

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA**

**ALGORITMOS GENÉRICOS PARA A GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS  
DE CABOS EM TRÊS SITUAÇÕES PRÁTICAS DE APLICAÇÕES  
SUBAQUÁTICAS**

**THIAGO ÁVILA POUZADA**

Dissertação apresentada à Comissão do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

Rio Grande, maio de 2015.

*Este trabalho é dedicado à minha amada mãe; à minha maravilhosa madrinha (in memoriam); ao meu dedicado pai (in memoriam); à minha querida irmã e aos meus queridos sobrinhos e afilhados.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado condições para desenvolver este trabalho e corresponder à minha fé em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes, pelo excelente trabalho. Agradeço pela sua disponibilidade, atenção, amizade, compreensão, colaboração e apoio ao longo destes dois anos de parceria.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, pela oportunidade de realizar esta Dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de recursos ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

À coordenação e à secretaria do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, especialmente ao Prof. Dr. Elizaldo Santos e à Cristina, pela disponibilidade, boa vontade, disposição e interesse em me auxiliar nas questões pertinentes à conclusão deste Mestrado.

À minha mãe Luiza, pelo apoio e participação em todos os momentos de minha vida, bem como proporcionar a realização dos meus estudos de forma plena.

À minha madrinha Teresinha (*in memoriam*), pelo amor incondicional e por proporcionar todas as condições necessárias para que eu pudesse atingir meus sonhos e objetivos.

Ao meu pai José Roberto (*in memoriam*), pelos pilares construídos, ainda que em pouco tempo de convivência comigo neste plano físico, fundamentais para guiar meus passos ao longo de toda a minha vida.

À minha irmã Danielli, pelo carinho, atenção e apoio ao longo da minha vida, essenciais para a concretização deste trabalho e de muitos outros objetivos alcançados.

Aos meus sobrinhos e afilhados Rita, Bruno e Luiz, pelas lições aprendidas de forma mútua, diariamente.

À minha namorada Mônica, pelo amor, carinho, apoio, atenção, incentivo, por aproveitar ao meu lado momentos maravilhosos e principalmente por acreditar fielmente no meu potencial, especialmente em momentos difíceis, ao longo da realização deste trabalho.

A todos os meus verdadeiros amigos, por estarem sempre presentes nos meus momentos bons e ruins.

Aos colegas do Núcleo de Matemática Aplicada (NuMA) Vanessa, Roberto e Jéssica, pela maravilhosa convivência, pelos momentos descontraídos, por cada riso, piada, incentivo e, principalmente, companheirismo ao longo da etapa que se encerra.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica que tive o prazer de conviver, pela parceria ao longo da realização do meu Mestrado.

Aos membros da Banca Examinadora, avaliadores desta Dissertação, pela honra de cada contribuição no aperfeiçoamento deste trabalho e disponibilidade para tal.

A todos os professores que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta Dissertação, seja ministrando uma disciplina, seja incentivando e apoiando, me ajudando a crescer com seus conhecimentos.

## RESUMO

A modelagem dinâmica de cabos constitui tema de pesquisa de grande importância e aplicação prática na atualidade. No entanto, devido às não linearidades presentes na dinâmica de cabos, bem como à necessidade de se trabalhar com muitos graus de liberdade, desenvolver modelos dinâmicos para estes sistemas torna-se tarefa difícil. Para desenvolver modelos dinâmicos de cabos, o presente trabalho utiliza o Método do Formalismo Discreto (*Lumped Mass Approach*), que supõe o cabo dividido em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias. Os cabos foram considerados em três casos distintos. No primeiro e no segundo, com uma das extremidades articulada a uma estrutura flutuante (navio ou plataforma), enquanto que em sua outra extremidade, uma carga terminal fica livre no primeiro caso e fixa ao fundo do oceano no segundo. No terceiro caso, as duas extremidades do cabo são articuladas a duas estruturas flutuantes distintas. Os cabos estão submersos e o arrasto hidrodinâmico foi considerado a partir de um modelo simples, proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre a estrutura e o fluido. Utilizando-se o formalismo de Euler-Lagrange, foram desenvolvidos manualmente os modelos dinâmicos para cabos considerando-se dois, três e quatro elos para o primeiro caso, sendo o segundo e terceiro casos situações particulares deste. Para o terceiro caso, com um cabo dividido em cinco elos, foram obtidos os torques em cada articulação fictícia, originados por uma força resultante que surge na carga terminal, composta por dois vínculos elásticos adicionados na mesma, com a finalidade de simular a segunda estrutura flutuante. A partir da análise comparativa das equações obtidas destes modelos, foi possível identificar padrões de crescimento para as mesmas. Desta forma, foram desenvolvidos algoritmos genéricos, para gerar automaticamente as equações dos modelos dinâmicos para qualquer número de elos desejado, em cada um dos três casos considerados. Uma vez obtidos estes algoritmos, foram realizadas simulações, com a finalidade de verificar qualitativamente os resultados obtidos. Um *software* para a animação gráfica foi desenvolvido e a sua utilização permitiu atestar uma grande sensação de realidade nas simulações, cujos resultados, em diversas situações, mostraram-se de acordo com o esperado fisicamente.

Palavras-chave: modelagem dinâmica, algoritmos genéricos, estruturas flexíveis, cabos, aplicações subaquáticas.

## ABSTRACT

Dynamic modeling of cables is a great importance research theme and practical application nowadays. However, due to non linearities present in cable dynamics, as well as the need to work with many degrees of freedom, to develop dynamic models for these systems becomes a hard task. To develop dynamic models of cables, the present paper uses the Lumped Mass Approach, which supposes the cable divided in rigid links connected by fictitious elastic articulations. The cables were considered in three different cases. In the first and in the second ones, one of its extremities is articulated to a floating structure (a ship or a platform), while on the other extremity, one terminal loading is free on the first case and fixed to the seafloor on the second case. In the third case, the two extremities of the cable are articulated to two different floating structures. The cables are positioned underwater and the hydrodynamic drag was considered from a simple model, proportional to the square of the relative velocity between the structure and the fluid. Using the Euler-Lagrange formalism, the dynamic models for cables considering two, three and four links were manually developed for the first case, while the second and third ones are particular situations of this first one. For the third case, with a cable divided in five links, the torques on each fictitious articulation were obtained, originated by a resultant force on the terminal loading, composed by two elastic bonds added there, in order to simulate the second floating structure. From the comparative analysis of the equations obtained in these models, it was possible identify growth patterns for them. Therefore, were developed generic algorithms, to automatically generate the equations for the dynamic models for any desired number of links, in each one of the three cases considered. Once obtained these algorithms, were performed simulations, in order to verify qualitatively the obtained results. A software to graphical animation was developed, and its use allowed us to attest a great reality sense in the simulations, with the results in several situations according to the physical expected.

Key-words: dynamic modeling, generic algorithms, flexible structures, cables, underwater applications.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>1</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS</b> .....	<b>5</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b> .....	<b>7</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>8</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>1.1</b> <b>MODELAGEM DINÂMICA DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO</b> .....	<b>12</b>
<b>1.2</b> <b>OBJETIVOS</b> .....	<b>14</b>
1.2.1    Objetivos Gerais .....	14
1.2.2    Objetivos Específicos .....	15
<b>1.3</b> <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>16</b>
<b>1.4</b> <b>ROTEIRO DO TRABALHO</b> .....	<b>29</b>
<b>CAPÍTULO 2 - ABORDAGEM DISCRETA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO</b> .....	<b>31</b>
<b>2.1</b> <b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>32</b>
<b>2.2</b> <b>FORMALISMO DISCRETO</b> .....	<b>32</b>
2.2.1    Formalismo discreto para o primeiro caso .....	39
2.2.2    Formalismo discreto para o segundo caso .....	45
2.2.3    Formalismo discreto para o terceiro caso .....	46
<b>CAPÍTULO 3 - MODELAGEM DINÂMICA PARA O PRIMEIRO E SEGUNDO CASOS</b> .....	<b>49</b>
<b>3.1</b> <b>PRIMEIRO CASO – MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM DOIS ELOS</b> .....	<b>50</b>
<b>3.2</b> <b>PRIMEIRO CASO – MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS</b> .....	<b>55</b>
<b>3.3</b> <b>PRIMEIRO CASO – MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM QUATRO ELOS</b> .....	<b>60</b>
<b>3.4</b> <b>MODELAGEM DINÂMICA PARA O SEGUNDO CASO</b> .....	<b>65</b>

<b>CAPÍTULO 4 - MODELAGEM DINÂMICA PARA O TERCEIRO CASO .....</b>	<b>68</b>
<b>4.1 EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS.....</b>	<b>70</b>
<b>CAPÍTULO 5 - ALGORITMOS GENÉRICOS .....</b>	<b>80</b>
<b>5.1 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O PRIMEIRO E SEGUNDO CASOS .....</b>	<b>81</b>
5.1.1 Algoritmo Genérico para a Matriz de Inércia.....	81
5.1.2 Algoritmo Genérico para as Matrizes de Coeficientes de Atrito e Constantes Elásticas .....	83
5.1.3 Algoritmo Genérico para o Vetor de Esforços Coriolis-centrífugos .....	85
5.1.4 Algoritmo Genérico para o Vetor de Esforços Gravitacionais .....	86
<b>5.2 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O TERCEIRO CASO .....</b>	<b>87</b>
<b>CAPÍTULO 6 - SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS.....</b>	<b>89</b>
<b>6.1 PRIMEIRA SITUAÇÃO – CARGA TERMINAL LIVRE.....</b>	<b>93</b>
<b>6.2 SEGUNDA SITUAÇÃO – CABO FIXO AO FUNDO DO OCEANO .....</b>	<b>102</b>
<b>6.3 TERCEIRA SITUAÇÃO – DUAS ESTRUTURAS FLUTUANTES.....</b>	<b>108</b>
<b>6.4 QUARTA SITUAÇÃO – FORÇAS APLICADAS NA CARGA TERMINAL SEM</b> <b>VÍNCULOS .....</b>	<b>114</b>
<b>6.5 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES.....</b>	<b>119</b>
<b>CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES.....</b>	<b>121</b>
<b>CAPÍTULO 8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>127</b>
<b>APÊNDICE A - Elementos das matrizes e vetores para o cabo dividido em dois, três e</b> <b>quatro elos no primeiro caso, e cinco elos no terceiro caso .....</b>	<b>132</b>
<b>APÊNDICE A.1 - CABO DIVIDIDO EM DOIS ELOS PARA O PRIMEIRO CASO .....</b>	<b>133</b>
<b>APÊNDICE A.2 - CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS PARA O PRIMEIRO CASO.....</b>	<b>136</b>
<b>APÊNDICE A.3 - CABO DIVIDIDO EM QUATRO ELOS PARA O PRIMEIRO CASO .....</b>	<b>139</b>
<b>APÊNDICE A.4 - CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS PARA O TERCEIRO CASO .....</b>	<b>144</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_c$	altura de referência para a definição da energia potencial da carga terminal
$a_i, i = 1, \dots, n$	alturas de referência para a definição da energia potencial de cada elo
$C$	matriz de coeficientes de atrito
$c_i, i = 1, 2, \dots, n$	coeficientes de atrito de cada articulação
$C_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, 5$	componentes da matriz de coeficientes de atrito
$c_m, c_{m_1}$	coeficiente de atrito da primeira estrutura flutuante
$c_{m_{2H}}$	coeficiente de atrito horizontal da carga terminal ou segunda estrutura flutuante
$c_{m_{2V}}$	coeficiente de atrito vertical da carga terminal ou segunda estrutura flutuante
$c_v$	coeficiente de arrasto hidrodinâmico
$E_C$	energia cinética
$E_{C_R}$	energia cinética devida ao movimento de rotação
$E_{C_T}$	energia cinética devida ao movimento de translação
$E_P$	energia potencial
$E_y$	Módulo de Young (elasticidade do cabo)
$\vec{F}, \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$	vetor de esforços não lineares do tipo Coriolis-centrífugos
$\vec{F}_c$	força externa resultante que atua na carga terminal

$\vec{F}_{c_i}, i = 1, 2, \dots, 5$	tensão originada em cada elo devida à força externa na carga terminal
$\vec{F}_{c_x}$	componente horizontal da força externa resultante que atua na carga terminal ou segunda estrutura flutuante
$\vec{F}_{c_y}$	componente vertical da força externa resultante que atua na carga terminal ou segunda estrutura flutuante
$f_i, i = 1, 2, \dots, 5$	componentes do vetor Coriolis-centrífugo
$\vec{F}_{m_{2H}}$	vínculo elástico horizontal na segunda estrutura flutuante
$\vec{F}_{m_{2V}}$	vínculo elástico vertical na segunda estrutura flutuante
$\vec{F}_{R_2}$	força resultante que atua na segunda estrutura flutuante
$\vec{G}, \vec{G}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$	vetor de esforços gravitacionais
$g$	aceleração gravitacional
$g_i, i = 1, 2, \dots, 5$	componentes do vetor gravitacional
$h_c$	altura com relação ao nível de mínima energia da carga terminal
$h_i, i = 1, \dots, n$	alturas com relação aos níveis de mínima energia de cada elo
$I, I(\vec{x})$	matriz de inércia
$\vec{i}$	vetor unitário na direção horizontal
$I_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, 5$	componentes da matriz de inércia
$I_{R_c}$	momento de inércia rotacional da carga terminal
$I_{R_i}, i = 1, 2, \dots, n$	momentos de inércia rotacionais em cada articulação
$I_{sec}$	momento de inércia da seção reta
$I_{T_i}, i = 1, 2, \dots, n$	momentos de inércia de torção em cada articulação
$\vec{j}$	vetor unitário na direção vertical

$K$	matriz de constantes elásticas
$\vec{k}$	vetor unitário na direção perpendicular às direções horizontal e vertical
$k_i, i = 1, 2, \dots, n$	constantes elásticas de cada articulação
$K_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, 5$	componentes da matriz de constantes elásticas
$k_m, k_{m_1}$	constante elástica da primeira estrutura flutuante
$k_{m_{2H}}$	constante elástica horizontal da carga terminal ou segunda estrutura flutuante
$k_{m_{2V}}$	constante elástica vertical da carga terminal ou segunda estrutura flutuante
$L$	Lagrangeano do sistema
$l$	comprimento total do cabo
$L_i, i = 1, 2, 3, 4$	componentes do Lagrangeano do sistema
$l_i, i = 1, \dots, n$	comprimento de cada elo
$M, M_1$	massa da primeira estrutura flutuante
$M_2$	massa da segunda estrutura flutuante
$m_c$	massa da carga terminal
$m_e$	massa específica do cabo
$m_{e_a}$	massa específica da água
$m_i, i = 1, \dots, n$	massa de cada elo
$n$	número de elos
$\vec{r}_{0,i}, i = 1, 2, \dots, 5$	vetor distância entre a origem e cada articulação
$\vec{r}_{0,m}$	vetor distância entre a origem e a carga terminal
$r_i, i = 1, 2, \dots, n$	raio de cada elo
$\vec{r}_{i,j}; i = 2, \dots, 5; j = 1, \dots, 4; i > j$	vetor distância entre duas articulações consecutivas
$\vec{r}_{m,5}$	vetor distância entre a carga terminal e a quinta articulação

$\vec{T}$	vetor de esforços externos
$t$	tempo
$T_e(1)$	representação algorítmica da força externa aplicada na primeira estrutura flutuante
$T_i, i = 1, 2, \dots, 6$	componentes do vetor de esforços externos
$\vec{u}_5$	vetor unitário na direção do quinto elo
$u(t), u_{m_1}(t)$	força externa aplicada na primeira estrutura flutuante
$u_{m_2}(t)$	força externa aplicada na segunda estrutura flutuante
$\vec{x}$	vetor de posições
$X_0Y_0$	sistema referencial inercial
$x_c$	posição do centro de massa da carga terminal na direção horizontal
$x_i, i = 1, \dots, n$	posição do centro de massa de cada elo na direção horizontal
$X_iY_i, i = 1, \dots, n$	sistemas referenciais móveis para cada articulação
$x_{m_2}$	posição do centro de massa da segunda estrutura flutuante na direção horizontal
$y_c$	posição do centro de massa da carga terminal na direção vertical
$y_i, i = 1, \dots, n$	posição do centro de massa de cada elo na direção vertical
$y_m, y_{m_1}$	posição do centro de massa da primeira estrutura flutuante na direção vertical
$y_{m_2}$	posição do centro de massa da segunda estrutura flutuante na direção vertical

## LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\alpha$	ângulo entre a direção do quinto elo e a força externa na carga terminal
$\beta$	parâmetro definido para o algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo
$c\alpha$	cosseno do ângulo $\alpha$
$\theta_i, i = 1, \dots, n$	ângulos de elevação de cada elo
$\dot{\theta}_i, i = 1, \dots, n$	derivadas das posições angulares de elevação de cada elo em relação ao tempo
$\tau_i, \vec{\tau}_i; i = 1, 2, \dots, n$	torques em cada articulação originados pela força resultante aplicada na carga terminal
$\tau_{m_i}, i = 1, 2, \dots, 5$	torques externos atuantes nas articulações
$\dot{\vec{x}}$	vetor de velocidades
$\ddot{\vec{x}}$	vetor de acelerações
$\dot{x}_c$	velocidade do centro de massa da carga terminal na direção horizontal
$\dot{x}_i, i = 1, \dots, n$	velocidades dos centros de massa de cada elo na direção horizontal
$\dot{y}_c$	velocidade do centro de massa da carga terminal na direção vertical
$\dot{y}_i, i = 1, \dots, n$	velocidades dos centros de massa de cada elo na direção vertical
$\dot{y}_m, \dot{y}_{m_1}$	velocidade do centro de massa da primeira estrutura flutuante na direção vertical
$(x_c, y_c)$	coordenadas do centro de massa da carga terminal

$(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  coordenadas do centro de massa de cada elo

$\frac{\partial L}{\partial y_m}, \frac{\partial L}{\partial y_{m_1}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_m}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{m_1}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}; i = 1, 2, \dots, n$  derivadas parciais do Lagrangeano

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_m} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{m_1}} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right); i = 1, 2, \dots, n$  derivadas totais em relação ao tempo

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

DOP	Decomposição Ortogonal Própria
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFD	Método da Formulação Discreta
ROV	Remotely Operated Vehicle
SPF	Sistemas de Produção Flutuantes

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Plataformas petrolíferas.....	12
Figura 2.1	Representação esquemática do cabo umbilical para o primeiro caso.....	33
Figura 2.2	Representação esquemática do cabo umbilical para o segundo caso.....	33
Figura 2.3	Representação esquemática do cabo umbilical para o terceiro caso.....	34
Figura 2.4	Estrutura flexível e sua representação discreta.....	35
Figura 2.5	Representação esquemática dos sistemas de referência em cada articulação fictícia.....	38
Figura 2.6	Representação esquemática do cabo umbilical para a definição da energia potencial gravitacional no primeiro caso.....	41
Figura 2.7	Exemplo de um cabo umbilical dividido em três elos para o segundo caso.....	45
Figura 2.8	Representação esquemática geral do cabo umbilical com uma força externa atuando na carga terminal.....	46
Figura 2.9	Representação esquemática do cabo umbilical com os vínculos elásticos para a situação particular do terceiro caso.....	47
Figura 2.10	Exemplo de um cabo umbilical dividido em três elos para a situação particular do terceiro caso.....	48
Figura 3.1	Representação esquemática para o cabo dividido em dois elos para o primeiro caso.....	51
Figura 3.2	Representação esquemática para o cabo dividido em três elos para o primeiro caso.....	55
Figura 3.3	Representação esquemática para o cabo dividido em quatro elos para o primeiro caso.....	60
Figura 3.4	Representação esquemática para o cabo dividido em dois elos para o segundo caso.....	66
Figura 3.5	Representação esquemática para o cabo dividido em três elos para o segundo caso.....	66
Figura 3.6	Representação esquemática para o cabo dividido em quatro elos para o segundo caso.....	67
Figura 4.1	Representação esquemática geral para o cabo dividido em cinco elos para o terceiro caso.....	70
Figura 4.2	Representação esquemática dos vetores que definem a distância entre a carga terminal e a quinta articulação.....	71
Figura 4.3	Representação esquemática da projeção do vetor tensão no quinto elo na direção do quarto elo.....	75
Figura 6.1	Ângulos de elevação, considerando-se 12 elos, cabo submerso e em queda livre.....	92
Figura 6.2	Posição do centro de massa da carga terminal, 12 elos, cabo submerso e em queda livre.....	92
Figura 6.3	Primeira simulação da primeira situação: 12 elos; cabo fora d'água; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.....	95
Figura 6.4	Segunda simulação da primeira situação: 12 elos; cabo submerso; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.....	96
Figura 6.5	Terceira simulação da primeira situação: 60 elos; cabo fora d'água; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.....	98

Figura 6.6	Quarta simulação da primeira situação: 60 elos; cabo submerso; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.....	99
Figura 6.7	Quinta simulação da primeira situação: 60 elos; cabo fora d'água; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial; força senoidal aplicada à estrutura flutuante.....	100
Figura 6.8	Sexta simulação da primeira situação: 60 elos; cabo submerso; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial; força senoidal aplicada à estrutura flutuante.....	101
Figura 6.9	Primeira simulação da segunda situação: 60 elos; considera-se a massa da carga terminal do cabo muito grande (cabo fixo ao fundo do oceano).....	104
Figura 6.10	Segunda simulação da segunda situação: 60 elos; consideram-se forças de vínculo prendendo a carga terminal do cabo ao fundo do oceano.....	105
Figura 6.11	Terceira simulação da segunda situação: 110 elos; considera-se a massa da carga terminal do cabo muito grande (cabo fixo ao fundo do oceano).....	107
Figura 6.12	Primeira simulação da terceira situação: força externa aplicada apenas na primeira estrutura flutuante; vínculo restritivo na direção horizontal para a segunda estrutura flutuante.....	110
Figura 6.13	Segunda simulação da terceira situação: forças externas aplicadas nas duas estruturas flutuantes; vínculo restritivo na direção horizontal para a segunda estrutura flutuante.....	112
Figura 6.14	Terceira simulação da terceira situação: força externa aplicada apenas na primeira estrutura flutuante; sem o vínculo restritivo na direção horizontal para a segunda estrutura flutuante....	113
Figura 6.15	Primeira simulação da quarta situação: força externa apenas na direção horizontal.....	116
Figura 6.16	Segunda simulação da quarta situação: forças externas nas direções horizontal e vertical.....	117
Figura 6.17	Terceira simulação da quarta situação: força externa na direção vertical e queda livre após 15,5 segundos.....	118

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1	Parâmetros físicos gerais adotados para os modelos dinâmicos.....	91
Tabela 6.2	Parâmetros adotados para as simulações da primeira situação.....	94
Tabela 6.3	Parâmetros adotados para as simulações da segunda situação.....	103
Tabela 6.4	Parâmetros adotados para as simulações da terceira situação.....	109
Tabela 6.5	Parâmetros adotados para as simulações da quarta situação.....	115
Tabela 6.6	Tempos computacionais gastos para cada simulação teste do primeiro caso.....	120

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

## 1.1 MODELAGEM DINÂMICA DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO

Existem muitos trabalhos na literatura que tratam a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo e diversas de suas aplicações, como por exemplo, Sistemas de Produção Flutuantes (SPF), como mostra a figura 1.1. Esses sistemas são constituídos por plataformas de produção, navios convertidos para a mesma finalidade e seus subsistemas, tais como *risers* de produção flexíveis, cabos de ancoragem, entre outros.



Figura 1.1 – Plataformas petrolíferas. Fonte: <http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas>.

No meio oceânico no qual estes cabos estão inseridos existem interações complexas, além das não linearidades presentes e da flexibilidade da estrutura. Por isso, obter o modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo torna-se um problema bastante complexo. Muitas contribuições disponíveis na literatura abordam a modelagem destas estruturas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste em um método numérico aproximado para analisar fenômenos físicos presentes em meios contínuos.

A presente dissertação propõe a utilização de uma técnica de modelagem conhecida como Formalismo Discreto, ou *Lumped Mass Approach* na língua inglesa, utilizado com o Formalismo de Euler-Lagrange. Este formalismo foi desenvolvido por (PEREIRA [23]) para a modelagem dinâmica matemática de estruturas flexíveis do tipo cabo. Seu fundamento principal é supor o cabo formado por diversas partes rígidas, chamadas de elos, que por sua vez são conectadas por articulações elásticas fictícias. Cada articulação permite três movimentos distintos no espaço tridimensional. Para a presente dissertação, será utilizada uma aproximação plana para a dinâmica das estruturas flexíveis do tipo cabo. Porém, há um acréscimo de complexidade em razão da base flutuante na qual se encontra acoplado o cabo não ser mais fixa, podendo se movimentar na direção vertical. Serão considerados ainda os casos nos quais a massa da outra extremidade do cabo pode ser outra estrutura flutuante ou uma estrutura livre deslocando-se no meio subaquático. Será estudado também o caso em que a extremidade final do cabo está articulada ao fundo do oceano. O interesse em estudar esses casos se deve em razão de muitas aplicações subaquáticas admitirem aproximações planas com o acréscimo da complexidade explicado anteriormente, como algumas das estruturas presentes na figura 1.1.

Com a formulação de modelagem dinâmica citada anteriormente é possível determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elos que se escolha para dividir a estrutura do tipo cabo. Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a todos os graus de liberdade do sistema, é possível obter o seu modelo dinâmico. No entanto, devido à complexidade e extensão das equações obtidas desta forma, torna-se muito difícil o desenvolvimento manual destes modelos dinâmicos, sendo, portanto, fundamental o desenvolvimento de algoritmos genéricos, que possibilitem a obtenção das equações diferenciais da dinâmica para qualquer número de elos rígidos escolhidos para representar a flexibilidade contínua.

As principais contribuições deste trabalho consistem em desenvolver algoritmos genéricos, capazes de gerar o modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo de forma automática, para qualquer número de graus de liberdade, considerando-se o acréscimo de complexidade citado anteriormente (base móvel). Para isto, conforme será visto posteriormente, consideram-se três casos distintos para a forma como o cabo é inserido no meio oceânico.

Foi feita uma análise detalhada de como ocorre o crescimento das matrizes e vetores oriundos das equações geradas na modelagem do cabo, a partir da ideia de que o comportamento da natureza segue padrões lógicos de crescimento que podem ser identificados. Para tal, foram obtidas as equações para o modelo dinâmico do cabo dividido em dois, três e quatro elos para o primeiro caso, entendendo que os outros dois casos são situações particulares do primeiro, do ponto de vista de sua modelagem dinâmica, conforme será explicado nos próximos capítulos.

Uma vez estudado o crescimento destas matrizes e vetores associados à modelagem do cabo, foi possível obter equações gerais, que permitem desenvolver algoritmos genéricos para a determinação automática do modelo dinâmico do mesmo, para qualquer número de elos escolhido para representar a flexibilidade contínua da estrutura.

A escolha do Formalismo Discreto deu-se pela simplicidade matemática de não se trabalhar com equações diferenciais parciais, condições de contorno ou variáveis fisicamente não mensuráveis, em comparação com outras técnicas de modelagem. No entanto, as equações obtidas são muito extensas. A partir dos algoritmos genéricos obtidos, não há problemas de desempenho do sistema computacional na geração automática dos modelos dinâmicos. Porém, as simulações têm um tempo de processamento crescente com o aumento do número de elos.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 Objetivos Gerais**

A presente dissertação possui como objetivo geral o desenvolvimento de algoritmos genéricos, a partir da obtenção de equações gerais, que permitam gerar de forma automática o

modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo acoplado a plataformas móveis, de acordo com a quantidade de elos nos quais se deseja fazer a divisão das mesmas.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Em um primeiro momento, realizar pesquisas na literatura a respeito de trabalhos e contribuições que abordem técnicas distintas de modelagem dinâmica para estruturas flexíveis do tipo cabo, tais como o Método dos Elementos Finitos e o Método da Formulação Discreta (MFD); ainda, investigar acerca da formulação analítica segundo as teorias de Euler e Bernoulli, e também da aproximação discreta pelo Método das Diferenças Finitas (MDF).

Obter os modelos dinâmicos para estruturas do tipo cabo, em três casos distintos: o primeiro caso, considerando o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades, e livre na outra; o segundo caso, considerando uma das extremidades articulada a uma estrutura flutuante e a outra extremidade fixa ao fundo do oceano; e o terceiro caso, considerando o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e articulado a outra estrutura flutuante na outra extremidade.

Analisar a lógica de crescimento presente nas matrizes e vetores dos modelos obtidos para o cabo dividido em dois, três e quatro elos, com a finalidade de obter equações gerais que permitam desenvolver algoritmos genéricos capazes de gerar de forma automática o modelo do cabo para um número  $n$  qualquer de elos.

Realizar simulações numéricas computacionais, para verificar qualitativamente os resultados obtidos.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é apresentado um resumo de trabalhos consultados ao longo da elaboração desta dissertação, os quais contribuíram de alguma forma para o seu desenvolvimento.

Particularmente, os trabalhos de (PEREIRA [22], [23]) foram os primeiros a abordar a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo utilizando o Formalismo Discreto. Neste estudo, o cabo foi dividido em partes rígidas, chamadas de elos, conectadas por articulações elásticas fictícias, utilizando o Formalismo de Euler-Lagrange. Porém, este estudo limitou-se a um cabo dividido em no máximo quatro elos, com as equações do seu modelo dinâmico obtidas de forma analítica.

De forma complementar, (ZANELA [31]) foi o primeiro trabalho a generalizar algoritmos considerando um número qualquer de elos no qual a estrutura do tipo cabo pode ser dividida, igualmente a partir do Formalismo Discreto. Também de forma analítica, foram obtidas as equações para o modelo dinâmico do cabo, observando-se padrões de crescimento lógicos nas mesmas, à medida que o número de elos no qual a divisão era feita aumentava. A observação destes padrões de crescimento permitiu desenvolver os algoritmos citados.

No entanto, nenhuma destas duas contribuições considerou o cabo acoplado a uma estrutura móvel, sendo a primeira extremidade do mesmo acoplada a uma estrutura fixa. A presente dissertação baseou-se principalmente nestes trabalhos, adicionando a complexidade devida ao acoplamento do cabo a uma ou duas estruturas móveis nas suas extremidades.

A seguir são explicitados alguns comentários sobre algumas referências estudadas, abrangendo outras formas para a modelagem de estruturas flexíveis do tipo cabo:

- **M. A. Grosenbaugh; C. T. Howell; S. Moxnes (1993)**

*Simulating the Dynamics of Underwater Vehicles with Low-tension Tethers.*

Este artigo apresenta uma técnica numérica para calcular os movimentos bidimensionais de um veículo subaquático acoplado a um cabo. São apresentadas simulações da dinâmica de cabos que estão sob a ação de baixas tensões. Isto é possível devido à

incorporação da rigidez de flexão nas equações do cabo, assim removendo as singularidades que ocorrem quando a tensão do cabo se torna nula. O artigo apresenta também resultados numéricos para diversas manobras do veículo acoplado.

- **M. A. Vaz; M. H. Patel (1995)**

*Transient Behaviour of Towed Marine Cables in Two Dimensions.*

Este artigo apresenta uma solução numérica para o movimento transitório de cabos marinhos sendo rebocados de um navio com velocidade variável. O navio move-se de forma retilínea, tornando a dinâmica do cabo bidimensional. A metodologia consiste em dividir o cabo em  $n$  elementos, com as equações de equilíbrio e as compatibilidades geométricas satisfeitas em cada um dos mesmos. É montado um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias não lineares, solucionado pelo método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens, com a tensão axial calculada iterativamente, pois depende da solução. Os resultados são apresentados para as tensões no cabo e os ângulos de cada elemento são funções do tempo, para geometrias transitórias do cabo quando a velocidade de reboque é linear ou varia parabolicamente.

- **A. E. L. Pereira (1999)**

*Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis.*

Nesta dissertação foi desenvolvida e validada a técnica do Formalismo Discreto. Esta consiste em um estudo da modelagem dinâmica de uma estrutura flexível no plano, sendo a mesma articulada em uma extremidade e livre na outra. Neste formalismo, a estrutura foi dividida em duas, três e quatro partes rígidas, conectadas por articulações elásticas, permitindo apenas o movimento no espaço bidimensional.

