UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO *CONSTRUCTAL DESIGN* APLICADOS AO ESTUDO DE FLAMBAGEM EM PLACAS COM FUROS HEXAGONAIS UTILIZADAS EM ESTRUTURAS NAVAIS E OCEÂNICAS

CAIO CESAR CARDOSO DA SILVA

Rio Grande, Dezembro de 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO *CONSTRUCTAL DESIGN* APLICADOS AO ESTUDO DE FLAMBAGEM EM PLACAS COM FUROS HEXAGONAIS UTILIZADAS EM ESTRUTURAS NAVAIS E OCEÂNICAS

CAIO CESAR CARDOSO DA SILVA

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Universidade Federal do Rio Grande, como requesito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Liércio André Isoldi, Dr. Eng. Mecânica.
Co – orientador: Mauro de Vasconcellos Real, Dr. Eng. Civil.

Rio Grande, Dezembro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Aerton e Soraia, pelo incentivo ao estudo em todas as etapas da minha vida acadêmica, estando sempre ao meu lado nos momentos bons e ruins. O apoio deles foi essencial para a finalização de mais esta etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Liércio André Isoldi, pela orientação, amizade, paciência, incentivo e dedicação ao longo de todos esses anos que trabalhamos juntos, que resultaram nesta dissertação de mestrado, além de diversos trabalhos publicados em periódicos e anais de congressos.

Ao meu co – orientador, Prof. Mauro de Vasconcellos Real, pela orientação, apoio e disposição ao passar os conhecimentos necessários para a elaboração deste trabalho.

À minha irmã, Alessandra, pela amizade, carinho e apoio ao longo desta jornada.

Ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO), Prof. Elizaldo Domingues dos Santos, e à secretaria do PPGEO pela disposição e ajuda durante esta trajetória.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior, CAPES, pelo apoio financeiro ao longo do trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande – FURG, por ofertar o curso de mestrado em Engenharia Oceânica e por disponibilizar todos os recursos necessários para a conclusão do curso.

RESUMO

DA SILVA, C. C. C., **Simulação numérica e Método *Constructal Design* aplicados ao estudo de flambagem em placas com furos hexagonais utilizadas em estruturas navais e oceânicas.** Dissertação de Mestrado (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, 2015.

Placas finas de aço são componentes estruturais de grande importância, quando utilizados em estruturas navais e oceânicas como, por exemplo, plataformas de petróleo, comportas, docas flutuantes e embarcações em geral. Uma característica geometrica notável em placas finas de aço é a sua esbeltez. Quando uma placa esbelta é submetida a um carregamento de compressão axial, um comportamento mecânico denominado flambagem pode ocorrer, provocando um deslocamento lateral do elemento. Este fenômeno de instabilidade pode ser dividido em flambagem elástica (linear) e elasto-plástica (não linear), dependendo de aspectos dimensionais, construtivos e/ou operacionais. Constantemente, a realização de perfurações nestes componentes estruturais é necessária, o que gera uma redistribuição de tensões nas placas, causando mudanças nas características de flambagem e no desempenho mecânico da placa. Este trabalho propõe um estudo do fenômeno de flambagem em placas quadradas ou retangulares, simplesmente apoiadas e com perfurações hexagonais centralizadas. A simulação numérica foi utilizada, com o auxílio do software ANSYS®, para determinar a carga crítica de flambagem e a carga de colapso da placa. O método *Constructal Design* foi aplicado, permitindo avaliar a influência do grau de liberdade H_0/L_0 (sendo H_0 a altura e L_0 o comprimento da perfuração, respectivamente) de cada tipo de perfuração (hexagonal longitudinal e transversal), no comportamento mecânico das placas. A fração de volume da perfuração na placa (ϕ) foi outro grau de liberdade considerado, correspondendo a 10%, 15%, 20% e 25% do volume total da placa, respectivamente. Os resultados mostraram a direta influência da relação H_0/L_0 na definição do tipo de flambagem para cada valor de fração de volume estudada. Além disso, o método *Constructal Design*, associado ao mecanismo de busca exaustiva, permitiu definir a dimensão ótima para cada tipo de perfuração, ou seja, aquela que conduz a placa a um melhor desempenho mecânico.

Palavras-chave: Simulação numérica, *Constructal Design*, Flambagem elástica, Flambagem elasto-plástica, Perfurações hexagonais.

ABSTRACT

DA SILVA, C. C. C.**, Numerical simulation and *Constructal Design* Method applied to study of buckling in plates with hexagonal cutouts used in naval and oceanic structures.** Dissertation (Master's degree in Oceanic Engineering) - Pos-Graduate Program in Oceanic Engineering, FURG, Rio Grande, 2015.

Steel thin plates are structural components of great importance, when applied in naval and oceanic structures as petrol platforms, gates, floating docks and usually ships. A notable geometrical characteristic in thin steel plates is slenderness. When a slender plate is subjected to an axial compression loading, a mechanical behavior called buckling can occur, causing a lateral displacement of the element. This instability phenomenon can be divided in elastic buckling (linear) and elasto-plastic buckling (nonlinear), depending to dimensional, constructive or operational aspects. Constantly, is necessary to provide holes on these structural components, generating stress redistribution on the plates, causing changes in buckling characteristics and mechanical performance of the plate. This work purposes a buckling phenomenon study in square or rectangular plates, simply supported with centered hexagonal perforations. The numerical simulation was used, by means to ANSYS® software, to determine the critical buckling load and the collapse load plate. The *Constructal Design* method was applied, allowing to evaluate the variation effect of the degree of freedom H_0/L_0 (where H_0 is the height and L_0 is the length of the perforation, respectively) for each perforation type (longitudinal and transversal hexagonal), on the mechanical behavior plates. The hole volume fraction plate (ϕ) was other degree of freedom considered, corresponding to 10%, 15%, 20% e 25% to total volume of the plate, respectively. The results showed the direct influence of the H_0/L_0 relation to buckling type definition for each studied volume fraction value. Moreover, the *Constructal Design* method, associate to the exhaustive search mechanism, allowed to define the optimal size for each hole type that conduct the plate to a better mechanical performance.

Keywords: Numerical simulation, *Constructal Design*, Elastic buckling, Elasto-plastic buckling, Hexagonal perforations.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

E Módulo de elasticidade longitudinal.

F Vetor força global.

F_{NL} Vetor de forças internas nodais não lineares.

F_z Força na direção do eixo Z.

G Módulo de elasticidade transversal.

H Largura da placa.

L Comprimento da placa.

K Matriz de Rigidez global da estrutura.

K_E Matriz de rigidez responsável pelas pequenas deformações no elemento.

K_G Matriz de rigidez geométrica.

