zentralblatt derBlauverwaltung**, v.29, p. 93 – 96 & 151, 1909. (Em alemão)
- ROCHA, L.A.O.; ISOLDI, L.A., REAL, M. V. dos SANTOS, E. D.; CORREIA, A.L.G.; LORENZINI, G. BISERNI, C. Constructal design applied to the elastic buckling of thin plates with holes . **Central European Journal of Engineering**, v. 3, i. 3, pp 475–483, 2013.

- ROCKEY K. C.; EVANS H. R. **A Finite Element Solution for Folded Plate Structures**. International Conference on Space Structure, University of Surrey, 1966.
- ROORDA, J. **Buckling of Elastic Structures**. Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, Canadá, 1980.
- ROSS, C. T. F. **Pressure Vessels: External Pressure Technology**. 2ª Ed., Woodhead Publishing, Padstow, Cornwall, UK, 2011.
- SAINT- VENANT, B. **Théorie de l'elasticité des corps solides**. Clebsch, Paris, 1883.
- SALMON, C. G. e JOHNSON, J. E., **Steel structures: Design and behaviour: Emphasizing load and resistance factor design**. Harper Collins Publishers Inc., 3a ed. 1990.
- SANTOS, G. S., 2011. **Análise da evolução da indústria naval**. Trabalho de conclusão de curso em Tecnologia em Construção Naval, Centro Universitário Estadual Da Zona Oeste.
- SCHUMAN, L.; BACK, G. Strength of rectangular plates under edge compression. **NASA Technical Report**, TR, R - 40, EUA, 1959.
- SEIDE, P.; STEIN, M. Compressive Buckling of Simply Supported Plate with Longitudinal Stiffeners. **NACATN 1825, National Advisory Committee for Aeronautics**, Washington, D. C., 1949.
- SENTANO, B. S. 2014. **Estudo Comparativo do Comportamento de Placas com Furos Circulares, Quadrangulares e Losangulares, sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais e Oceânicas**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.
- SHANMUGAM, N.E., NARAYANAN, R. Ultimate Strength of Biaxially Loaded Plates. **Stability and Ductility of Steel Structures (SDSS'97)**, p. 211–223, 1998.
- SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A Three-dimensional Finite-strain Rod Model. Part II: Computational Aspects. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 58, n.1, p. 79-116. North Holland, 1986.
- SILVA, C. C. C., 2015. **Simulação Numérica e Método Constructal Design Aplicados ao Estudo de Flambagem em Placas com Furos Hexagonais Utilizadas em Estruturas Navais e Oceânicas**. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.
- SIVAKUMARAN, K.S.; ABDEL-RAHMAN, N. A finite Element Analysis Model for The Behaviour of Cold-formed Steel Members. **Thin - Walled Structures**, v. 31, n. 4, p. 305-324, 1998.
- SORIANO, H. L. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. EdUSP, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.

- TEIXEIRA, G. DE M.; KESSLER, M. P.; MALISKA, C. R. **Fontes de Erro: Identificar, Quantificar e Reduzir a Intervalos Aceitáveis**. Artigo técnico. 2009. Disponível em: [http://www.esss.com.br/blog/wp-content/uploads/2009/09/ESSS\\_Artigo\\_Tecnico\\_21.pdf](http://www.esss.com.br/blog/wp-content/uploads/2009/09/ESSS_Artigo_Tecnico_21.pdf). Acessado em 19/01/2016.
- TURNER, M., CLOUGH, R., MARTIN, H., & TOPP, L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences** **23**, 805-823, 1956.
- TIMOSHENKO, S. P. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. **Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)**, v. 58, n<sup>o</sup>. 4, p. 337-385. 1910. (em alemão)
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw – Hill, New York, 1961.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw – Hill, New York, 1963.
- TRAHAIR, N.S.; BRADFORD, M.A. **The behavior and design of steel structures - 2<sup>a</sup> ed.**, Chapman e Hall, 1988.
- TRIPATHI, S. **Modal Analysis of Rectangular Plate With All Four Edges Simply Supported**. 2008.
- UGURAL, A.C. **Stresses in Plates and Shells**. McGraw – Hill, Michigan University, Nova York, 1981.
- VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications**. Marcel Dekker, Inc., Pennsylvania State University, University Park, New York, 2001.
- VON KÁRMÁN, T. Untersuchungen über knickfestigkeit. **Mitteilungen über Forschungsarbeiten**, v. 81, p. 1–44. Berlim, 1910. (em alemão)
- WANG, C. L. E.; GRONDIN, G. Y.; ELWI, A. E. **Interaction Buckling Failure of Stiffened Steel Plates**. Structural Engineering Report No. 264. Edmonton, Alberta: University of Alberta, 2006.
- WITTRICK, W. H. Correlation between Some Stability Problems for Orthotropic and Isotropic Plates under Biaxial and Uniaxial Stress, **Aeron. Quart.**, v. 4, p. 83–92, 1952.
- YASUHISA, Y.; YU, T.; MASAKI, M.; TETSUO, O. **Design of Ship Hull Structures: A Practical Guid for Engineers**. Springer. Takaya, Yokohama, and Tokyo, 2009.
- YOO, C.H., LEE, S.C. **Stability of structures: principals and applications**, Butterworth-Heinemann. Oxford, 2011.
- ZIEMIAN, R.D. **Guide to stability design criteria for metal structures**. John Wiley Sons. Hoboken, 2010.
- ZIENKIEWICZ, O.C. **The Finite Element Method**. McGraw- Hill, London, 1967.
- ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite Element Method in Engineering Science**. 2<sup>a</sup> ed. McGraw- Hill, London, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 4<sup>a</sup>ed. - 2 Volumes. McGraw-Hill, London, 1989.

## ANEXO A - VALORES DO FATOR $K_Q$ PARA PAINÉIS ENRIJECIDOS COM UM REFORÇO LONGITUDINAL

$\beta$	$\gamma = 5$			$\gamma = 10$		
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,15$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,15$
0,6	16,5	16,5	16,5	16,50	16,50	16,50
0,8	15,4	14,6	13,0	16,80	16,80	16,80
1,0	12,0	11,1	9,72	16,00	16,00	15,80
1,2	9,83	9,06	7,88	15,30	14,20	12,40
1,4	8,62	7,91	6,82	12,90	12,00	10,30
1,6	8,01	7,38	6,32	11,40	10,60	9,05
1,8	7,84	7,19	6,16	10,60	9,70	8,35
2,0	7,96	7,29	6,24	10,20	9,35	8,03
2,2	8,28	7,58	6,50	10,20	9,30	7,99
2,4	8,79	8,06	6,91	10,40	9,49	8,15
2,6	9,27	8,50	7,28	10,80	9,86	8,48
2,8	8,62	7,91	6,31	11,40	10,40	8,94
3,0	8,31	7,62	6,53	12,00	11,10	9,52
3,2	8,01	7,38	6,32	11,40	10,5	9,05
3,6	7,84	7,19	6,16	10,60	9,70	8,35
4,0	7,96	7,29	6,24	10,20	9,35	8,03

$\beta$	$\gamma = 15$			$\gamma = 20$		
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,15$
0,6	16,50	16,5	16,5	16,50	16,50	16,50
0,8	16,80	16,80	16,80	16,80	16,80	16,80
1,0	16,00	16,00	16,00	16,00	16,00	16,00
1,2	16,50	16,50	16,50	16,50	16,50	16,50
1,4	16,10	15,70	13,60	16,10	16,10	16,10
1,6	14,70	13,60	11,80	16,10	16,10	14,40
1,8	13,20	12,20	10,50	15,90	14,70	12,60
2,0	12,40	11,40	9,80	14,60	13,40	11,60
2,2	12,00	11,00	9,45	13,90	12,70	10,90
2,4	11,90	10,90	9,37	13,50	12,40	10,60
2,6	12,10	11,10	9,53	13,50	12,40	10,60
2,8	12,50	11,50	9,85	13,70	12,60	10,80
3,0	13,10	12,00	10,30	14,10	13,00	11,10
3,2	13,90	12,70	10,90	14,80	13,50	11,60
3,6	13,20	12,20	10,50	15,90	14,70	12,60
4,0	12,40	11,40	9,80	14,60	13,40	11,60

$\beta$	$\gamma = 25$		
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,05$
0,6	16,50	16,50	16,50
0,8	16,80	16,80	16,80
1,0	16,00	16,00	16,00
1,2	16,50	16,50	16,50
1,4	16,10	16,10	16,10
1,6	16,10	16,10	16,10
1,8	16,20	16,20	14,70
2,0	16,00	15,40	13,30
2,2	15,80	14,50	12,40
2,4	15,10	13,80	11,90
2,6	14,80	13,60	11,60
2,8	14,80	13,60	11,60
3,0	15,20	13,90	11,90
3,2	15,60	14,30	12,30
3,6	16,20	15,70	13,50
4,0	16,00	15,40	13,30

Fonte: Timoshenko, S. P. e Gere, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill; 1963.

## ANEXO B - VALORES DO FATOR $K_Q$ PARA PAINÉIS ENRIJECIDOS COM DOIS REFORÇOS LONGITUDINAIS

$\beta$	$\gamma = \frac{10}{3}$		$\gamma = 5$		$\gamma = \frac{20}{3}$		$\gamma = 10$	
	$\delta =$	$\delta =$	$\delta =$	$\delta =$	$\delta =$	$\delta =$	$\delta =$	$\delta =$
	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10
0,60	26,80	24,10	36,40	33,20	36,40	36,40	36,40	36,40
0,80	16,90	15,00	23,30	20,70	29,40	26,30	37,20	37,10
1,00	12,10	10,70	16,30	14,50	20,50	18,20	28,70	25,60
1,20	9,61	8,51	12,60	11,20	15,50	13,80	21,40	19,00
1,40	8,32	7,36	10,50	9,32	12,70	11,30	17,20	15,20
1,60	7,70	6,81	9,40	8,31	11,10	9,82	14,50	12,80
1,80	7,51	6,64	8,85	7,83	10,20	9,02	12,90	11,40
2,00	7,61	6,73	8,70	7,69	9,78	8,65	11,90	10,60

Fonte: Timoshenko, S. P. e Gere, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill; 1963.