- **M. Nahon (1999)**

*Dynamics and Control of a Novel Radio Telescope Antenna.*

Este artigo apresenta um modelo matemático e computacional para um aeróstato, para suportar um receptor em uma enorme antena telescópica de rádio. O modelo dinâmico

considera o sistema como um conjunto de três ou mais correntes, fixas em pontos na Terra, que se unem em um ponto de junção, onde o receptor é localizado. Também acoplado no ponto de junção está uma correia presa no aeróstato em sua parte mais alta. O aeróstato providencia a força de elevação necessária para manter o sistema em cima, no alto. Nos pontos de fixação a Terra, guinchos mantêm as correntes no ponto de junção desejado. Para investigar o desempenho do sistema, as correntes e correia foram discretizadas em um dado número de elementos, utilizando o Formalismo Discreto. Os efeitos da rigidez do cabo, amortecimento interno, gravidade e arrasto aerodinâmico, assim como ventos e turbulências, foram inclusos no modelo. Um controlador foi então desenvolvido para controlar os comprimentos das correntes, respondendo aos erros de posição do receptor para uma posição desejada. O sistema completo foi formulado e resolvido numericamente.

- **J. I. Gobat; M. A. Grosenbaugh (2001)**

*Application of the Generalized- $\alpha$  Method to the Time Integration of the Cable Dynamics Equations.*

Neste artigo, para o estudo da dinâmica de um cabo, são analisados os problemas na integração temporal, definida pelo Método das Diferenças Finitas. É proposto um novo procedimento que mantém a discretização espacial do mesmo, empregando o Método Generalizado- $\alpha$  para a discretização temporal. São analisadas a estabilidade e precisão deste método, considerando-se as equações da dinâmica do cabo. Este procedimento de análise mostra a formulação das equações governantes semi discretizadas, utilizando diferenças finitas espaciais, e a aplicabilidade de analisar a matriz ampliada de estabilidade em problemas de diferenças finitas. Um exemplo é apresentado, demonstrando a robustez do método.

- **C. C. Machado; A. E. L. Pereira; S. C. P. Gomes; A. L. de Bortoli (2002)**

*Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis.*

Neste artigo, foi proposto um novo algoritmo para determinar de forma simplificada as equações diferenciais da dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador com um único elo flexível. Foram desenvolvidas funções de transferência analíticas para este problema específico, as quais são importantes para a validação do modelo discreto proposto na forma de

um algoritmo. Este algoritmo foi desenvolvido para qualquer que seja o número de modos flexíveis considerados, além de introduzir modificações em relação ao Formalismo Discreto original, aumentando a precisão do modelo discreto. Ainda, é apresentado um estudo analítico, o qual foi de fundamental importância à validação do modelo discreto estudado.

- **W. Zhao; L. Chen; J. W. Zu (2005)**

*A Finite Difference Method for Simulating Transverse Vibrations of an Axially Moving Viscoelastic String.*

O Método das Diferenças Finitas é proposto para simular vibrações transversais em uma corda axial móvel. A partir da discretização da equação governante e da equação da relação tensão-fadiga em diferentes nós, sistemas de duas equações são obtidos. As duas discretizações por diferenças finitas podem ser feitas alternadamente, aumentando a eficiência computacional. O método numérico facilita o trabalho com o modelo não linear, apresentando boa estabilidade para valores iniciais pequenos. São apresentados exemplos numéricos para mostrar a eficiência e a estabilidade do algoritmo, e é feita uma análise dinâmica da corda visco elástica a partir dos resultados numéricos obtidos.

- **L. R. dos Santos (2007)**

*Modelagem Não Linear da Dinâmica de Cabos Submarinos.*

Esta tese baseia-se na teoria do contínuo introduzida por Cosserat para descrever a dinâmica de estruturas unidimensionais flexíveis como os cabos marinhos. No modelo mecânico utilizado, a estrutura é descrita por um mapeamento definido pela posição espacial dos pontos materiais pertencentes a uma curva, definida como a linha dos centróides do corpo. Para resolver a equação de evolução no tempo da estrutura, que é não linear, é utilizado um código numérico que tem como principal característica a preservação das constantes fundamentais do movimento. A fim de apresentar a técnica utilizada para a análise dinâmica destas estruturas, são apresentadas algumas simulações de cabos que, partindo de uma configuração inicial de equilíbrio, passam a ser excitados pelo movimento da plataforma e pelo perfil de corrente marinha, com o intuito de verificar a estabilidade e precisão numérica do algoritmo.

- **A. Guo; Y. Xu; H. Li (2007)**

*Dynamic Performance of Cable-stayed Bridge Tower with Multi-stage Pendulum Mass Damper Under Wind Excitations – I: Theory.*

Neste artigo é investigado o controle de vibrações induzidas pelo vento em uma coluna de uma ponte suspensa, a partir de um pêndulo multifásico de amortecimento. Primeiro, o modelo a partir do Método dos Elementos Finitos da ponte durante a sua construção e a equação do movimento do pêndulo são introduzidos. A equação do movimento da ponte com o pêndulo sob a excitação pelo vento é estabelecida. Finalmente, uma simulação numérica e estudos paramétricos são conduzidos para analisar a efetividade do sistema de controle, com a finalidade de reduzir a vibração induzida pelo vento nas colunas da ponte durante a sua construção. Os resultados da simulação numérica mostraram que o pêndulo é prático e efetivo para reduzir estas vibrações e pode ser instalado em uma pequena área da coluna, obedecendo às mesmas características de variação no tempo da ponte, durante todo o período de construção da mesma.

- **A. Luongo; D. Zulli; G. Piccardo (2008)**

*Analytical and Numerical Approaches to Nonlinear Galloping of Internally Resonant Suspended Cables.*

Este trabalho estuda cabos suspensos sujeitos a ressonâncias crescentes. Um modelo de viga curva geometricamente não linear e passível de girar é utilizado para esta abordagem, considerando forças aerodinâmicas, incluindo o efeito do balanço estático e torção dinâmica da seção transversal. São aplicados métodos de solução, como diferenças finitas e a discretização espacial de Galerkin, seguidos pela integração numérica no tempo e discretização espacial de Galerkin em conjunto com a análise de perturbações em múltiplas escalas. Ao fim, resultados qualitativos e quantitativos são comparados entre si.

- **S. Chang; J. Park; K. Lee (2008)**

*Nonlinear Dynamic Analysis of Spatially Suspended Elastic Catenary Cable with Finite Element Method.*

Este trabalho investiga o comportamento dinâmico de um cabo, considerando as não linearidades geométricas devidas ao efeito de flacidez, baseando-se na teoria do cabo catenário elástico. Equações para as condições de compatibilidade de um cabo catenário são obtidas, sob a ação de múltiplos carregamentos concentrados sobre um único elemento. O peso próprio e outros tipos de carregamento distribuído impostos sobre um elemento são discretizados com carregamentos concentrados. As forças internas são avaliadas diretamente a partir das equações de compatibilidade e da matriz de flexibilidade. A verificação é feita a partir de um experimento, testando a vibração livre de um cabo de suspensão, e o comportamento dinâmico do mesmo é comparado com o elemento de viga do *software* ABAQUS, onde excitações tridimensionais de suporte são impostas.

- **K. Chatjigeorgiou; S. A. Mavrakos (2010)**

*The 3D Nonlinear Dynamics of Catenary Slender Structures for Marine Applications.*

Este artigo trata da modelagem dinâmica não linear de estruturas marinhas, em especial *risers*. Eles são instalados verticalmente ou são dispostos de forma a obter uma configuração catenária. Em grandes profundidades onde o comprimento suspenso da catenária pode chegar a alguns quilômetros, a rigidez elástica equivalente da estrutura será pequena, permitindo grandes deslocamentos. Tem sido reconhecido geralmente que o movimento devido a suspiros é a pior condição de carregamento, pois causa diversos efeitos que, dependendo das propriedades da excitação, podem ser aplicados individualmente ou combinados entre um e outro. Logo, o trabalho preocupa-se em identificar os detalhes da resposta do sistema de fora do plano no qual a catenária é contida, devida a movimentos impostos no plano de referência da mesma e em particular à excitação por suspiros. Aparentemente, o fenômeno associado somente pode ser capturado numericamente tratando o sistema dinâmico governante em três dimensões. Com este fim, o sistema associado é elaborado propriamente e solucionado numericamente utilizando uma técnica de diferenças finitas.

- **Y. Seo; U. Jeong; J. Cho (2010)**

*Simplified Finite Element Dynamic Analysis of Cable-supported Structures Subjected to Seismic Motions.*

Este artigo apresenta uma análise dinâmica simplificada de uma ponte suspensa por cabos, sujeita a movimentos da Terra, representando eventos sísmicos. O modelo a partir da técnica dos elementos finitos desenvolvido satisfaz as condições que o projeto necessita para o equilíbrio inicial de uma ponte suspensa. A geometria e os materiais são assumidos lineares e elásticos, respectivamente. Um comportamento fundamental de vibrações de um cabo suspenso foi verificado com uma solução exata, e o enrijecimento viga-pilar modelado com três elementos tridimensionais foi validado tanto com análises de vibração livres quanto com vibrações forçadas. Para simular um evento sísmico, uma força horizontal na terra foi aplicada nas direções longitudinal e transversal de um sistema cabo-viga-pilar, com a análise da resposta espectral do sistema. Um modelo por elementos finitos no local estudado foi desenvolvido, e as suas respostas dinâmicas foram simuladas, sob a ação de movimentos virtuais da Terra, com diagramas de força visualizados por um programa de pós-processamento.

- **A. Omurtag; W. W. Lytton (2010)**

*Spectral Method and High-order Finite Differences for the Nonlinear Cable Equation.*

Este trabalho utiliza aproximações de alta ordem para as derivadas espaciais na equação do cabo não linear e investiga o comportamento dos erros presentes nas soluções numéricas a partir do uso de soluções exatas disponíveis. São mostradas comparações com soluções exatas em um cabo não ramificado, a convergência de soluções com refinamento progressivo da malha de diferenças finitas e uma simulação de um modelo biofísico aplicado a uma rede neural.

- **A. E. L. Pereira (2010)**

*O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo.*

Nesta tese investiga-se a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, a partir do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Para a dinâmica do cabo foi criado um novo formalismo para a obtenção das equações de movimento de cabos umbilicais, chamado Método do Formalismo Discreto, que tem como base o formalismo de Euler-Lagrange. A base deste novo formalismo é considerar o cabo dividido em  $n$  partes rígidas, conectadas por articulações elásticas fictícias, permitindo movimentos no espaço tridimensional, com a extremidade superior na origem do sistema de referência e uma massa presa na extremidade inferior do cabo. Para o movimento do fluido foi proposto o escoamento sobre um cilindro circular, onde as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes são resolvidas utilizando-se o Método da Decomposição de Adomian.

- **F. J. Sun; Z. H. Zhu; M. LaRosa (2010)**

*Dynamic Modeling of Cable Towed Body Using Nodal Position Finite Element Method.*

Este artigo trata da dinâmica não linear de sistemas de cabos de reboque. A modelagem do cabo foi feita através do Método dos Elementos Finitos, com uma nova posição nodal, calculando diretamente a posição do cabo, em vez do deslocamento do mesmo, pelo método existente. A modelagem do corpo rebocado é feita a partir do corpo rígido com seis graus de liberdade. O acoplamento do cabo com o corpo rebocado é feito posteriormente, enquanto que a dinâmica do navio rebocador é tratada externamente ao sistema. A análise numérica dos resultados demonstrou robustez, em comparação com a metodologia pré-existente.

- **G. R. di Marzo (2010)**

*Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais.*

Esta dissertação aplica metodologias de análises de tensões induzidas em cabos de sinal de cabos umbilicais, utilizando o Método dos Elementos Finitos. O autor avalia as tensões induzidas em condutores de sinal, acoplando mutuamente o fluxo magnético originado das correntes dos circuitos de potência do cabo umbilical. A metodologia utilizada é a partir das técnicas de fatiamento e transposição para a geometria do cabo, em paralelo ao acoplamento com o circuito elétrico. As simulações são feitas para situações bidimensionais e tridimensionais.

- **E. B. Antunes (2010)**

*Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis - Cabos e Placas.*

Esta dissertação trata da modelagem de sistemas dinâmicos, partindo da chamada formulação forte e passando pelo conceito da formulação variacional. Apresenta ainda outra abordagem, que trabalha com aproximações por discretização de sistemas contínuos, especialmente pelos métodos dos resíduos ponderados. Ao fim, compara as duas formas de modelagem.

- **V. K. Srivastava; S. Yvss; M. Tamsir (2011)**

*Dynamic Behavior of Underwater Towed-cable in Linear Profile.*

Neste trabalho, uma aproximação numérica é apresentada com a capacidade de predição do comportamento dinâmico de estruturas do tipo cabo de reboque subaquático, quando o navio rebocador altera a sua velocidade em uma direção fixa, mantendo um perfil linear. Um modelo tridimensional de sistemas de reboque subaquáticos é estudado. As equações governantes do sistema são solucionadas utilizando-se o Método das Diferenças Finitas. A solução em diferenças finitas das equações algébricas não lineares é obtida a partir do Método de Newton. Como o modelo de cabo subaquático rebocado utiliza uma integração implícita no tempo, é estável para grandes passos de tempo e é um algoritmo efetivo para simulações de grande escala.

- **C. A. M. Nascimento (2011)**

*Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica.*

Esta monografia apresenta a modelagem pelo Método dos Elementos Finitos de um cabo de transmissão de energia. Utilizando o *software* ANSYS para realizar as simulações, o modelo busca retratar os cabos utilizados na bancada de ensaios de cabos do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia da Universidade de Brasília. A metodologia consiste em realizar simulações para os casos de um cabo ou uma viga bi apoiada, sob a ação de uma força externa em diferentes pontos e o caso de um cabo sob a ação de tensões, para encontrar as respostas dinâmicas do sistema e suas frequências naturais.

- **M. R. Escalante; R. Sampaio; M. B. Rosales; T. Ritto (2011)**

*A Reduced Order Model of a 3D Cable Using Proper Orthogonal Decomposition.*

Neste trabalho, uma simulação a partir do método dos elementos finitos aplicado a cabos é utilizada para atingir um modelo de ordem reduzida pelo método da Decomposição Ortogonal Própria (DOP). O modelo adotado para o cabo utiliza-se de um elemento cúbico de torção com uma aproximação discreta, providenciando uma representação dos efeitos de flexão e torção. As equações não lineares do movimento para o cabo contínuo são desenvolvidas em função de um quadro inercial de referência, utilizando as Equações de Frenet. Os modos ortogonais próprios, em conjunto com o Método de Galerkin, permitem a construção de um modelo de menor dimensão que se mostrou eficiente em comparação com os construídos com a base típica de elementos finitos. Modos ortogonais próprios obtidos de séries temporais em diferentes frequências de excitação são utilizados, com diferentes aproximações comparadas.

- **M. D. Masciola; M. Nahon; F. R. Driscoll (2012)**

*Static Analysis of the Lumped Mass Cable Model using a Shooting Algorithm.*

Este artigo estuda um método de solução para a configuração estática em um sistema de um cabo discretizado. Tal método é utilizado prioritariamente para realizar simulações dinâmicas do cabo, sendo generalizado o suficiente para a maioria das configurações que o mesmo pode assumir. As forças agindo no cabo podem ser atribuídas à sua elasticidade, peso,

flutuância e hidrodinâmica. Para o problema tridimensional, as configurações iniciais do mesmo são obtidas resolvendo-se três equações, independentemente da sua solução discretizada. Esta análise também discute regiões e circunstâncias nas quais as falhas do método são encontradas.

- **Z. Fang; Q. He; B. Xiang; H. Xiao; K. He; Y. Du (2012)**

*A Finite Element Cable Model and Its Applications Based on the Cubic Spline Curve.*

Este artigo trata da deformação sofrida por cabos de reboque, utilizando o Método dos Elementos Finitos para aproximar a representação dos efeitos de torção e flexão sofridos pelos mesmos. A obtenção das equações do movimento parte de um método dos resíduos ponderados, posteriormente sendo utilizado o *software* MATLAB<sup>®</sup> para a validação dos resultados obtidos. Este modelo pode ser aplicado para uma análise dinâmica de cabos oceânicos, tais como cabos de reboque e cabos umbilicais para um ROV (*Remotely Operated Vehicle*).

- **A. Wolfschluckner; D. Jodin (2013)**

*Modelling Cable Dynamics Exemplified by Load Transposition of Insulator Strings in Overhead Lines.*

Este trabalho aborda diferentes aproximações para descrever o comportamento dinâmico de um cabo. Resultados conclusivos de simulações são embasados em modelos adequados do mesmo, tratado como um condutor. Modelos lineares e não lineares baseados na aproximação pelo Método dos Elementos Finitos são comparados com modelos analíticos e numéricos, baseados na equação de vibração da corda. Todos os modelos são implementados e validados. São mostrados alguns resultados e modelos classificativos. O trabalho também debate simulações da dinâmica do cabo em outros campos de aplicação, tais como engenharia estrutural e manuseio de materiais.

- **M. Bamdad (2013)**

*Analytical Dynamic Solution of a Flexible Cable-suspended Manipulator.*

Este artigo trata de manipuladores suspensos por cabos, utilizados em aplicações de grande escala. A análise dinâmica acoplada pode ser avaliada plenamente pelas interações entre os cabos, plataformas e atuadores. Além disso, a flexibilidade estrutural dos cabos se torna mais evidenciada em grandes manipuladores. Neste trabalho, uma solução analítica é proposta para o problema da vibração nos cabos. Uma solução ótima pode ser usada para a resposta dinâmica da flexibilidade, e o resultado é dado pela geração do torque ótimo, sujeito às limitações do atuador. Ao final, um algoritmo é proposto para simular e validar os resultados obtidos.

- **Y. Liu; Z. Qian; K. Xia (2013)**

*Mechanical Response of Transmission Lines Based on Sliding Cable Element.*

Este artigo trata as características de deslizamento de cabos, quando são conectados com outros fios em estruturas de redes de transmissão. A formulação de Lagrange e a curva catenária são utilizadas para considerar os coeficientes de rigidez. Como exemplos de verificação, foram utilizados cabos com dois e três vãos. Os resultados obtidos em simulações foram satisfatórios, especialmente se comparados com os existentes na literatura.

- **G. Bi; S. Zhu; J. Liu; X. Fang; L. Wang (2013)**

*Dynamic Simulation and Tension Compensation Research on Subsea Umbilical Cable Laying System.*

Este artigo analisa cabos umbilicais subaquáticos, a partir de estudos de tensão, utilizando o Método dos Elementos Finitos para corpos rígidos para discretizar e transformar o sistema em um acoplamento flexível e rígido. É apresentado o modelo matemático de cabos umbilicais subaquáticos, a partir da Equação de Lagrange de Segunda Ordem aplicada nas junções entre um elemento do cabo e o próximo. A modelagem dinâmica e as simulações são feitas através do *software* ADAMS. Os resultados mostraram que as perturbações originadas no cabo, sob a ação de ondas do mar, causam flutuações significativas nas tensões do mesmo. O controle compensativo de tensões evita tais flutuações.

- **E. B. Zanela (2013)**

*Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas.*

Esta dissertação utiliza o Método do Formalismo Discreto (*Lumped Mass Approach*) para a modelagem tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo, o mesmo método proposto por (PEREIRA [23]). Ele parte da suposição que o cabo é formado por pequenas partes rígidas, conectadas por articulações fictícias. Foram desenvolvidos algoritmos genéricos para gerar automaticamente os modelos dinâmicos dos cabos, a partir da obtenção analítica dos modelos para uma pequena quantidade de elos nos quais o cabo é dividido. Para validar os algoritmos obtidos, foi utilizado o *software* MATLAB®, mostrando resultados fisicamente esperados.

- **I. B. P. Rocha (2013)**

*Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados.*

Esta dissertação aborda a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos não tripulados do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*), incluindo a dinâmica do cabo umbilical. Para tal, é proposto um formalismo para acoplar as dinâmicas do cabo e do ROV, partindo do modelo cinemático do mesmo e tratando a flexibilidade contínua do cabo aproximada de forma discreta. Entretanto, não há generalização da dinâmica do cabo, que foi considerada com no máximo seis elos. Estes elos rígidos são conectados por articulações fictícias, permitindo movimentos elásticos de azimute, elevação e torção, tornando o ROV a carga terminal do cabo e este, por sua vez, possuindo dinâmica própria. As simulações realizadas posteriormente mostraram resultados fisicamente esperados.

- **P. Pathote (2014)**

*Efficient Mathematical Model for Prestressing Cables and Its Implementation in Computer Analysis.*

Este artigo apresenta uma nova técnica de modelagem matemática de cabos protendidos, utilizando a curva *b-spline*. Anteriormente, os cabos eram modelados com formas parabólicas, no entanto, o formato real do cabo nesta situação é o de uma curva suave.

A implementação deste novo método foi feita através da análise por elementos finitos, utilizando o elemento Lagrangeano de três nós unidimensionais para o cabo. Esta formulação utilizou fundamentos de cálculo vetorial, e as reações no cabo foram obtidas por análises nodais através do Método dos Elementos Finitos, considerando os efeitos de atrito e rigidez do cabo. Um *software* de elementos finitos foi desenvolvido incorporando estas características. Com isto, várias vigas de concreto protendido foram analisadas e validadas.

## 1.4 ROTEIRO DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em sete capítulos. O presente capítulo trata de uma introdução geral, trazendo explicações básicas sobre o assunto da pesquisa, bibliografias existentes na área, contribuições e objetivos a serem alcançados.

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos para o desenvolvimento do modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo, a partir da abordagem discreta e do formalismo de Euler-Lagrange.

O Capítulo 3 aborda a modelagem dinâmica para o primeiro e segundo casos; o primeiro consiste em uma das extremidades do cabo articulada a uma estrutura flutuante e a outra extremidade livre; o segundo consiste em uma das extremidades do cabo articulada a uma estrutura flutuante e a outra extremidade fixa ao fundo do oceano. O cabo é dividido em dois, três e quatro elos para estas análises.

O Capítulo 4 aborda a modelagem dinâmica para o terceiro caso, que consiste em uma das extremidades do cabo articulada a uma estrutura flutuante e a outra extremidade articulada a outra estrutura flutuante. São obtidos os torques originados em cada articulação fictícia e as tensões originadas em cada elo, devidas a esforços aplicados na carga terminal. O cabo é dividido em cinco elos para esta análise.

O Capítulo 5 trata das equações gerais para a formação dos elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico, para os três casos. Neste capítulo são desenvolvidos os

algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com um número  $n$  qualquer de elos no qual o cabo pode ser dividido.

O Capítulo 6 apresenta o resultado de simulações computacionais, utilizando-se o modelo gerado a partir dos algoritmos genéricos. As simulações são realizadas considerando-se cada um dos casos estudados nos capítulos anteriores.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões e considerações finais. Após, no Capítulo 8, são apresentadas as referências bibliográficas.

O Apêndice A, em suas subdivisões A.1, A.2 e A.3, apresenta, respectivamente, as equações dos elementos das matrizes e vetores para dois, três e quatro elos nos quais o cabo é dividido, considerando-se o primeiro caso estudado no Capítulo 3; em A.4, apresentam-se as equações adicionais dos elementos do vetor de esforços externos, a partir da determinação dos torques nas articulações, considerando-se o terceiro caso estudado no Capítulo 4.

## **CAPÍTULO 2**

### **ABORDAGEM DISCRETA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO**

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, será apresentada, a partir da formulação de Euler-Lagrange, a modelagem matemática para a dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo. Será explicado como é a abordagem discreta para este tipo de estrutura.

As equações da dinâmica são obtidas a partir desta abordagem, que consiste na divisão do cabo, enquanto estrutura contínua, em partes rígidas, que são chamadas de elos. Estes elos são conectados por elementos flexíveis, chamados de articulações elásticas fictícias (PEREIRA [23]).

## 2.2 FORMALISMO DISCRETO

Considera-se um cabo umbilical conforme ilustrado nas figuras 2.1, 2.2 e 2.3. Esta dissertação trata de três casos distintos. No primeiro caso é considerado o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades, e livre na outra, onde é colocada uma massa da carga terminal  $m_c$ , conforme mostra a figura 2.1. No segundo caso é considerado o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e fixo ao fundo do oceano na outra, conforme mostra a figura 2.2. No terceiro caso é considerado o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e articulado a outra estrutura flutuante na outra extremidade, conforme mostra a figura 2.3.

Estes casos podem ocorrer na prática em diversas situações envolvendo estruturas flexíveis, especialmente em sistemas subaquáticos, como por exemplo, em amarras de plataformas de petróleo ou *risers*. Veículos do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*) constituem outra importante aplicação, também no domínio de sistemas subaquáticos.

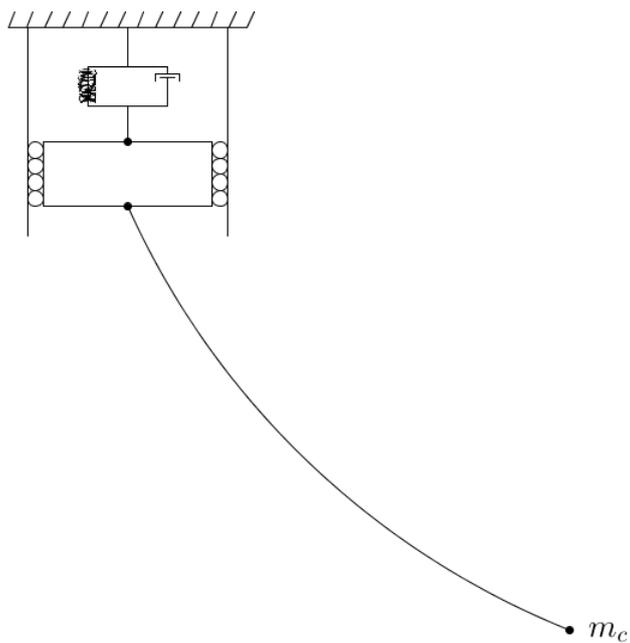


Figura 2.1 – Representação esquemática do cabo umbilical para o primeiro caso.

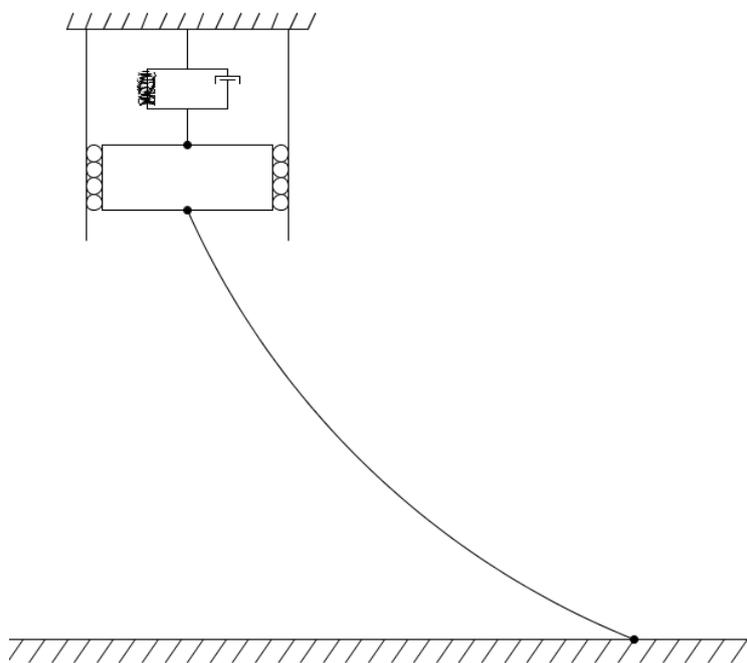


Figura 2.2 – Representação esquemática do cabo umbilical para o segundo caso.

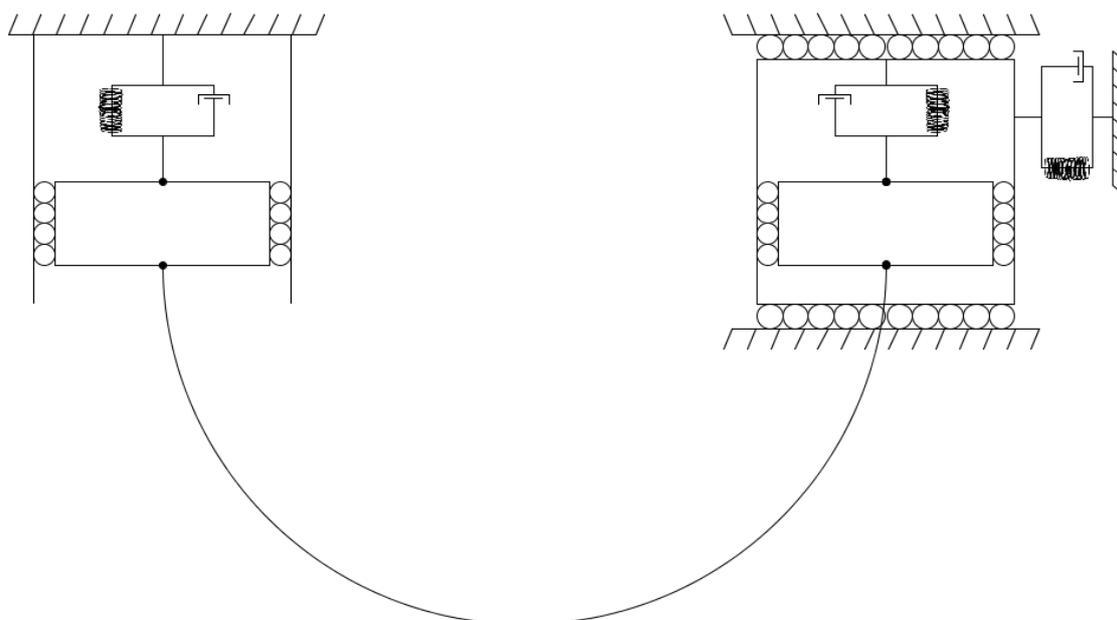


Figura 2.3 – Representação esquemática do cabo umbilical para o terceiro caso.

A ideia principal do método de modelagem é dividir o cabo em pequenos elementos, chamados de elos, conectados por articulações fictícias flexíveis que permitem movimentos em três graus de liberdade, denominados por azimute, elevação e torção (ZANELA [31]). Estes movimentos são relativos ao elo anterior da cadeia articulada (PEREIRA [23]). Neste trabalho é considerada uma aproximação plana para este modelo, ou seja, a dinâmica evolui em um único plano, de forma que se consideram apenas os ângulos de elevação.

Devido à possibilidade de realização de movimentos relativos à rotação e translação no espaço, torna-se necessário estabelecer transformações entre os sistemas de coordenadas (ISOLDI [13]). No caso de um cabo fixo em sua extremidade superior, é importante conhecer a orientação e posição da sua extremidade livre. A orientação e a posição da extremidade livre (carga terminal do cabo) podem ser obtidas a partir de sucessivas rotações e translações entre os diversos sistemas de referência, convenientemente posicionados ao longo da cadeia de corpos rígidos poli articulados que representa a flexibilidade contínua do cabo.

Cada articulação fictícia possui natureza elástica, sendo necessário considerar constantes elásticas com seus respectivos coeficientes de amortecimentos, constituindo-se assim a natureza física de cada articulação.

Para conhecer a posição da extremidade livre do cabo, é necessário um sistema de coordenadas em cada uma das articulações. Sistemas de referência são posicionados em cada articulação, de forma a permitir o uso de transformações homogêneas para relacioná-los.

Conforme será demonstrado posteriormente, o Formalismo Discreto torna possível a determinação do Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elos que se deseja dividir a estrutura.

Na modelagem discreta, um cabo de flexibilidade contínua é dividido em  $n$  partes rígidas de comprimentos  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , que são chamados de elos, sendo estes elos conectados por articulações fictícias, como mostra a figura 2.4.