K_t Matriz de rigidez tangente.

M_x Momento em torno do eixo X.

M_y Momento em torno do eixo Y.

P Carregamento axial de compressão aplicado nas laterais da placa.

P_0 Passo de carga.

P_{cr} Carga crítica, responsável pelo fenômeno de flambagem elástica em placas.

P_u Carga pós-crítica ou última, responsável pelo fenômeno de flambagem elasto-plástica em placas.

R_0 Forças resultantes que tendem a levantar os cantos da placa.

TLN Tensão limite normalizada.

U Vetor deslocamento total da placa.

V Volume total da placa.

V_0 Volume da perfuração.

W_H Solução da forma homogênea que satisfaz as condições de contorno da placa.

W_p Solução particular da forma não homogênea atendendo ao equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa.

a Comprimento de uma placa fina.

b Largura de uma placa fina.

$f^{(e)}$ Vetor de força do elemento.

f_1, f_2 Forças atuantes na mola.

h Espessura de um elemento de placa fina.

k Coeficiente de flambagem da placa.

$k^{(e)}$ Matriz de Rigidez do elemento.

k_x Mudança de curvatura do plano médio deslocado da placa, na direção do eixo coordenado X.

k_y Mudança de curvatura do plano médio deslocado da placa, na direção do eixo coordenado Y.

m Número de semiondas longitudinais.

m_x Momento fletor por unidade de comprimento em torno do eixo X.

m_y Momento fletor por unidade de comprimento em torno do eixo Y.

m_{xy} Momento torçor por unidade de comprimento atuante no plano XY.

n Número de semiondas transversais.

n_x Esforço normal de membrana por unidade de comprimento, atuante na direção do eixo X.

n_y Esforço normal de membrana por unidade de comprimento, atuante na direção do eixo Y.

n_{xy} Esforço cisalhante de membrana por unidade de comprimento, atuante no plano XY.

$\overline{n_x}$ Força coplanar normal por unidade de comprimento, atuante na direção do eixo X.

$\overline{n_y}$ Força coplanar normal por unidade de comprimento, atuante na direção do eixo Y.

$\overline{n_{xy}}$ Força coplanar cisalhante por unidade de comprimento, atuante no plano XY.

p_z Esforço externo aplicado ao elemento infinitesimal.

p_z* Carga lateral responsável pelo efeito de deflexão.

q_x Esforço cortante por unidade de comprimento na direção do eixo X

q_y Esforço cortante por unidade de comprimento na direção do eixo Y.

t Espessura de uma placa fina.

u Deslocamento axial de um elemento de placa na direção do eixo coordenado X.

$u^{(e)}$ Vetor incógnitas nodais do elemento.

u_1 Deslocamento do nó 1 da mola.

u_2 Deslocamento do nó 2 da mola.

w Deslocamento axial da placa, na direção do eixo *Z*.

w_0 Curvatura inicial da placa.

w_x Deflexão lateral na direção do eixo *X*.

w_y Deflexão lateral na direção do eixo *Y*.

ΔP Vetor responsável pelo incremento de carga para atingir o equilíbrio.

ΔU Vetor responsável pelo incremento de deslocamentos para atingir o equilíbrio.

Φ Função de tensões de Airy.

ψ Vetor de cargas em desequilíbrio.

∇ Operador Laplaciano bidimensional.

α Constante que define as proporções entre as forças normais de referência.

β Constante que define as proporções entre as forças normais e cisalhantes de referência.

γ' Deformação por cisalhamento de um elemento de placa na direção do eixo coordenado *X*.

γ'' Deformação por cisalhamento de um elemento de placa na direção do eixo coordenado *Y*.

γ_{xy} Deformação por cisalhamento no plano *XY* de um elemento de placa.

γ_{xz} Deformação por cisalhamento no plano *XZ* de um elemento de placa.

γ_{yz} Deformação por cisalhamento no plano *YZ* de um elemento de placa.

ε_x Deformação normal na direção do eixo coordenado *X*.

ε_y Deformação normal na direção do eixo coordenado *Y*.

ε_z Deformação normal na direção do eixo coordenado *Z*.

θ Inclinação da barra.

θ_x Inclinação da superfície da placa deformada para o eixo *X*.

θ_y Inclinação da superfície da placa deformada para o eixo *Y*.

λ Fator de carga.

λ_{cr} Fator de carga crítico ou valor crítico.

ν Coeficiente de Poisson do material.

σ_{cr} Tensão crítica para flambagem elástica da placa.

σ_x Tensão normal na direção do eixo coordenado *X* de um elemento de placa.

σ_y Tensão normal na direção do eixo coordenado *Y* de um elemento de placa.

σ_y Tensão de escoamento do material.

σ_u Tensão pós-crítica ou última para flambagem elásto-plástica da placa.

τ_{xy} Tensão de cisalhamento no plano *XY* de um elemento de placa.

τ_{xz} Tensão de cisalhamento no plano *XZ* de um elemento de placa.

τ_{yz} Tensão de cisalhamento no plano *YZ* de um elemento de placa.

ϕ Fração de volume da perfuração.

χ Mudança de deformação do plano médio deslocado da placa.

ϑ Ângulo de rotação de uma placa deformada.

υ Deslocamento axial de um elemento de placa na direção do eixo coordenado *X*.

υ_x Deslocamento axial na direção do eixo coordenado *X*.

υ_y Deslocamento axial na direção do eixo coordenado *Y*.

LISTA DE ABREVIATURAS

DOF “Degree Of Freedom”.

MEF Método dos Elementos Finitos.

TLN Tensão Limite Normalizada.

1. INTRODUÇÃO

Placas finas de aço são elementos estruturais amplamente utilizados em diversas áreas da engenharia civil, mecânica, naval e aeronáutica. Estes elementos apresentam grande utilização na indústria automobilística e aérea, como por exemplo, na fabricação de veículos e aeronaves em geral, enquanto que o setor da construção civil utiliza placas como componentes estruturais na construção de edificações e pontes. A indústria naval e oceânica é um setor que merece destaque, por receber grandes investimentos do governo e estar em constante desenvolvimento no Brasil, apresentando uma grande demanda por placas finas de aço. Estas são utilizadas em diversos tipos de estruturas navais e oceânicas, conforme mostra a Fig. 1.1. Estruturas como plataformas de petróleo, pórticos de estaleiros, comportas, docas flutuantes e embarcações de pequeno a grande porte, utilizam placas de aço em sua composição estrutural. Sendo assim, a pesquisa sobre a análise de tensões em placas finas de aço é de grande importância, contribuindo para o desenvolvimento tecnológico industrial e estimulando os estudos sobre o tema no meio acadêmico.