## APÊNDICE A – RESULTADOS DE TENSÃO ÚLTIMA NORMALIZADA OBTIDOS PARA $V_{tl}$

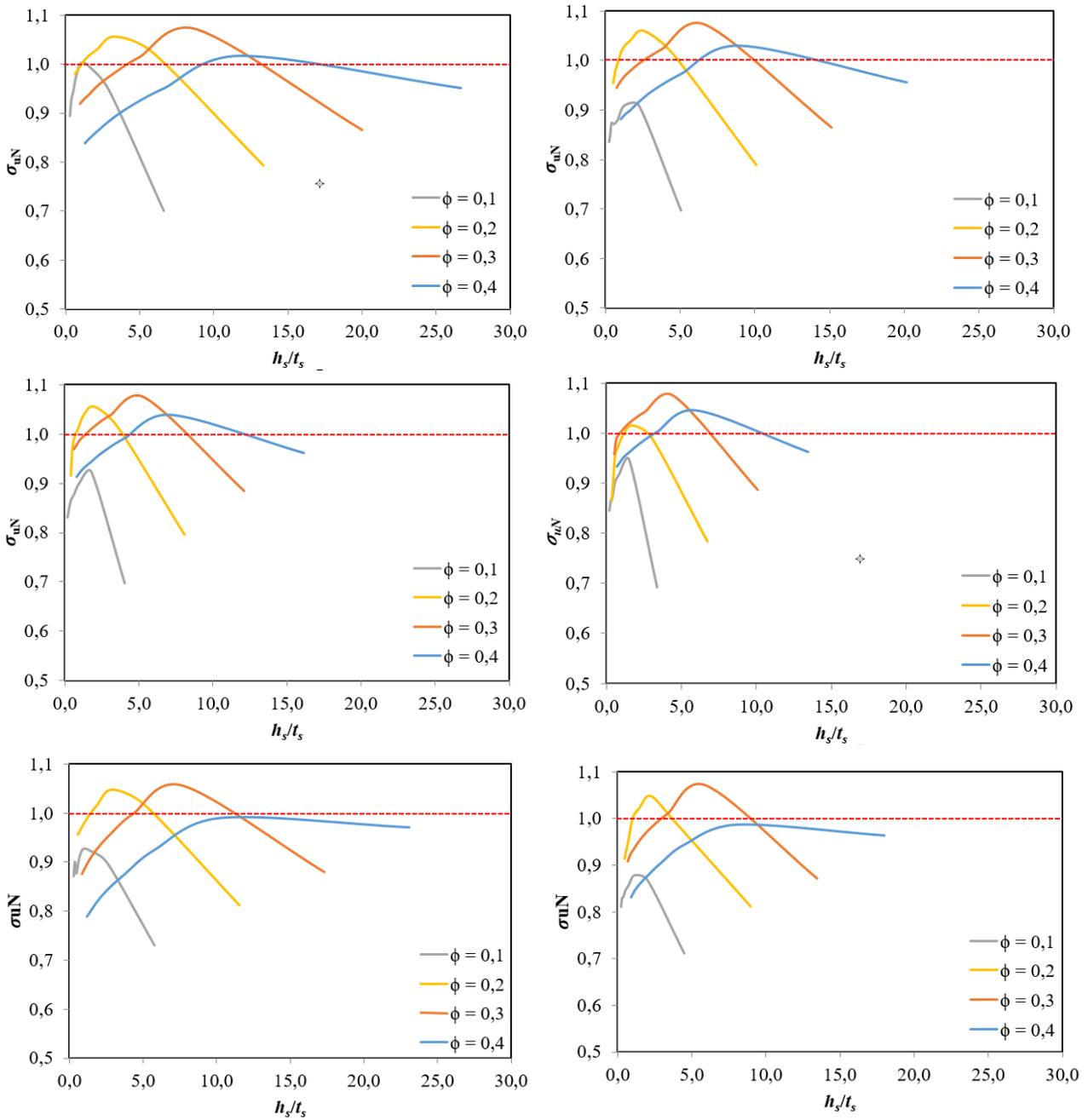


Figura A.1 - Valores de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$  para a configuração com  $V_{tl} = 0,040 \text{ m}^3$  com (a) P(2,2), (b) P(2,3), (c) P(2,4), (d) P(2,5), (e) P(3,2) e (f) P(3,3).

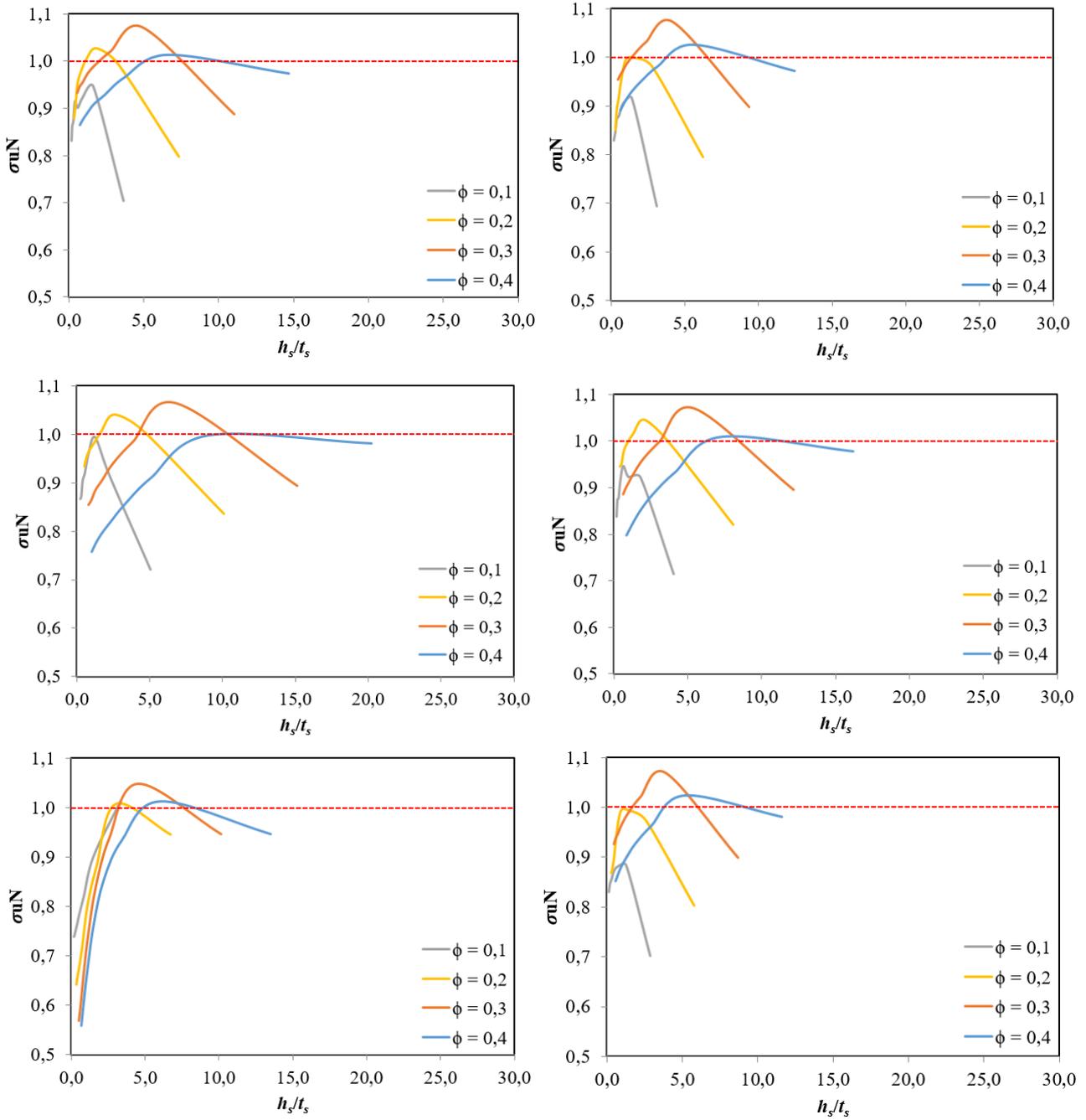


Figura A.2 - Valores de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$  para a configuração com  $V_{tl} = 0,040 \text{ m}^3$  com (a) P(3,4), (b) P(3,5), (c) P(4,2), (d) P(4,3), (e) P(4,4) e (f) P(4,5).

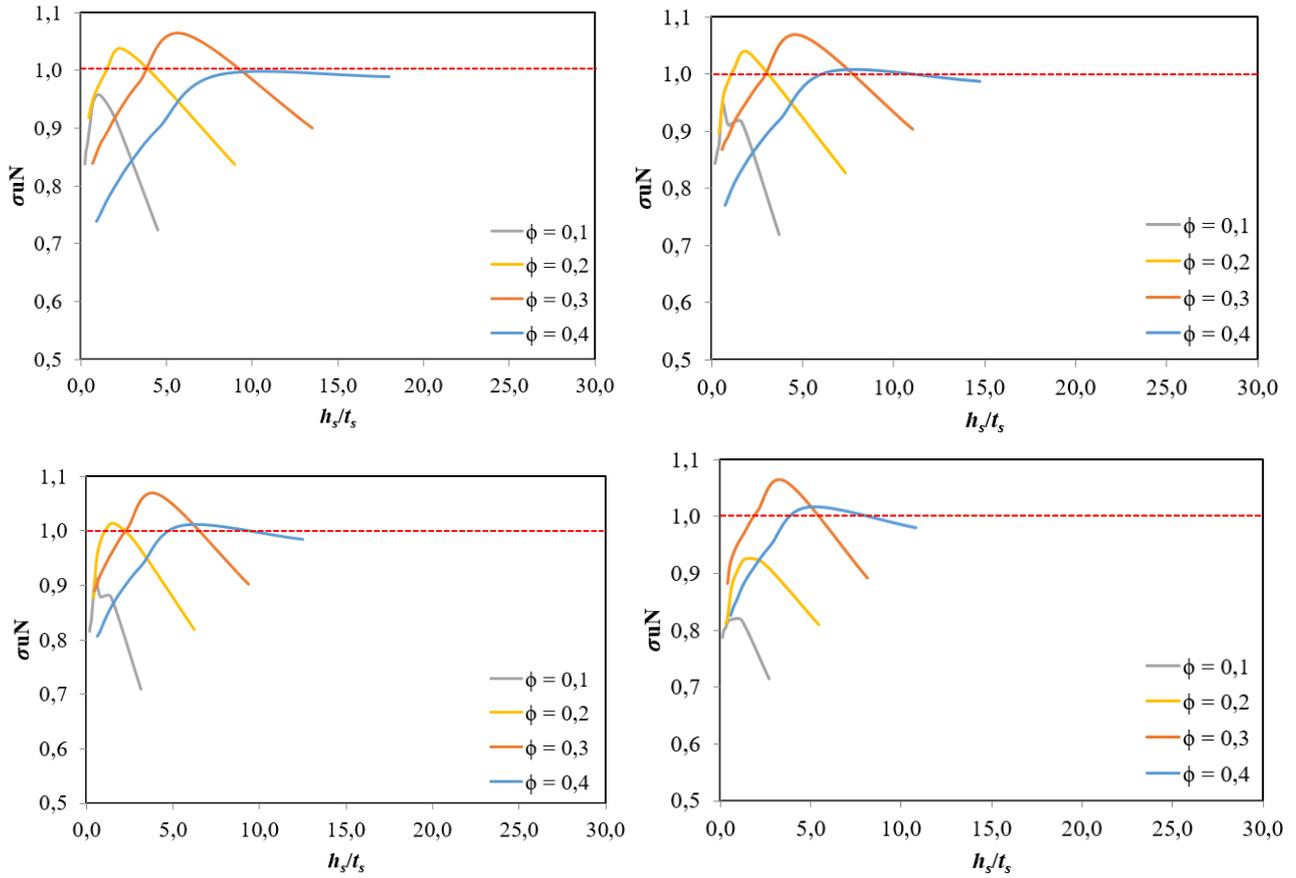


Figura A.3 - Valores de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$  para a configuração com  $V_{tl} = 0,040 \text{ m}^3$  com (a) P(5,2), (b) P(5,3), (c) P(5,4) e (d) P(5,5).