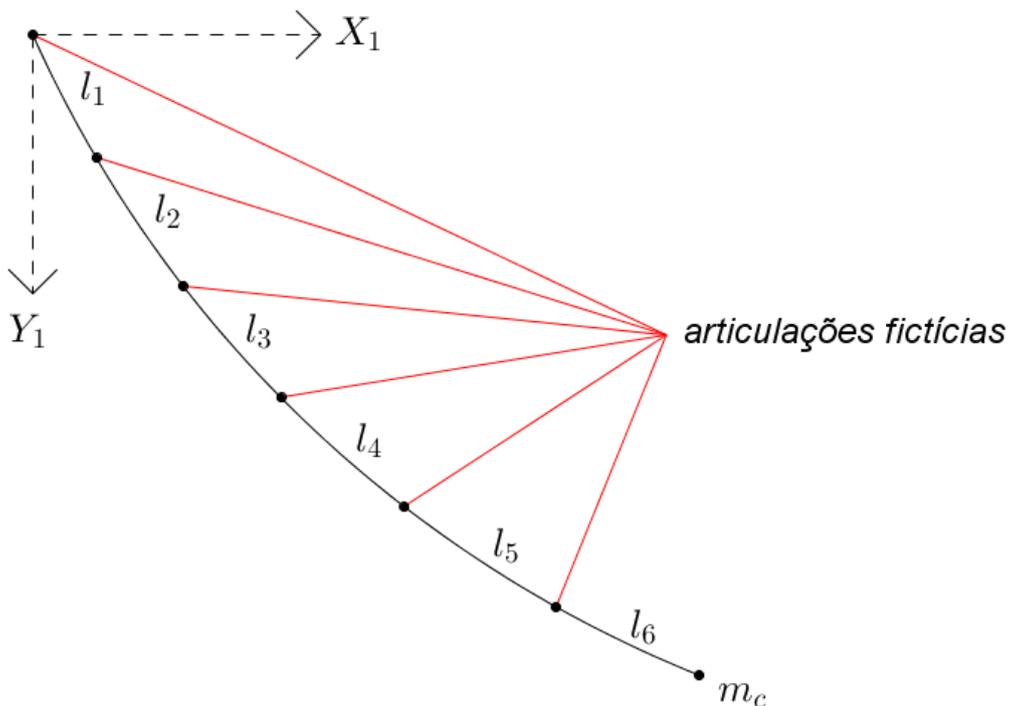


Figura 2.4 – Estrutura flexível e sua representação discreta.

Os elos possuem massas concentradas nos seus centros de massa, ou seja,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , ... ,  $(x_n, y_n)$ , com massas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , ... ,  $m_n$ , respectivamente, enquanto  $(x_c, y_c)$  são as coordenadas do centro de massa da carga de massa  $m_c$  que se encontra na extremidade final do cabo. Os ângulos de elevação dos elos são relativos à posição vertical. Logo, na  $i$ -ésima articulação,  $\theta_i$  será o ângulo de elevação relativo ao elo  $i$ . Em cada articulação é considerada uma constante elástica com o seu respectivo coeficiente de amortecimento.

A energia cinética é definida como:

$$E_C = E_{C_R} + E_{C_T} \quad (2.1)$$

onde  $E_{C_R}$  é a energia cinética devida ao movimento de rotação e  $E_{C_T}$  é a energia cinética devida ao movimento de translação do cabo.

A energia cinética rotacional deve-se ao movimento de rotação de cada elo em torno do seu centro de massa e é definida na forma:

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R_3} \dot{\theta}_3^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_n} \dot{\theta}_n^2 \quad (2.2)$$

onde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  são os ângulos de elevação nas articulações;  $I_{R_1}, I_{R_2}, I_{R_3}, \dots, I_{R_n}$  são os momentos de inércia relativos aos eixos perpendiculares aos elos e passando por seus respectivos centros de massa.

A energia cinética de translação é definida na forma:

$$E_{C_T} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \quad (2.3)$$

onde  $\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$ ,  $\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ , ... ,  $\frac{1}{2}m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2)$  e  $\frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)$  são as energias cinéticas relativas ao movimento das massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  dos elos e da massa  $m_c$  da carga terminal, respectivamente.

A energia potencial possui parcelas elástica e gravitacional, sendo definida na forma:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(\theta_3 - \theta_2)^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2}k_n(\theta_n - \theta_{n-1})^2 + m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_3gh_3 + \\
 & + \dots + m_ngh_n + m_cgh_c
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  são os ângulos de elevação nas articulações;  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  são as constantes elásticas nas articulações;  $m_1gh_1, m_2gh_2, m_3gh_3, \dots, m_ngh_n$  são as energias potenciais gravitacionais de cada elo e  $m_cgh_c$  é a energia potencial gravitacional da massa da carga terminal  $m_c$ .  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  são as alturas, que serão definidas individualmente mais adiante.

Então, o Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = E_C - E_P \tag{2.5}$$

As coordenadas dos centros de massa dos elos e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas entre os diversos sistemas de referência. A primeira articulação fictícia é colocada na junção do cabo com a estrutura flutuante, ponto no qual se considera a origem do primeiro sistema de referência, como mostra a figura 2.5 a seguir.

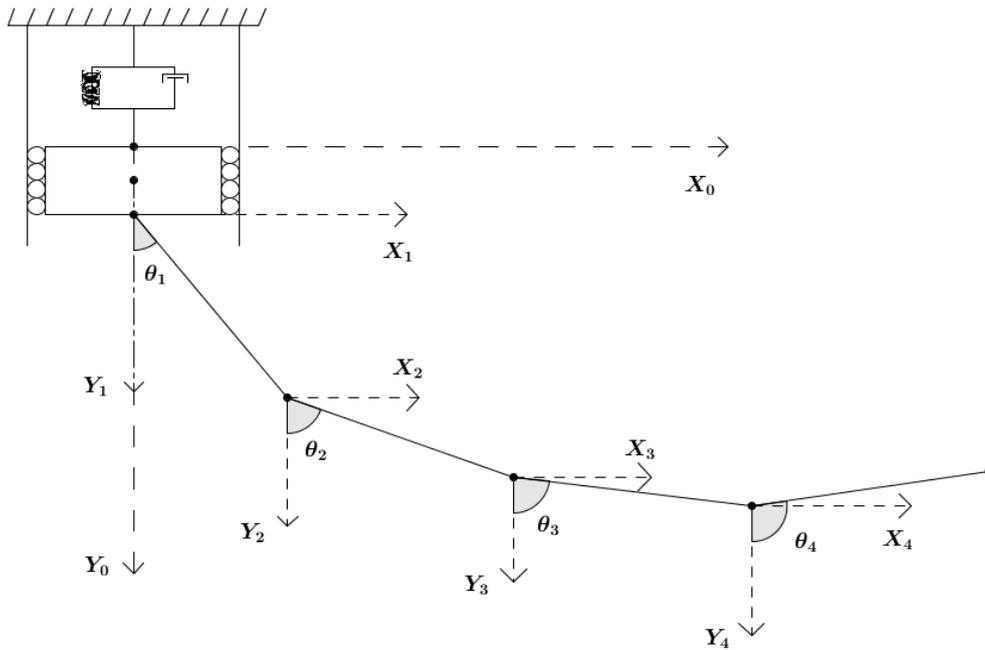


Figura 2.5 – Representação esquemática dos sistemas de referência em cada articulação fictícia.

onde  $X_0Y_0$  é o sistema referencial inercial, e  $X_iY_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , são os sistemas referenciais móveis em cada articulação fictícia.

Neste caso, a matriz de transformações homogêneas considera apenas translações entre a origem  $X_0Y_0$  e cada sistema referencial móvel. A partir destas transformações, as coordenadas dos centros de massa de cada elo podem ser obtidas de forma sistemática. Para maiores explicações e detalhes a respeito das transformações homogêneas, os trabalhos (PEREIRA [22], [23]) e (ZANELA [31]) podem ser consultados.

### 2.2.1 Formalismo discreto para o primeiro caso

No primeiro caso considera-se o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra, conforme mostra a figura 2.6. A energia cinética de translação, considerando a equação (2.3) e o grau de liberdade acrescido devido a esta estrutura flutuante, é definida por:

$$\begin{aligned}
 E_{c_T} = & \frac{1}{2} M \dot{y}_m^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \\
 & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) + \\
 & + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde  $M$  é a massa da estrutura flutuante,  $\dot{y}_m$  é a velocidade do centro de massa desta estrutura na direção vertical e  $\frac{1}{2} M \dot{y}_m^2$  é a energia cinética relativa ao movimento da massa  $M$ .

Considerando-se a equação (2.4), define-se a energia potencial na forma:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2} k_m y_m^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} k_n (\theta_n - \theta_{n-1})^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 + \\
 & + \dots + m_n g h_n + m_c g h_c
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observa-se que não é considerada a energia potencial gravitacional da massa  $M$  porque a mesma é flutuante e o seu peso é igual ao seu empuxo. Considera-se ainda a massa  $M$  da estrutura como fixa a uma mola e a um amortecedor, de forma a poder simular um eventual movimento harmônico oriundo, por exemplo, de ondas na

superfície do mar.  $\frac{1}{2}k_m y_m^2$  é a energia potencial elástica da estrutura flutuante, sendo  $k_m$  a constante elástica e  $y_m$  o deslocamento do centro de massa da mesma na direção vertical;  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  e  $h_c$  são as alturas com relação aos níveis de mínima energia, definidas neste caso por:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= -y_m + a_1 \Rightarrow h_1 = -y_m + \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1) \\
 h_2 &= -y_m + a_1 + a_2 \Rightarrow h_2 = -y_m + a_1 + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2) \\
 h_3 &= -y_m + a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow h_3 = -y_m + a_1 + a_2 + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_3) \\
 &\quad \vdots \\
 h_n &= -y_m + \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \Rightarrow h_n = -y_m + \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_n) \\
 h_c &= -y_m + \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_c \Rightarrow h_c = -y_m + \sum_{i=1}^n l_i(1 - \cos \theta_i)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde  $a_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1)$ ,  $a_2 = \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2)$ , ...,  $a_n = \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_n)$  e

$a_c = l_n(1 - \cos \theta_n)$ , conforme ilustra a figura 2.6 a seguir.

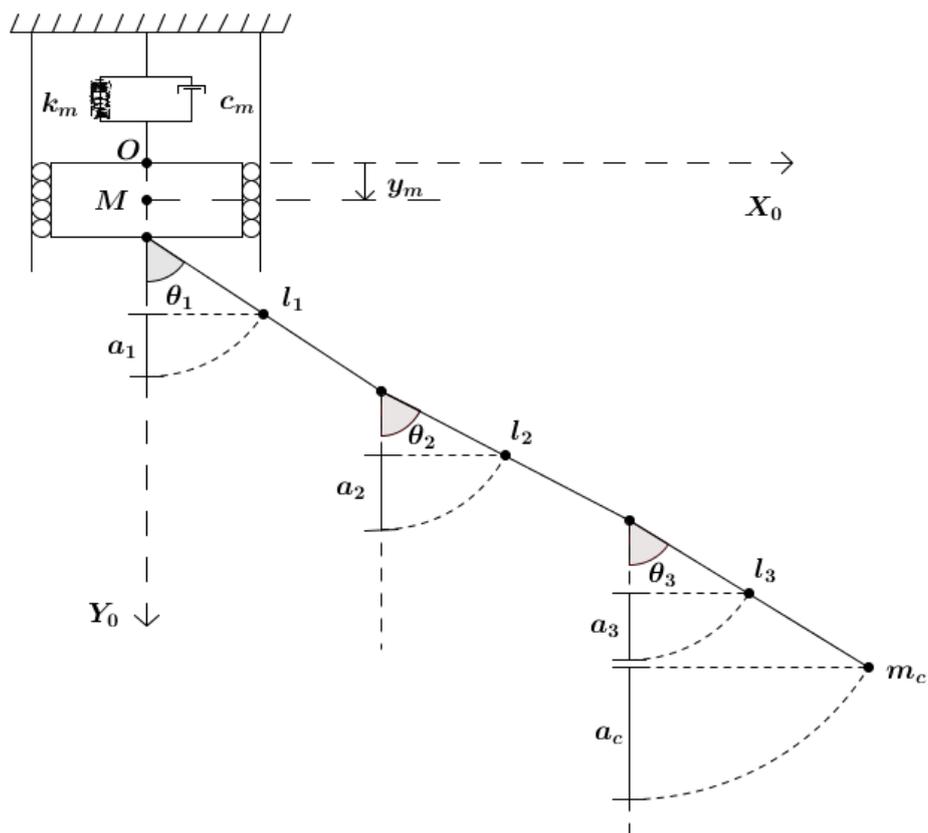


Figura 2.6 – Representação esquemática do cabo umbilical para a definição da energia potencial gravitacional no primeiro caso.

Para este caso, de (2.2), (2.6), (2.7), (2.8) e das definições de  $a_n$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}I_{R_1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{R_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_{R_3}\dot{\theta}_3^2 + \dots + \frac{1}{2}I_{R_n}\dot{\theta}_n^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_m^2 + \\
& + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \\
& + \dots + \frac{1}{2}m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) - \frac{1}{2}k_m y_m^2 + \\
& - \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2}k_3(\theta_3 - \theta_2)^2 + \\
& - \dots - \frac{1}{2}k_n(\theta_n - \theta_{n-1})^2 - m_1g \left[ -y_m + \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1) \right] + \\
& - m_2g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2) \right] + \\
& - m_3g \left[ \begin{array}{c} -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2) + \\ + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_3) \end{array} \right] + \\
& - \dots - m_n g \left[ -y_m + \sum_{i=1}^{n-1} l_i(1 - \cos \theta_i) + \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_n) \right] + \\
& - m_c g \left[ -y_m + \sum_{i=1}^n l_i(1 - \cos \theta_i) \right]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Analisando-se a figura 2.6 conclui-se que as coordenadas do centro de massa do primeiro elo ( $l_1$ ) são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \\ y_1 = y_m + \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \end{cases} \tag{2.10}$$

E as coordenadas do centro de massa do segundo elo ( $l_2$ ) são:

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ y_2 = y_m + l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \end{cases} \tag{2.11}$$

À medida que novos elos são considerados na modelagem, as coordenadas dos centros de massa destes seguem o mesmo padrão de crescimento. Logo, generalizando-se estas equações, é possível obter as coordenadas do centro de massa da  $k$ -ésima parte rígida na qual o cabo é dividido, e as coordenadas do centro de massa da carga terminal, respectivamente, como sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k = \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \sin \theta_i) + \frac{l_k}{2} \sin \theta_k \\ y_k = y_m + \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \cos \theta_i) + \frac{l_k}{2} \cos \theta_k \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \sum_{i=1}^n l_i \sin \theta_i \\ y_c = y_m + \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Portanto, das equações (2.12) e (2.13), obtém-se as derivadas destas coordenadas em relação ao tempo, que são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i) + \frac{l_k}{2} \cos \theta_k \dot{\theta}_k \\ \dot{y}_k = \dot{y}_m - \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \sin \theta_i \dot{\theta}_i) - \frac{l_k}{2} \sin \theta_k \dot{\theta}_k \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_c = \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i \\ \dot{y}_c = \dot{y}_m - \sum_{i=1}^n l_i \sin \theta_i \dot{\theta}_i \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Então, de (2.9), (2.14) e (2.15), obtém-se a forma geral do Lagrangeano para o primeiro caso:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad (2.16)$$

onde:

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{R_i} \dot{\theta}_i^2$$

$$L_2 = \frac{1}{2} M \dot{y}_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{n-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) + \frac{l_n}{2} \cos \theta_n \dot{\theta}_n \right]^2 + \left[ \dot{y}_m - \sum_{j=1}^{n-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) - \frac{l_n}{2} \sin \theta_n \dot{\theta}_n \right]^2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left[ \left( \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i \right)^2 + \left( \dot{y}_m - \sum_{i=1}^n l_i \sin \theta_i \dot{\theta}_i \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

$$L_3 = -\frac{1}{2} k_m y_m^2 - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2$$

$$L_4 = -g \sum_{i=1}^n m_i \left\{ -y_m + \sum_{j=1}^{n-1} [l_j (1 - \cos \theta_j)] + \frac{l_n}{2} (1 - \cos \theta_n) \right\} +$$

$$- m_c g \left[ -y_m + \sum_{i=1}^n l_i (1 - \cos \theta_i) \right]$$

Nos tópicos seguintes serão fornecidos mais detalhes sobre os outros dois casos considerados nesta dissertação.

### 2.2.2 Formalismo discreto para o segundo caso

O segundo caso considerado nesta dissertação é idêntico ao primeiro, sendo o equacionamento igual ao mesmo. A única diferença é que, neste caso, a massa da carga terminal  $m_c$  foi considerada como sendo muito grande e o seu empuxo igual ao seu peso. Esta massa da carga terminal seria a própria Terra, quando o cabo é fixo na sua outra extremidade ao fundo do oceano, conforme exemplifica a figura 2.7 a seguir.

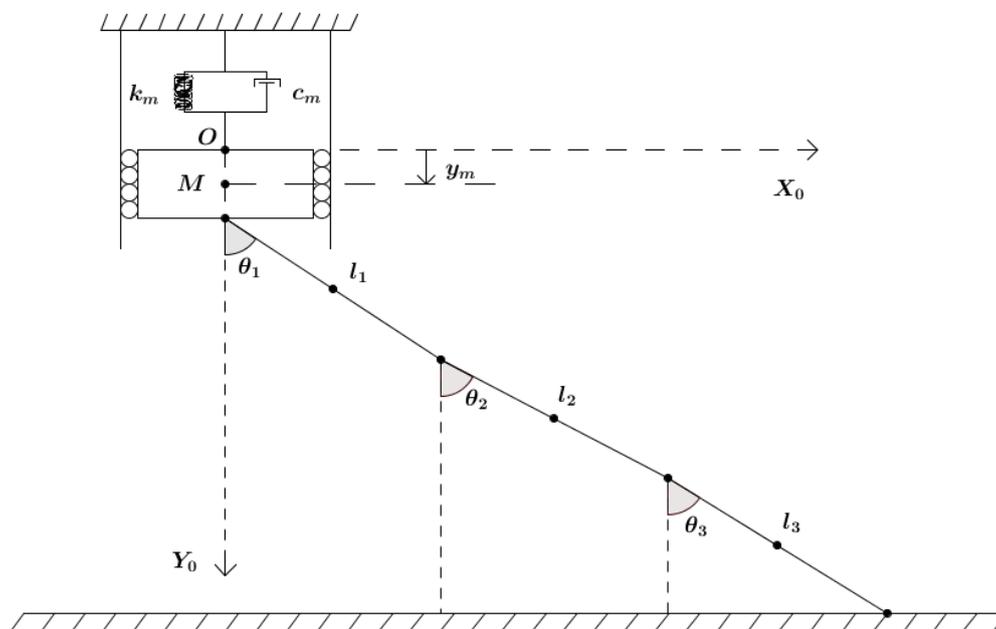


Figura 2.7 – Exemplo de um cabo umbilical dividido em três elos para o segundo caso.

### 2.2.3 Formalismo discreto para o terceiro caso

O terceiro caso considerado nesta dissertação também é idêntico ao primeiro, sendo o seu equacionamento igual ao mesmo. A única diferença é que, neste caso, foram inclusos dois vínculos elásticos na massa da carga terminal  $m_c$ , tratando-a como a segunda estrutura flutuante. Em uma situação geral, pode-se considerar o cabo esquematizado conforme ilustra a figura 2.8 a seguir:

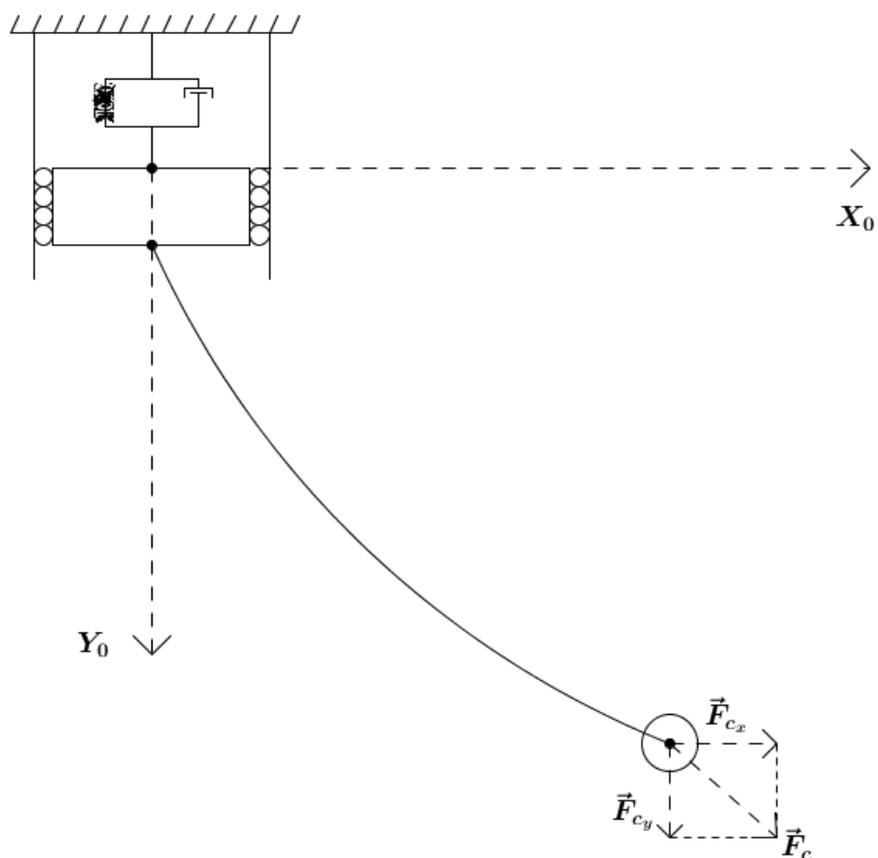


Figura 2.8 – Representação esquemática geral do cabo umbilical com uma força externa atuando na carga terminal.

Na figura,  $\vec{F}_{c_x}$  corresponde à componente da força na direção horizontal,  $\vec{F}_{c_y}$  corresponde à componente na direção vertical e  $\vec{F}_c$  é a força externa resultante.

Pode-se considerar a configuração ilustrada na figura 2.9 a seguir como uma situação particular da configuração esquematizada na figura 2.8, que é tratada como sendo o terceiro caso estudado nesta dissertação.

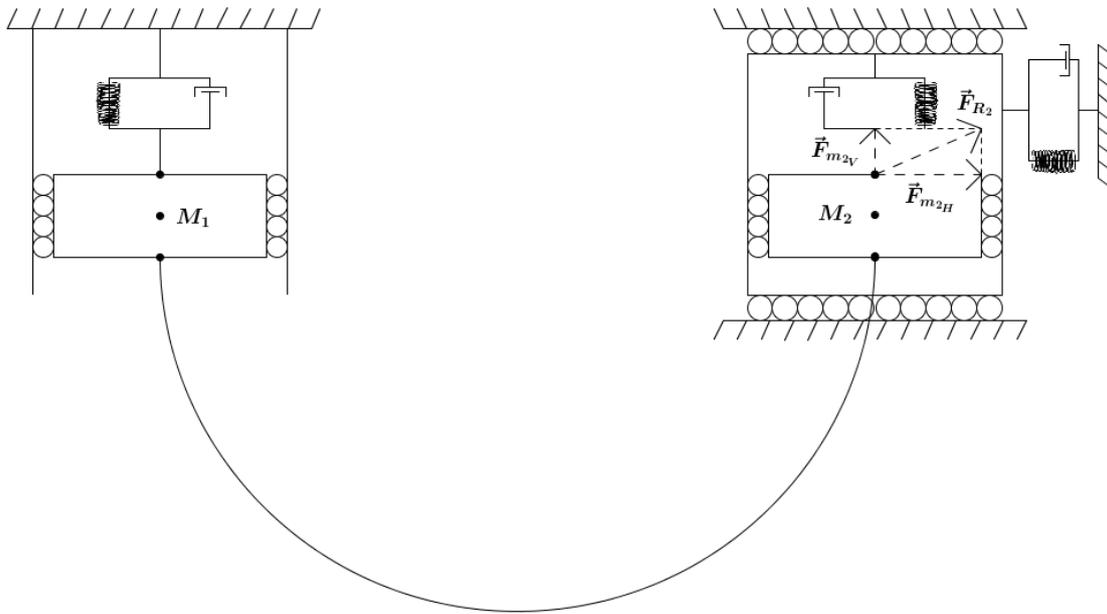


Figura 2.9 – Representação esquemática do cabo umbilical com os vínculos elásticos para a situação particular do terceiro caso.

Os dois vínculos elásticos adicionados na situação particular,  $\vec{F}_{m_{2V}}$  (na direção vertical, correspondente a  $\vec{F}_{c_y}$ ) e  $\vec{F}_{m_{2H}}$  (na direção horizontal, correspondente a  $\vec{F}_{c_x}$ ), são tratados como esforços externos, dos quais surge uma força resultante  $\vec{F}_{R_2}$  (correspondente a  $\vec{F}_c$ ) que atua na carga terminal, equivalente neste caso à segunda estrutura flutuante, conforme mostra a figura 2.9. Esta força resultante origina tensões em cada elo e conseqüentemente torques em cada articulação fictícia, que serão desenvolvidos no Capítulo 4. A figura 2.10 a seguir exemplifica o cabo umbilical dividido em três elos, para este caso.

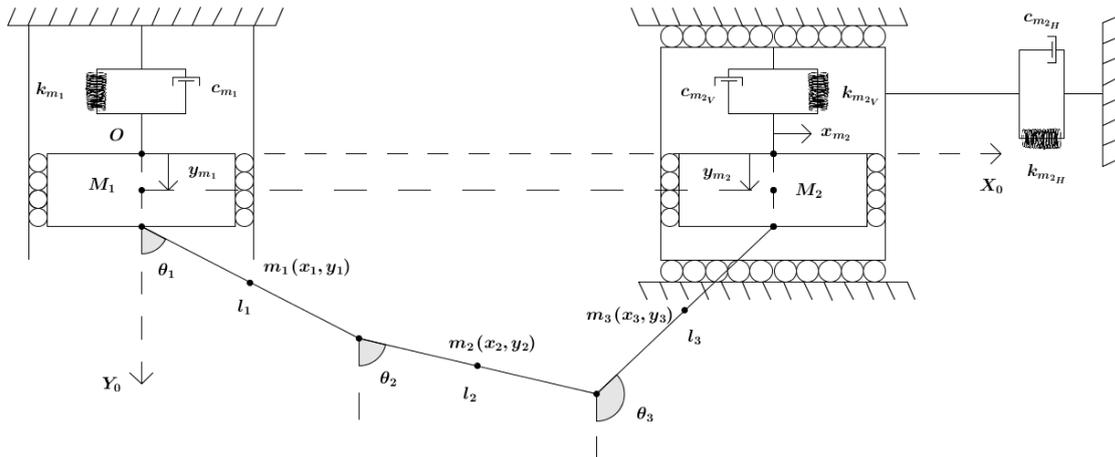


Figura 2.10 – Exemplo de um cabo umbilical dividido em três elos para a situação particular do terceiro caso.

onde  $y_{m_1}$ ,  $k_{m_1}$  e  $c_{m_1}$  são, respectivamente, o deslocamento do centro de massa na direção vertical, a constante elástica e o coeficiente de atrito do amortecedor para a primeira estrutura flutuante; de forma análoga para a segunda estrutura flutuante,  $y_{m_2}$ ,  $x_{m_2}$ ,  $k_{m_{2V}}$ ,  $k_{m_{2H}}$ ,  $c_{m_{2V}}$  e  $c_{m_{2H}}$  são, respectivamente, o deslocamento do centro de massa na direção vertical, o deslocamento do centro de massa na direção horizontal, a constante elástica na direção vertical, a constante elástica na direção horizontal, o coeficiente de atrito do amortecedor na direção vertical e o coeficiente de atrito do amortecedor na direção horizontal.

No Capítulo 3 é apresentada a modelagem dinâmica do cabo para os casos em que a estrutura flexível é dividida em dois, três e quatro elos, levando-se em conta o primeiro e o segundo casos estudados nesta dissertação.

## **CAPÍTULO 3**

# **MODELAGEM DINÂMICA PARA O PRIMEIRO E SEGUNDO CASOS**

Este capítulo apresenta a modelagem dinâmica do cabo para as situações em que a estrutura flexível é dividida em dois, três e quatro elos, para o primeiro caso estudado nesta dissertação. Ao fim, apresenta também o segundo caso, que pode ser tratado como um caso particular do primeiro. Para tal, considera-se um cabo de comprimento  $l$ , articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra extremidade (fixo ao fundo do oceano no segundo caso). O cabo é dividido em duas, três e quatro partes rígidas de comprimentos  $l_i$ , sendo  $i = 1, 2, 3, 4$ , e estes elos são conectados por articulações fictícias, conforme as figuras 3.1, 3.2 e 3.3.

De acordo com (MACHADO *et. al.* [16]), nas divisões de elos rígidos proposta para manipuladores robóticos, as articulações são posicionadas na metade de cada elo do caso anterior, dividindo o cabo inicialmente em duas partes rígidas conectadas por uma única articulação. Uma nova articulação fictícia implicaria em colocar as duas articulações nas metades das duas partes rígidas do caso anterior, assim seguindo de forma sucessiva. No presente estudo a opção foi deixar livre a escolha dos comprimentos dos elos, tratados por  $l_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

### **3.1 PRIMEIRO CASO – MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM DOIS ELOS**

Conforme explicado anteriormente, considera-se um cabo de comprimento  $l$ , articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra extremidade, que é tratado como o primeiro caso. Divide-se o cabo em dois elos, de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , conectados por uma articulação, conforme a figura 3.1. Na realidade são duas articulações, sendo a primeira considerada na junção do cabo com a estrutura flutuante.

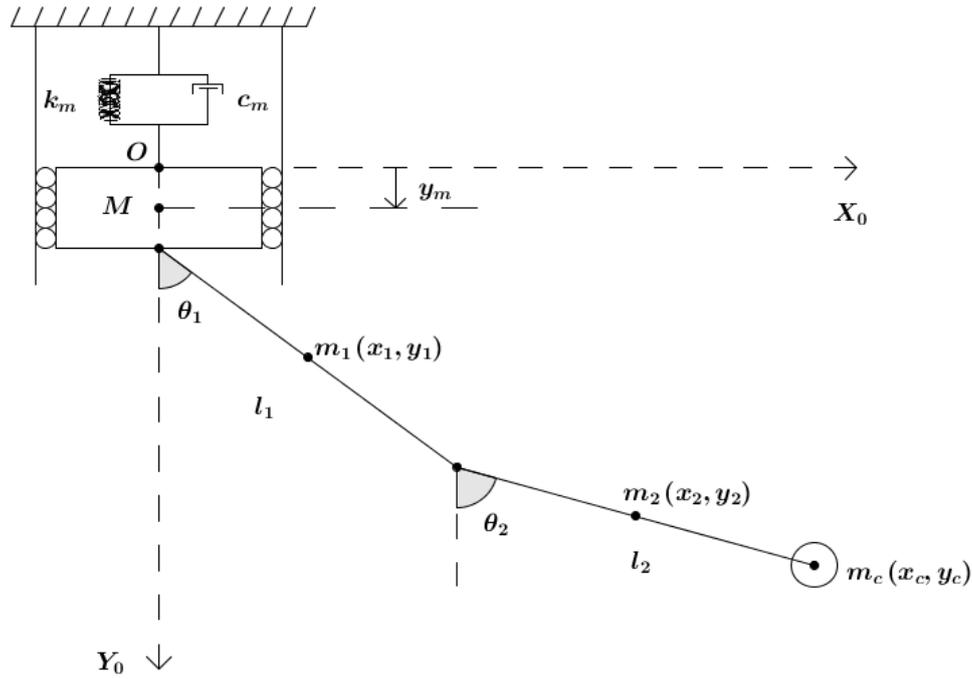


Figura 3.1 – Representação esquemática para o cabo dividido em dois elos para o primeiro caso.