Figura 1.1 – Exemplos de aplicação de placas finas de aço em estruturas navais e oceânicas. (Adaptado de: http://adrenaline.uol.com.br/forum/papo-cabeca/534185-polo-naval-do-rio-grande-do-sul-se-prepara-para-o-crescimento-e-geracao-de-empregos.html. http://www.portasdomar.pt/imprimir_noticia.php?id=302. http://actualidad.rt.com/actualidad/view/94940-submarino-aguas-territoriales-japon).

Em linhas gerais, o processo de fabricação de placas de aço compreende o aproveitamento do ferro, pela eliminação progressiva das impurezas contidas no minério de ferro. Este processo decorre de uma série de operações de transformação metalúrgica realizadas em siderúrgicas, onde também são feitos os processos de conformação mecânica ou laminação. Neste processo o aço em seu estado bruto é transformado em chapas esbeltas por meio de compressão entre cilindros metálicos (Silva, 2012). As placas finas de aço têm como principal característica a sua esbeltez, ou seja, possuem uma pequena espessura quando comparada com as dimensões de sua largura e comprimento.

Segundo Silva (2012), a utilização de placas em estruturas oferece vantagens significativas como: bom desempenho frente às solicitações as quais serão impostas, resistência aliada ao peso reduzido por se tratarem de elementos esbeltos, resistência à corrosão quando adicionado o cromo, níquel ou zinco (aço galvanizado), etc. Além da utilização do aço, que se caracteriza por ser um material isotrópico, também pode ser citada a utilização de materiais compósitos (materiais ortotrópicos), onde dois ou mais materiais com propriedades distintas são unidos, resultando em um novo tipo de material com características únicas.

De acordo com Yasuhisa et al. (2009), um dos fatores mais importantes no projeto de estruturas navais e oceânicas é a realização do dimensionamento da estrutura (cascos e demais partes de uma embarcação) de forma a resistir às cargas internas e externas, podendo ocorrer diferentes solicitações mecânicas nos componentes estruturais, conforme o propósito de utilização. Sendo originalmente plana, uma placa desenvolve tensões de cisalhamento, flexão e torção, quando sujeitas a cargas transversais ou axiais (Ventsel e Krauthammer, 2001). A Figura 1.2 ilustra a pressão hidrostática nos cascos de embarcações, onde o peso de carga de trabalho na estrutura inferior e a água de lastro são fatores predominantes na ocorrência de solicitações transversais em uma embarcação (Yasuhisa et al., 2009). As tensões de cisalhamento ocorrem comumente quando uma placa é submetida a esforços axiais de tração, enquanto que esforços axiais de compressão podem gerar grandes deformações por flexão ou torção. Os carregamentos axiais são de extrema importância em se tratando de estruturas navais e oceânicas, visto que solicitações acima das admissíveis podem ocasionar falha por cisalhamento ou flexão das placas que formam os cascos destas estruturas (Yasuhisa et al., 2009).

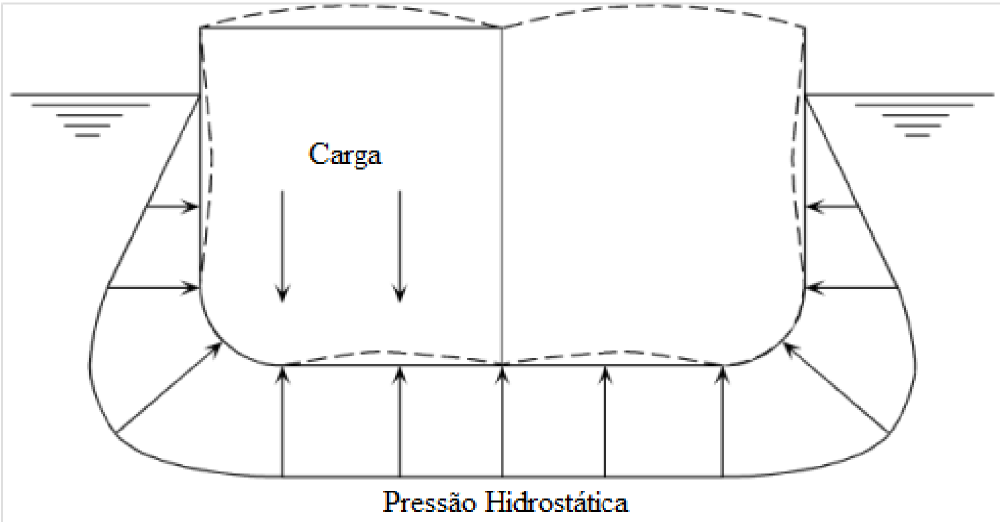


Figura 1.2 – Exemplo de deformação no casco de uma embarcação, provocada por carregamentos transversais (Yasuhisa et al., 2009).

Quase todas as partes de uma estrutura oceânica são constituídas de placas e vigas que, em sua grande maioria, sofrem carregamentos de compressão. Um fenômeno extremamente importante e decorrente do carregamento de compressão axial é a flambagem de componentes estruturais. A flambagem é um fenômeno muito estudado por diversos profissionais da área de engenharia, tendo como principal característica a súbita deflexão lateral, na direção transversal de aplicação da carga em uma estrutura.

Outra característica importante é a existência de perfurações em placas de aço, com as mais diferentes geometrias e tamanhos. Especificamente em estruturas navais e offshore, as perfurações têm como objetivo permitir acesso (janelas ou escotilhas), passagem de cabos de energia e tubulações ou, simplesmente, a redução do peso próprio da estrutura (Helbig et al., 2014). A presença de furos gera uma redistribuição de tensões acompanhada por uma mudança no comportamento mecânico das placas (Cheng e Zhao, 2010). Outras características como a geometria, dimensão e posicionamento do furo, influenciam diretamente no desempenho de uma placa, quando submetida a carregamentos de compressão axial (Chow e Narayanan, 1984).

Este trabalho tem grande importância para o setor naval e offshore, visto a constante demanda dessas indústrias por placas de aço, seja para fabricação de embarcações ou plataformas de petróleo. Outro fator que evidencia a importância do trabalho é a utilização destes componentes estruturais em sua forma otimizada, evitando assim, o desperdício de materiais, que é um fator que colabora para o aumento dos custos de um projeto (Correia, 2013). Além disso, a pesquisa é de grande importância no meio acadêmico, proporcionando um profundo aperfeiçoamento formativo do pesquisador, bem como a descoberta de novas tecnologias ou o aperfeiçoamento das já existentes. Sendo assim, é de grande importância a busca por novos estudos e informações, a respeito do assunto abordado nesta dissertação, por outros pesquisadores na área da engenharia.