## APÊNDICE B – RESULTADOS DE TENSÃO ÚLTIMA NORMALIZADA OBTIDOS PARA $V_{12}$

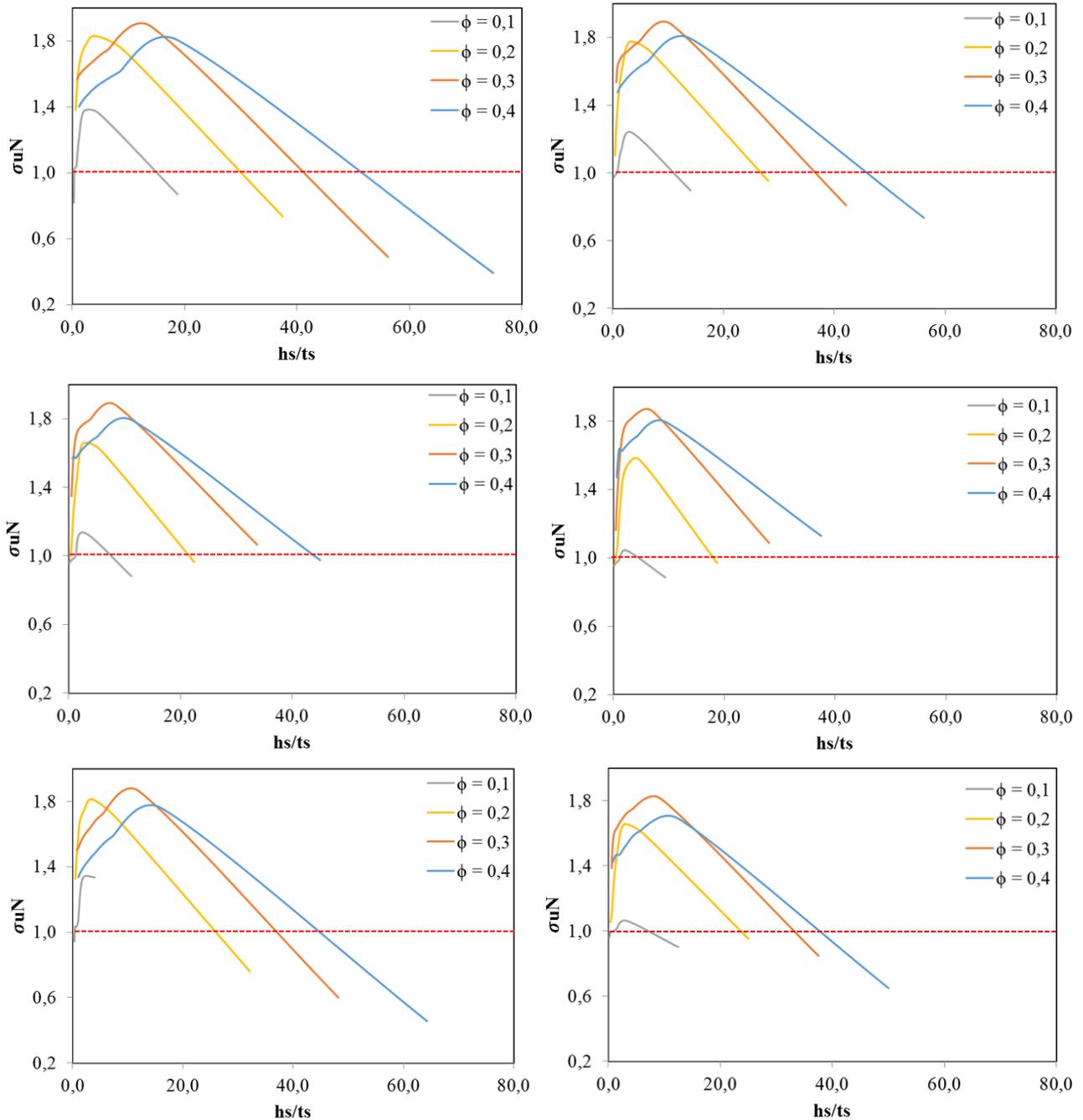


Figura B.1 - Valores de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$  para a configuração com  $V_{12} = 0,028 \text{ m}^3$  com (a) P(2,2), (b) P(2,3), (c) P(2,4), (d) P(2,5), (e) P(3,2) e (f) P(3,3).

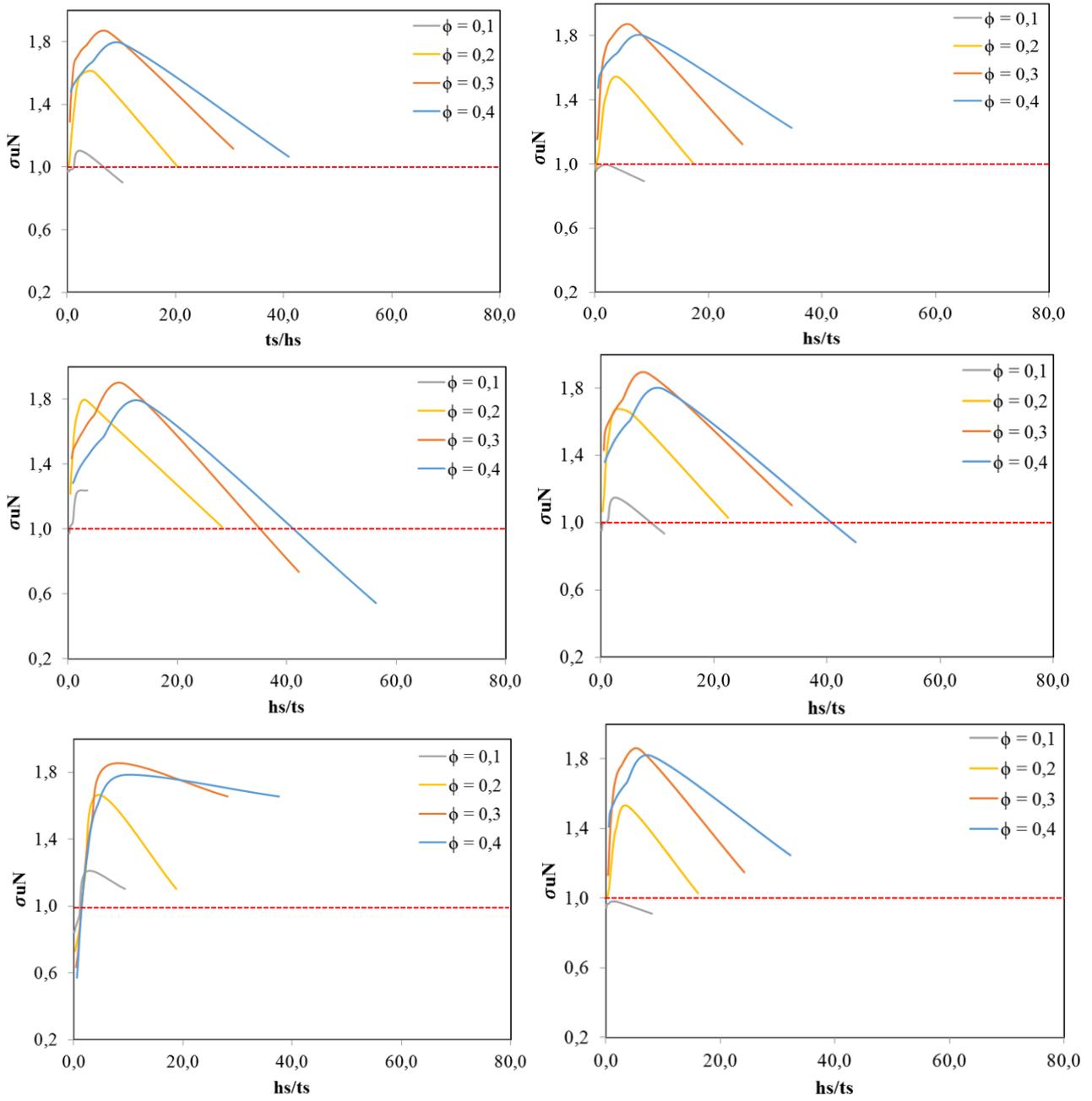


Figura B.2 - Valores de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$  para a configuração com  $V_{tl} = 0,028 \text{ m}^3$  com (a) P(3,4), (b) P(3,5), (c) P(4,2), (d) P(4,3), (e) P(4,4) e (f) P(4,5).