A partir das equações (2.2) e (2.6), obtém-se a energia cinética total do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_C = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_m^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[ \frac{l_1^2}{4} \dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_m^2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2} m_c \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Das equações (2.7) e (2.8) obtém-se a energia potencial total do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2} k_m y_m^2 + m_1 g \left[ -y_m + \frac{l_1}{2} (1 - \cos \theta_1) \right] + \\
 & + m_2 g \left[ -y_m + l_1 (1 - \cos \theta_1) + \frac{l_2}{2} (1 - \cos \theta_2) \right] + \\
 & + m_c g \left[ -y_m + l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2) \right]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Logo, das equações (2.17), (3.1) e (3.2), obtém-se o Lagrangeano do sistema, na forma:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_m^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[ \frac{l_1^2}{4} \dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_m^2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2} m_c \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & - \frac{1}{2} k_m y_m^2 + m_1 g \left[ y_m - \frac{l_1}{2} (1 - \cos \theta_1) \right] + \\
 & + m_2 g \left[ y_m - l_1 (1 - \cos \theta_1) - \frac{l_2}{2} (1 - \cos \theta_2) \right] + \\
 & + m_c g \left[ y_m - l_1 (1 - \cos \theta_1) - l_2 (1 - \cos \theta_2) \right]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das coordenadas generalizadas do sistema, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_m} = u(t) - c_m \dot{y}_m \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_{m_1} - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_{m_2} - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \tag{3.6}$$

onde  $c_m$  é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e  $c_1$  e  $c_2$  são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação de cada elo. A força externa  $u(t)$  surge em razão do movimento oscilatório ao qual a estrutura flutuante pode ser submetida. Os torques externos atuantes nas articulações fictícias  $\tau_{m_1}$  e  $\tau_{m_2}$  surgem em razão de diversas causas, como forças de empuxo, correntes subaquáticas, movimentos independentes da carga terminal  $m_c$ , arrasto hidrodinâmico, entre outras.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.4), (3.5) e (3.6), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (y_m, \theta_1, \theta_2)^T \\ \vec{T} &= (u(t), \tau_{m_1}, \tau_{m_2})^T\end{aligned}\quad (3.7)$$

Assim, tais equações podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$I(\vec{x})\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} + K\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) + \vec{G}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \vec{T} \quad (3.8)$$

Na notação matricial, para o caso em que o cabo é dividido em dois elos, o modelo dinâmico é dado por:

$$[I_{3 \times 3}][\ddot{\vec{x}}_{3 \times 1}] + [C_{3 \times 3}][\dot{\vec{x}}_{3 \times 1}] + [K_{3 \times 3}][\vec{x}_{3 \times 1}] + [\vec{F}_{3 \times 1}] + [\vec{G}_{3 \times 1}] = [\vec{T}_{3 \times 1}] \quad (3.9)$$

onde  $I$  é a matriz de Inércia,  $C$  é a matriz dos coeficientes de atrito,  $K$  é a matriz das constantes elásticas,  $\vec{F}$  é o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos,  $\vec{G}$  é o vetor de esforços gravitacionais e  $\vec{T}$  é o vetor dos esforços externos.

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para o cabo dividido em dois elos são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos são expressas no Apêndice A.1. Observa-se que as não linearidades do modelo estão presentes na matriz de inércia, no vetor de esforços Coriolis-centrífugos e no vetor de esforços gravitacionais.

Desta forma, as matrizes de inércia  $I$ , de coeficientes de atrito  $C$  e de constantes elásticas  $K$  possuem as seguintes formas (todas são matrizes simétricas):

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Os vetores de esforços do tipo Coriolis-centrífugos  $\vec{F}$ , gravitacionais  $\vec{G}$  e externos  $\vec{T}$  são escritos nas formas:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde  $T_1$  corresponde à força externa  $u(t)$ ;  $T_2$  e  $T_3$  correspondem respectivamente aos torques externos  $\tau_{m_1}$  e  $\tau_{m_2}$  atuantes na primeira e segunda articulações fictícias.

No tópico a seguir, apresenta-se a modelagem dinâmica para o cabo dividido em três elos, para o primeiro caso considerado nesta dissertação.

### 3.2 PRIMEIRO CASO – MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS

Aqui é considerado o modelo dinâmico para o cabo dividido em três elementos, para o primeiro caso desta dissertação. Ou seja, as configurações de suas duas extremidades não são alteradas, apenas o cabo é dividido em três partes rígidas, de comprimentos  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ , conectadas por duas articulações fictícias, conforme mostra a figura 3.2, sendo que se considera sempre o primeiro elo articulado à estrutura flutuante.

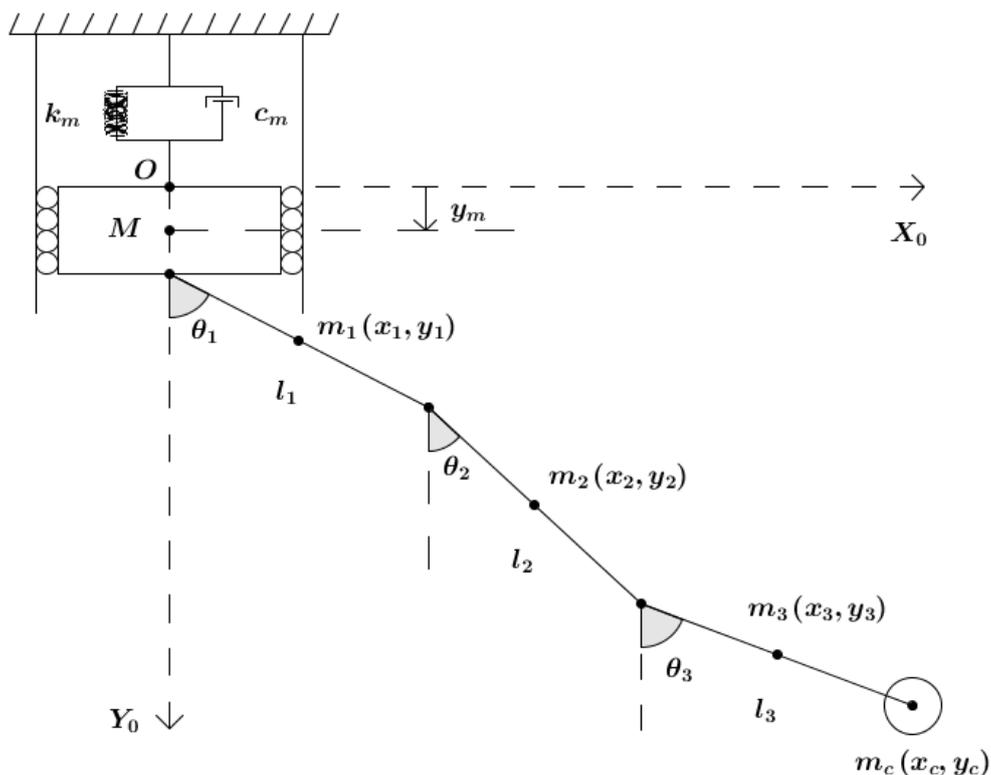


Figura 3.2 – Representação esquemática para o cabo dividido em três elos para o primeiro caso.

A partir das equações (2.2) e (2.6), obtém-se a energia cinética total do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_C = & \frac{1}{2}I_{R_1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{R_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_{R_3}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2}m_1 \left[ \frac{l_1^2}{4}\dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_m^2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_2 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_3 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{l_3^2}{4}\dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_C \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_3^2\dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - 2l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m \right]
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Das equações (2.7) e (2.8) obtém-se a energia potencial total do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2}k_m y_m^2 + m_1 g \left[ -y_m + \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1) \right] + \\
 & + m_2 g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2) \right] + \\
 & + m_3 g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_3) \right] + \\
 & + m_C g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_3(1 - \cos \theta_3) \right]
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Logo, das equações (2.17), (3.16) e (3.17), obtém-se o Lagrangeano do sistema na forma:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2}I_{R_1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{R_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_{R_3}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2}m_1 \left[ \frac{l_1^2}{4}\dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_m^2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_2 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_3 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{l_3^2}{4}\dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_c \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_3^2\dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - 2l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m \right] + \\
 & - \frac{1}{2}k_m y_m^2 + m_1 g \left[ y_m - \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1) \right] + \\
 & + m_2 g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2) \right] + \\
 & + m_3 g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - l_2(1 - \cos \theta_2) - \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_3) \right] + \\
 & + m_c g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - l_2(1 - \cos \theta_2) - l_3(1 - \cos \theta_3) \right]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano do sistema, dado a partir de (3.18), as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_m} = u(t) - c_m \dot{y}_m \tag{3.19}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_{m_1} - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{3.20}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_{m_2} - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \tau_{m_3} - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \tag{3.22}$$

onde  $c_m$  é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação de cada elo.  $u(t)$  é a força externa atuante na estrutura flutuante e  $\tau_{m_1}$ ,  $\tau_{m_2}$  e  $\tau_{m_3}$  são os torques externos atuantes em cada articulação fictícia.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (y_m, \theta_1, \theta_2, \theta_3)^T \\ \vec{T} &= (u(t), \tau_{m_1}, \tau_{m_2}, \tau_{m_3})^T\end{aligned}\quad (3.23)$$

O modelo dinâmico também pode ser representado da seguinte forma:

$$[I_{4 \times 4}][\ddot{\vec{x}}_{4 \times 1}] + [C_{4 \times 4}][\dot{\vec{x}}_{4 \times 1}] + [K_{4 \times 4}][\vec{x}_{4 \times 1}] + [\vec{F}_{4 \times 1}] + [\vec{G}_{4 \times 1}] = [\vec{T}_{4 \times 1}] \quad (3.24)$$

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para o cabo dividido em três elos são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos são expressas no Apêndice A.2.

Desta forma, as matrizes de inércia  $I$ , de coeficientes de atrito  $C$  e de constantes elásticas  $K$  possuem as seguintes formas (todas são matrizes simétricas):

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Os vetores de esforços do tipo Coriolis-centrífugos  $\vec{F}$ , gravitacionais  $\vec{G}$  e externos  $\vec{T}$  são escritos nas formas:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde  $T_1$  corresponde à força externa  $u(t)$ ;  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  correspondem respectivamente aos torques externos  $\tau_{m_1}$ ,  $\tau_{m_2}$  e  $\tau_{m_3}$  atuantes na primeira, segunda e terceira articulações fictícias.

No tópico a seguir, apresenta-se a modelagem dinâmica para o cabo dividido em quatro elos, para o primeiro caso considerado nesta dissertação.

### 3.3 PRIMEIRO CASO – MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM QUATRO ELOS

Considera-se o cabo com as mesmas configurações em suas extremidades, para o primeiro caso desta dissertação, dividido em quatro partes rígidas, de comprimentos  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  e  $l_4$ , conectadas por três articulações fictícias, conforme ilustra a figura 3.3, com o primeiro elo articulado à estrutura flutuante.

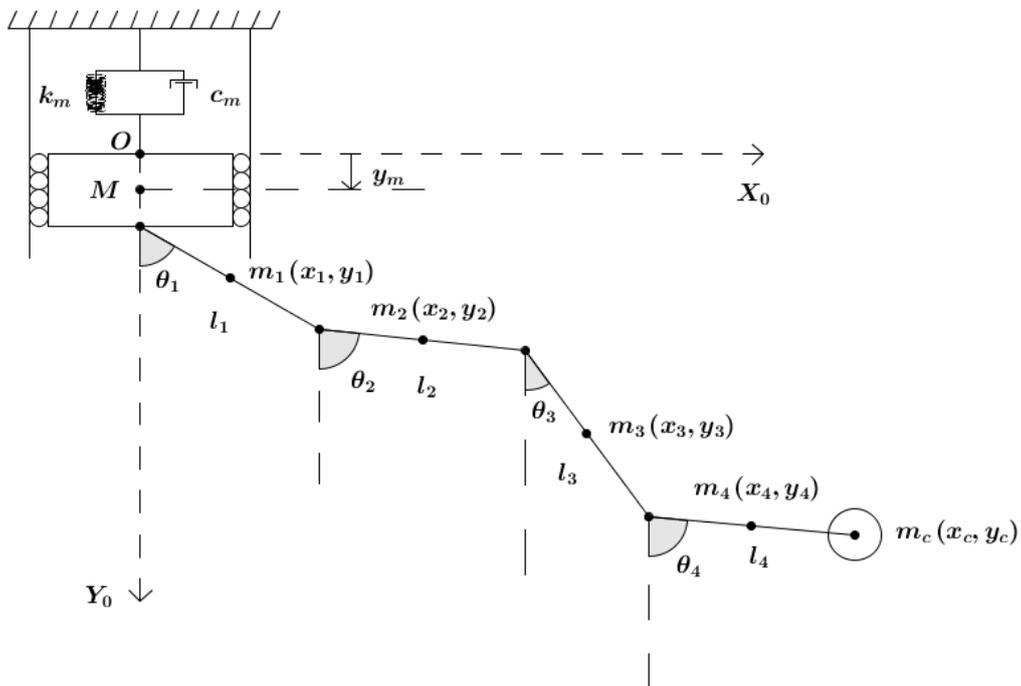


Figura 3.3 – Representação esquemática para o cabo dividido em quatro elos para o primeiro caso.

A partir das equações (2.2) e (2.6), obtém-se a energia cinética total do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_C = & \frac{1}{2}I_{R_1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{R_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_{R_3}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_{R_4}\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2}m_1 \left[ \frac{l_1^2}{4}\dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_m^2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_2 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_3 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{l_3^2}{4}\dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_4 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_3^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{l_4^2}{4}\dot{\theta}_4^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \right. \\
 & \quad \left. + l_1 l_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \right. \\
 & \quad \left. + l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) + \dot{y}_m^2 - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - 2l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m - l_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_c \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_3^2\dot{\theta}_3^2 + l_4^2\dot{\theta}_4^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) + 2l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) + \dot{y}_m^2 - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - 2l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m - 2l_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 \dot{y}_m \right]
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Das equações (2.7) e (2.8) obtém-se a energia potencial total do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2}k_m y_m^2 + m_1 g \left[ -y_m + \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1) \right] + \\
 & + m_2 g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2) \right] + \\
 & + m_3 g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_3) \right] + \\
 & + m_4 g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_3(1 - \cos \theta_3) + \frac{l_4}{2}(1 - \cos \theta_4) \right] + \\
 & + m_c g \left[ -y_m + l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_3(1 - \cos \theta_3) + l_4(1 - \cos \theta_4) \right]
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Logo, das equações (2.17), (3.31) e (3.32), obtém-se o Lagrangeano do sistema na forma:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2}I_{R_1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{R_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_{R_3}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_{R_4}\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2}m_1 \left[ \frac{l_1^2}{4}\dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_m^2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_2 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_3 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{l_3^2}{4}\dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{y}_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_4 \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_3^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{l_4^2}{4}\dot{\theta}_4^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \right. \\
 & \quad \left. + l_1 l_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \right. \\
 & \quad \left. + l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) + \dot{y}_m^2 - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - 2l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m - l_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 \dot{y}_m \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_c \left[ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_3^2\dot{\theta}_3^2 + l_4^2\dot{\theta}_4^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_1 l_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) + 2l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \right. \\
 & \quad \left. + 2l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) + \dot{y}_m^2 - 2l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{y}_m + \right. \\
 & \quad \left. - 2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{y}_m - 2l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{y}_m - 2l_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 \dot{y}_m \right] + \\
 & - \frac{1}{2}k_m y_m^2 + m_1 g \left[ y_m - \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_1) \right] + \\
 & + m_2 g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_2) \right] + \\
 & + m_3 g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_3) \right] + \\
 & + m_4 g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. - l_3(1 - \cos \theta_3) - \frac{l_4}{2}(1 - \cos \theta_4) \right] + \\
 & + m_c g \left[ y_m - l_1(1 - \cos \theta_1) - l_2(1 - \cos \theta_2) + \right. \\
 & \quad \left. - l_3(1 - \cos \theta_3) - l_4(1 - \cos \theta_4) \right]
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano do sistema, dado a partir de (3.33), as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_m} = u(t) - c_m \dot{y}_m \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_{m_1} - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_{m_2} - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \tau_{m_3} - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) - c_4 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = \tau_{m_4} - c_4 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) \quad (3.38)$$

onde  $c_m$  é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação de cada elo.  $u(t)$  é a força externa atuante na estrutura flutuante e  $\tau_{m_1}$ ,  $\tau_{m_2}$ ,  $\tau_{m_3}$  e  $\tau_{m_4}$  são os torques externos atuantes em cada articulação fictícia.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) e (3.38), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (y_m, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T \\ \vec{T} &= (u(t), \tau_{m_1}, \tau_{m_2}, \tau_{m_3}, \tau_{m_4})^T \end{aligned} \quad (3.39)$$

O modelo dinâmico também pode ser representado da seguinte forma:

$$[I_{5x5}][\ddot{\vec{x}}_{5x1}] + [C_{5x5}][\dot{\vec{x}}_{5x1}] + [K_{5x5}][\vec{x}_{5x1}] + [\vec{F}_{5x1}] + [\vec{G}_{5x1}] = [\vec{T}_{5x1}] \quad (3.40)$$

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para o cabo dividido em quatro elos são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos são expressas no Apêndice A.3.

Desta forma, as matrizes de inércia  $I$ , de coeficientes de atrito  $C$  e de constantes elásticas  $K$  possuem as seguintes formas (todas são matrizes simétricas):

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} & I_{15} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} & I_{25} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} & I_{35} \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} & I_{45} \\ I_{51} & I_{52} & I_{53} & I_{54} & I_{55} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 \\ 0 & 0 & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Os vetores de esforços do tipo Coriolis-centrífugos  $\vec{F}$ , gravitacionais  $\vec{G}$  e externos  $\vec{T}$  são escritos nas formas:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

onde  $T_1$  corresponde à força externa  $u(t)$ ;  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$  correspondem respectivamente aos torques externos  $\tau_{m_1}$ ,  $\tau_{m_2}$ ,  $\tau_{m_3}$  e  $\tau_{m_4}$  atuantes na primeira, segunda, terceira e quarta articulações fictícias.

No tópico a seguir, apresentam-se maiores detalhes sobre a modelagem dinâmica para o cabo dividido em dois, três e quatro elos, tratando do segundo caso considerado nesta dissertação.

### 3.4 MODELAGEM DINÂMICA PARA O SEGUNDO CASO

Como já foi explicado anteriormente no Capítulo 2, o segundo caso considerado nesta dissertação é idêntico ao primeiro. Sendo assim, a modelagem dinâmica deste caso é a mesma, apenas considerando, para fins de simulações, a massa da carga terminal  $m_c$  muito grande e o seu empuxo igual ao seu peso, fixando a outra extremidade do cabo ao fundo do oceano. As figuras 3.4, 3.5 e 3.6 a seguir exemplificam, respectivamente, o cabo dividido em dois, três e quatro elos, para este caso.

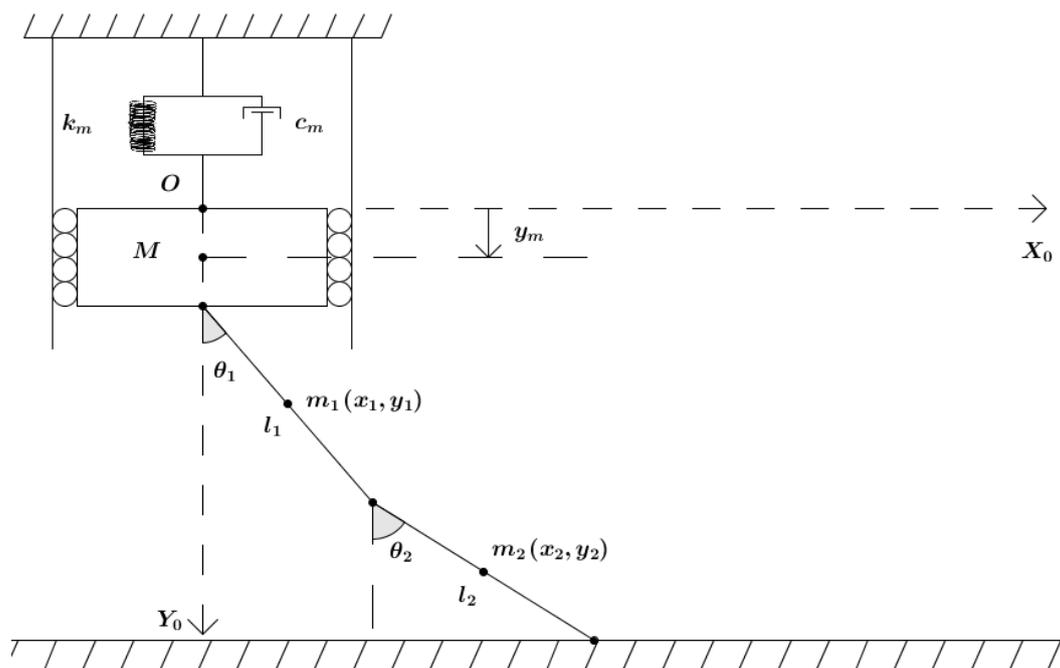


Figura 3.4 – Representação esquemática para o cabo dividido em dois elos para o segundo caso.

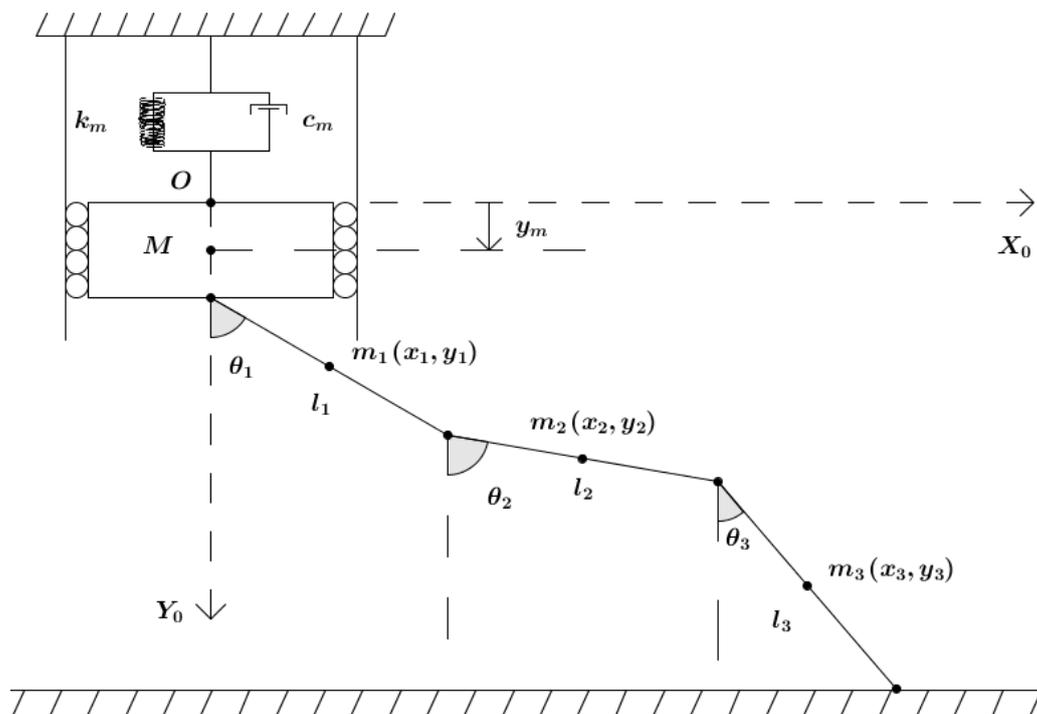


Figura 3.5 – Representação esquemática para o cabo dividido em três elos para o segundo caso.

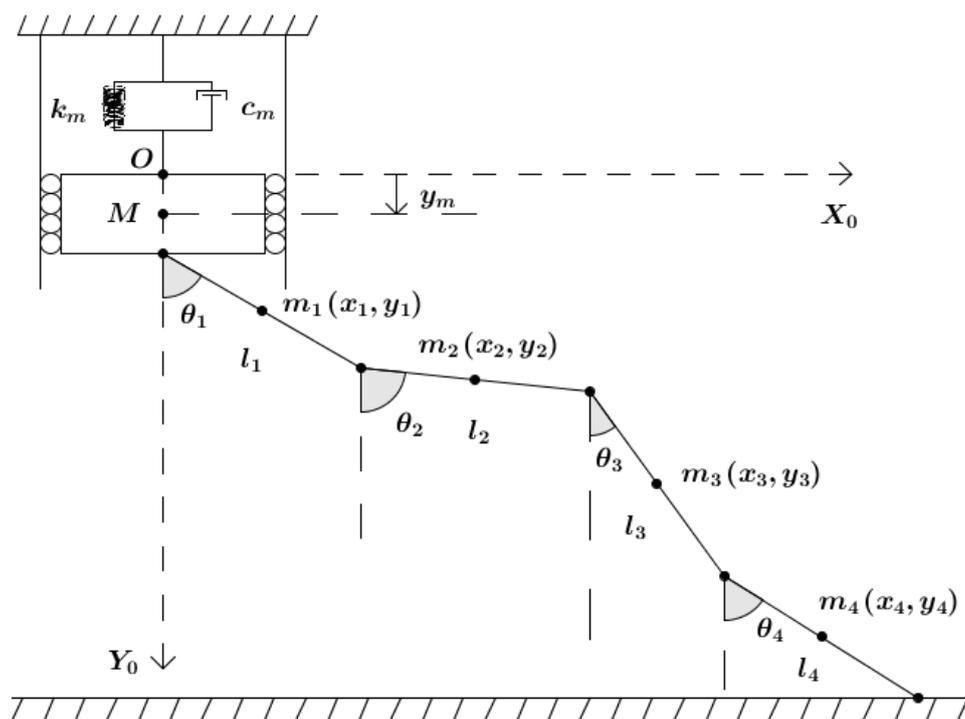


Figura 3.6 – Representação esquemática para o cabo dividido em quatro elos para o segundo caso.

No Capítulo 4 é apresentada a modelagem dinâmica do cabo para a situação em que a estrutura flexível é dividida em cinco elos, levando em conta o terceiro caso estudado nesta dissertação.

## **CAPÍTULO 4**

### **MODELAGEM DINÂMICA PARA O TERCEIRO CASO**

Considera-se um cabo de comprimento  $l$ , articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e articulado a outra estrutura flutuante na outra extremidade, que é tratado como o terceiro caso. O equacionamento do modelo dinâmico é idêntico ao do primeiro caso, acrescentando-se dois vínculos elásticos na massa da carga terminal  $m_c$ .

Conforme explicado no Capítulo 2, para o terceiro caso, a força resultante  $\vec{F}_{R_2}$ , originada pelos vínculos elásticos presentes na segunda estrutura flutuante ( $\vec{F}_{m_2V}$  na vertical e  $\vec{F}_{m_2H}$  na horizontal), é tratada como uma força externa ao sistema. Esta força origina uma tensão em cada elo e um torque em cada articulação fictícia, que foram obtidos para a situação na qual o cabo foi dividido em cinco elos.

Desta forma, este capítulo trata das equações para as tensões em cada elo e os torques em cada articulação. Uma vez obtidos estes esforços, foram desenvolvidas equações gerais para os mesmos, para posterior desenvolvimento de um algoritmo genérico que possibilita a obtenção do modelo considerando-se um número qualquer de elos.

Para eliminar a possibilidade de movimentação horizontal da segunda estrutura flutuante, é suficiente considerar uma constante elástica  $k_{m_2H}$  e um coeficiente de amortecimento  $c_{m_2H}$  muito grandes. Desta forma, esta segunda estrutura passa a ter as mesmas condições de movimentação da primeira, ou seja, somente na vertical.

Também é possível simular situações onde estas mesmas constantes não são tão grandes, para futuras aplicações, nas quais a segunda estrutura flutuante permite movimentação na direção horizontal, de forma oscilatória, como ocorre na direção vertical para as duas estruturas flutuantes.

### 4.1 EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS

Considera-se o cabo com as mesmas configurações explicitadas anteriormente em suas extremidades. Para a análise do terceiro caso, o cabo foi dividido em cinco partes rígidas, de comprimentos  $l_1, l_2, l_3, l_4$  e  $l_5$ , conectadas por quatro articulações fictícias, conforme ilustra a figura 4.1, sendo o primeiro elo articulado à primeira estrutura flutuante.

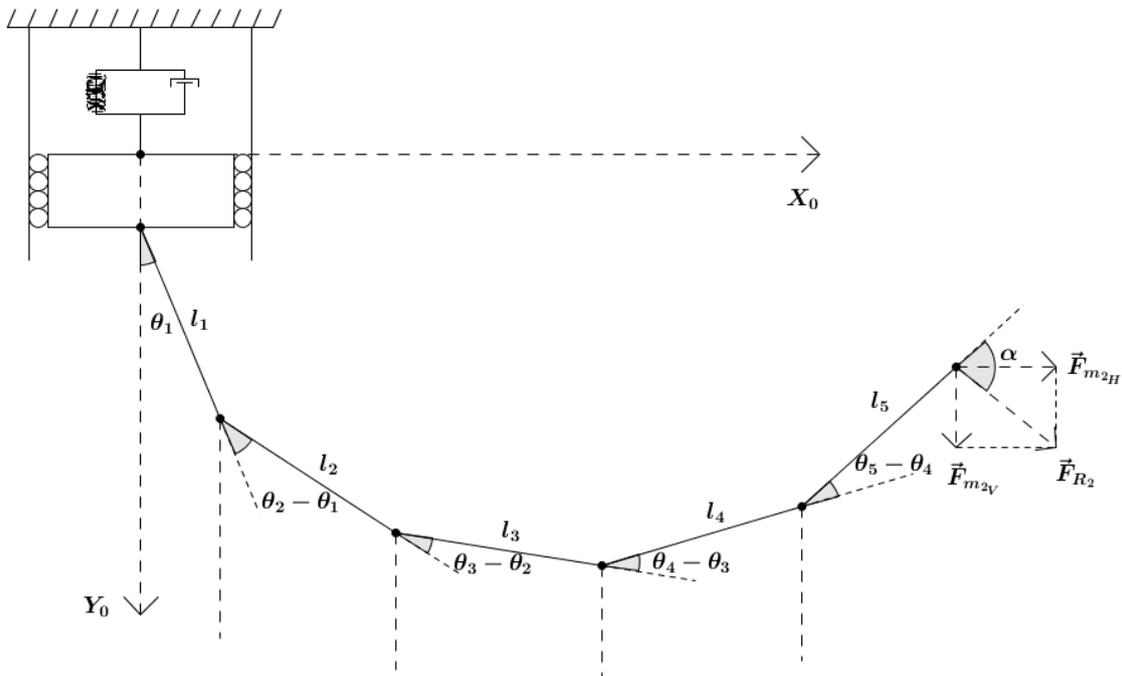


Figura 4.1 – Representação esquemática geral para o cabo dividido em cinco elos para o terceiro caso.

A figura 4.1 ilustra uma situação geral, da qual o terceiro caso estudado nesta dissertação é uma situação particular. A partir desta situação generalizada, foi obtido o equacionamento apresentado neste capítulo.

Para obter as tensões em cada elo e os torques em cada articulação, originados pelas forças elásticas presentes nos vínculos horizontal ( $\vec{F}_{m2H}$ ) e vertical ( $\vec{F}_{m2V}$ ), foi

feita uma análise vetorial destes esforços. Sabe-se que a força resultante  $\vec{F}_{R_2}$  pode ser expressa vetorialmente da seguinte forma:

$$\vec{F}_{R_2} = F_{m_2H} \vec{i} + F_{m_2V} \vec{j} \quad (4.1)$$

onde  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  representam os vetores unitários nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

Para definir o vetor distância entre a carga terminal na qual é aplicada a força externa e a quinta articulação é necessário conhecer o vetor distância entre a origem do sistema inercial e a carga terminal e o vetor distância entre esta origem e a quinta articulação, conforme ilustra a figura 4.2.