2. ESTADO DA ARTE

Estudos realizados com placas de aço, sejam eles baseados em verificações de comportamento mecânico ou outros fenômenos, são realizados desde o fim do século XVIII. Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), um dos primeiros estudos com placas de aço datam de aproximadamente três séculos atrás, onde no ano de 1776, o cientista suíço Leonhard Euler desenvolveu uma analise com formulação matemática para o problema de vibração livre de placas (Euler, 1776). Cauchy (em 1828) e Poisson (em 1829) foram os primeiros pesquisadores a criarem formulações baseadas nas equações gerais da Teoria da Elasticidade para a solução de problemas de flexão em placas metálicas. Poisson aplicou as equações de deformações de placa de Germain e Lagrange para a solução de uma placa submetida a uma carga estática (Poisson, 1829). O engenheiro francês Claude Louis M. H. Navier obteve grande notoriedade ao ser o primeiro cientista a desenvolver corretamente uma equação diferencial para solução de placas submetidas a um carregamento distribuído estático e transversal, em 1823 (Ventsel e Krauthammer, 2001).

O avanço nos estudos sobre teoria de placas ocorreu a partir do final do século XIX e início do século XX, quando a madeira passou a ser substituída pelo aço na fabricação de embarcações na indústria naval (Ventsel e Krauthammer, 2001). Sendo assim, os primeiros estudos de grandes deformações e fenômenos de flambagem elástica e inelástica em componentes metálicos começaram a ser realizados. O engenheiro britânico George H. Bryan é considerado um dos pioneiros no estudo do fenômeno de flambagem em componentes estruturais, Bryan foi o primeiro pesquisador a estudar o fenômeno de flambagem através da análise de uma placa simplesmente apoiada, submetida a esforços constantes de compressão longitudinais, em uma e duas direções (Bryan, 1981). Pesquisadores como Timoshenko e Gery (1961), Gerard e Becker (1957) e Volmir (1956), realizaram análises de flambagem linear e não-linear em placas finas de diversas formas e submetidas a diversos tipos de carregamentos, obtendo resultados para forças críticas e modos de flambagem (Ventsel e Krauthammer, 2001). Com o avanço das tecnologias e a utilização da modelagem computacional como meio de análise do comportamento mecânico destes componentes estruturais, diversos trabalhos e pesquisas sobre flambagem linear e não linear de placas perfuradas de aço são realizados.

El-Sawy e Nazmy (2001) utilizaram o Método dos Elementos Finitos (MEF) e a modelagem computacional para determinar a carga de flambagem elástica em placas perfuradas retangulares, isotrópicas e sujeitas a um carregamento uniaxial de compressão. Foram consideradas duas geometrias de perfuração diferentes: circular e retangular com cantos arredondados, além de adotar a condição de vinculação simplesmente apoiada para a placa. O estudo de El-Sawy e Nazmy (2001) concluiu que a utilização do furo retangular, com sua menor dimensão posicionada ao longo da direção longitudinal da placa, é a melhor opção em comparação com o orifício circular. Singh et al. (2012) realizou um estudo sobre o comportamento de flambagem elástica em placas isotrópicas quadradas e retangulares, com perfurações circulares centralizadas e submetidas a diferentes tipos de carregamentos de compressão uniaxiais. Utilizando o MEF e o software ANSYS®, os resultados do estudo de Singh et al. (2012) mostraram que as placas sujeitas a compressão parcial nas suas arestas apresentaram um comportamento mecânico diferente daquelas com carregamento de compressão distribuído ao longo de toda sua aresta. As placas com perfurações apresentaram uma redução da carga crítica em comparação com as placas sem perfurações e a carga crítica das placas quadradas foi fortemente influenciada por carregamentos de compressão parcial, em comparação com as placas retangulares (Singh et al., 2012). Em Rocha et al. (2013), o método *Constructal Design* foi empregado na otimização das perfurações de placas retangulares simplesmente apoiadas e sujeitas a flambagem elástica. Foram utilizadas perfurações elípticas, retangulares e losangulares, além de um grau de liberdade denominado fração de volume do furo (razão entre o volume do furo e o volume da placa). Através do uso do Método de Lanczos e a modelagem numérica, os resultados mostraram que para valores baixos da fração de volume do furo, a geometria ideal é a losangular, enquanto que para valores maiores da fração de volume, as geometrias elipsoidais e retangulares apresentaram melhor desempenho (Rocha et al., 2013).

El-Sawy et al. (2004) utilizou em seu trabalho o MEF para determinar a flambagem não linear ou elasto-plástica de placas quadradas e retangulares submetidas a perfurações circulares e carregamento de compressão uniaxial. O estudo mostra que a tensão crítica de flambagem diminui à medida que se aumenta a dimensão da perfuração e a flambagem elasto-plástica ocorre para todos os tamanhos de perfuração quando se trabalha com placas de espessura mais grossas. Além disso, o estudo recomenda evitar a abertura de furos perto das arestas da placa, fato que provoca uma redução considerável na tensão crítica de flambagem, especialmente em casos de flambagem elasto-plástica. Helbig et al. (2014) estudou a influência da geometria de perfurações no comportamento de flambagem em placas simplesmente apoiadas. O método *Constructal Design* foi utilizado, garantindo uma comparação consistente entre furos centralizados elípticos, retangulares e losangulares. Resultados gráficos foram obtidos para flambagem linear e não linear, considerando diversas dimensões para cada geometria de perfuração. O melhor desempenho estrutural foi obtido para cada geometria de perfuração, através da intersecção entre as curvas de flambagem linear e não linear de cada forma da perfuração (Helbig et al., 2014). Maiorana et al. (2009) realizaram análises numéricas de placas quadradas e retangulares com perfurações centralizadas. O objetivo do trabalho foi obter resultados sobre o comportamento de flambagem não linear de placas com orifícios circulares, submetidas a cargas simétricas localizadas. Os resultados obtidos mostraram que mudanças significativas na carga pós-crítica e na deformação da placa ocorrem quando a carga de compressão e as dimensões da perfuração são variadas. Um aumento na carga pós-crítica e uma redução da carga crítica ocorrem quando a dimensão da perfuração é aumentada. Um novo aumento da carga pós-crítica ocorre quando o comprimento de distribuição da carga de compressão é reduzido (Maionara et al., 2009).