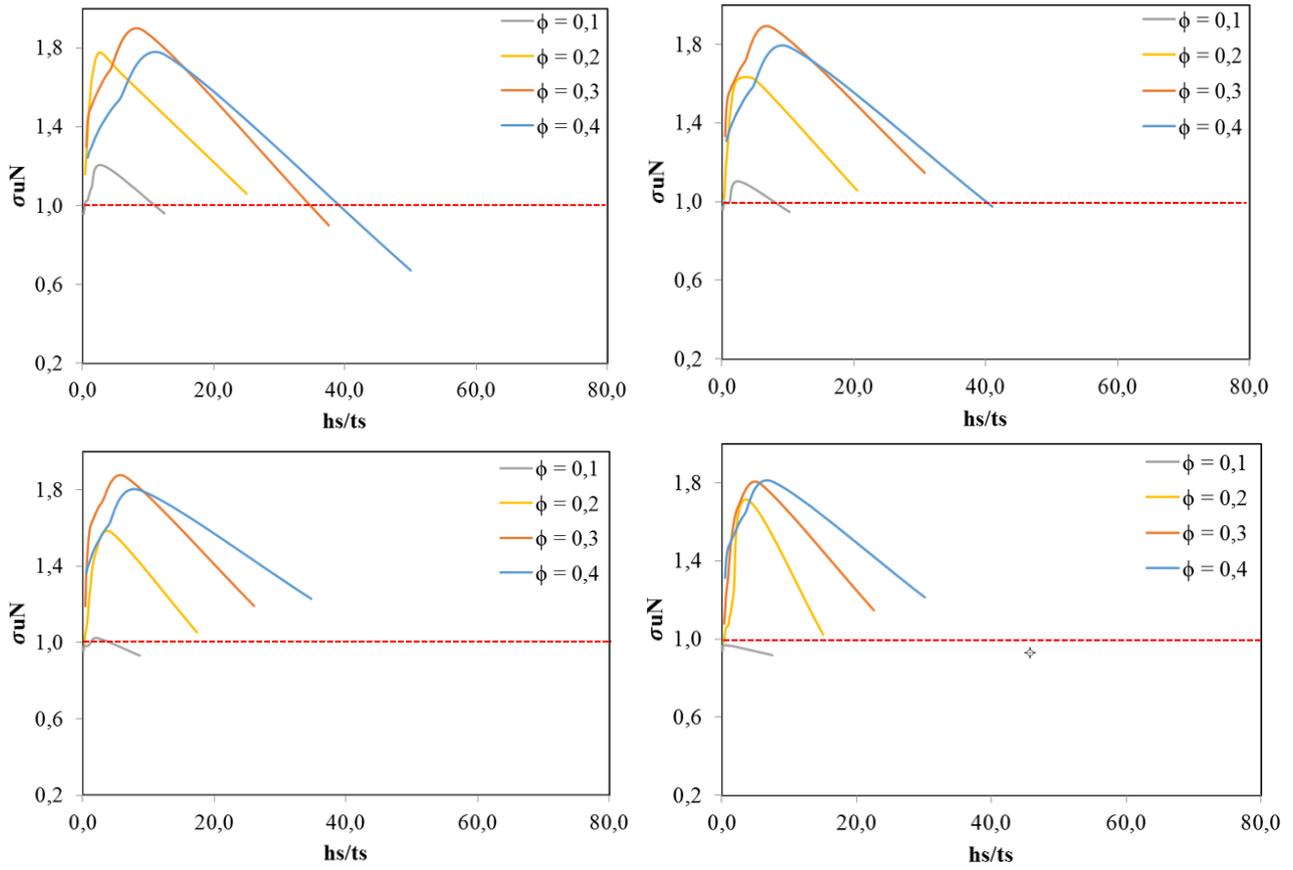


Figura B.3 - Valores de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $h_s/t_s$  para a configuração com  $V_{tl} = 0,028 \text{ m}^3$  com (a) P(5,2), (b) P(5,3), (c) P(5,4) e (d) P(5,5).

## APÊNDICE C – COMPARAÇÃO ENTRE MELHOR E PIOR VALOR DE TENSÃO ÚLTIMA PARA OS CASOS COM $V_{t2}$

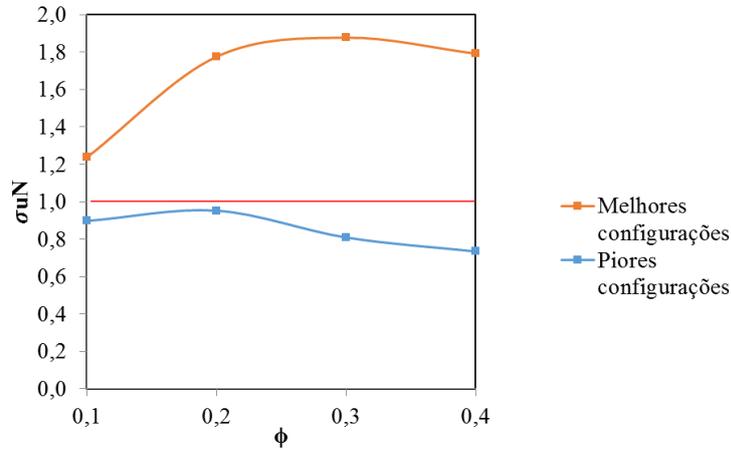


Figura C.1 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(2,3).

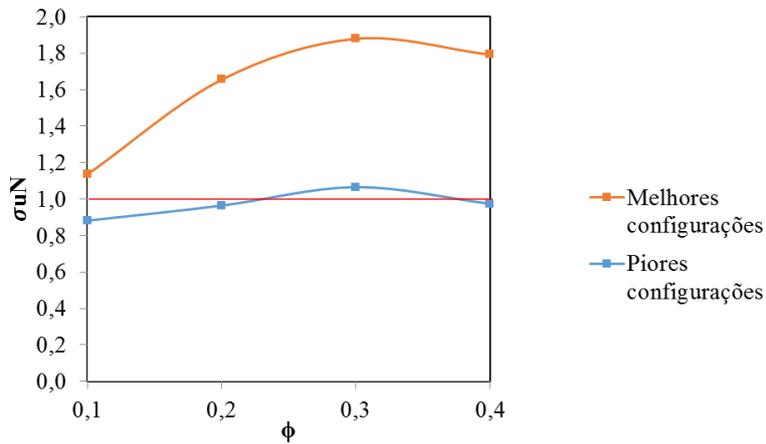


Figura C.2 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(2,4).

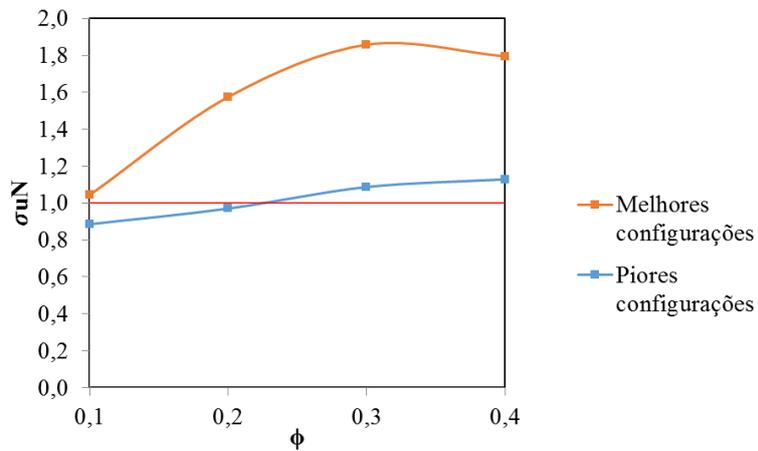


Figura C.3 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(2,5).

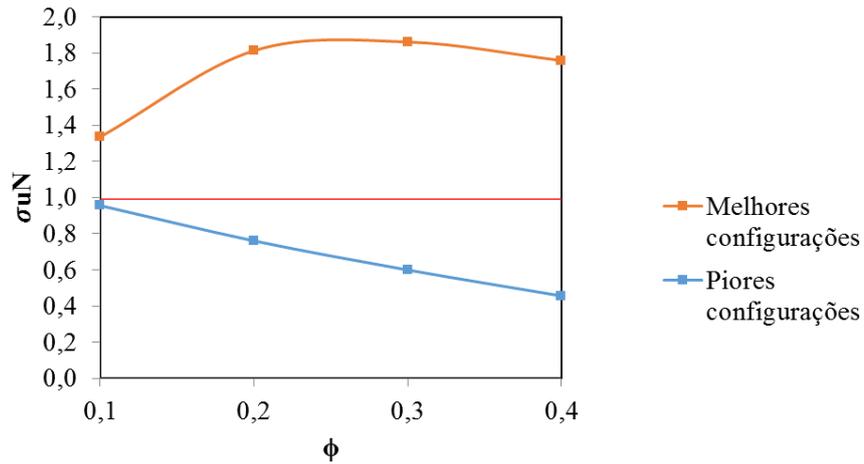


Figura C.4 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(3,2).

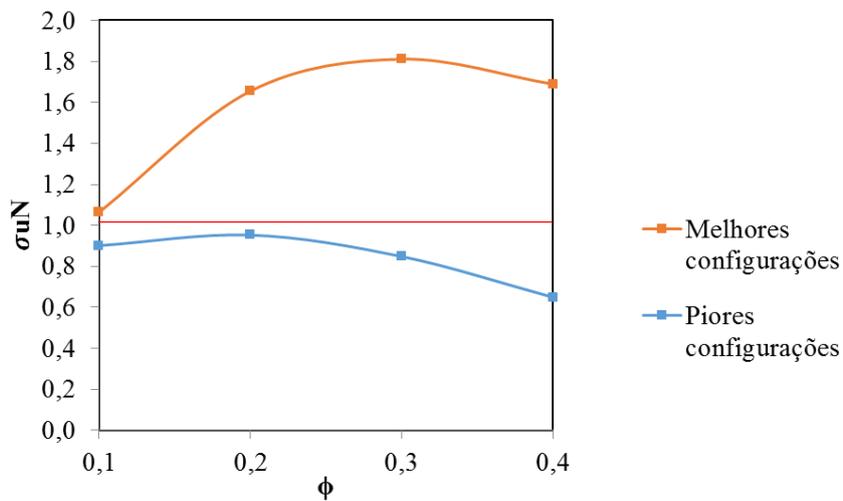


Figura C.5 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(3,3).

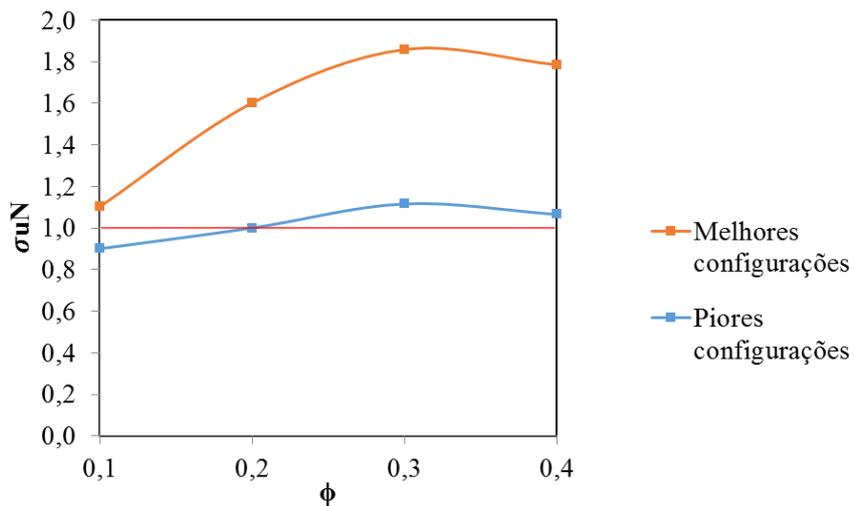


Figura C.6 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(3,4).