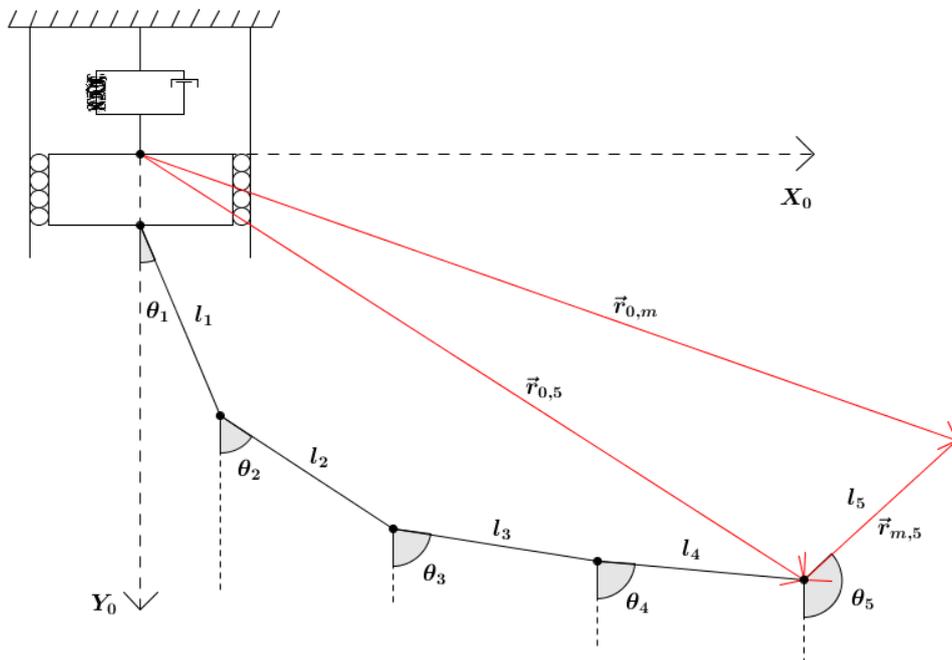


Figura 4.2 – Representação esquemática dos vetores que definem a distância entre a carga terminal e a quinta articulação.

onde  $\vec{r}_{0,m}$  é o vetor distância entre a origem e a carga terminal e  $\vec{r}_{0,5}$  é o vetor distância entre a origem e a quinta articulação. De acordo com a figura 4.2, estes vetores podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{0,5} = & (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4) \vec{i} + \\ & + (y_m + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4) \vec{j} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{0,m} = & (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5) \vec{i} + \\ & + (y_m + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5) \vec{j} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Desta forma, o vetor  $\vec{r}_{m,5}$  é dado por:

$$\vec{r}_{m,5} = \vec{r}_{0,5} - \vec{r}_{0,m} \quad (4.4)$$

Logo, este vetor é expresso como:

$$\vec{r}_{m,5} = (-\sin \theta_5 \vec{i} - \cos \theta_5 \vec{j}) l_5 \quad (4.5)$$

O torque originado na quinta articulação fictícia é obtido a partir do seguinte produto vetorial:

$$\vec{\tau}_5 = \vec{F}_{R_2} \times \vec{r}_{m,5} \quad (4.6)$$

Portanto, este torque é expresso como:

$$\vec{\tau}_5 = \left( -F_{m_2H} \cos \theta_5 + F_{m_2V} \sin \theta_5 \right) l_5 \vec{k} \quad (4.7)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor unitário na direção perpendicular às direções horizontal e vertical.

Para se obter a tensão no quinto elo, fez-se necessária a determinação de um vetor unitário na mesma direção deste elo e sentido com origem na carga terminal até a quinta articulação. Este vetor é expresso como:

$$\vec{u}_5 = -\sin \theta_5 \vec{i} - \cos \theta_5 \vec{j} \quad (4.8)$$

Logo, a tensão  $\vec{F}_{c_5}$  originada no quinto elo é expressa da seguinte forma:

$$\vec{F}_{c_5} = \vec{F}_{R_2} \cos \alpha \quad (4.9)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre a força resultante  $\vec{F}_{R_2}$  e a direção do quinto elo, conforme ilustrado anteriormente na figura 4.1.

Para a obtenção da tensão  $\vec{F}_{c_5}$ , primeiramente é necessário determinar o  $\cos \alpha$ . Tem-se que o produto escalar entre a força resultante  $\vec{F}_{R_2}$  e o vetor unitário  $\vec{u}_5$  resulta em:

$$\vec{F}_{R_2} \cdot \vec{u}_5 = |\vec{F}_{R_2}| \cos \alpha \quad (4.10)$$

Portanto, desenvolvendo-se o produto escalar, isolando-se  $\cos \alpha$  na equação (4.10) e obtendo-se  $|\vec{F}_{R_2}|$  em função das forças elásticas, obtém-se:

$$\cos \alpha = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) \quad (4.11)$$

Então, a partir das equações (4.1) e (4.9), a tensão  $\vec{F}_{c_5}$  existente no quinto elo é dada por:

$$\vec{F}_{c_5} = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) (F_{m_{2H}} \vec{i} + F_{m_{2V}} \vec{j}) \quad (4.12)$$

Analogamente à equação (4.4), o vetor  $\vec{r}_{5,4}$  é da seguinte forma:

$$\vec{r}_{5,4} = \vec{r}_{0,4} - \vec{r}_{0,5} \quad (4.13)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.5), (4.6) e (4.7), tem-se o vetor que expressa a distância entre a quinta e a quarta articulações e o produto vetorial para a obtenção do torque  $\vec{\tau}_4$ :

$$\vec{r}_{5,4} = (-\sin \theta_4 \vec{i} - \cos \theta_4 \vec{j}) l_4 \quad (4.14)$$

$$\vec{\tau}_4 = \vec{F}_{c_5} \times \vec{r}_{5,4} \quad (4.15)$$

$$\vec{\tau}_4 = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) (-F_{m_{2H}} \cos \theta_4 + F_{m_{2V}} \sin \theta_4) l_4 \vec{k} \quad (4.16)$$

Para se obter a tensão no quarto elo, fez-se a projeção do vetor tensão no quinto elo  $\vec{F}_{c_5}$  na direção do quarto elo, conforme ilustra a figura 4.3.

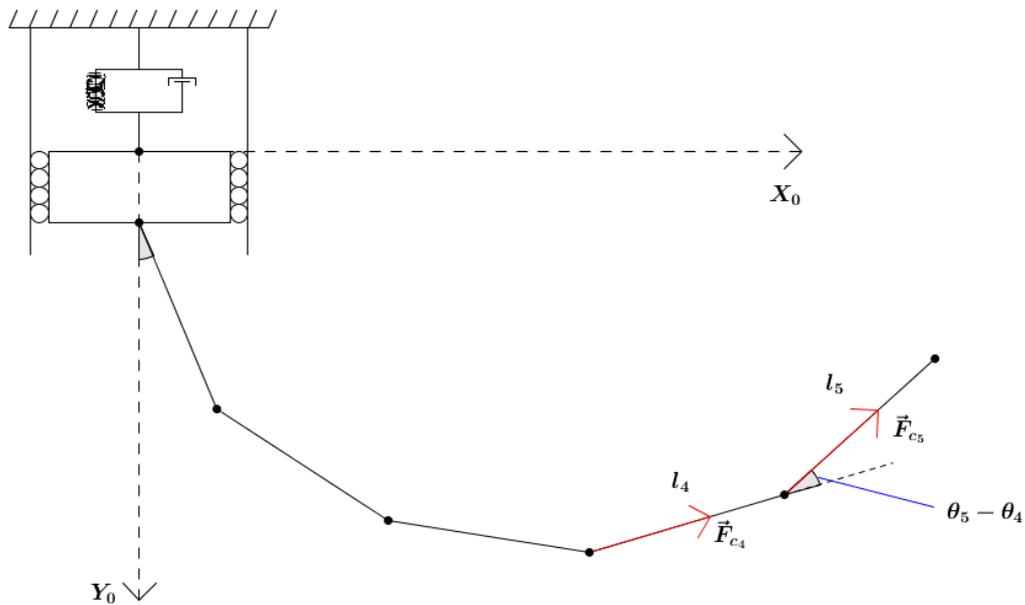


Figura 4.3 – Representação esquemática da projeção do vetor tensão no quinto elo na direção do quarto elo.

Logo, a tensão no quarto elo é da seguinte forma:

$$\vec{F}_{c_4} = \vec{F}_{c_5} \cos(\theta_5 - \theta_4) \quad (4.17)$$

Então, a partir das equações (4.12) e (4.17), a tensão  $\vec{F}_{c_4}$  existente no quarto elo é dada por:

$$\vec{F}_{c_4} = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) \cos(\theta_5 - \theta_4) (F_{m_{2H}} \vec{i} + F_{m_{2V}} \vec{j}) \quad (4.18)$$

Analogamente à equação (4.13), o vetor  $\vec{r}_{4,3}$  é da seguinte forma:

$$\vec{r}_{4,3} = \vec{r}_{0,3} - \vec{r}_{0,4} \quad (4.19)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.14), (4.15) e (4.16), tem-se o vetor que expressa a distância entre a quarta e a terceira articulações e o produto vetorial para a obtenção do torque  $\vec{\tau}_3$ :

$$\vec{r}_{4,3} = (-\sin \theta_3 \vec{i} - \cos \theta_3 \vec{j})l_3 \quad (4.20)$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{F}_{c_4} \times \vec{r}_{4,3} \quad (4.21)$$

$$\vec{\tau}_3 = -\left(\frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}}\right) \cos(\theta_5 - \theta_4) \begin{pmatrix} -F_{m_{2H}} \cos \theta_3 + \\ + F_{m_{2V}} \sin \theta_3 \end{pmatrix} l_3 \vec{k} \quad (4.22)$$

Para se obter a tensão no terceiro elo, fez-se a projeção do vetor tensão no quarto elo  $\vec{F}_{c_4}$  na direção do terceiro elo, de forma análoga à figura 4.3 e à equação (4.17), da seguinte forma:

$$\vec{F}_{c_3} = \vec{F}_{c_4} \cos(\theta_4 - \theta_3) \quad (4.23)$$

Então, a partir das equações (4.18) e (4.23), a tensão  $\vec{F}_{c_3}$  existente no terceiro elo é dada por:

$$\vec{F}_{c_3} = -\left(\frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}}\right) \prod_{i=5}^4 [\cos(\theta_i - \theta_{i-1})] \begin{pmatrix} F_{m_{2H}} \vec{i} + \\ + F_{m_{2V}} \vec{j} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Analogamente à equação (4.19), o vetor  $\vec{r}_{3,2}$  é da seguinte forma:

$$\vec{r}_{3,2} = \vec{r}_{0,2} - \vec{r}_{0,3} \quad (4.25)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.20), (4.21) e (4.22), tem-se o vetor que expressa a distância entre a terceira e a segunda articulações e o produto vetorial para a obtenção do torque  $\vec{\tau}_2$ :

$$\vec{r}_{3,2} = (-\sin \theta_2 \vec{i} - \cos \theta_2 \vec{j})l_2 \quad (4.26)$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{F}_{c_3} \times \vec{r}_{3,2} \quad (4.27)$$

$$\vec{\tau}_2 = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) \prod_{i=5}^4 [\cos(\theta_i - \theta_{i-1})] \begin{pmatrix} -F_{m_{2H}} \cos \theta_2 + \\ + F_{m_{2V}} \sin \theta_2 \end{pmatrix} l_2 \vec{k} \quad (4.28)$$

Para se obter a tensão no segundo elo, fez-se a projeção do vetor tensão no terceiro elo  $\vec{F}_{c_3}$  na direção do segundo elo, de forma análoga à figura 4.3 e à equação (4.23), da seguinte forma:

$$\vec{F}_{c_2} = \vec{F}_{c_3} \cos(\theta_3 - \theta_2) \quad (4.29)$$

Então, a partir das equações (4.24) e (4.29), a tensão  $\vec{F}_{c_2}$  existente no segundo elo é dada por:

$$\vec{F}_{c_2} = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) \prod_{i=5}^3 [\cos(\theta_i - \theta_{i-1})] \begin{pmatrix} F_{m_{2H}} \vec{i} + \\ + F_{m_{2V}} \vec{j} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Analogamente à equação (4.25), o vetor  $\vec{r}_{2,1}$  é da seguinte forma:

$$\vec{r}_{2,1} = \vec{r}_{0,1} - \vec{r}_{0,2} \quad (4.31)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.26), (4.27) e (4.28), tem-se o vetor que expressa a distância entre a segunda e a primeira articulações e o produto vetorial para a obtenção do torque  $\vec{\tau}_1$ :

$$\vec{r}_{2,1} = (-\sin \theta_1 \vec{i} - \cos \theta_1 \vec{j}) l_1 \quad (4.32)$$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{F}_{c_2} \times \vec{r}_{2,1} \quad (4.33)$$

$$\vec{\tau}_1 = - \left( \frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_5 + F_{m_{2V}} \cos \theta_5}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) \prod_{i=5}^3 [\cos(\theta_i - \theta_{i-1})] \begin{pmatrix} -F_{m_{2H}} \cos \theta_1 + \\ + F_{m_{2V}} \sin \theta_1 \end{pmatrix} l_1 \vec{k} \quad (4.34)$$

Não se faz necessário obter a tensão  $\vec{F}_{c_1}$  presente no primeiro elo, pois o objetivo é apenas determinar os torques em cada uma das articulações fictícias nas quais o cabo é dividido. Uma vez obtidos os torques  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$  e  $\tau_5$ , estes surgem como esforços externos ao sistema, sendo considerados no modelo dinâmico nas Equações de Euler-Lagrange, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{m_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{m_1}} = u_{m_1}(t) - c_{m_1} \dot{y}_{m_1} \quad (4.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_{m_1} + \tau_1 - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (4.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_{m_2} + \tau_2 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \tau_{m_3} + \tau_3 - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) - c_4 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) \quad (4.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = \tau_{m_4} + \tau_4 - c_4(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) - c_5(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_5} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_5} = \tau_{m_5} + \tau_5 - c_5(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4) \quad (4.40)$$

onde  $\dot{y}_{m_1}$  é a velocidade do centro de massa da primeira estrutura flutuante na direção vertical;  $u_{m_1}(t)$  surge em razão do movimento oscilatório ao qual a primeira estrutura flutuante pode ser submetida;  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$  e  $\tau_5$  são os torques obtidos a partir das equações (4.34), (4.28), (4.22), (4.16) e (4.7), respectivamente.

As equações matriciais para o modelo dinâmico deste caso são as mesmas que foram apresentadas no Capítulo 3, para o primeiro caso. Apenas foram acrescentados os torques no vetor de esforços externos  $\vec{T}$ , expressos nas equações (3.15), (3.30) e (3.46), para as situações de divisão do cabo em dois, três e quatro elos, respectivamente. Os elementos deste vetor encontram-se no Apêndice A.4. Logo, para este caso, o mesmo é dado por:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 + \tau_1 \\ T_3 + \tau_2 \\ T_4 + \tau_3 \\ T_5 + \tau_4 \\ T_6 + \tau_5 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

onde  $T_1$  corresponde à força externa  $u_{m_1}(t)$ ;  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$  e  $T_6$  correspondem respectivamente aos torques externos  $\tau_{m_1}$ ,  $\tau_{m_2}$ ,  $\tau_{m_3}$ ,  $\tau_{m_4}$  e  $\tau_{m_5}$  atuantes na primeira, segunda, terceira, quarta e quinta articulações fictícias.

No Capítulo 5 são apresentadas as equações gerais para a formação dos elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico, para os três casos. Neste capítulo serão desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com um número  $n$  qualquer de elos no qual o cabo pode ser dividido.

## **CAPÍTULO 5**

### **ALGORITMOS GENÉRICOS**

No presente capítulo são desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico do cabo, para um número qualquer de elos considerados para a estrutura. Conforme será visto a seguir, utiliza-se uma linguagem formal de descrição de algoritmos. Esta forma de descrever algoritmos facilita suas implementações em linguagens computacionais. Estes algoritmos foram implementados no *software* MATLAB<sup>®</sup>, sendo que os resultados expressos na forma de simulações são apresentados no Capítulo 6. Tendo em vista que não se dispõe de um aparato físico para uma comprovação experimental destes resultados, estas simulações permitem apenas uma análise qualitativa dos modelos dinâmicos obtidos.

As equações analíticas dos modelos para dois, três e quatro elos para o primeiro caso, desenvolvidas no Capítulo 3, tornaram possível identificar uma lógica de crescimento genérico para as suas diferentes matrizes e vetores.

A diferenciação entre o primeiro e o terceiro casos estudados é pequena, constando apenas no acréscimo do algoritmo genérico para a forma geral dos torques originados em cada uma das articulações do cabo, oriundos dos esforços externos aplicados à carga terminal do mesmo.

## **5.1 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O PRIMEIRO E SEGUNDO CASOS**

### **5.1.1 Algoritmo Genérico para a Matriz de Inércia**

Conforme mencionado anteriormente, a partir do desenvolvimento dos modelos dinâmicos para o cabo dividido em dois, três e quatro elos no Capítulo 3, foram obtidas as respectivas matrizes de inércia, com seus elementos expressos no Apêndice A. A análise destes elementos possibilitou o entendimento de um padrão de crescimento, à medida que novos elos são adicionados na modelagem dinâmica. Desta forma, foi desenvolvida uma forma geral para a matriz de inércia, considerando um número de elos qualquer nos quais o cabo é dividido.

A matriz de inércia é simétrica. Portanto, o algoritmo a seguir determina os elementos da diagonal principal e os acima desta diagonal.  $M$  é a massa da estrutura flutuante, enquanto  $l_i$  e  $m_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , correspondem, respectivamente, aos comprimentos e massas de cada elo.  $m_c$  corresponde à massa da carga terminal.

*para*  $i = 1:n + 1$ ,

*para*  $j = 1:n + 1$ ,

*se*  $i = 1$ ,

*se*  $j = i$ ,

$$I(i, j) = M + m_c + \sum_{k=1}^n m_k ;$$

*fim se*,

*se*  $j > i$ ,

$$I(i, j) = -\left(\frac{m_{j-1}}{2} + m_c + \sum_{k=1}^n m_k\right) l_{j-1} \sin(\theta_{j-1}) ;$$

*fim se*,

*senão*

*se*  $j = i$ ,

(5.1)

$$I(i, j) = \left(\frac{m_{i-1}}{4} + m_c + \sum_{k=1}^n m_k\right) l_{i-1}^2 + I_{ri} ;$$

*fim se*,

*se*  $j > i$ ,

$$I(i, j) = \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=1}^n m_k\right) l_{i-1} l_{j-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_{j-1}) ;$$

*fim se*,

*fim se*,

$$I(j, i) = I(i, j);$$

*fim para*,

*fim para*,

### 5.1.2 Algoritmo Genérico para as Matrizes de Coeficientes de Atrito e Constantes Elásticas

De forma análoga ao tópico anterior, a partir do desenvolvimento dos modelos dinâmicos para o cabo dividido em dois, três e quatro elos no Capítulo 3, foram obtidas as respectivas matrizes de coeficientes de atrito e constantes elásticas, com seus elementos expressos no Apêndice A. Da mesma forma, a análise dos mesmos possibilitou o entendimento de uma lógica de crescimento para uma quantidade genérica de elos. Logo, foi desenvolvida uma forma geral para estas matrizes.

A matriz de coeficientes de atrito  $C$  é simétrica e de ordem  $n + 1$ , sendo  $c_m$  o coeficiente de atrito na estrutura flutuante, enquanto  $c_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , correspondem aos coeficientes em cada articulação fictícia.

A matriz de constantes elásticas obedece à mesma regra de formação da matriz de coeficientes de atrito e, portanto, utiliza-se o mesmo algoritmo, trocando-se apenas  $C$  por  $K$ ,  $c_m$  por  $k_m$  e  $c_i$  por  $k_i$ .

O algoritmo a seguir determina os elementos da matriz de coeficientes de atrito.

```

para i = 1:n,
  para j = 1:n,
    a(i,j) = 0;
    se i = j e i < n,
      a(i,j) = ci + ci+1;
    fim se,
    se i = j e i = n,
      a(i,j) = ci;
    fim se,
    se j = i + 1,
      a(i,j) = -cj;
      a(j,i) = a(i,j);
    fim se,
  fim para,
fim para,
para i = 1:n + 1,
  para j = 1:n + 1,
    C(i,j) = 0;
    se i = 1 e j = 1,
      C(i,j) = cm;
    fim se,
    se i > 1 e j > 1,
      C(i,j) = a(i - 1, j - 1);
    fim se,
  fim para,
fim para,

```

(5.2)

### 5.1.3 Algoritmo Genérico para o Vetor de Esforços Coriolis-centrífugos

Assim como nos tópicos anteriores, partindo-se do desenvolvimento dos modelos dinâmicos para o cabo dividido em dois, três e quatro elos no Capítulo 3, foram obtidos os respectivos vetores de esforços do tipo Coriolis-centrífugos, com seus elementos expressos no Apêndice A. Da mesma forma, a análise dos mesmos possibilitou o entendimento de uma lógica de crescimento para uma quantidade genérica de elos. Logo, foi desenvolvida uma forma geral para estes vetores.

O primeiro dos seus elementos tem geração diferente dos demais:

$$f_1 = - \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{m_k}{2} + m_c + \sum_{g=k+1}^n m_g \right) l_k \cos(\theta_k) \dot{\theta}_k^2 \right] \quad (5.3)$$

Os demais  $n$  elementos ( $f_2, \dots, f_{n+1}$ ) são obtidos de acordo com o seguinte algoritmo:

*para*  $i = 1:n$ ,

$$f_{i+1} = l_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \beta l_j \left( \frac{m_{\max(i,j)}}{2} + m_c + \sum_{g=\max(i,j)+1}^n m_g \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \text{sign}(\beta) \cos(\theta_i) \sin(\theta_j) + \\ + \frac{1}{\beta} \sin(\theta_i) \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \dot{\theta}_j^2 \right]; \quad (5.4)$$

*fim para*,

Na equação anterior,  $\beta$  é um parâmetro que depende dos valores de  $i$  e  $j$ , na forma:

*se*  $i > j$ ,

$$\beta = 2;$$

*senão se*  $i < j$ ,

$$\beta = -2;$$

*fim se*,

(5.5)

### 5.1.4 Algoritmo Genérico para o Vetor de Esforços Gravitacionais

Como nos tópicos anteriores, partindo-se do desenvolvimento dos modelos dinâmicos para o cabo dividido em dois, três e quatro elos no Capítulo 3, foram obtidos os respectivos vetores de esforços gravitacionais, com seus elementos expressos no Apêndice A. Da mesma forma, a análise dos mesmos possibilitou o entendimento de uma lógica de crescimento para uma quantidade genérica de elos. Logo, foi desenvolvida uma forma geral para estes vetores.

A primeira componente do vetor gravitacional é nula, relativa à massa da estrutura flutuante. Isto ocorre porque o peso da mesma é igual ao seu empuxo. Ou seja:

$$G(1) = 0; \quad (5.6)$$

As demais componentes são determinadas a partir do seguinte algoritmo:

*para*  $i = 2:n + 1$ ,

$$G(i) = \left( \frac{m_{i-1}}{2} + m_c + \sum_{k=i}^n m_k \right) gl_{i-1} \sin(\theta_{i-1}); \quad (5.7)$$

*fim para*,

## 5.2 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O TERCEIRO CASO

Como explicado anteriormente, a diferenciação entre o primeiro e o terceiro casos estudados consta apenas no acréscimo do algoritmo genérico para a forma geral dos torques originados em cada uma das articulações do cabo, devidos à força externa na carga terminal.

Partindo-se do desenvolvimento destes torques para o cabo dividido em cinco elos no Capítulo 4, foi feita uma análise que possibilitou o entendimento de um padrão de crescimento para uma quantidade genérica de elos. Logo, foi desenvolvida uma forma geral para estes torques.

O torque originado na última articulação tem geração diferente dos demais:

$$\tau_n = \left( -F_{m_{2H}} \cos \theta_n + F_{m_{2V}} \sin \theta_n \right) l_n \quad (5.8)$$

Convencionou-se a seguinte constante para simplificar o algoritmo genérico deste caso:

$$c\alpha = \left( -\frac{F_{m_{2H}} \sin \theta_n + F_{m_{2V}} \cos \theta_n}{\sqrt{F_{m_{2H}}^2 + F_{m_{2V}}^2}} \right) \quad (5.9)$$

Define-se  $T_e(1)$  como sendo a força externa aplicada à estrutura flutuante na direção vertical. Caso o objetivo seja simular um movimento harmônico na superfície flutuante, esta força externa seria oscilatória. Os outros torques atuando em cada uma das articulações fictícias são obtidos a partir do algoritmo a seguir.

$$\begin{aligned} S_1 &= 1; \\ \textit{para } i &= n - 1 : -1 : 1, \\ \tau(i) &= c\alpha S_1 \left( -F_{m_{2H}} \cos \theta_i + F_{m_{2V}} \sin \theta_i \right) l_i; \\ S_1 &= S_1 \cos(\theta_{i+1} - \theta_i); \\ T_e(i + 1) &= \tau_i; \\ \textit{fim para}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

No Capítulo 6 são apresentadas as simulações computacionais realizadas, que permitiram a verificação qualitativa dos algoritmos genéricos obtidos, para os três casos estudados nesta dissertação.

## **CAPÍTULO 6**

### **SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS**

Neste capítulo, serão mostradas algumas simulações realizadas com os algoritmos genéricos obtidos no capítulo anterior. O objetivo é verificar se os modelos dinâmicos permitem reproduzir em simulações resultados fisicamente esperados.

As simulações consideraram os três casos estudados nesta dissertação, sendo divididas em quatro situações distintas. Na primeira, foram feitas seis simulações para verificar o primeiro caso, que consiste no cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra. Na segunda situação, foram realizadas três simulações, para verificar o segundo caso, que difere do primeiro apenas na fixação da segunda extremidade ao fundo do oceano, antes livre. Na terceira situação, foram feitas três simulações, considerando-se o terceiro caso, com o cabo articulado a duas estruturas flutuantes distintas em suas duas extremidades. Na quarta situação, foram realizadas mais três simulações, considerando-se a carga terminal livre e forças externas atuantes na mesma, sem os vínculos que caracterizaram o terceiro caso.

Os tópicos deste capítulo tratam de cada uma destas quatro situações. Em cada um dos mesmos, é explicado como foram feitas todas as simulações realizadas, bem como os parâmetros físicos específicos considerados nestas simulações.

Para todas as simulações, os parâmetros físicos gerais adotados são especificados a seguir, na tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros físicos gerais adotados para os modelos dinâmicos.

Parâmetro	Valor numérico (unidade)	Significado físico
$l$	240 (m)	Comprimento do cabo
$n$	12, 60, 80 e 110	Número de elos
$r_i$	0,01 (m)	Raio de cada elo (constante)
$l_i$	$\frac{l}{n}$ (m)	Comprimento de cada elo
$m_e$	7850 (kg/m <sup>3</sup> )	Massa específica do cabo
$m_{e_a}$	1000 (kg/m <sup>3</sup> )	Massa específica da água
$m_i$	$\pi r_i^2 l_i m_e$ (kg)	Massa de cada elo
$I_{R_i}$	$\frac{m_i}{12} l_i^2$ (kg.m <sup>2</sup> )	Momento de inércia rotacional de elevação para cada elo
$I_{T_i}$	$\frac{m_i}{2} r_i^2$ (kg.m <sup>2</sup> )	Momento de inércia rotacional de torção para cada elo
$E_y$	$8 \cdot 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> )	Módulo de Young (elasticidade do cabo)
$I_{sec}$	$\frac{1}{4} \pi r_i^4$ (m <sup>4</sup> )	Momento de inércia da seção reta
$k_i$	$\frac{5}{6} n E_y \frac{I_{sec}}{L} \left( \frac{N \cdot m}{rd} \right)$	Constante elástica de cada articulação
$c_i$	$2,8 \left( \frac{N \cdot m \cdot s}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito de cada articulação
$c_v$	$200 \left( \frac{N \cdot s^2}{m^2} \right)$	Coefficiente de arrasto hidrodinâmico
$g$	9,81 (m/s <sup>2</sup> )	Aceleração gravitacional

Primeiramente, foi realizada uma simulação com o cabo dividido em 12 elos, sob a ação do arrasto hidrodinâmico (cabo considerado dentro da água), partindo do repouso e de uma configuração inicial que possibilitou uma situação de queda livre para a carga terminal do mesmo. O tempo de simulação foi de 62 s. As figuras 6.1 e 6.2 a seguir ilustram os ângulos de elevação para cada um dos 12 elos e a posição do centro

de massa da carga terminal, respectivamente. Na figura 6.2 está marcado com o símbolo “o” o início do deslocamento e com o “x” o final do mesmo.

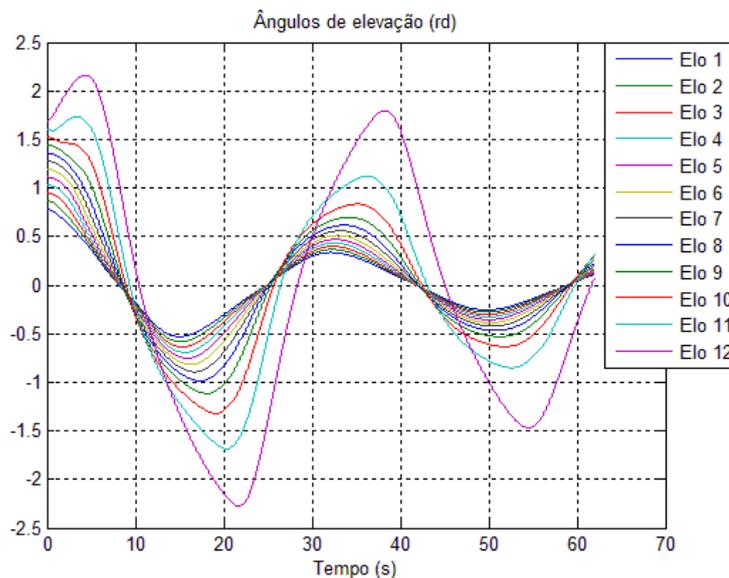


Figura 6.1 – Ângulos de elevação, considerando-se 12 elos, cabo submerso e em queda livre.

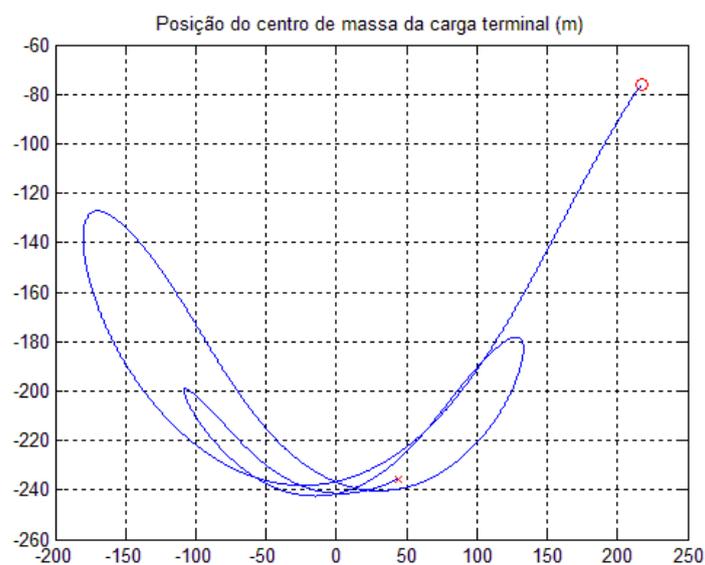


Figura 6.2 – Posição do centro de massa da carga terminal, 12 elos, cabo submerso e em queda livre.

A forma de visualização dos resultados ilustrada nas figuras 6.1 e 6.2 mostra-se inadequada, uma vez que ilustra apenas a variação dos ângulos de elevação em cada elo e a posição da carga terminal ao longo da simulação, não contemplando uma visão abrangente do cabo em movimento. Além disso, à medida que o número de elos é aumentado, torna-se inviável visualizar os ângulos de elevação dos mesmos graficamente, devido ao acúmulo de cores representativas iguais e ao aumento da quantidade de curvas próximas entre si, num mesmo gráfico. Portanto, a forma de visualização dos resultados adotada foi a partir de *frames* capturados em intervalos de tempo pré-definidos em cada simulação, de forma a contemplar o cabo em movimento nas simulações.

No tópico a seguir, são apresentadas as simulações referentes à primeira situação estudada neste capítulo.

## **6.1 PRIMEIRA SITUAÇÃO – CARGA TERMINAL LIVRE**

Como dito anteriormente, para a primeira situação, foram consideradas seis simulações para verificar o primeiro caso estudado nesta dissertação.

Para as seis simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados estão expressos a seguir, na tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Parâmetros adotados para as simulações da primeira situação.