A constante busca por novas linhas de pesquisa sobre o tema abordado tem sido o grande trunfo para os pesquisadores da área da engenharia, visto que diferentes teorias e métodos podem ser abordados em uma pesquisa sobre o comportamento de flambagem em placas metálicas. A necessidade de perfurações nas mesmas também é um assunto constantemente abordado, métodos como o *Constructal Design* podem ser utilizados para a otimização geométrica das perfurações. Além disso, uma infinidade de dimensões e geometrias diferentes de perfurações pode ser estudada. Neste trabalho, optou-se por estudar a geometria de perfuração hexagonal. Atualmente, esta geometria é bastante empregada em diversas áreas que utilizam estruturas metálicas em sua composição, como almas de vigas metálicas (vigas casteladas). Soltani et al. (2012) estudou o comportamento de flambagem da alma de vigas casteladas (com perfurações hexagonais e octogonais), enquanto Cheng et al. (2006) estudou o comportamento de flambagem em placas de material compósito submetidas a perfurações hexagonais. Porém ainda existem poucos estudos a respeito do assunto. Logo, o estudo de perfurações hexagonais em placas metálicas tornou-se objeto de estudo deste trabalho.

3. OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS

O objetivo geral deste estudo é a análise numérica do fenômeno de flambagem linear e não linear em placas finas de diferentes dimensões, material homogêneo e isotrópico e apresentando perfurações hexagonais (transversais e longitudinais) centralizadas. O método *Constructal Design* é aplicado, permitindo avaliar o efeito das geometrias das perfurações no comportamento mecânico das placas.

Os objetivos específicos deste trabalho são descritos na seguinte ordem:

- Definir um modelo matemático para a solução do problema de flambagem em placas finas perfuradas, utilizadas em estruturas navais e oceânicas;
- Definir as condições de vinculação para a placa, bem como seu volume total;
- Considerar frações de volume (ϕ) para a perfuração correspondentes a 10%, 15%, 20% e 25% do volume total da placa, ou seja: ϕ = 0,10, ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25;
- Considerar dois valores para o grau de liberdade H/L = 0,5 (placa retangular) e H/L = 1,0 (placa quadrada), sendo H a altura e L o comprimento da placa;
- Variar a forma (geometria) de perfurações hexagonais longitudinais e transversais centradas, para cada valor de ϕ e cada H/L, através do grau de liberdade H_0/L_0 (relação entre as dimensões características dos furos);
- Desenvolver no software Ansys®, que é baseado no Método dos Elementos Finitos, modelos computacionais para o problema de flambagem elástica e elasto-plástica em placas finas;
- Realizar a verificação e/ou validação dos modelos numéricos, garantindo assim resultados com o mínimo de distorção e o mais próximo possível da realidade;
- Desenvolver no software Ansys® os modelos computacionais para as placas com furos hexagonais propostas, onde serão obtidos os resultados para carga crítica (P_{cr}) referente a flambagem elástica e carga pós-crítica ou últimas (P_u) referente a flambagem elasto-plástica;
- Obter as tensões críticas (σ_{cr}) e últimas (σ_u), através da divisão das cargas P_{cr} e P_u pela espessura da placa, t;
- Obter os resultados para a Tensão Limite Normalizada (TLN) crítica e última, através da divisão das tensões σ_{cr} e σ_u pela tensão de escoamento do aço A-36 (σ_y = 250 MPa);

- Organizar em forma de gráficos os resultados obtidos para *TLN* crítica e última, para cada valor de ϕ e cada H/L, em função da variação H_0/L_0, definindo para cada caso uma curva limite de flambagem;
- Utilizando o método *Constructal Design*, realizar uma análise dos gráficos, verificando quais dimensões de perfuração promovem uma maximização da *TLN* de flambagem;
- Verificar quais dos valores de ϕ adotados apresentam os melhores resultados para *TLN* e relação H_0/L_0, considerando cada tipo de perfuração e relação H/L placa;
- Avaliar qual tipo de perfuração apresenta os melhores resultados entre os casos estudados;
- Avaliar a influência da variação de ϕ sobre a razão H_0/L_0 otimizada e sobre a *TLN* maximizada;

4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo do comportamento de flambagem em placas finas baseia-se em diversos assuntos comumente estudados nas áreas da engenharia estrutural e mecânica dos sólidos. Neste item, serão abordados os conteúdos pertinentes que envolvem o estudo do comportamento mecânico de placas metálicas.

4.1. TEORIA DE PLACAS

Segundo Yamaguchi (1999), o conceito de placa fina baseia-se na disposição de suas características geométricas, sendo a principal delas a sua pequena espessura em comparação com as outras dimensões. A Figura 4.1 mostra as características gerais de uma placa. Além da pequena espessura *t*, outras características típicas de placas finas podem ser observadas, como sua configuração geométrica (geralmente quadrada, retangular ou circular) e sua configuração plana antes do carregamento. O carregamento em geral é estático, atuando de forma perpendicular ao plano da placa, podendo atuar também paralelamente ao seu plano (Ventsel e Krauthammer, 2001).

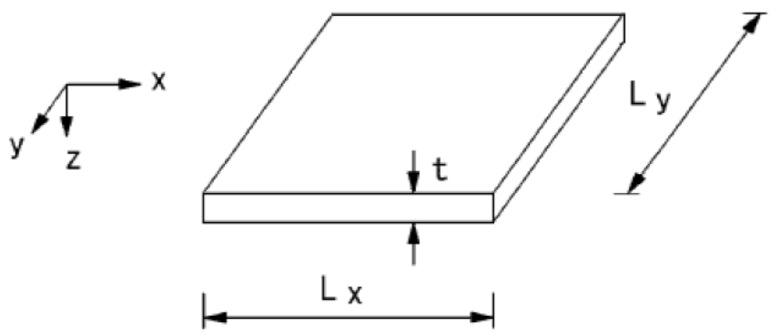


Figura 4.1 – Características físicas de uma placa fina, onde $t \ll L_X, L_Y$ (Yamaguchi, 1999).

As condições de contorno impostas em placas planas são similares as que ocorrem em outros tipos de componentes estruturais. Condições simplesmente apoiadas ou completamente engastadas são exemplos de vinculações comumente utilizadas em placas. A Fig. 4.2 mostra uma placa com diferentes esquemas de vinculações em cada bordo, sendo dois bordos completamente engastados, um bordo livre e outro simplesmente apoiado.

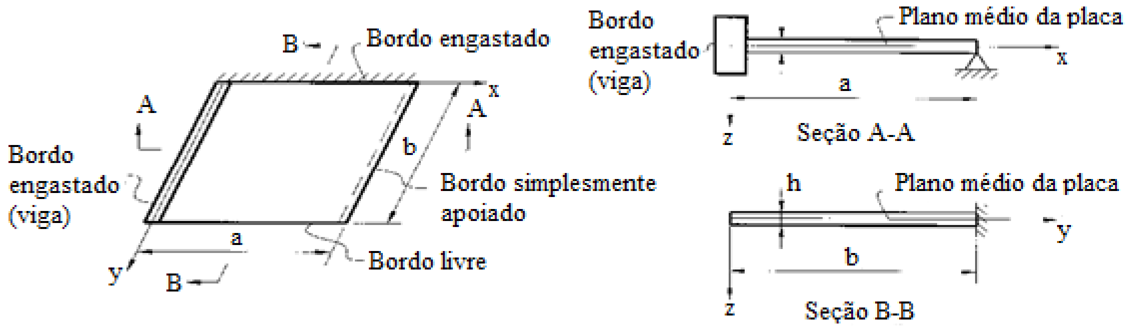


Figura 4.2 – Condições de contorno impostas para uma placa plana (Ventsel e Krauthammer, 2001).