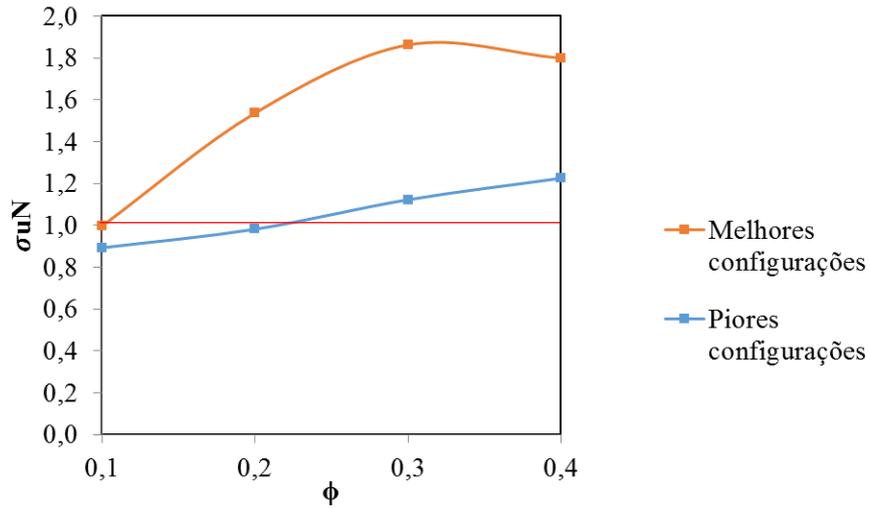


Figura C.7 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(3,5).

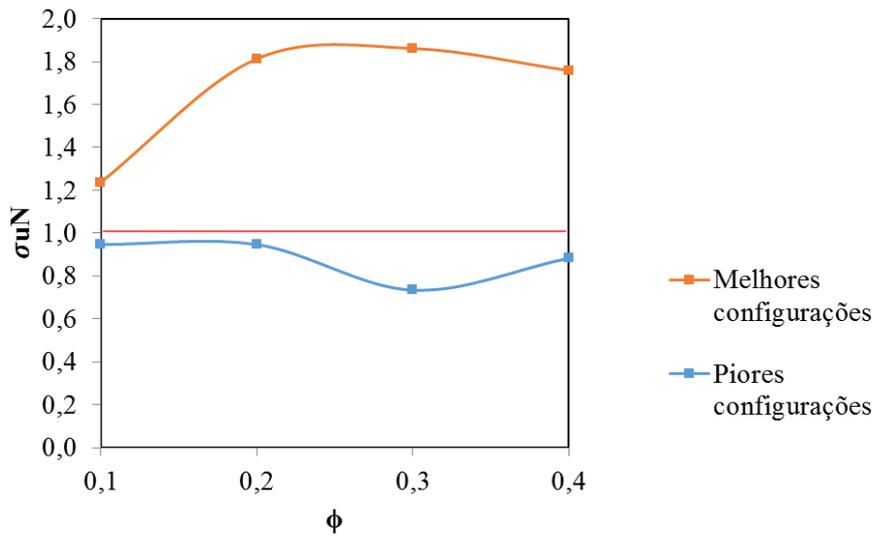


Figura C.8 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(4,2).

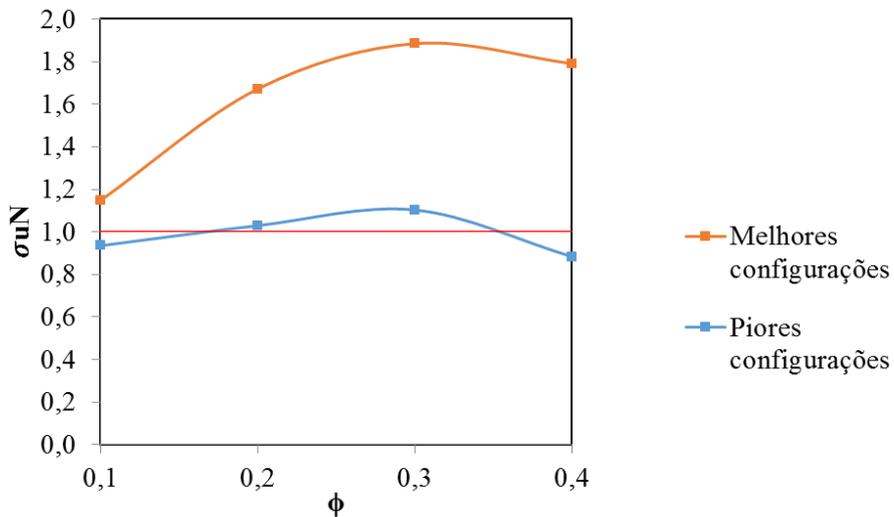


Figura C.9 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(4,3).

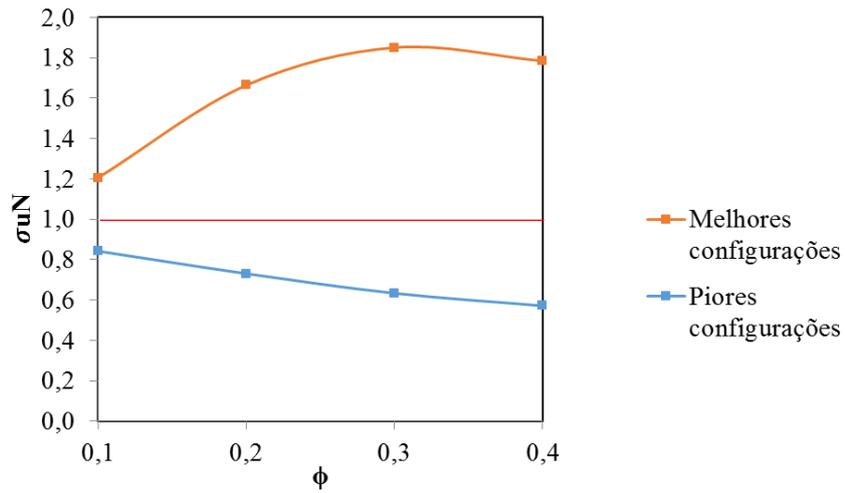


Figura C.10 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(4,4).

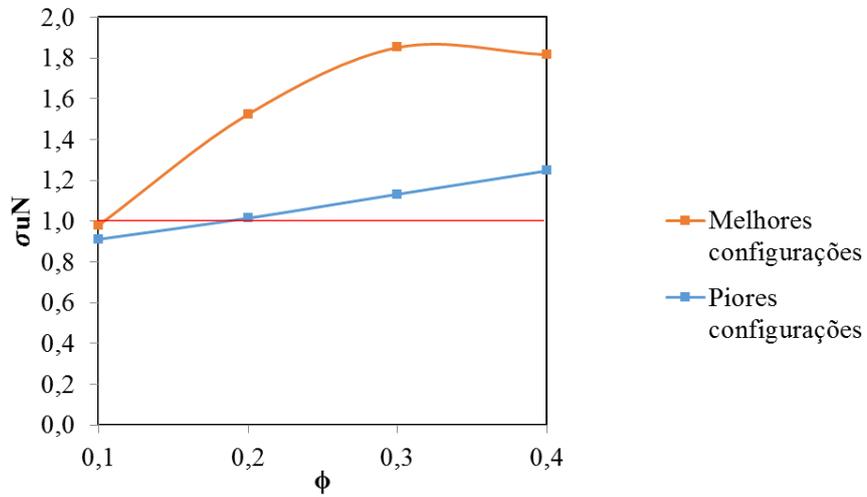


Figura C.11 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(4,5).

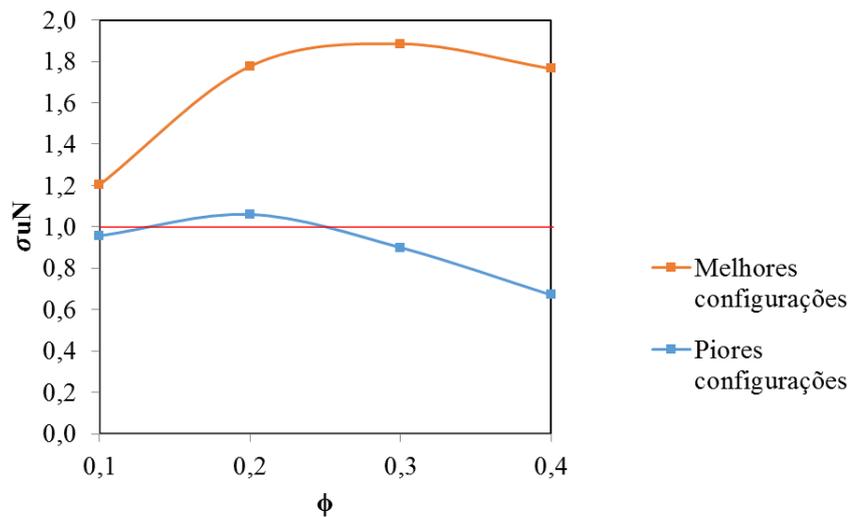


Figura C.12 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(5,2).

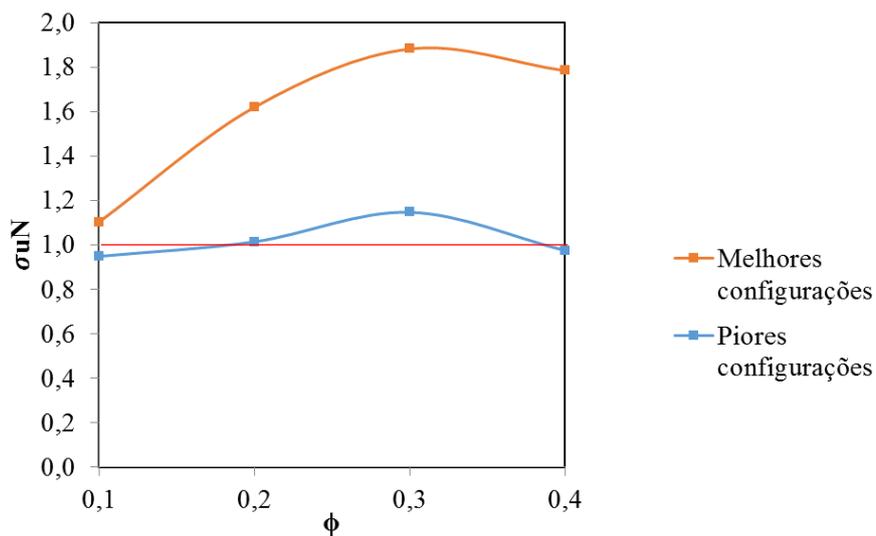


Figura C.13 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(5,3).