Parâmetro	Valor numérico	Significado físico
$n$	12	Número de elos
$M$	6000 (kg)	Massa da estrutura flutuante
$m_c$	60 (kg)	Massa da carga terminal
$k_m$	1200 $\left(\frac{N.m}{rd}\right)$	Constante elástica da estrutura flutuante
$c_m$	237,6 $\left(\frac{N.m.s}{rd}\right)$	Coefficiente de atrito da estrutura flutuante
$I_{R_c}$	50 (kg.m <sup>2</sup> )	Momento de inércia rotacional da carga terminal

A primeira simulação consiste no cabo solto em sua extremidade livre, a partir de uma configuração espacial inicial, saindo do repouso para uma situação de queda livre e inserido em um meio sem a ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo na carga terminal, ou seja, considerado fora d'água. A figura 6.3 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

A segunda simulação igualmente consiste no cabo solto em sua extremidade livre, a partir da mesma configuração espacial inicial da simulação anterior, saindo do repouso para uma situação de queda livre. Desta vez, ele é inserido em um meio com a ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo na carga terminal, além da aceleração gravitacional, ou seja, considerado dentro d'água. A figura 6.4 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

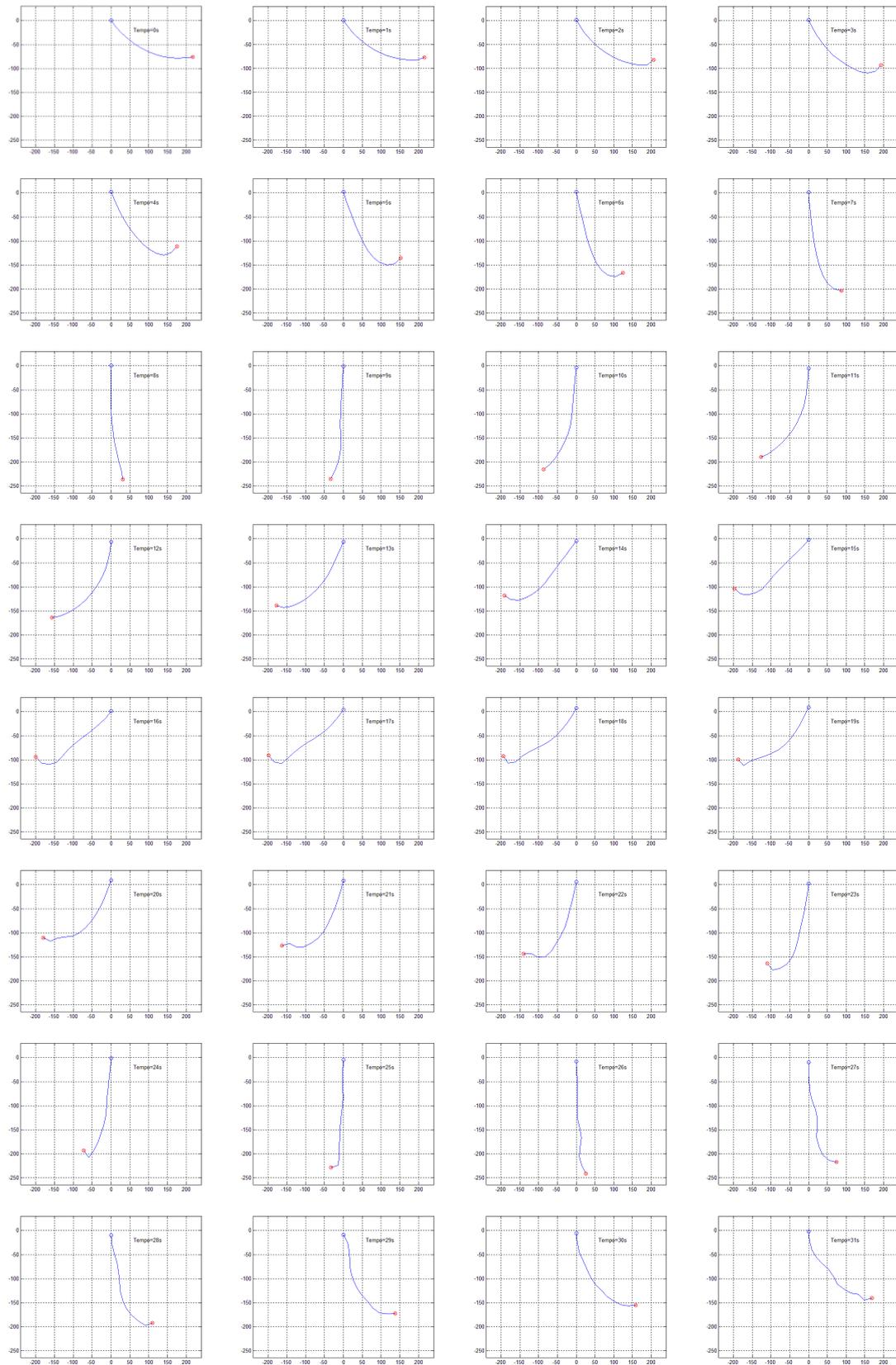


Figura 6.3 – Primeira simulação da primeira situação: 12 elos; cabo fora d’água; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.

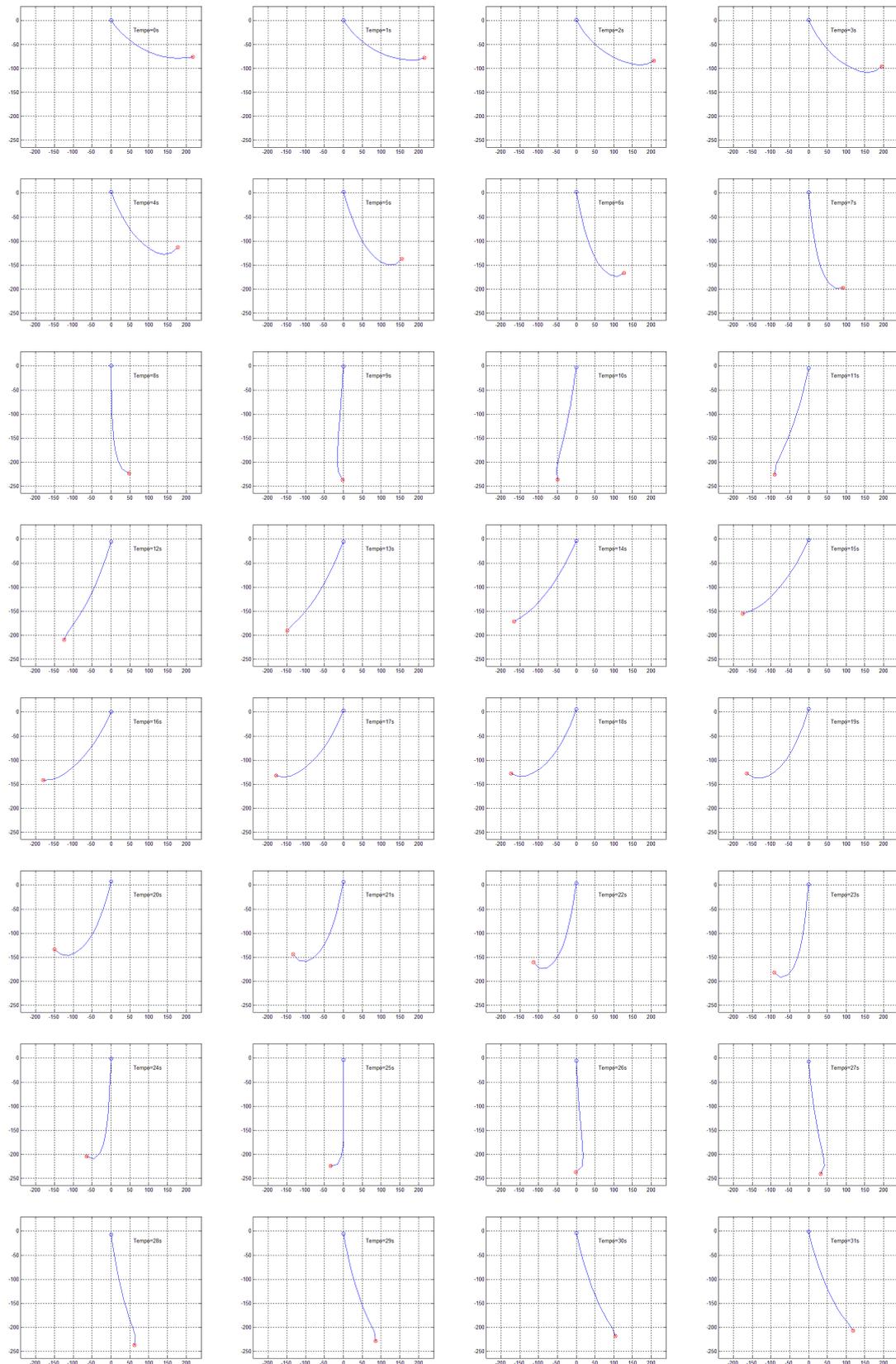


Figura 6.4 – Segunda simulação da primeira situação: 12 elos; cabo submerso; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.

Para a terceira e quarta simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados são os mesmos, apenas considerando-se agora o número de elos igual a 60, ao invés de 12. Com o aumento do número de elos e mantendo-se constante o comprimento total do cabo, é possível observar a característica de continuidade do mesmo, pois cada elo passa a ter um comprimento menor em relação às duas primeiras simulações realizadas.

A terceira simulação repete as condições da primeira, apenas aumentando-se o número de elos, conforme explicado acima. A figura 6.5 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

A quarta simulação repete as condições da segunda, apenas aumentando-se o número de elos, conforme explicado anteriormente. A figura 6.6 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

Para a quinta e sexta simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados são os mesmos, ainda considerando-se o número de elos igual a 60. Desta vez, aplica-se uma força externa  $u(t)$ , de característica senoidal, dependente do tempo e de intensidade igual a  $25000 \sin(0,5\pi t) N$ , na estrutura flutuante, atuando na direção vertical. Esta força externa é de natureza senoidal para simular uma oscilação harmônica, como por exemplo, o movimento das ondas no oceano.

A quinta simulação repete as condições da terceira, com a aplicação da força externa referida anteriormente. A figura 6.7 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

A sexta simulação repete as condições da quarta, com a aplicação da força externa referida anteriormente. A figura 6.8 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

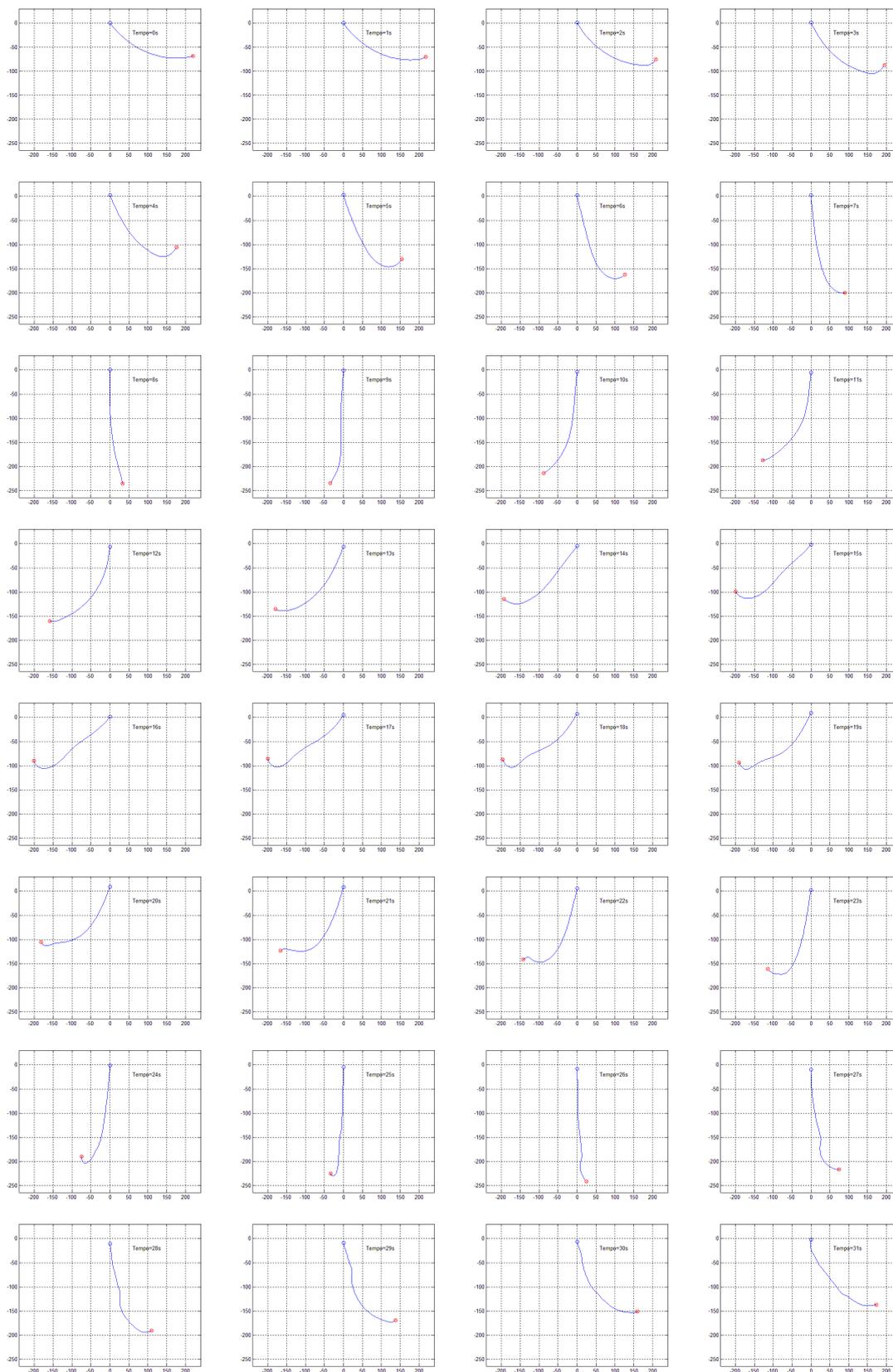


Figura 6.5 – Terceira simulação da primeira situação: 60 elos; cabo fora d’água; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.

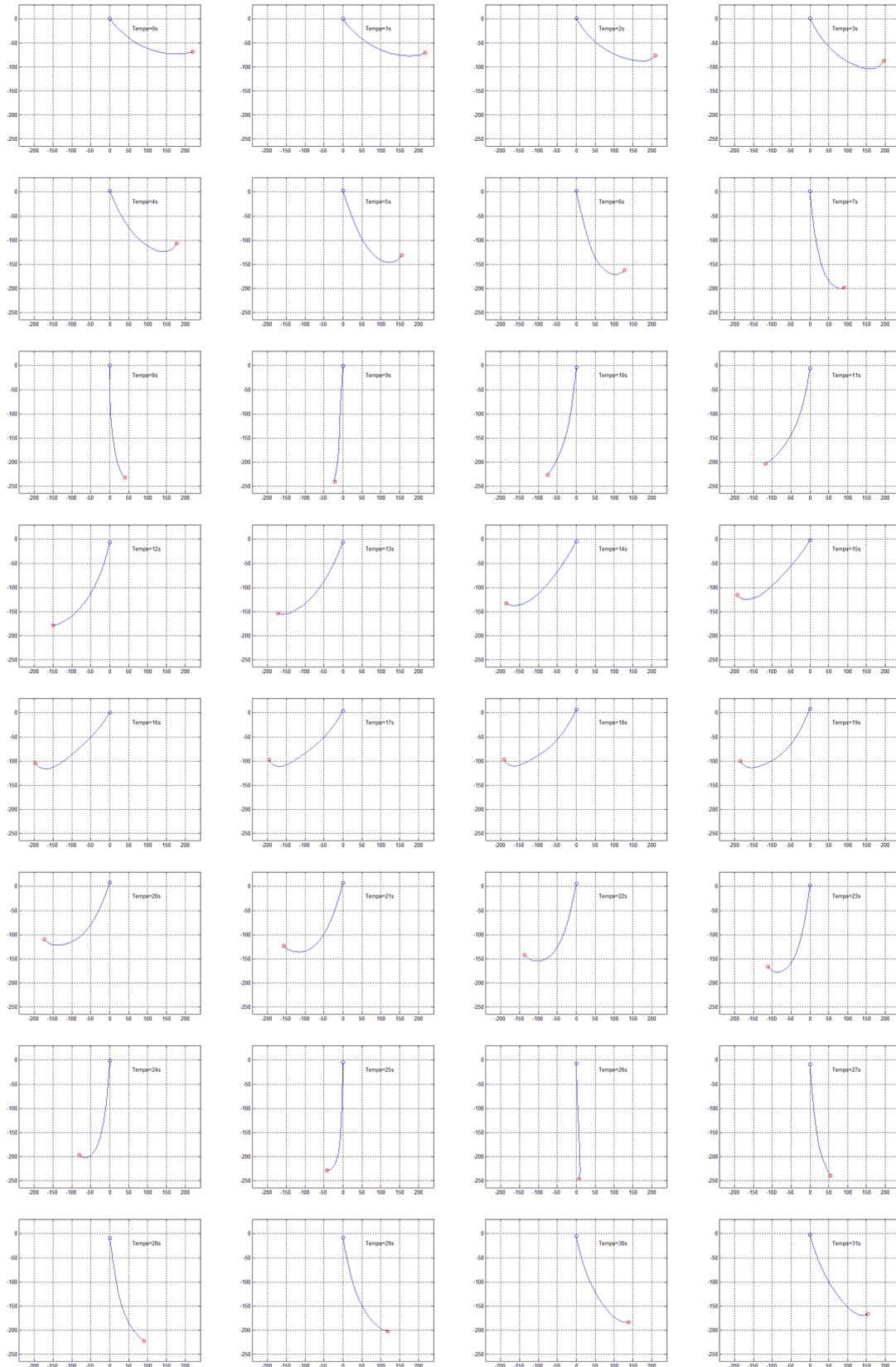


Figura 6.6 – Quarta simulação da primeira situação: 60 elos; cabo submerso; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.

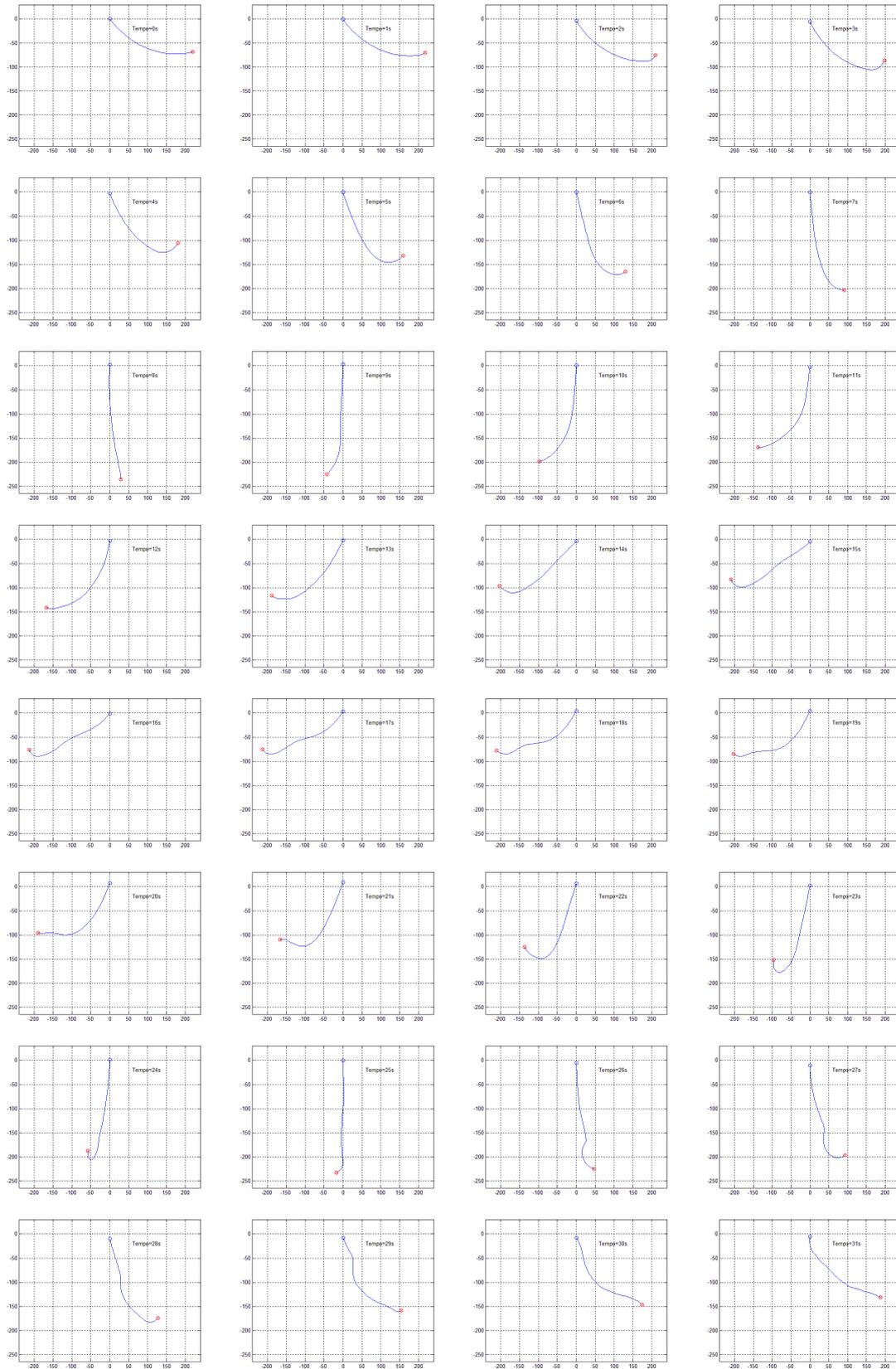


Figura 6.7 – Quinta simulação da primeira situação: 60 elos; cabo fora d’água; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial; força senoidal aplicada à estrutura flutuante.

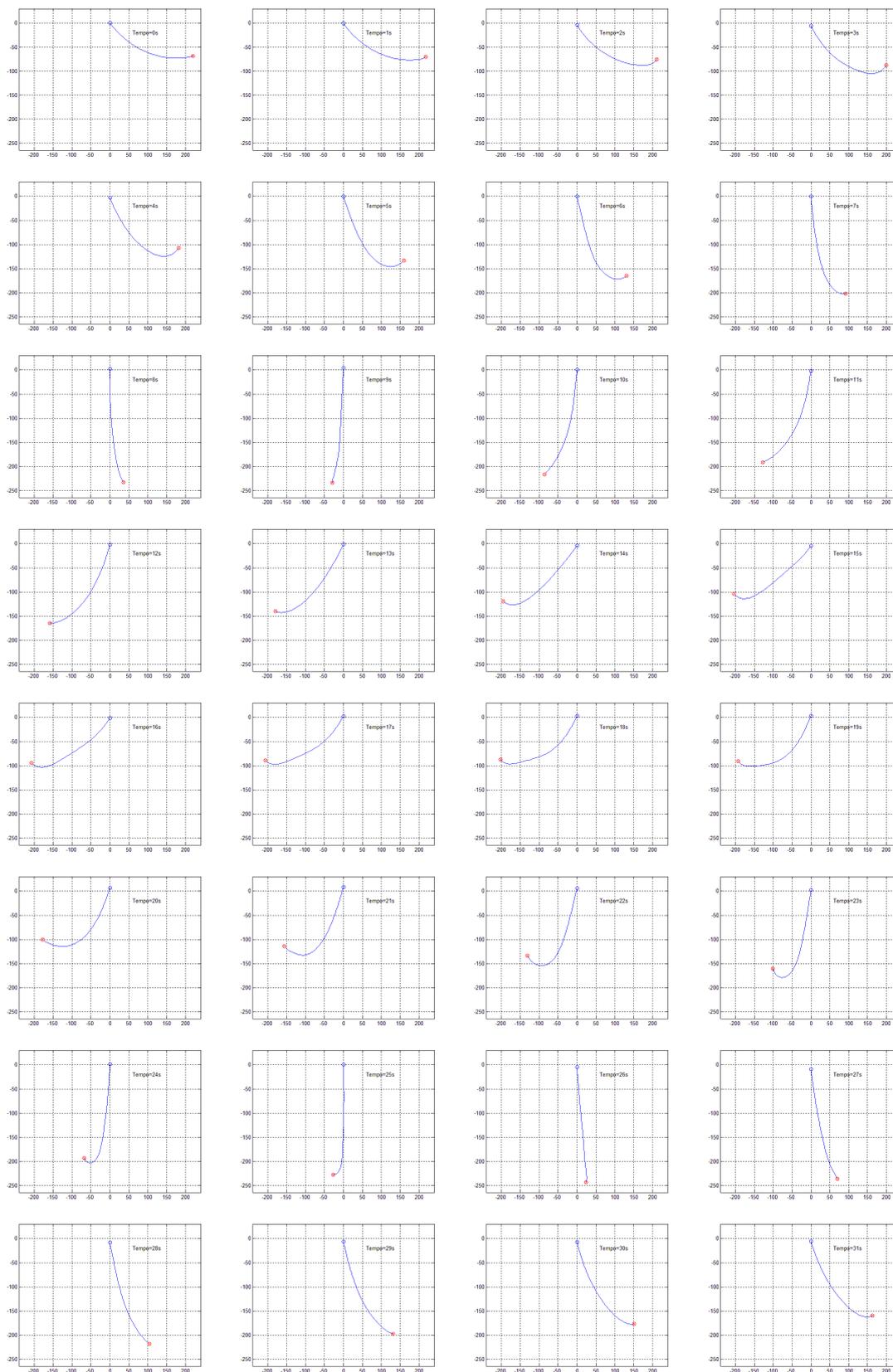


Figura 6.8 – Sexta simulação da primeira situação: 60 elos; cabo submerso; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial; força senoidal aplicada à estrutura flutuante.

No tópico a seguir, apresentam-se as simulações para a segunda situação considerada neste capítulo.

## **6.2 SEGUNDA SITUAÇÃO – CABO FIXO AO FUNDO DO OCEANO**

Conforme foi anteriormente exposto, para a segunda situação, foram consideradas três simulações para verificar o segundo caso estudado nesta dissertação. Nesta situação o cabo será considerado somente dentro da água, ou seja, sujeito à ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo na carga terminal em todos os elos.

Para as três simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados estão expressos a seguir, na tabela 6.3. A massa  $M$ , a constante elástica  $k_m$  e o coeficiente de atrito  $c_m$  da estrutura flutuante permanecem os mesmos, em relação à primeira situação.

Tabela 6.3 – Parâmetros adotados para as simulações da segunda situação.

Parâmetro	Valor numérico	Significado físico
$n$	60	Número de elos
$m_c$	$8 \cdot 10^8$ (kg)	Massa da carga terminal
$u(t)$	$25000 \sin(0,5\pi t)$ (N)	Força externa senoidal aplicada na estrutura flutuante
$k_{m_{2V}}$	$120000 \left(\frac{N \cdot m}{rd}\right)$	Constante elástica presente na carga terminal (direção vertical)
$c_{m_{2V}}$	$7920 \left(\frac{N \cdot m \cdot s}{rd}\right)$	Coefficiente de atrito presente na carga terminal (direção vertical)
$k_{m_{2H}}$	$120000 \left(\frac{N \cdot m}{rd}\right)$	Constante elástica presente na carga terminal (direção horizontal)
$c_{m_{2H}}$	$7920 \left(\frac{N \cdot m \cdot s}{rd}\right)$	Coefficiente de atrito presente na carga terminal (direção horizontal)

Na primeira simulação, a fixação da extremidade onde se encontra a carga terminal ao fundo do oceano é dada a partir da adoção de uma massa muito grande para a mesma, como mostra o parâmetro  $m_c$  na tabela acima. A figura 6.9 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

Na segunda simulação, a fixação da extremidade onde se encontra a carga terminal ao fundo do oceano é dada a partir da consideração das forças de vínculo aplicadas na mesma. Ou seja, os parâmetros se mantêm constantes, apenas considerando-se a massa de carga terminal finita, com o mesmo valor utilizado para a primeira situação (60kg), e constantes elásticas e de atrito presentes na carga terminal muito grandes (forças de vínculo), como mostram os parâmetros  $k_{m_{2V}}$ ,  $k_{m_{2H}}$ ,  $c_{m_{2V}}$  e  $c_{m_{2H}}$  na tabela 6.3. A figura 6.10 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5s.

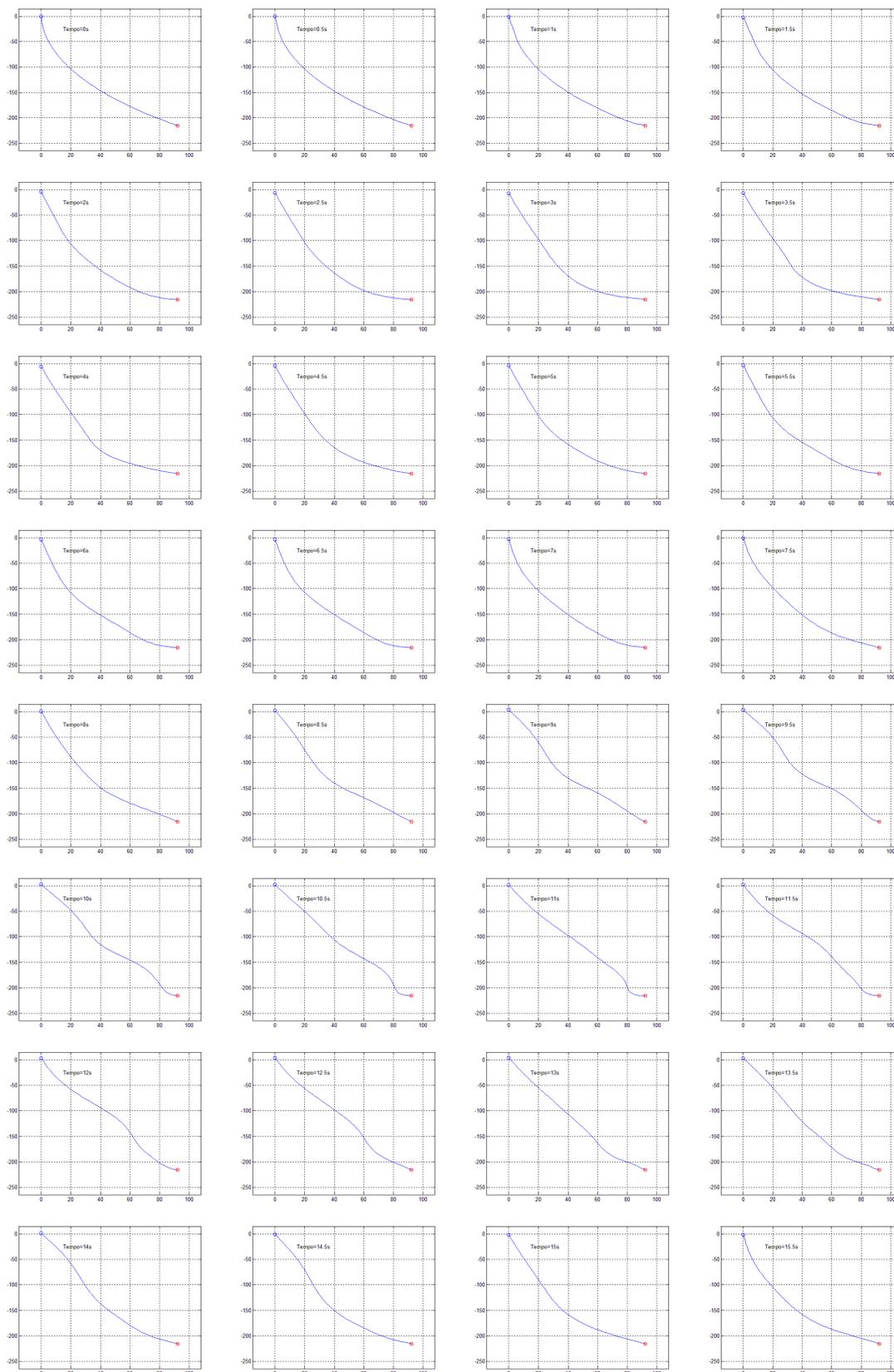


Figura 6.9 – Primeira simulação da segunda situação: 60 elos; considera-se a massa da carga terminal do cabo muito grande (cabo fixo ao fundo do oceano).