Szilard (2004) faz uma comparação do comportamento mecânico de placas planas como sendo similar ao de vigas dispostas perpendicularmente entre si, formando estruturas de grelhas. Devido a isto, estruturas formadas por placas planas apresentam uma resistência mecânica mais eficaz para carregamentos transversais, que provocam cisalhamento, flexão e torção na mesma. Carregamentos bidimensionais são mais frequentes nestes elementos estruturais e a rigidez a torção é bastante significativa em placas isotrópicas. Logo, estas placas apresentam uma rigidez maior quando comparadas com vigas de extensão e espessuras similares (Ventsel e Krauthammer, 2001). Para Szilard (2004), os chamados elementos de casca possuem funções e características semelhantes às placas finas, porém estes elementos já apresentam certa curvatura antes de serem submetidos a um carregamento. Sendo assim, por ser um elemento extremamente leve e tendo como aliado a resistência frente aos esforços mecânicos, placas finas são componentes estruturais extremamente eficientes e econômicos quando utilizados em estruturas navais (Fig 4.3).

Neste trabalho, o estudo de placas finas baseia-se na intensidade que ocorrem os deslocamentos, quando uma placa é submetida a um carregamento de compressão. Para Ventsel e Krauthammer (2001), quando um grande aumento do carregamento gera pequenas deformações na placa, é dito que a mesma se encontra no regime de flambagem elástica, e uma análise linear é realizada. A partir do momento que um pequeno aumento do carregamento gera grandes deformações, o regime de flambagem elasto-plástica ocorre e uma análise não linear é realizada.

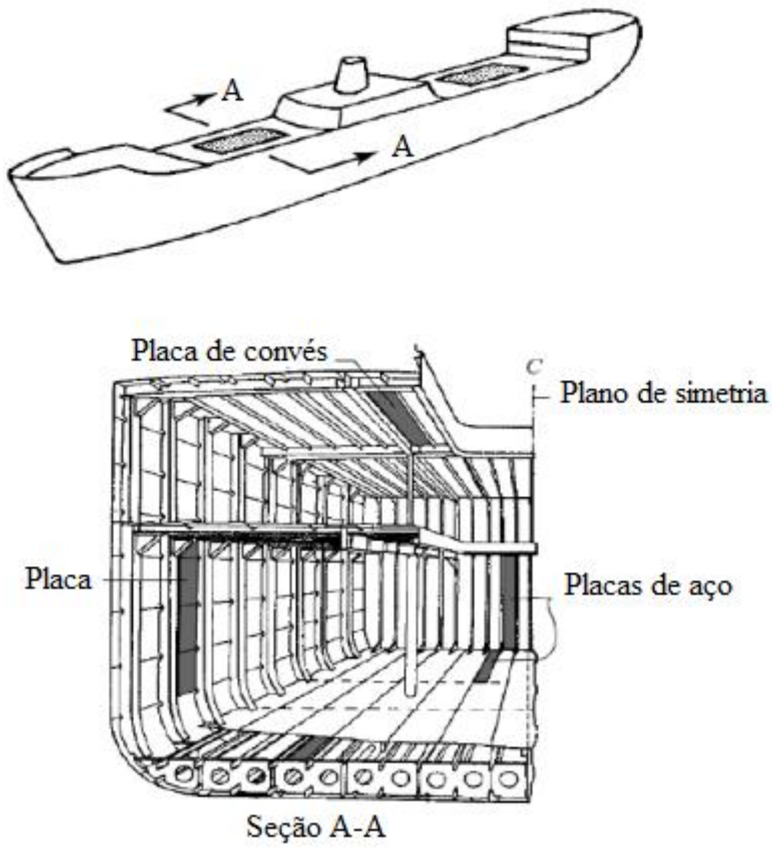


Figura 4.3 – Utilização de placas finas em um navio mercante, (Szilard, 2004).

4.1.1. Teoria de placas finas de Kirchhoff

Segundo Szilard (2004), a análise matemática exata de uma placa fina submetida a um carregamento perpendicular ao seu plano, requer a solução de equações diferenciais tridimensionais. No entanto, são encontradas dificuldades na solução matemática destas equações. A Teoria de Placas Finas de Kirchhoff permite a obtenção de resultados precisos, através da solução de uma equação diferencial de quarta ordem, o que exige apenas duas condições de contorno a serem satisfeitas.

Para o estudo da equação diferencial, será considerada uma placa fina submetida a um dado carregamento, conforme Fig. 4.4. Uma das principais características geométricas desta placa é a imposição de um plano médio, que secciona ao meio a espessura da placa em cada ponto da mesma (Szilard, 2004). Além disso, é necessário o emprego de um sistema de coordenadas cartesianas, para a descrição da geometria. As forças externas e internas, tensões e as componentes de deslocamento u, v e w são consideradas positivas, quando seguem as mesmas direções e sentidos das componentes cartesianas X, Y e Z. Para rotações, serão utilizadas as convenções usuais em engenharia, considerando positivos os momentos que tracionam as fibras inferiores da placa. A Figura 4.4 também mostra as tensões internas que ocorrem em um elemento infinitesimal retirado da placa.