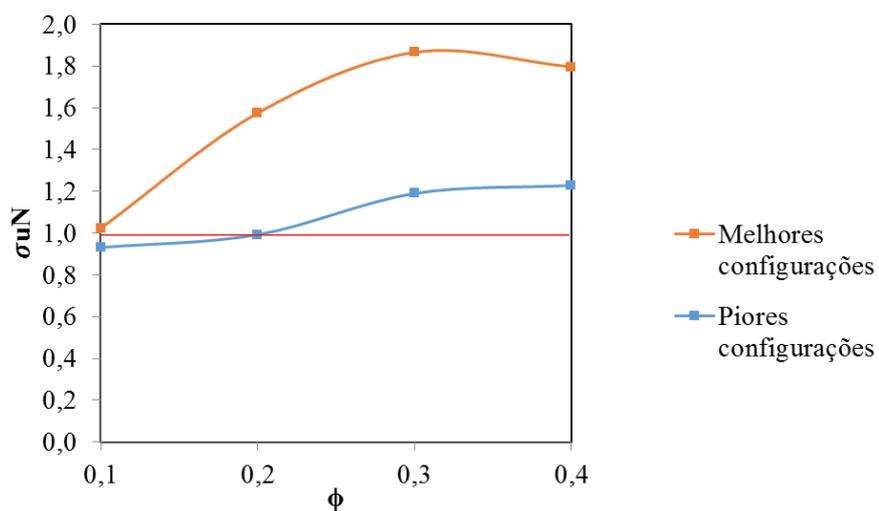


Figura C.14 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(5,4).

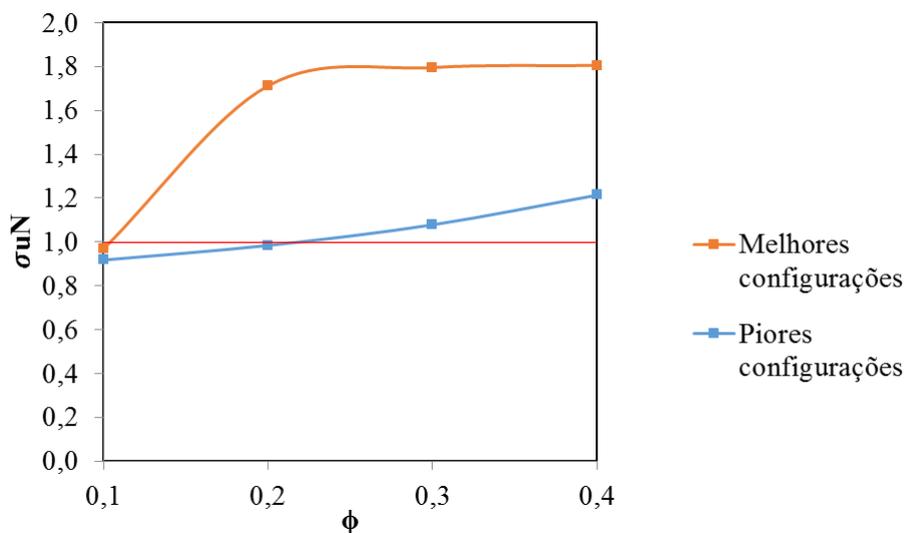


FIGURA C.15 - Curvas de  $\sigma_{uN}$  pela relação  $\phi$ , para o arranjo geométrico P(5,5).

## APÊNDICE D – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO PARA AS MELHORES CONFIGURAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA CADA ARRANJO GEOMÉTRICO $P(N_{el}, N_{et})$ COM $V_{t2}$

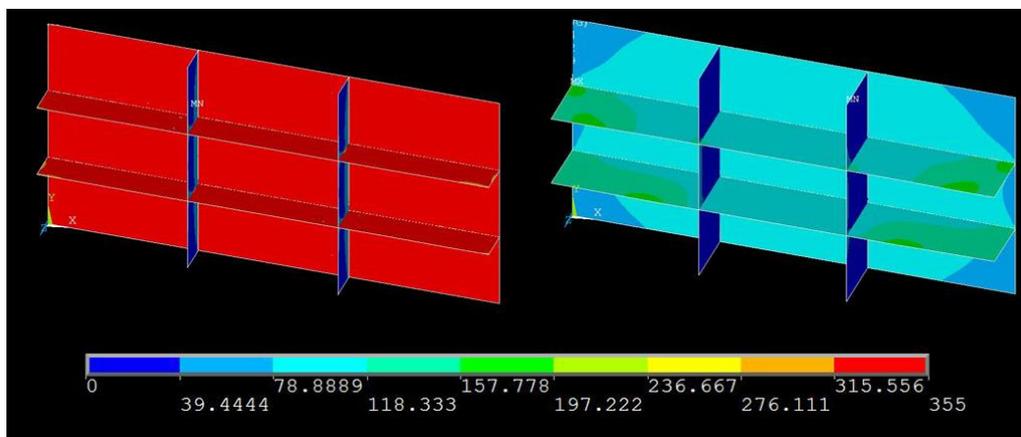


Figura D.1 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(2,2) com  $\phi = 0,3$ .

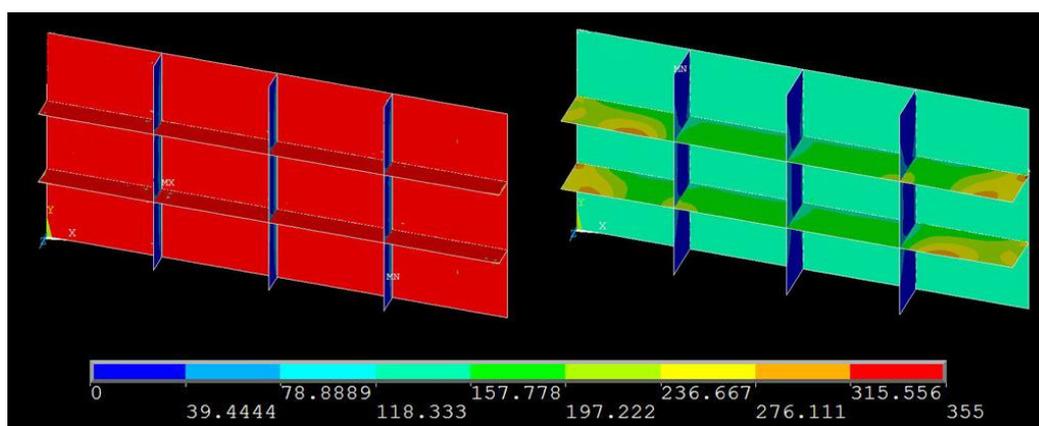


Figura D.2 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(2,3) com  $\phi = 0,3$ .

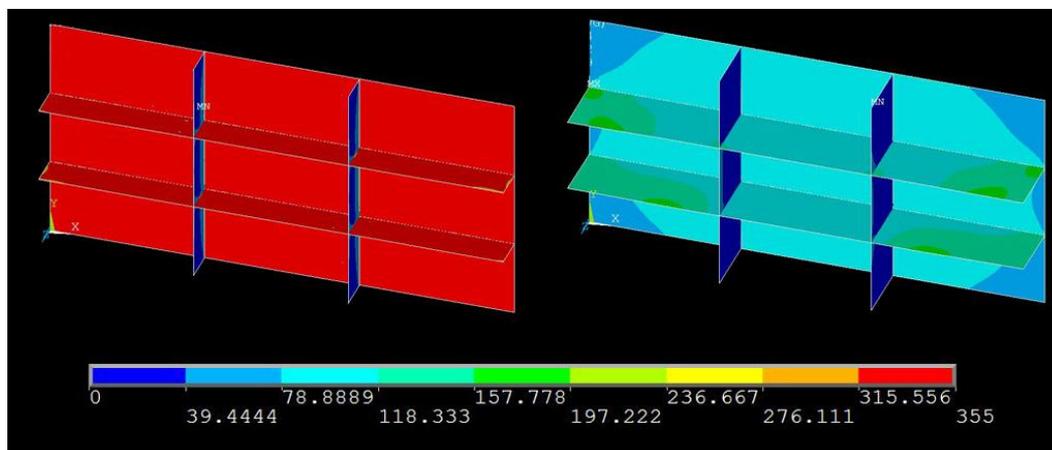


Figura D.3 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(2,4) com  $\phi = 0,3$ .

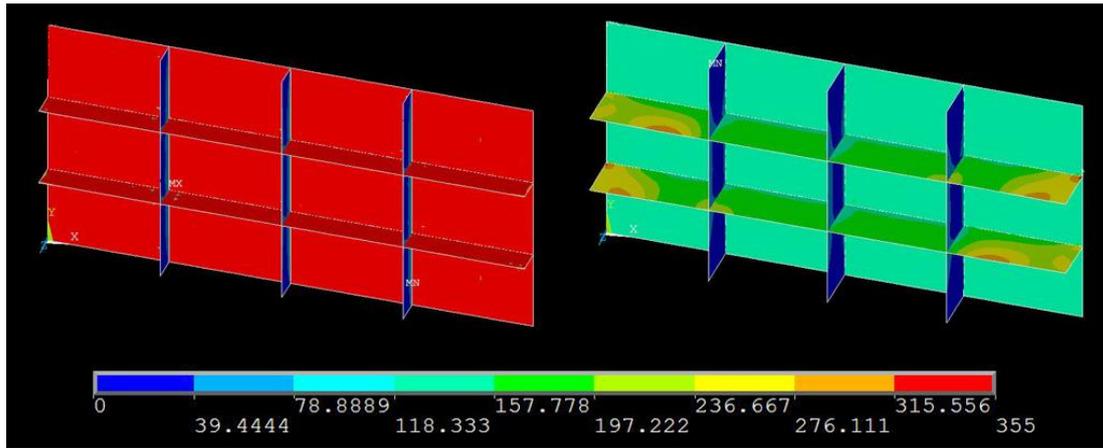


Figura D.4 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(2,5) com  $\phi = 0,3$ .