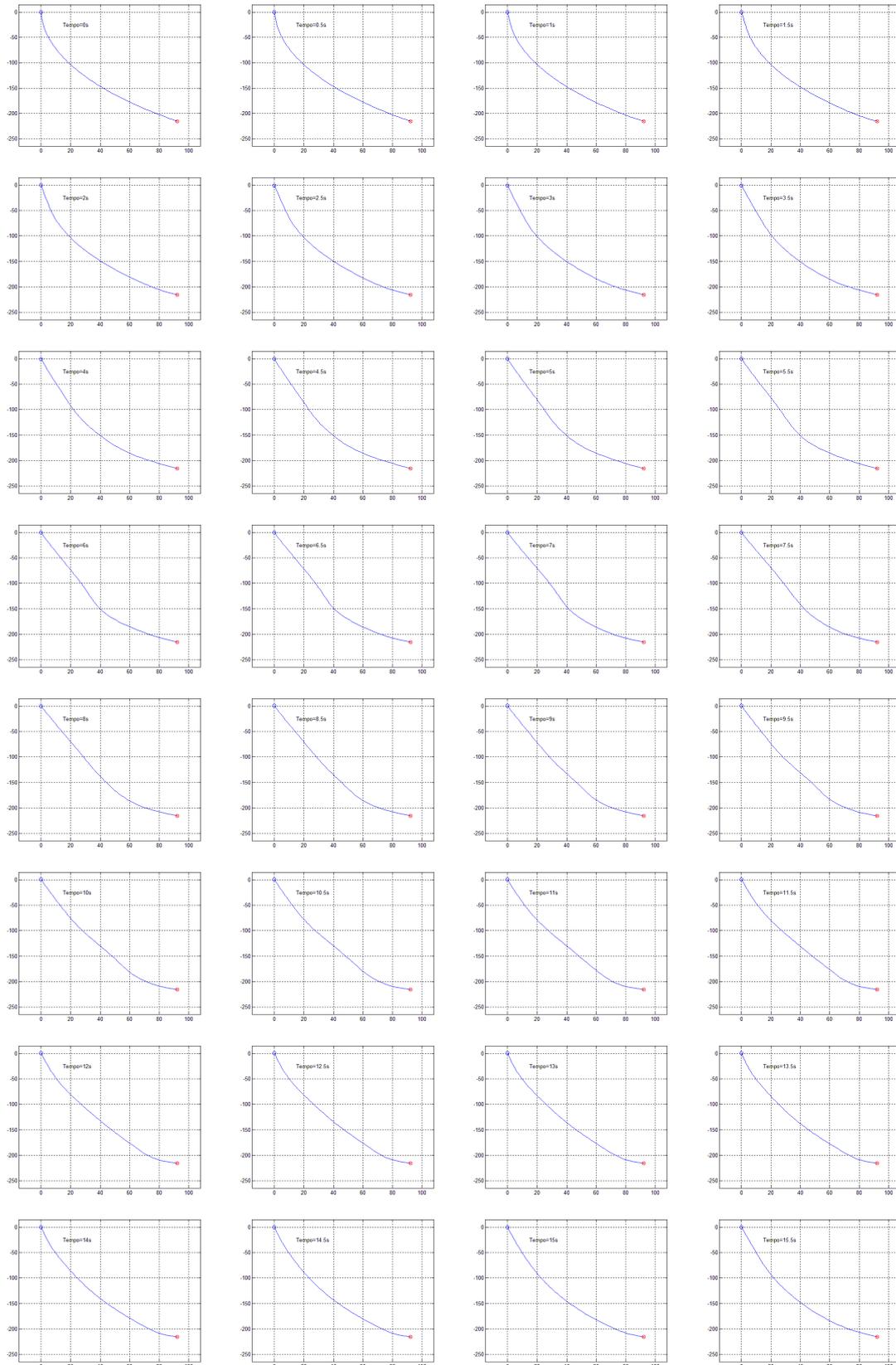


Figura 6.10 – Segunda simulação da segunda situação: 60 elos; consideram-se forças de vínculo prendendo a carga terminal do cabo ao fundo do oceano.

Pode-se perceber que os resultados expressos na figura 6.10 são semelhantes aos expressos na figura 6.9, o que era esperado fisicamente, pois ambos mostram duas formas distintas de simular a mesma situação, que consiste em um cabo fixo ao fundo do oceano sujeito a uma força externa na estrutura flutuante. No entanto, é possível notar uma pequena diferença. Isto se deve ao fato de a situação do cabo fixo ao fundo do oceano considerando-se uma massa de carga terminal muito grande garantir maior estabilidade numérica ao sistema, uma vez que na outra situação são inseridos vínculos elásticos com constantes elásticas e de atrito muito grandes. Estas, por sua vez, causam problemas na integração numérica, pois geram frequências muito díspares na dinâmica do sistema.

A terceira simulação repete as condições da primeira, apenas aumentando-se o número de elos de 60 para 110. Este aumento permite visualizar de forma mais clara o aspecto de continuidade do cabo, uma vez que uma das suas extremidades é fixa ao fundo do oceano. A figura 6.11 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

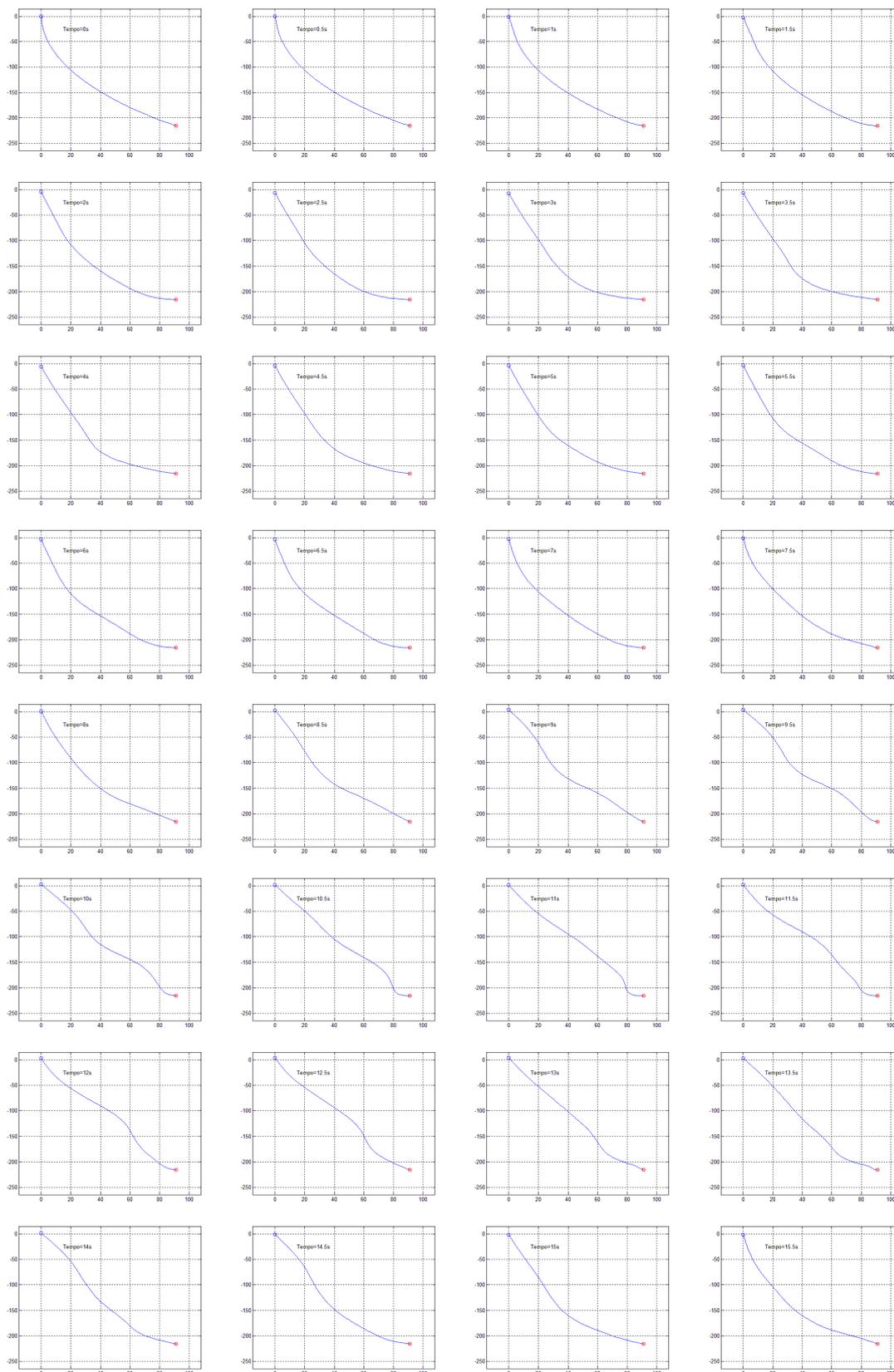


Figura 6.11 – Terceira simulação da segunda situação: 110 elos; considera-se a massa da carga terminal do cabo muito grande (cabo fixo ao fundo do oceano).

No tópico a seguir, apresentam-se as simulações para a terceira situação considerada neste capítulo.

### **6.3 TERCEIRA SITUAÇÃO – DUAS ESTRUTURAS FLUTUANTES**

Como dito anteriormente, para a terceira situação, foram consideradas três simulações para verificar o terceiro caso estudado nesta dissertação.

Para as três simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados estão expressos a seguir, na tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Parâmetros adotados para as simulações da terceira situação.

Parâmetro	Valor numérico	Significado físico
$n$	80	Número de elos
$c_i$	$11,2 \left( \frac{N.m.s}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito de cada articulação
$M_1$	6000 (kg)	Massa da primeira estrutura flutuante
$M_2$	6000 (kg)	Massa da segunda estrutura flutuante
$k_{m_1}$	$1200 \left( \frac{N.m}{rd} \right)$	Constante elástica da primeira estrutura flutuante
$c_{m_1}$	$237,6 \left( \frac{N.m.s}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito da primeira estrutura flutuante
$k_{m_{2V}}$	$1200 \left( \frac{N.m}{rd} \right)$	Constante elástica da segunda estrutura flutuante (direção vertical)
$c_{m_{2V}}$	$237,6 \left( \frac{N.m.s}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito da segunda estrutura flutuante (direção vertical)
$k_{m_{2H}}$	$4,8 \cdot 10^5 \left( \frac{N.m}{rd} \right)$	Constante elástica da segunda estrutura flutuante (direção horizontal)
$c_{m_{2H}}$	$95040 \left( \frac{N.m.s}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito da segunda estrutura flutuante (direção horizontal)
$u_{m_1}(t)$	$25000 \sin(0,5\pi t)$ (N)	Força externa senoidal aplicada na primeira estrutura flutuante

Na primeira simulação, como mostra a tabela 6.4, o movimento da segunda estrutura flutuante na direção horizontal é inibido, a partir da adoção de uma constante elástica  $k_{m_{2H}}$  e um coeficiente de atrito  $c_{m_{2H}}$  muito grandes. A figura 6.12 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

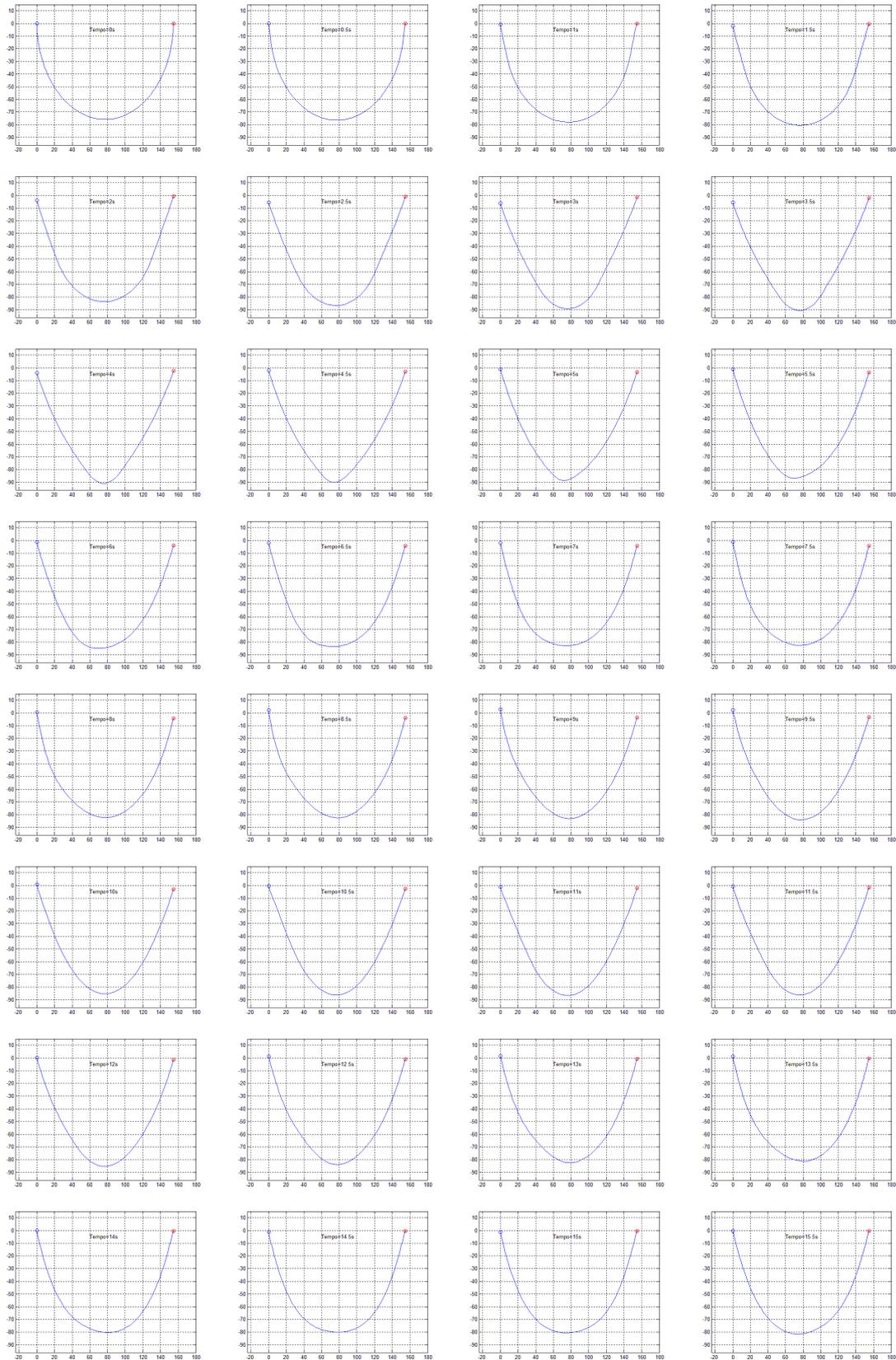


Figura 6.12 – Primeira simulação da terceira situação: força externa aplicada apenas na primeira estrutura flutuante; vínculo restritivo na direção horizontal para a segunda estrutura flutuante.

A segunda simulação repete as condições da primeira, apenas considerando-se a força senoidal  $u_{m_1}(t)$  com intensidade igual a  $2500 \sin(0,5\pi t) N$  e outra força externa senoidal  $u_{m_2}(t)$  aplicada na segunda estrutura flutuante, na direção vertical, de forma similar e mesma intensidade da força  $u_{m_1}(t)$  aplicada na primeira estrutura flutuante. A figura 6.13 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

A terceira simulação repete as condições da primeira, apenas considerando-se a força senoidal  $u_{m_1}(t)$  com intensidade igual a  $15000 \sin(0,5\pi t) N$  e a constante elástica  $k_{m_{2H}}$  e o coeficiente de atrito  $c_{m_{2H}}$  finitos e iguais respectivamente a  $480 N.m/rd$  e  $95,04 N.m.s/rd$ , ou seja, permitindo que a segunda estrutura flutuante se movimente na direção horizontal. A figura 6.14 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

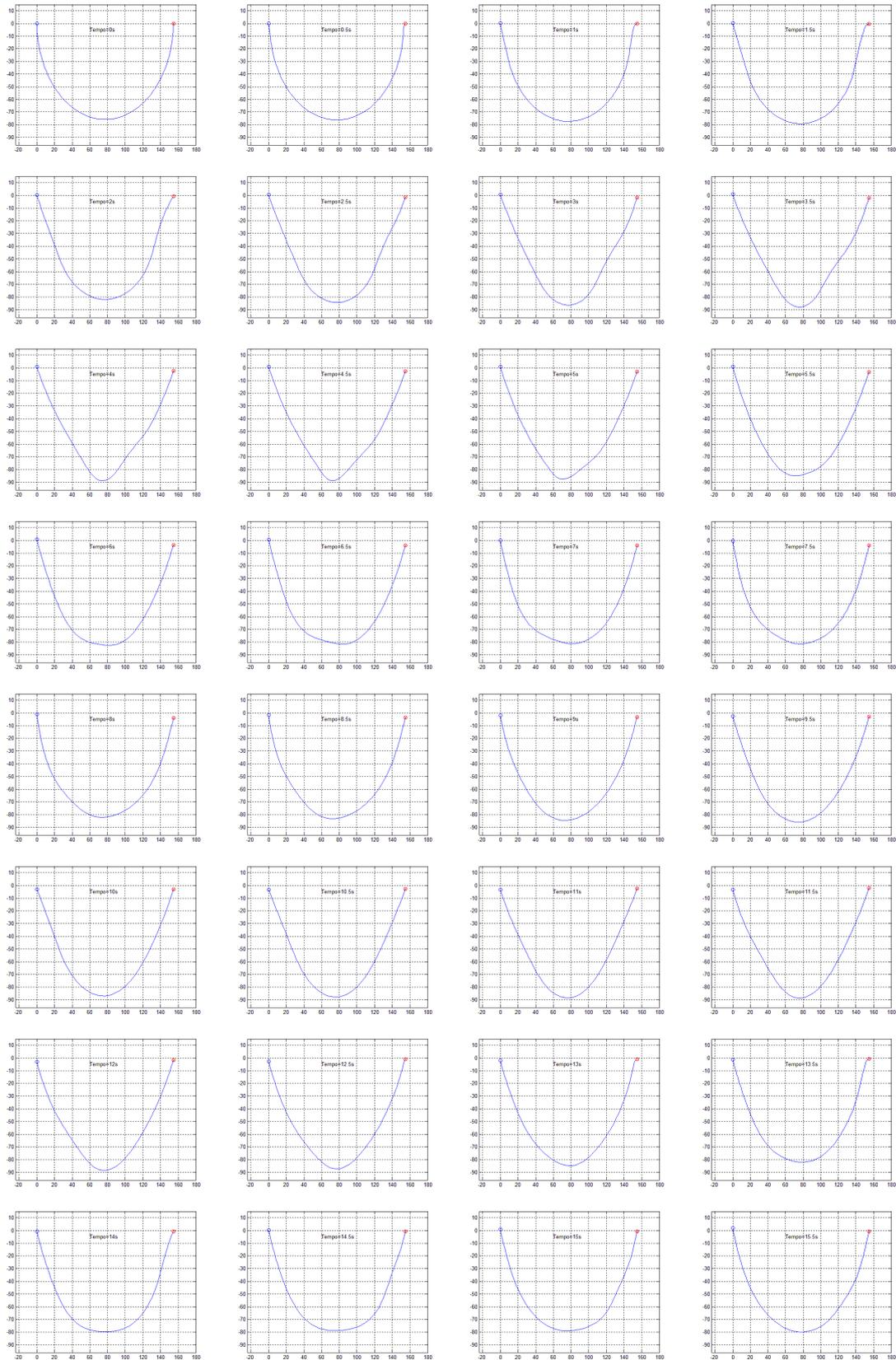


Figura 6.13 – Segunda simulação da terceira situação: forças externas aplicadas nas duas estruturas flutuantes; vínculo restritivo na direção horizontal para a segunda estrutura flutuante.

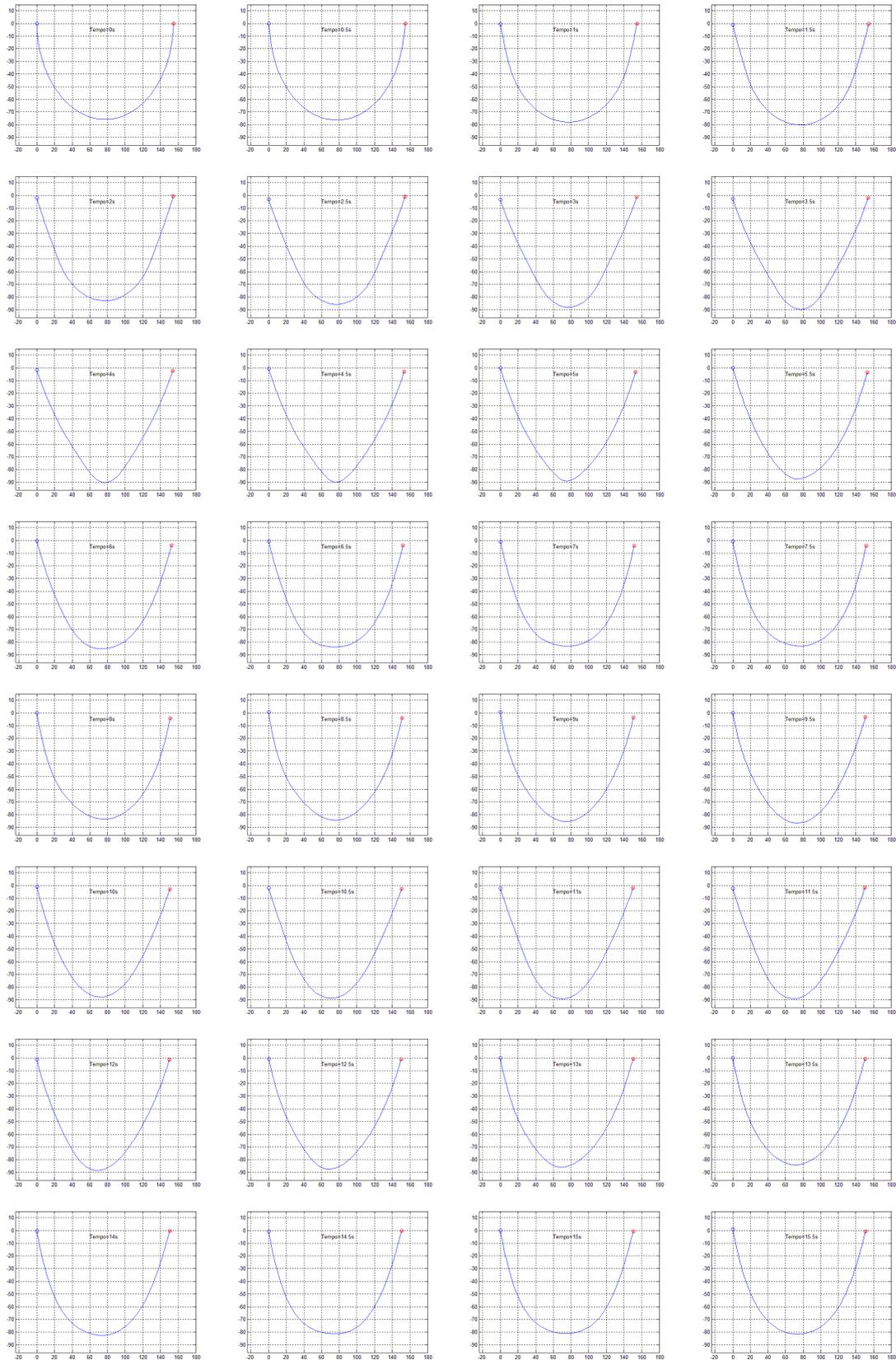


Figura 6.14 – Terceira simulação da terceira situação: força externa aplicada apenas na primeira estrutura flutuante; sem o vínculo restritivo na direção horizontal para a segunda estrutura flutuante.

Nas simulações mostradas anteriormente, ressalta-se que há vínculos elásticos nas direções horizontal e vertical para a segunda estrutura flutuante. A informação que o vínculo é restritivo refere-se à situação na qual as constantes elásticas e de atrito são muito grandes na direção horizontal, inibindo por completo o movimento nessa direção.

No tópico a seguir, apresentam-se as simulações para a quarta situação considerada neste capítulo.

#### **6.4 QUARTA SITUAÇÃO – FORÇAS APLICADAS NA CARGA TERMINAL SEM VÍNCULOS**

Para a quarta situação, como descrito no início deste capítulo, consideraram-se três simulações para verificar o comportamento do cabo a partir da aplicação de forças em sua carga terminal, situada na extremidade livre, desconsiderando-se os vínculos na mesma.

Para as três simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados estão expressos a seguir, na tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Parâmetros adotados para as simulações da quarta situação.

Parâmetro	Valor numérico	Significado físico
$n$	80	Número de elos
$M$	6000 (kg)	Massa da estrutura flutuante
$m_c$	60 (kg)	Massa da carga terminal
$c_i$	11,2 $\left(\frac{N \cdot m \cdot s}{rd}\right)$	Coefficiente de atrito de cada articulação
$k_m$	400 $\left(\frac{N \cdot m}{rd}\right)$	Constante elástica da estrutura flutuante
$c_m$	79,2 $\left(\frac{N \cdot m \cdot s}{rd}\right)$	Coefficiente de atrito da estrutura flutuante

Na primeira simulação, foi considerada apenas uma força  $\vec{F}_{c_x}$  de intensidade 200N atuando na carga terminal, na direção horizontal, no sentido da esquerda para a direita. A figura 6.15 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

A segunda simulação repete as condições da primeira, apenas acrescentando-se uma força  $\vec{F}_{c_y}$ , também de intensidade 200N, atuando na carga terminal na direção vertical, no sentido de baixo para cima. A figura 6.16 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 15,5 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 0,5 s.

A terceira simulação repete as condições da segunda, considerando-se a intensidade da força  $\vec{F}_{c_x}$  que atua na direção horizontal igual a 1N (apenas para tirar o cabo do estado inicial nesta direção) e a intensidade da força  $\vec{F}_{c_y}$  que atua na direção vertical igual a 2000N para cima, anulando-a após um tempo de 15,5 s. A figura 6.17 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, considerando um tempo de 31 s para a mesma e *frames* mostrados a cada 1 s.

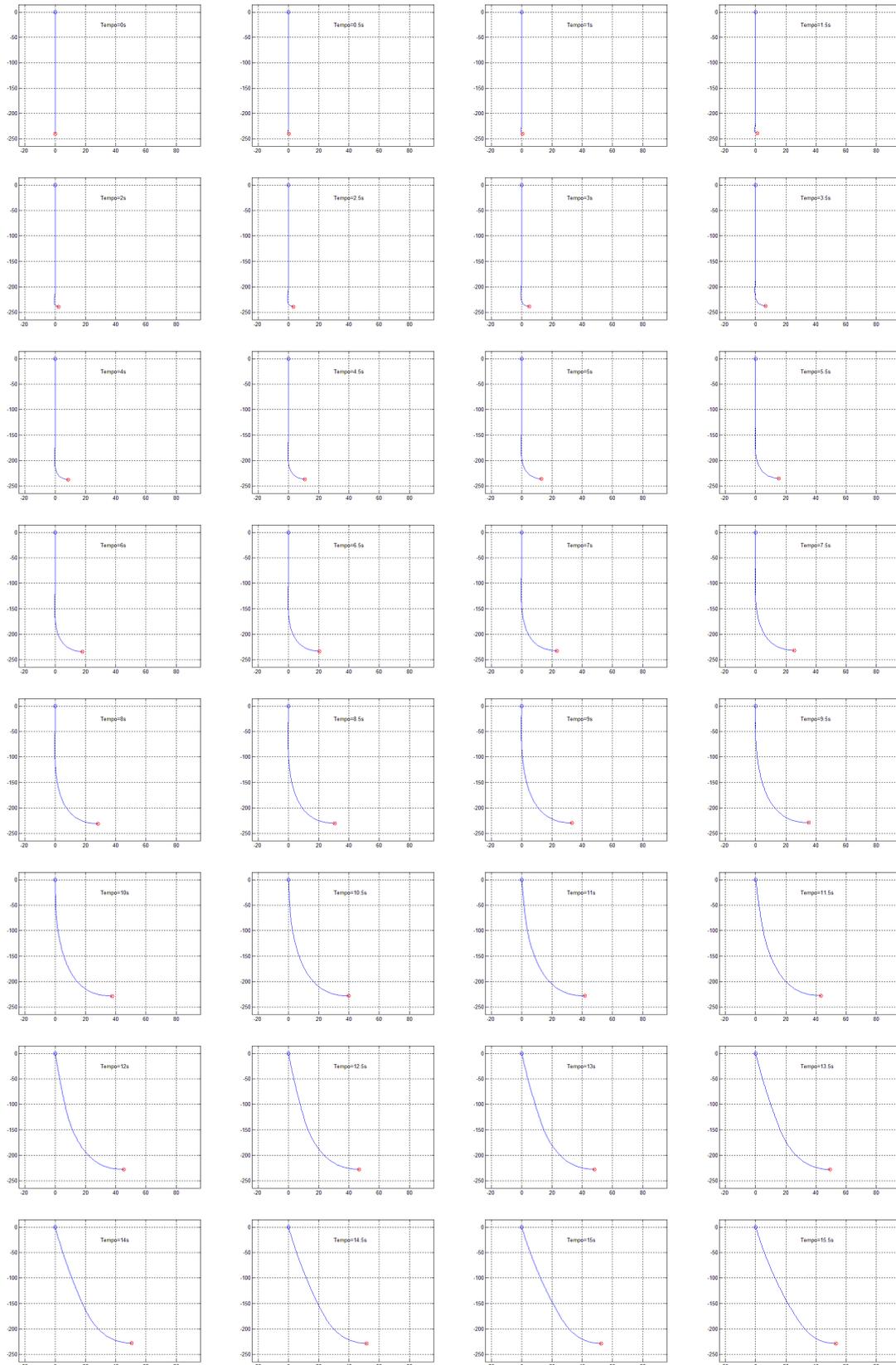


Figura 6.15 – Primeira simulação da quarta situação: força externa apenas na direção horizontal.