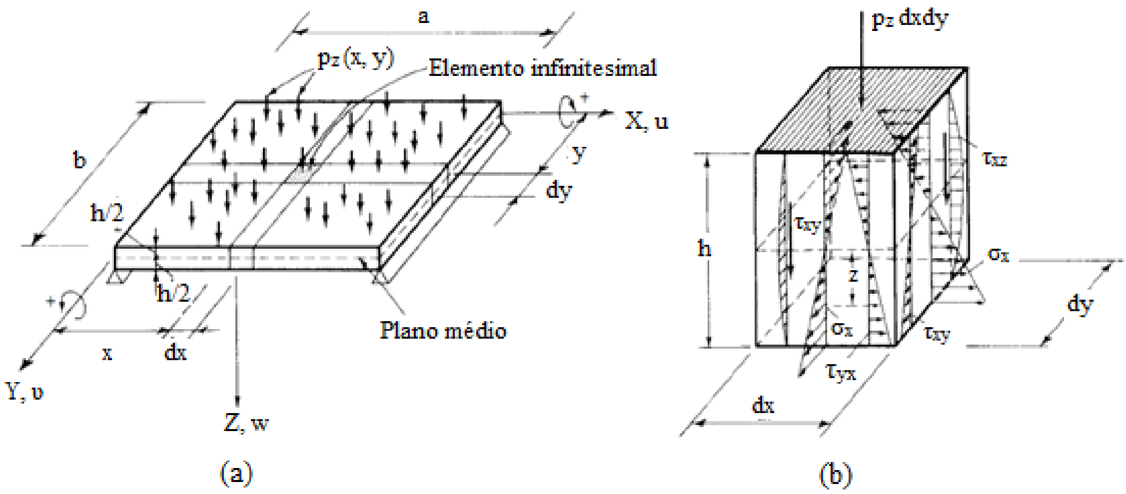


Figura 4.4 – Modelo de placa utilizado para o estudo da equação diferencial linear de placas finas: (a) Placa com carregamento transversal, (b) Componentes de tensões do elemento infinitesimal (Szilard, 2004).

Com base na placa da Fig. 4.4, as seguintes hipóteses devem ser consideradas para a derivação da equação diferencial:

1. O material da placa é homogêneo, isotrópico e elástico linear.
2. A placa é inicialmente plana.
3. Durante a flexão, não ocorre qualquer tipo de tensão no plano médio da placa.
4. A espessura *h* da placa é pequena quando comparada com as outras dimensões. A espessura é, no mínimo, 10 vezes menor que a menor aresta da placa.
5. O deslocamento transversal da placa é pequeno quando comparado com a sua espessura.
6. As rotações são pequenas e as inclinações podem ser desprezadas.
7. Seções planas e perpendiculares ao plano médio da placa permanecem sem alteração mesmo após ocorrer a deformação. Sendo assim, deformações provocadas por cisalhamento serão desprezadas.
8. A tensão normal perpendicular ao plano médio da placa, σ_z, pode ser desprezada.

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), estas hipóteses são conhecidas como Hipóteses de Kirchhoff, e são análogas às hipóteses utilizadas na Teoria de Flexão de Vigas. Sendo assim, ocorre uma redução do problema de placa tridimensional para um problema bidimensional, resultando em uma equação que poderá ser derivada de forma concisa e direta.

Considerando novamente um elemento infinitesimal, retirado da placa da Fig 4.4., verifica-se as forças cortantes internas (Q_x e Q_y) e os momentos de flexão (M_x e M_y) e torção (M_{xy} e M_{yx}), que são gerados em cada face do elemento e provocados pelo carregamento da placa P_Z (Fig. 4.5). Segundo Szilard (2004), as condições de equilíbrio são satisfeitas, uma vez que as forças e momentos resultantes no elemento se equilibram, pois possuem sentidos contrários. São atribuídos sentidos positivos aos esforços atuantes sobre as faces convencionadas positivas do elemento. De forma análoga, os esforços que agem sobre as faces negativas, serão considerados negativos. Quanto à notação dos esforços, o primeiro índice corresponde à direção normal do plano em que o esforço é aplicado. Já o segundo índice, indica a direção transversal ao plano do elemento em que o esforço atua. A Figura 4.6 mostra o plano médio do mesmo elemento infinitesimal, porém com os esforços representados por unidade de comprimento, que serão utilizados para a dedução da equação diferencial elástica. A notação adotada para esforços por unidade de comprimento é q_x, q_y, m_x, m_y, m_{xy} e m_{yx}.

4.1.2. Equações de equilíbrio para placas finas

De acordo com Szilard (2004), a determinação da equação governante para placas finas emprega um método semelhante ao utilizado na teoria elementar de vigas. A primeira observação diz respeito às condições de equilíbrio impostas ao elemento infinitesimal da placa. Como a placa esta sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e transversal, das seis equações de equilíbrio possíveis somente três serão utilizadas:

$$\sum M_X = 0 \; ; \sum M_Y = 0 \; ; \sum F_Z = 0 \qquad (4.1)$$

onde M_x e M_y são os momentos em torno dos eixos X e Y, e F_Z é a força na direção do eixo Z.

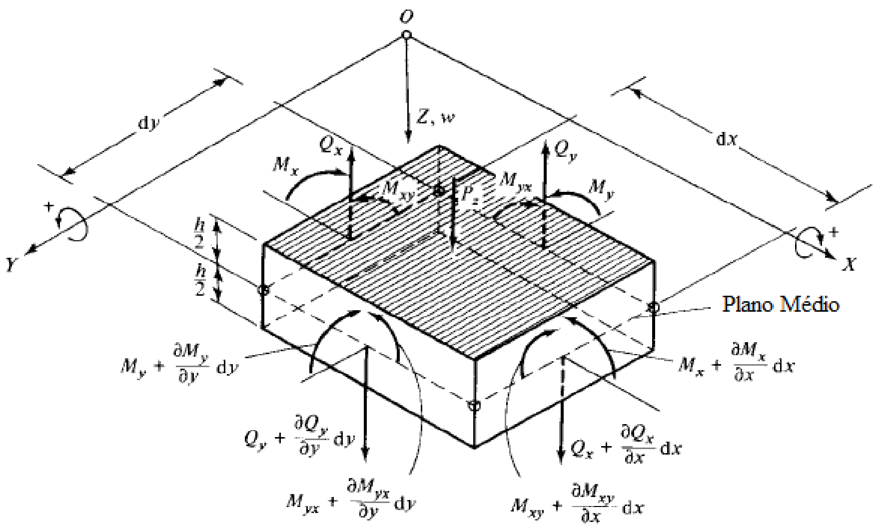


Figura 4.5 – Esforços e momentos resultantes em um elemento infinitesimal de uma placa fina (Szilard, 2004).