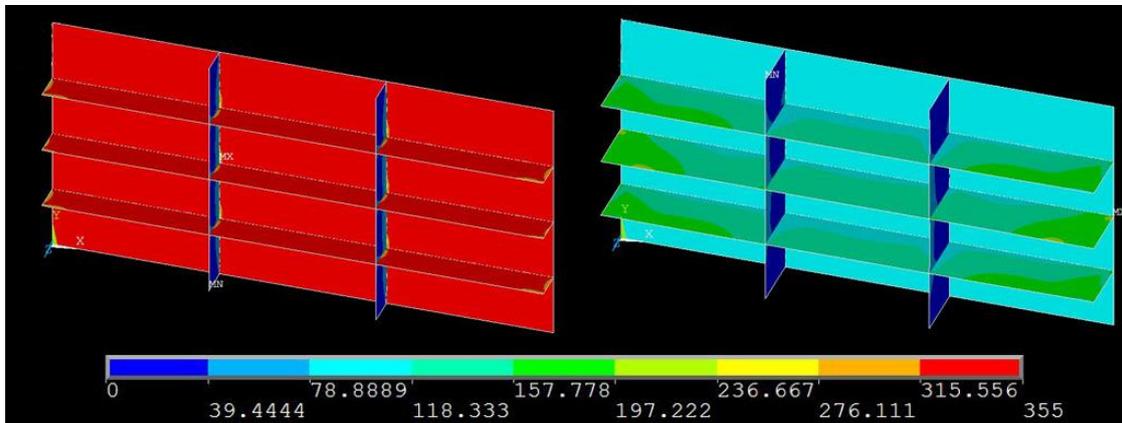


Figura D.5 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(3,2) com  $\phi = 0,3$ .

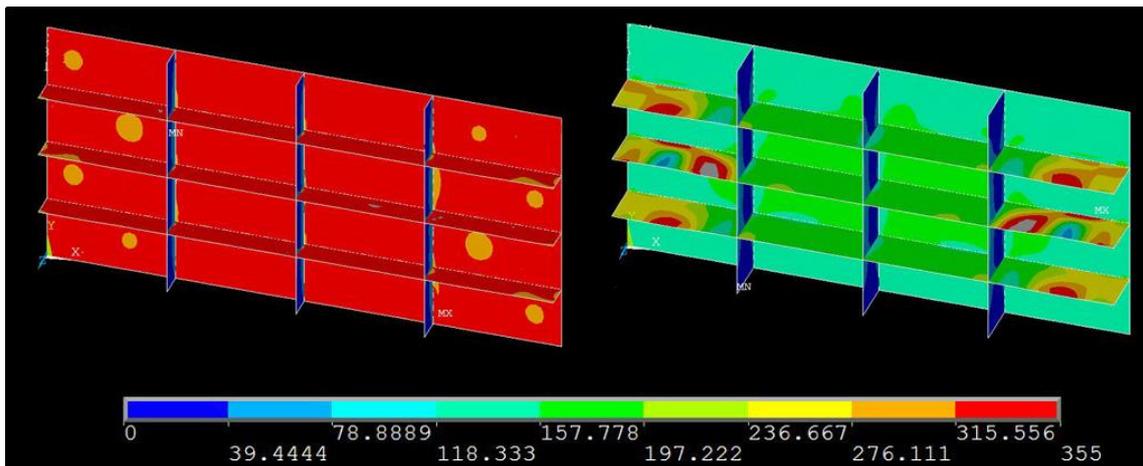


Figura D.6 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(3,3) com  $\phi = 0,3$ .

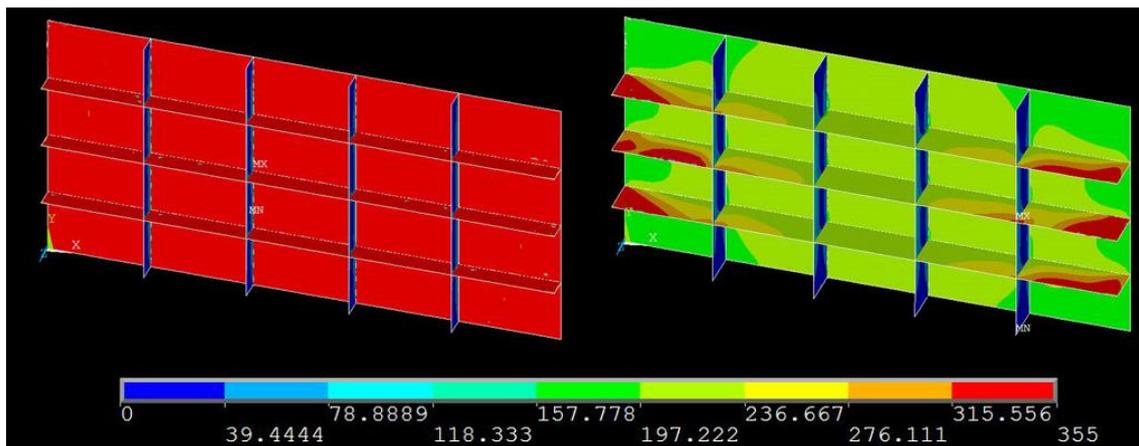


Figura D.7 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(3,4) com  $\phi = 0,3$ .

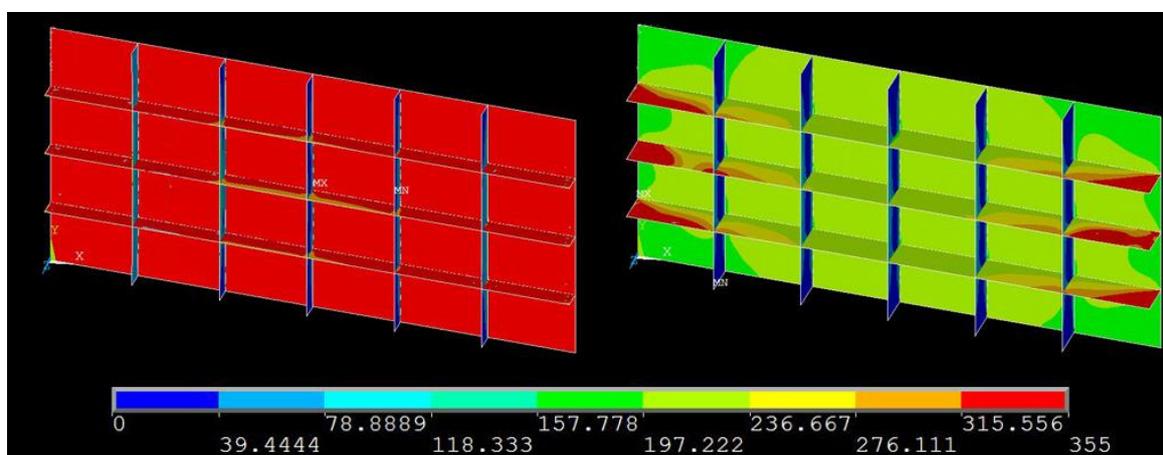


Figura D.8 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(3,5) com  $\phi = 0,3$ .

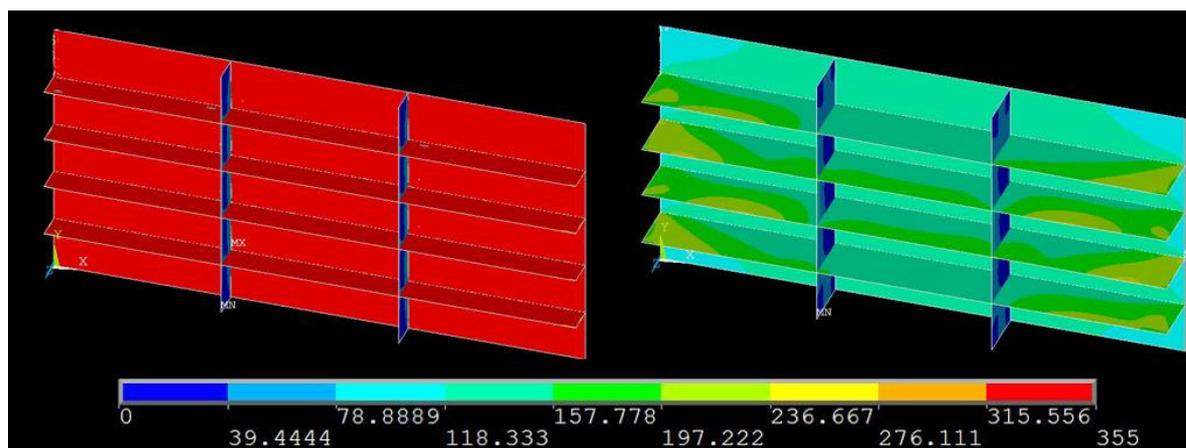


Figura D.9 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(4,2) com  $\phi = 0,3$ .

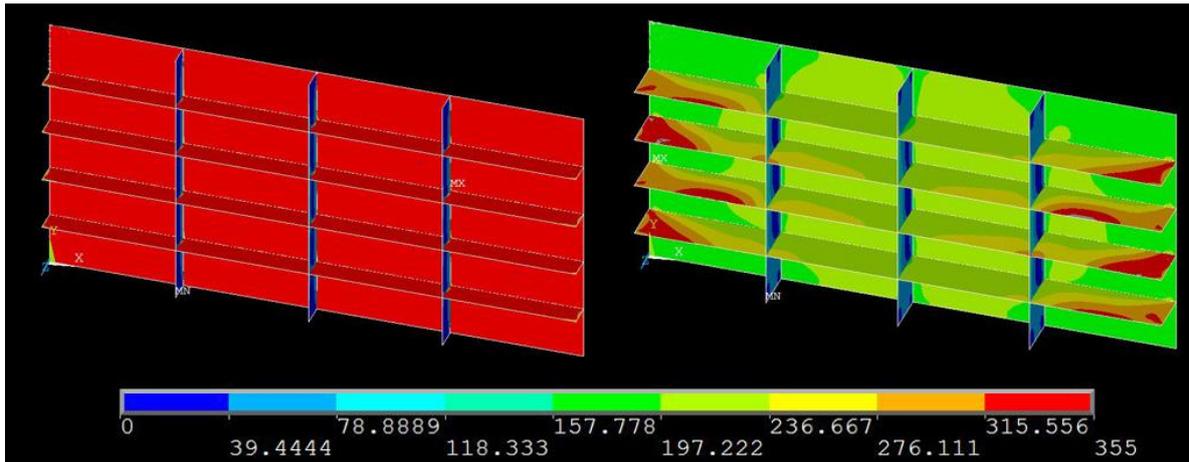


Figura D.10 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(4,3) com  $\phi = 0,3$ .