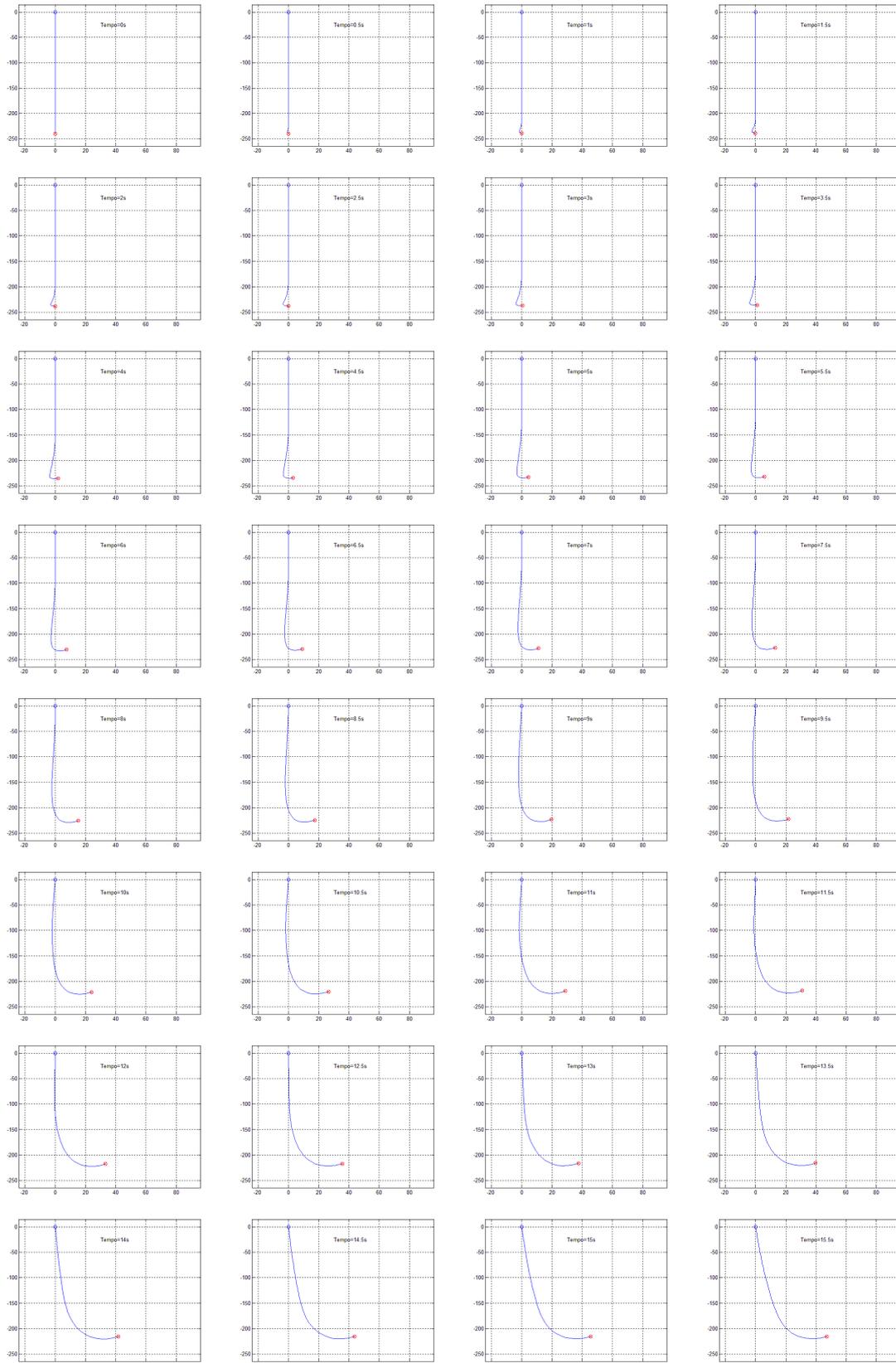


Figura 6.16 – Segunda simulação da quarta situação: forças externas nas direções horizontal e vertical.

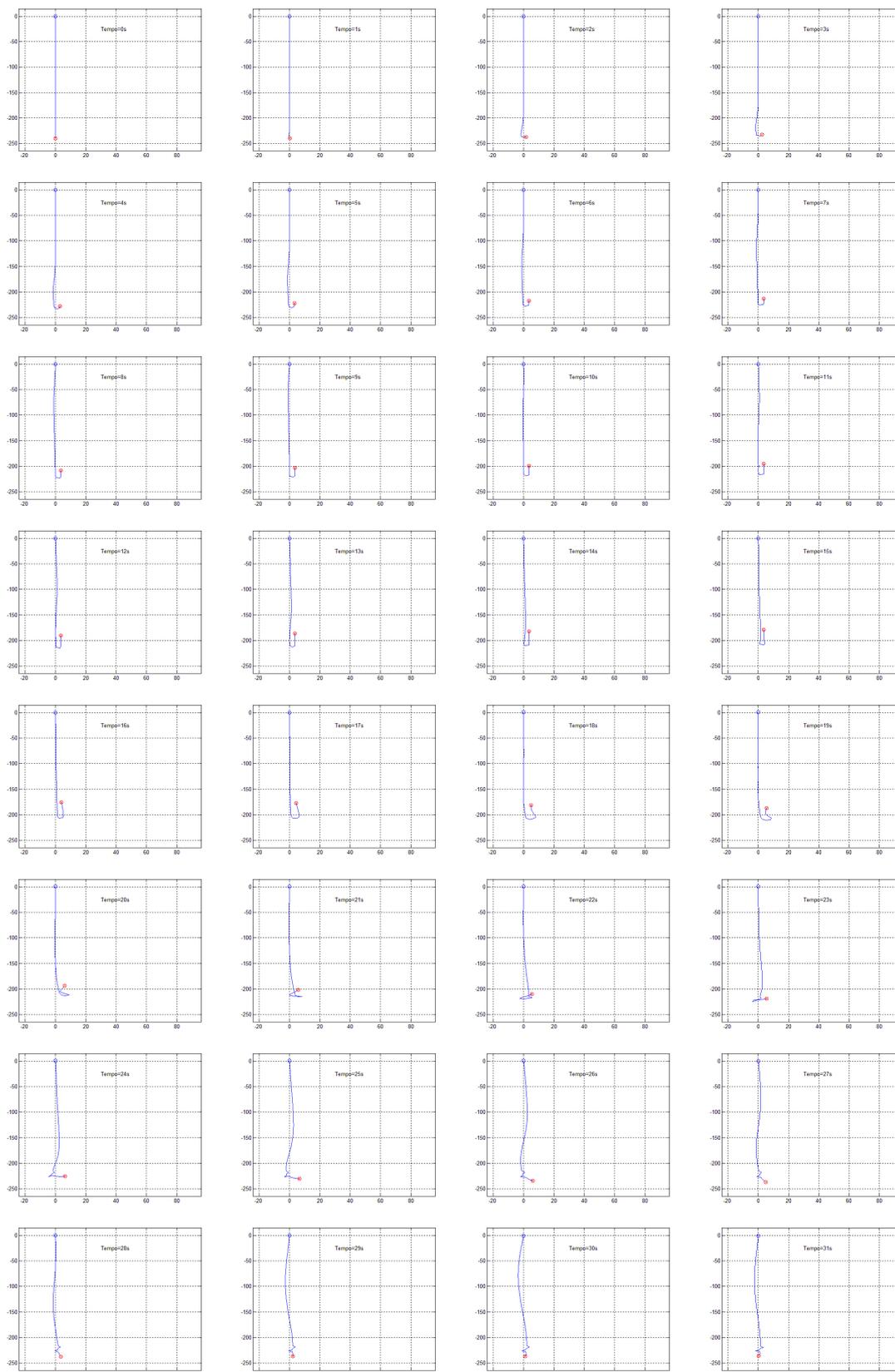


Figura 6.17 – Terceira simulação da quarta situação: força externa na direção vertical e queda livre após 15,5 segundos.

## 6.5 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES

Neste tópico, são discutidas as limitações presentes nas situações gerais que os algoritmos genéricos desenvolvidos podem simular. Também são feitas algumas considerações a respeito do tempo computacional gasto para realizar as simulações numéricas com estes algoritmos.

Para a obtenção da solução numérica das equações diferenciais dos modelos dinâmicos é necessário primeiramente obter-se a inversa da matriz de inércia destes modelos. No entanto, à medida que o número de elos no qual o cabo é dividido aumenta, mantendo-se constantes os demais parâmetros como o comprimento total e o raio do cabo, observa-se que o determinante desta matriz se aproxima de zero, tornando-a quase singular. Isto acarreta problemas no integrador numérico utilizado, não permitindo obter a solução numérica das equações diferenciais de forma precisa, quando o número de elos no qual a divisão do cabo é feita é muito grande. No presente trabalho, foram estudadas simulações computacionais com um cabo dividido em até 120 elos. Com esta quantidade de elos, as simulações mostraram resultados com uma forte impressão de continuidade na flexibilidade estrutural do cabo, denotando assim que este problema numérico não chega a ser muito restritivo.

Para realizar as simulações computacionais deste trabalho, o tempo gasto para cada simulação mostrou-se crescente à medida que a divisão do cabo era feita em um maior número de elos. Como exemplo para a análise destes tempos, foram feitas algumas simulações teste, todas considerando o cabo no primeiro caso estudado neste trabalho (com a primeira extremidade acoplada a uma estrutura flutuante e a segunda extremidade livre) e os parâmetros expressos na tabela 6.2, apenas considerando-se o cabo dentro d'água (sob a ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo na carga terminal). O tempo de simulação para todos os testes foi de 10 s, e o cabo foi dividido em 20, 40, 60, 80, 100 e 120 elos, com os respectivos tempos computacionais gastos para cada simulação expressos na tabela 6.6 a seguir. As simulações foram realizadas em um microcomputador modelo Inspiron 14 3437-A45, com um processador Intel Core i5 e memória RAM de 8 GB DDR3 1600 MHz. Como mencionado anteriormente, o *software* utilizado foi o MATLAB®.

Tabela 6.6 – Tempos computacionais gastos para cada simulação teste do primeiro caso.

<b>Número de elos</b>	<b>Tempo computacional</b>
20	56 s
40	2 min 53 s
60	6 min 48 s
80	13 min 26 s
100	21 min 12 s
120	30 min 56 s

Como foi discutido anteriormente, a tabela acima mostra que o aumento no número de elos nos quais o cabo é dividido tem como consequência um aumento significativo no tempo gasto para a realização das simulações computacionais.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões gerais a respeito dos estudos tratados nesta dissertação.

## **CAPÍTULO 7**

### **CONCLUSÕES**

No presente capítulo, apresentam-se as conclusões gerais obtidas nesta dissertação, assim como são indicadas sugestões para trabalhos futuros.

O desenvolvimento matemático contido neste trabalho, referente à modelagem dinâmica do cabo dividido em dois, três e quatro elos, foi feito manualmente, ou seja, sem o auxílio de *softwares* de manipulação simbólica. Da mesma forma foi feito o equacionamento dos torques em cada articulação fictícia e das tensões em cada elo, considerando o terceiro caso aqui estudado. A razão disto é que os padrões de crescimento existentes, à medida que são adicionados mais elos nos quais o cabo é dividido, tornam-se mais simples e claros de serem observados e compreendidos desta maneira. Considerando-se o tamanho das equações obtidas no Capítulo 3, bem como suas não linearidades, foi necessário utilizar um *software* para a realização de simulações computacionais, apresentadas no Capítulo 6.

Como foi comentado anteriormente no capítulo da Introdução, não foram encontrados, entre os trabalhos consultados, muitos trabalhos similares a este. A maioria dos artigos relacionados aborda técnicas que se baseiam principalmente no Método dos Elementos Finitos ou diferenças finitas, sem ênfase à modelagem dinâmica. Em particular, (ZANELA [31]) aborda a modelagem de cabos da mesma forma, tanto no espaço tridimensional, quanto em uma aproximação plana. No entanto, em seu estudo, não considera o cabo articulado a uma ou duas estruturas que também permitam movimentos verticais ou horizontais.

Portanto, este trabalho pretende ser uma contribuição para usuários futuros que necessitem desenvolver trabalhos relacionados com a modelagem dinâmica de estruturas do tipo cabo, acopladas a plataformas móveis. Neste trabalho estas plataformas foram representadas por sistemas massa-mola-amortecedor (simulando estruturas flutuantes no contexto oceânico). Utilizou-se o Formalismo Discreto aliado à Mecânica Analítica (formalismo de Euler-Lagrange). O desenvolvimento de algoritmos genéricos foi fundamental e, com eles, foi possível a obtenção do modelo dinâmico com até 120 elos.

Algumas conclusões sobre as teorias desenvolvidas nesta dissertação foram apresentadas anteriormente ao longo dos capítulos. Entretanto, são apresentados resumos sobre as principais conclusões extraídas de todo o trabalho realizado,

acompanhadas de comentários, visando uma melhor interpretação dos resultados obtidos.

No Capítulo 2 foi apresentado o desenvolvimento teórico do Formalismo Discreto (*Lumped Mass Approach*), no qual o cabo é dividido em partes rígidas, chamadas de elos, conectadas por articulações fictícias. Neste trabalho foi considerada uma aproximação plana, sendo tratados somente os movimentos de elevação. Foi incluída uma complexidade extra ao modelo, considerando-se o cabo articulado a uma ou duas estruturas flutuantes, representadas no modelo por sistemas massa-mola-amortecedor. As coordenadas do centro de massa e das articulações fictícias para cada elo são determinadas geometricamente. Assim, desenvolve-se uma única equação, capaz de montar o Lagrangeano do sistema de forma simples, independentemente do número de elos no qual a estrutura é dividida.

No Capítulo 3 foi desenvolvida a modelagem dinâmica do cabo para as situações em que a estrutura é dividida em dois, três e quatro elos, considerando-se os dois primeiros casos estudados nesta dissertação, que consistem no cabo articulado em uma estrutura flutuante em sua primeira extremidade para ambos; na segunda extremidade, livre para o primeiro caso e fixo ao fundo do oceano para o segundo caso. Este, por sua vez, sendo tratado como uma situação particular do primeiro. A partir das Equações de Euler-Lagrange, determinaram-se os sistemas de equações diferenciais ordinárias para os três modelos. Considerou-se um cabo de comprimento  $l$ , dividido em dois, três e quatro elos, cada um com comprimentos  $l_i$ , com  $i = 1,2,3,4$ , conectados entre si por articulações fictícias elásticas, além da primeira articulação, na junção do cabo com a estrutura flutuante. As equações dos modelos foram desenvolvidas manualmente de forma analítica. À medida que se aumenta o número de elos, o Lagrangeano do sistema cresce muito, assim como a quantidade de operações matemáticas na aplicação das Equações de Euler-Lagrange.

No Capítulo 4 foi desenvolvido o equacionamento dos torques em cada articulação fictícia e das tensões em cada elo, originados por forças externas aplicadas na carga terminal, considerando-se o cabo dividido em cinco elos para o terceiro caso estudado nesta dissertação. É importante lembrar que o terceiro caso também é considerado um caso particular do primeiro, possuindo, portanto, as mesmas equações para o modelo dinâmico. Da mesma forma, à medida que o número de elos no qual o

cabo é dividido aumenta, as equações para os torques e tensões também crescem consideravelmente.

O Capítulo 5 apresenta a formulação de algoritmos genéricos a partir das equações gerais desenvolvidas no mesmo. Foi feita uma análise sobre o crescimento das matrizes e vetores dos modelos dinâmicos para o cabo dividido em dois, três e quatro elos, apresentados no Capítulo 3; tal análise permitiu a criação de algoritmos genéricos para cada uma destas matrizes e vetores. Estes algoritmos permitem gerar de forma automática os elementos que formam as matrizes e os vetores do modelo dinâmico, considerando o caso geral de um número  $n$  de elos. Da mesma forma, foi analisado o crescimento das equações para os torques e tensões originados a partir das forças externas aplicadas na carga terminal, apresentadas no Capítulo 4, obtendo-se também um algoritmo genérico para as tensões nos elos, para um número qualquer de elos no qual o cabo é dividido.

No Capítulo 6 são apresentadas algumas simulações computacionais realizadas com os algoritmos genéricos desenvolvidos, com a finalidade de verificar qualitativamente se os modelos dinâmicos permitem reproduzir em simulação numérica resultados fisicamente esperados. Estas simulações foram divididas em quatro situações. Na primeira, com a carga terminal livre, foi feita a verificação do primeiro caso estudado neste trabalho, a partir de seis simulações computacionais; na segunda, com a segunda extremidade fixa ao fundo do oceano, foi feita a verificação do segundo caso, com três simulações; na terceira, com o cabo articulado a duas estruturas flutuantes distintas, foi feita a verificação do terceiro caso, com mais três simulações; na quarta, com a carga terminal livre, foram aplicadas forças externas na mesma, sem a presença dos vínculos elásticos estudados no terceiro caso, realizando-se, neste último caso, mais três simulações.

Em todas as situações, os resultados obtidos mostraram-se conforme o esperado fisicamente, de forma qualitativa. Foi possível observar a ação do arrasto hidrodinâmico na primeira situação, com as simulações considerando-se o cabo dentro e fora d'água. Um resultado já esperado também foi confirmado, tratando-se do aspecto contínuo do cabo à medida que se aumenta o número de elos considerados no modelo dinâmico. No entanto, à medida que esse número aumenta muito, passam a ocorrer problemas na solução numérica das equações diferenciais do modelo dinâmico, devido ao fato de o

determinante da matriz de inércia se aproximar de zero. Foi observada ainda a ação de forças externas ao sistema na carga terminal, na quarta situação; a ação dos vínculos elásticos, simulando consistentemente a segunda estrutura flutuante na terceira situação (permitindo ou não movimentação horizontal para a mesma); a fixação da carga terminal ao fundo do oceano na segunda situação, quando o cabo oscilava a partir de sua condição inicial e da movimentação vertical da estrutura flutuante, na qual é articulado em sua primeira extremidade.

Em síntese, as principais contribuições da presente dissertação são resumidas a seguir:

- i. Propor uma metodologia de modelagem dinâmica para estruturas flexíveis do tipo cabo, considerando-se uma complexidade extra, relativa à base na qual o cabo está articulado que não é fixa;
- ii. Proposição de algoritmos genéricos para gerar o modelo dinâmico do cabo e plataformas para qualquer número de elos rígidos considerados para representar a flexibilidade contínua da estrutura;
- iii. Propor um algoritmo genérico para gerar de forma automática as tensões ao longo do cabo, oriundas da aplicação de esforços externos em sua carga terminal;
- iv. Uma vez determinadas as tensões, foi possível também a determinação de forma automática dos torques atuantes nas articulações fictícias e assim, realizar simulações reproduzindo dinamicamente os efeitos de esforços externos atuantes na carga terminal do cabo;
- v. O estudo realizado na presente dissertação constitui uma etapa indispensável à generalização para o espaço em três dimensões, considerando-se, por exemplo, um ROV (*Remotely Operated Vehicle*) conectado à extremidade livre do cabo, aplicando esforços na mesma.

Por fim, pode-se considerar que o problema aqui estudado é facilmente adaptável a diversos fins de aplicação, conforme visto na Introdução, como por exemplo, Sistemas de Produção Flutuantes compostos por dutos de petróleo, cabos de

ancoragem, *risers*, entre outros. Como continuação deste trabalho, pretende-se estudar o acoplamento do modelo dinâmico do cabo estudado aqui com o modelo dinâmico próprio da carga terminal do mesmo, constituída de um ROV, por exemplo. Pretende-se ainda estudar como evolui a dinâmica do cabo articulado a uma ou duas estruturas flutuantes no espaço tridimensional e identificar um número ideal de elos que represente da forma mais fiel possível a dinâmica real do cabo nas condições tratadas nesta dissertação.

## **CAPÍTULO 8**

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] ANTUNES, E. B. **Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis – Cabos e Placas**. Rio de Janeiro, RJ, 2010. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [2] BAMDAD, M. **Analytical Dynamic Solution of a Flexible Cable-suspended Manipulator**. In: *Front. Mech. Eng.*, v. 8(4), p. 350-359, May 2013.
- [3] BI, G.; ZHU, S.; LIU, J.; FANG, X.; WANG, L. **Dynamic Simulation and Tension Compensation Research on Subsea Umbilical Cable Laying System**. In: *J. Marine Sci. Appl.*, v. 12, p. 452-458, September 2013.
- [4] CHANG, S.; PARK, J.; LEE, K. **Nonlinear Dynamic Analysis of Spatially Suspended Elastic Catenary Cable with Finite Element Method**. In: *KSCE Journal of Civil Engineering*, v. 12, no. 2, p. 121-128, March 2008.
- [5] CHATJIGEORGIOU, I. K.; MAVRAKOS, S. A. **The 3D Nonlinear Dynamics of Catenary Slender Structures for Marine Applications**. In: *Nonlinear Dynamics*. Croatia: INTECH, January 2010. 366 p. ISBN 978-953-7619-61-9.
- [6] CHOO, Y.; CASARELLA, M. J. **A Survey of Analytical Methods for Dynamic Simulation of Cable-Body Systems**. In: *Journal of Hydronautics*, v. 7, no. 4, p. 137-144, 1973.
- [7] DI MARZO, G. R. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais**. São Paulo, SP, 2010. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da USP – Universidade de São Paulo.
- [8] ESCALANTE, M. R.; SAMPAIO, R.; ROSALES, M. B.; RITTO, T. A. **Reduced Order Model of a 3D Cable Using Proper Orthogonal Decomposition**. Rosario, Argentina. In: *Mecánica Computacional*, v. XXX, p. 1143-1158, Nov. 2011.

- [9] FANG, Z.; HE, Q.; XIANG, B.; XIAO, H.; HE, K.; DU, Y. **A Finite Element Cable Model and Its Applications Based on the Cubic Spline Curve**. In: China Ocean Eng., v. 27, n. 5, p. 683-692, December 2012.
- [10] GOBAT, J. I.; GROSENBAUGH, M. A. **Application of the Generalized- $\alpha$  Method to the Time Integration of the Cable Dynamics Equations**. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 190, Issues 37-38, p. 4817-4829, June 2001.
- [11] GROSENBAUGH, M. A.; HOWELL, C. T.; MOXNES, S. **Simulating the Dynamics of Underwater Vehicles with Low-tension Tethers**. In: International Journal of Offshore and Polar Engineering, v. 3, no. 3, ISSN 1053-5381, September 1993.
- [12] GUO, A.; XU, Y.; LI, H. **Dynamic Performance of Cable-stayed Bridge Tower with Multi-stage Pendulum Mass Damper Underwind Excitations – I: Theory**. In: Earthquake Engineering and Engineering Vibration, v. 6, Issue 3, p. 295-306, September 2007.
- [13] ISOLDI, L. A. **Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis**. Rio Grande, RS, 2002. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [14] LIU, Y.; QIAN, Z.; XIA, K.; **Mechanical Response of Transmission Lines Based on Sliding Cable Element**. In: J. Cent. South Univ., v. 21, p. 3370-3377, August 2013.
- [15] LUONGO, A.; ZULLI, D.; PICCARDO, G. **Analytical and Numerical Approaches to Nonlinear Galloping of Internally-resonant Suspended Cables**. In: Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 315(3), p. 375-393, 2008.
- [16] MACHADO, C. C.; PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S. C. P.; DE BORTOLI, A. L. **Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis**. In: Revista Controle e Automação, v. 13, p. 134-140, 2002.

- [17] MASCIOLA, M. D.; NAHON, M.; DRISCOLL, F. R. **Static Analysis of the Lumped Mass Cable Model Using a Shooting Algorithm**. In: J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng., v. 138(2), p. 164-171, March-April 2012.
- [18] NAHON, M. **Dynamics and Control of a Novel Radio Telescope Antenna**. In: The American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-99-4120, p. 214-222, 1999.
- [19] NASCIMENTO, C. A. M. **Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica**. Brasília, DF, 2011. 71 p. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica), UnB – Universidade de Brasília.
- [20] OMURTAG, A.; LYTTON, W. W. **Spectral Method and High-order Finite Differences for the Nonlinear Cable Equation**. In: Neural Comput., v. 22(8), p. 2113-2136, August 2010.
- [21] PATHOTE, P. **Efficient Mathematical Model for Prestressing Cables and Its Implementation in Computer Analysis**. In: IOSR Journal of Mathematics (IOSR- JM), e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X, v. 10, Issue 3, Ver. V, p. 32-38, May-June 2014.
- [22] PEREIRA, A. E. L. **Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis**. Porto Alegre, RS, 1999. 144 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [23] PEREIRA, A. E. L. **O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-estrutura de um Cabo**. Porto Alegre, RS, 2010. 178 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [24] ROCHA, I. B. P. **Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados**. Rio Grande, RS, 2013. 116 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.

- [25] SANTOS, L. R. **Modelagem Não-linear da Dinâmica de Cabos Submarinos**. Rio de Janeiro, RJ, 2007. 100 p. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Mecânica), COPPE-UFRJ – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [26] SEO, Y.; JEONG, U.; CHO, J. **Simplified Finite Element Dynamic Analysis of Cable-supported Structures Subjected to Seismic Motions**. In: KSCE Journal of Civil Engineering, v. 14(4), p. 579-587, 2010.
- [27] SRIVASTAVA, V. K.; YVSS, S.; TAMSIR, M. **Dynamic Behavior of Underwater Towed-cable in Linear Profile**. 2011. In: International Journal of Scientific & Engineering Research, v. 2, Issue 7, ISSN 2229-5518, July 2011.
- [28] SUN, F. J.; ZHU, Z. H.; LAROSA, M. **Dynamic Modeling of Cable Towed Body Using Nodal Position Finite Element Method**. In: Ocean Engineering Journal, Elsevier, December 2010. Disponível em: [www.elsevier.com/locate/oceaneng](http://www.elsevier.com/locate/oceaneng). Acesso em 15/08/2014.
- [29] VAZ, M. A.; PATEL, M. H. **Transient Behaviour of Towed Marine Cables in Two Dimensions**. In: Applied Ocean Research, Elsevier, v. 17(1995), p. 143-153, August 1995.
- [30] WOLFSCHLUCKNER, A.; JODIN, D. **Modelling Cable Dynamics Exemplified by Load Transposition of Insulator Strings on Overhead Lines**. In: Proceedings in Manufacturing Systems, v. 8, Issue 3, ISSN 2067-9238, 2013.
- [31] ZANELA, E. B. **Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas**. Rio Grande, RS, 2013. 147 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [32] ZHAO, W.; CHEN, L.; JEAN, W. Z. **A Finite Difference Method for Simulating Transverse Vibrations of an Axially Moving Viscoelastic String**. In: Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Editorial Committee of Appl. Math. Mech., ISSN 0253-4827, 27(1), p. 23-28, September 2005.

## **APÊNDICE A**

**Elementos das matrizes e vetores para o cabo dividido em dois, três e quatro elos no primeiro caso, e cinco elos no terceiro caso**

**APÊNDICE A.1****CABO DIVIDIDO EM DOIS ELOS PARA O PRIMEIRO CASO**

Elementos da matriz de inércia  $I$ :

$$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_c$$

$$I_{12} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1$$

$$I_{13} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_2$$

$$I_{21} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1 = I_{12}$$

$$I_{22} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 + I_{R_1}$$

$$I_{23} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_{31} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_2 = I_{13}$$

$$I_{32} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = I_{23}$$

$$I_{33} = \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 + I_{R_2}$$

Elementos da matriz de coeficientes de atrito  $C$ :

$$C_{11} = c_m$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{31} = 0$$

$$C_{22} = c_1 + c_2$$

$$C_{23} = C_{32} = -c_2$$

$$C_{33} = c_2$$

Elementos da matriz de constantes elásticas  $K$ :

$$K_{11} = k_m$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{21} = K_{31} = 0$$

$$K_{22} = k_1 + k_2$$

$$K_{23} = K_{32} = -k_2$$

$$K_{33} = k_2$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos  $\vec{F}$ :

$$f_1 = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$f_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2$$

$$f_3 = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais  $\vec{G}$ :

$$g_1 = -(m_1 + m_2 + m_c)g$$

$$g_2 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) g l_1 \sin \theta_1$$

$$g_3 = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) gl_2 \sin \theta_2$$

Componentes do vetor de esforços externos  $\vec{T}$ :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{m_1}$$

$$T_3 = \tau_{m_2}$$

## APÊNDICE A.2

### CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS PARA O PRIMEIRO CASO

Elementos da matriz de inércia  $I$ :

$$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c$$

$$I_{12} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1$$

$$I_{13} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_2$$

$$I_{14} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_3$$

$$I_{21} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1 = I_{12}$$

$$I_{22} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 + I_{R_1}$$

$$I_{23} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_{24} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)$$

$$I_{31} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_2 = I_{13}$$

$$I_{32} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = I_{23}$$

$$I_{33} = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 + I_{R_2}$$

$$I_{34} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_{41} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_3 = I_{14}$$

$$I_{42} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) = I_{24}$$

$$I_{43} = \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) = I_{34}$$

$$I_{44} = \left( \frac{m_3}{4} + m_c \right) l_3^2 + I_{R_3}$$

Elementos da matriz de coeficientes de atrito  $C$ :

$$C_{11} = c_m$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{24} = C_{31} = C_{41} = C_{42} = 0$$

$$C_{22} = c_1 + c_2$$

$$C_{23} = C_{32} = -c_2$$

$$C_{33} = c_2 + c_3$$

$$C_{34} = C_{43} = -c_3$$

$$C_{44} = c_3$$

Elementos da matriz de constantes elásticas  $K$ :

$$K_{11} = k_m$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{21} = K_{24} = K_{31} = K_{41} = K_{42} = 0$$

$$K_{22} = k_1 + k_2$$

$$K_{23} = K_{32} = -k_2$$

$$K_{33} = k_2 + k_3$$

$$K_{34} = K_{43} = -k_3$$

$$K_{44} = k_3$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos  $\vec{F}$ :

$$f_1 = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$f_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2$$

$$f_3 = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2$$

$$f_4 = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais  $\vec{G}$ :

$$g_1 = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_c)g$$

$$g_2 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) g l_1 \sin \theta_1$$

$$g_3 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) g l_2 \sin \theta_2$$

$$g_4 = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) g l_3 \sin \theta_3$$

Componentes do vetor de esforços externos  $\vec{T}$ :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{m_1}$$

$$T_3 = \tau_{m_2}$$

$$T_4 = \tau_{m_3}$$

## APÊNDICE A.3

## CABO DIVIDIDO EM QUATRO ELOS PARA O PRIMEIRO CASO

Elementos da matriz de inércia  $I$ :

$$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_c$$

$$I_{12} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1$$

$$I_{13} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_2$$

$$I_{14} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_3$$

$$I_{15} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_4$$

$$I_{21} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1 = I_{12}$$

$$I_{22} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1^2 + I_{R_1}$$

$$I_{23} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_{24} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)$$

$$I_{25} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos(\theta_1 - \theta_4)$$

$$I_{31} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_2 = I_{13}$$

$$I_{32} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = I_{23}$$

$$I_{33} = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2 + I_{R_2}$$

$$I_{34} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_{35} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$I_{41} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_3 = I_{14}$$

$$I_{42} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) = I_{24}$$

$$I_{43} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) = I_{34}$$

$$I_{44} = \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 + I_{R_3}$$

$$I_{45} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)$$

$$I_{51} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_4 = I_{15}$$

$$I_{52} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) = I_{25}$$

$$I_{53} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) = I_{35}$$

$$I_{54} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) = I_{45}$$

$$I_{55} = \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 + I_{R_4}$$

Elementos da matriz de coeficientes de atrito  $C$ :

$$C_{11} = c_m$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{21} = C_{24} = C_{25} = C_{31} = C_{35} = C_{41} = C_{42} = C_{51} = C_{52} = \\ = C_{53} = 0$$

$$C_{22} = c_1 + c_2$$

$$C_{23} = C_{32} = -c_2$$

$$C_{33} = c_2 + c_3$$

$$C_{34} = C_{43} = -c_3$$

$$C_{44} = c_3$$

$$C_{45} = C_{54} = -c_4$$

$$C_{55} = c_4$$

Elementos da matriz de constantes elásticas  $K$ :

$$K_{11} = k_m$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{15} = K_{21} = K_{24} = K_{25} = K_{31} = K_{35} = K_{41} = K_{42} = K_{51} = \\ = K_{52} = K_{53} = 0$$

$$K_{22} = k_1 + k_2$$

$$K_{23} = K_{32} = -k_2$$

$$K_{33} = k_2 + k_3$$

$$K_{34} = K_{43} = -k_3$$

$$K_{44} = k_3$$

$$K_{45} = K_{54} = -k_4$$

$$K_{55} = k_4$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \\
 &\quad -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + \\
 &\quad -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4^2 \\
 f_2 &= \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
 f_3 &= -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
 f_4 &= -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + \\
 &\quad -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
 f_5 &= -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2^2 + \\
 &\quad -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_3^2
 \end{aligned}$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais  $\vec{G}$ :

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_c)g \\
 g_2 &= \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) g l_1 \sin \theta_1 \\
 g_3 &= \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) g l_2 \sin \theta_2 \\
 g_4 &= \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) g l_3 \sin \theta_3
 \end{aligned}$$

$$g_5 = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) gl_4 \sin \theta_4$$

Componentes do vetor de esforços externos  $\vec{T}$ :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{m_1}$$

$$T_3 = \tau_{m_2}$$

$$T_4 = \tau_{m_3}$$

$$T_5 = \tau_{m_4}$$

**APÊNDICE A.4****CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS PARA O TERCEIRO CASO**

Componentes do vetor de esforços externos  $\vec{T}$ :

$$T_1 = u_{m_1}(t)$$

$$T_2 = \tau_{m_1} + \tau_1$$

$$T_3 = \tau_{m_2} + \tau_2$$

$$T_4 = \tau_{m_3} + \tau_3$$

$$T_5 = \tau_{m_4} + \tau_4$$

$$T_6 = \tau_{m_5} + \tau_5$$