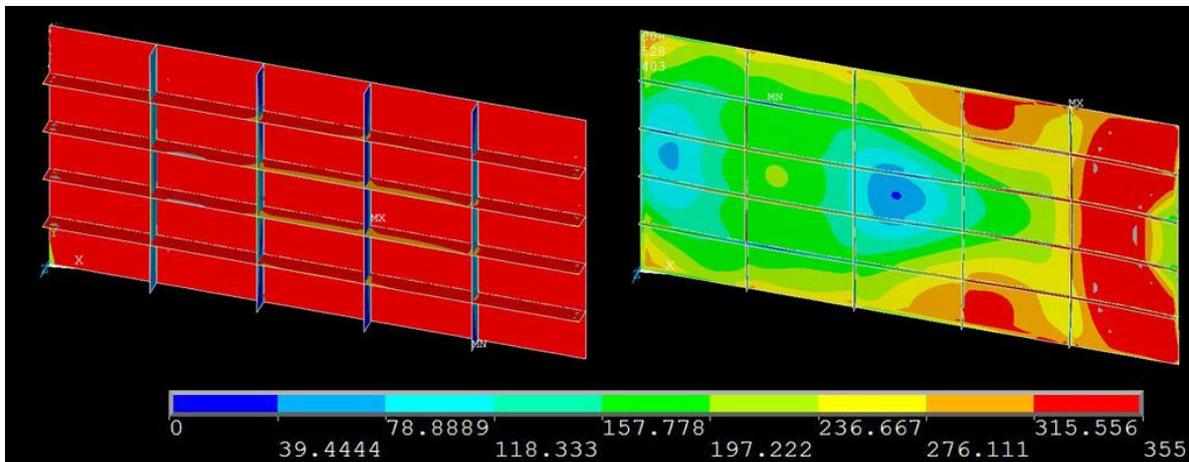


Figura D.11 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(4,4) com  $\phi = 0,3$ .

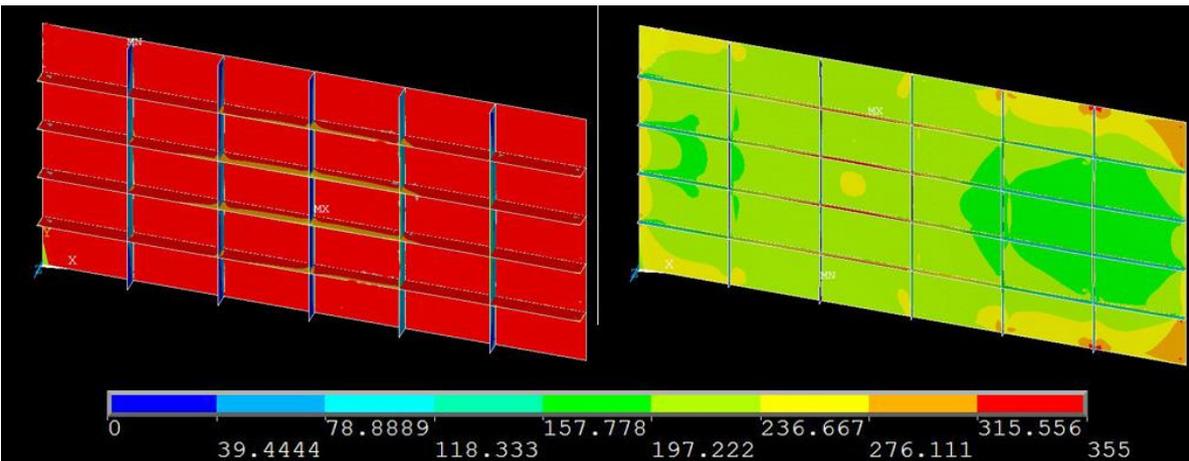


Figura D.12 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(4,5) com  $\phi = 0,3$ .

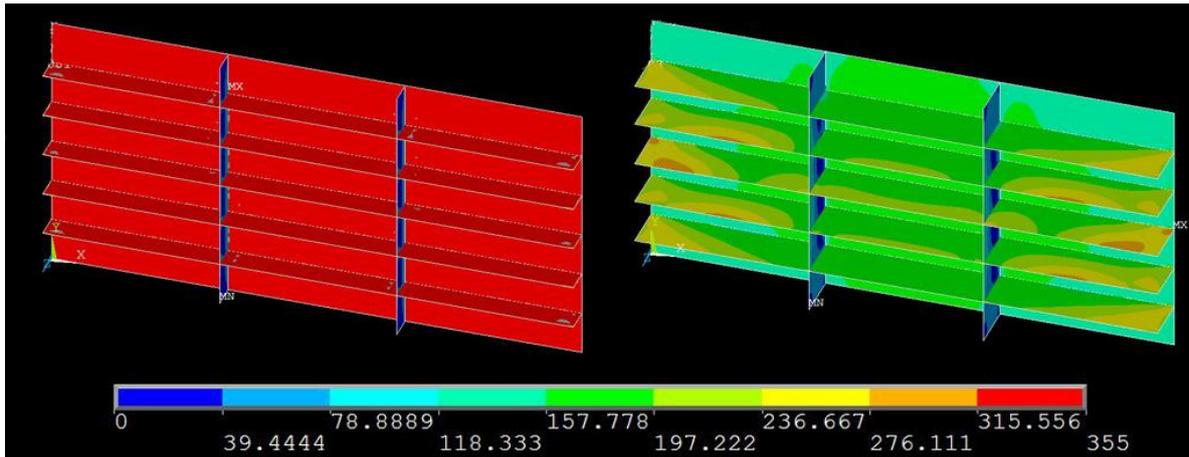


Figura D.13 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para  $P(5,2)$  com  $\phi = 0,3$ .

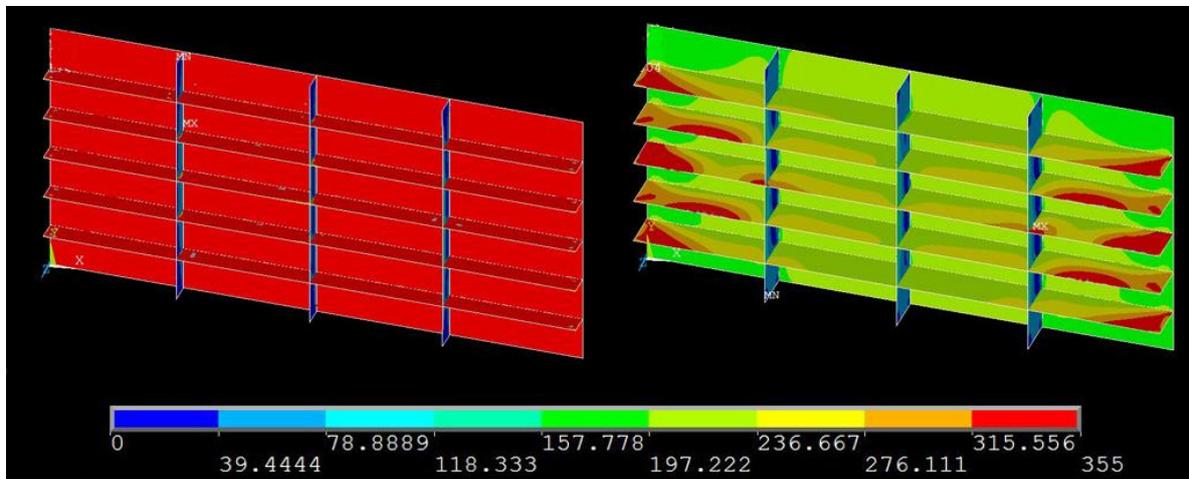


Figura D.14 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para  $P(5,3)$  com  $\phi = 0,3$ .

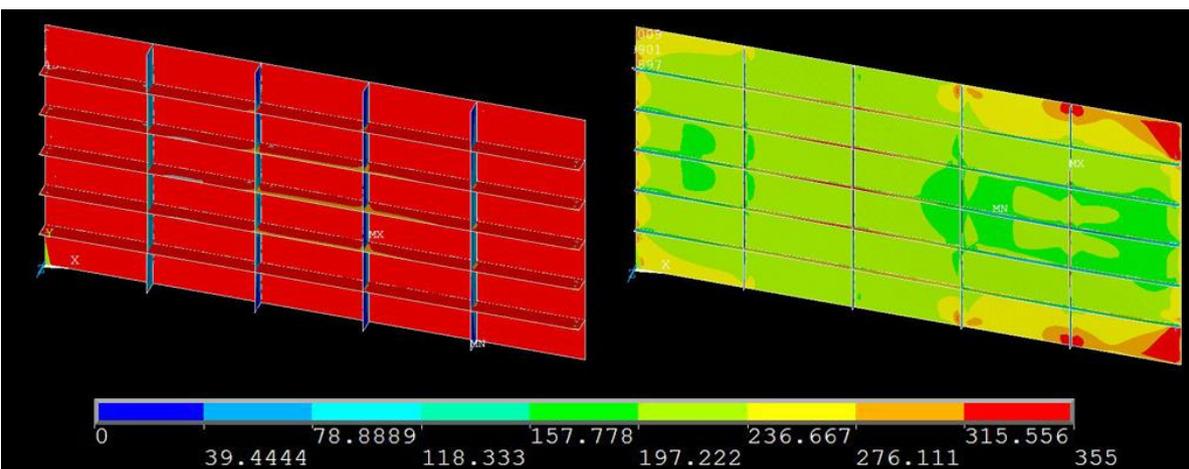


Figura D.15 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para  $P(5,4)$  com  $\phi = 0,3$ .

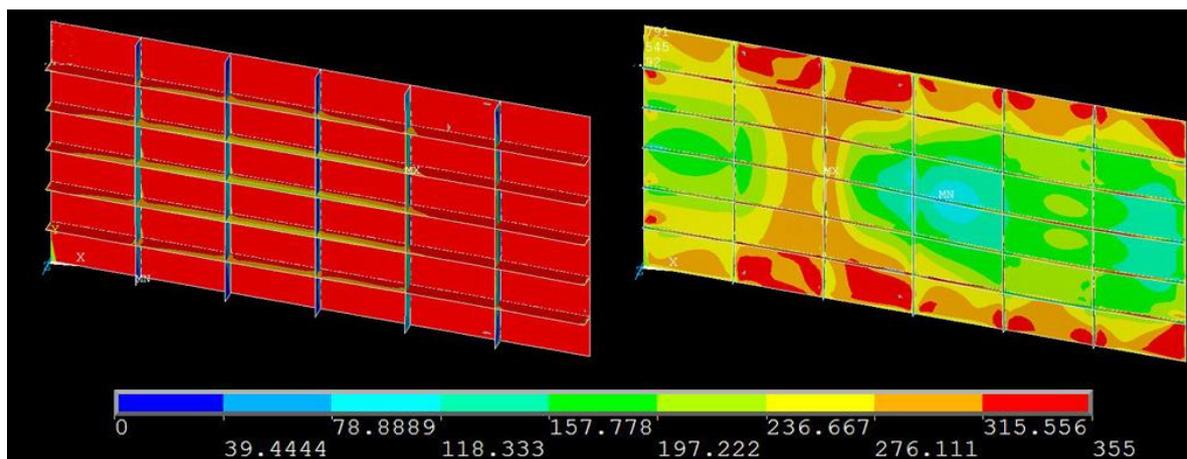


Figura D.16 - Distribuição de tensões para as geometrias com melhor e pior desempenho para P(5,5) com  $\phi = 0,4$ .