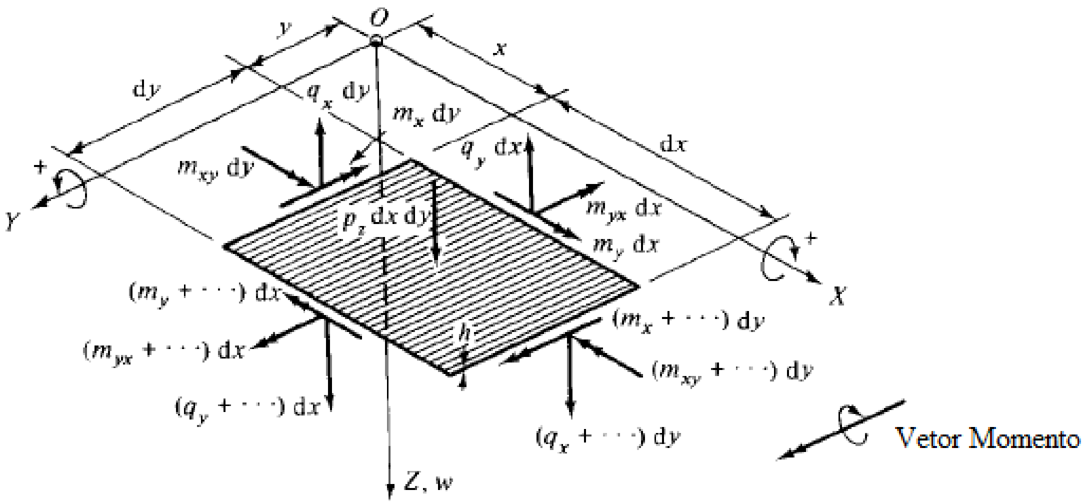


Figura 4.6 – Esforços e momentos por unidade de comprimento no plano médio de um elemento infinitesimal (Szilard, 2004).

Na Teoria de Placas é habitual expressar os esforços e momentos por unidade de comprimento (Szilard, 2004). Sendo assim, os esforços mostrados nas Fig. 4.5 e 4.6 serão utilizados. As equações diferenciais de equilíbrio são expressas na forma de séries truncadas de Taylor, realizando os somatórios de esforços do elemento infinitesimal, de acordo com os eixos coordenados. O somatório de momentos em torno do eixo coordenado *X* origina a seguinte equação:

$$\left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y}dy\right)dx - m_y dx + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}dx\right)dy - m_{xy}dy - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx\frac{dy}{2} - q_y dx\frac{dy}{2} = 0 \qquad (4.2)$$

sendo q_y, m_y e m_{xy}, o esforço cortante, momento fletor e momento torçor por unidade de comprimento. As dimensões por unidade de comprimento do elemento infinitesimal são dadas por dx e dy. Simplificando a Eq. (4.2) e desprezando os termos que resultam em valores próximos de zero, obtêm-se a equação:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y}dydx + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}dxdy - q_y dxdy = 0 \qquad (4.3)$$

Aplicando a divisão por $dxdy$ para os termos da Eq. (4.3), resulta a equação para o esforço cortante q_y:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \qquad (4.4)$$

De forma análoga ao desenvolvimento da equação para o eixo coordenado X, é realizado o somatório de momentos em torno do eixo Y, resultando na equação reduzida para o esforço cortante q_x:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \qquad (4.5)$$

Realizando o somatório de forças na direção do eixo Z, de acordo com a terceira equação de equilíbrio:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy - q_x dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx - q_y dx + p_z dxdy = 0 \qquad (4.6)$$

onde p_z é o esforço externo aplicado ao elemento infinitesimal, por unidade de comprimento. Reduzindo a Eq. (4.6) através da simplificação e divisão dos termos por $dxdy$, obtêm-se uma equação para a carga externa p_z:

$$-p_z = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \qquad (4.7)$$

Logo, é possível realizar a substituição das Eq. (4.4) e (4.5) na Eq. (4.7), observando a condição de que $m_{xy}=m_{yx}$. Assim, após a substituição e simplificação, resulta a equação de equilíbrio final para placas finas:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \qquad (4.8)$$

4.1.3. Relações entre deformações e deslocamentos

A Fig. 4.7 apresenta a seção transversal de uma placa deformada que se encontra paralela ao eixo coordenado *X*, (Szilard, 2004).

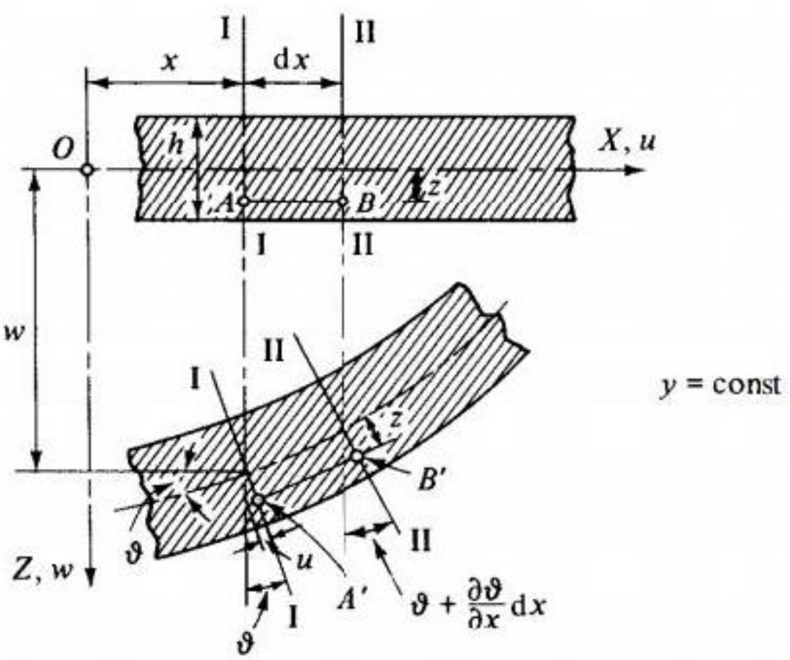


Figura 4.7 – Esquema de flexão de placa na direção do eixo *X* (Szilard, 2004).

Considerando as hipóteses 6 e 7 da Teoria de Placas Finas de Kirchhoff, os ângulos de rotação, ϑ, para os cortes I-I e II-II são respectivamente dados pelas seguintes equações:

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.9}$$

$$\vartheta + \cdots = \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \tag{4.10}$$

onde w é o deslocamento axial na direção de z. *O* segmento *AB* da Fig. 4.7 antes da deformação e *A'B'* depois da deformação, localizadas a uma distância z do plano médio, serão considerados para expressar as tensões em função dos coeficientes de deformação. Usando a definição de deformação normal (ε), a seguinte equação pode ser escrita:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left[dx + z\left({}^{\partial\vartheta}/_{\partial x}\right)dx\right] - dx}{dx} = z\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{4.11}$$

Aplicando a Eq. (4.9) na Eq. (4.11), resulta a equação para a deformação na direção do eixo coordenado X (ε_x):

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.12}$$

De forma similar, é deduzida a deformação provocada pela tensão normal na direção de Y (ε_y):

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4.13}$$

A Fig. 4.8 mostra um elemento retangular da placa, antes (*ABCD*) e após ocorrerem tensões de cisalhamento (*A'B'C'D'*), localizada a uma distância z do plano médio da placa. Este esquema será utilizado para determinação da deformação por cisalhamento que ocorre na placa.

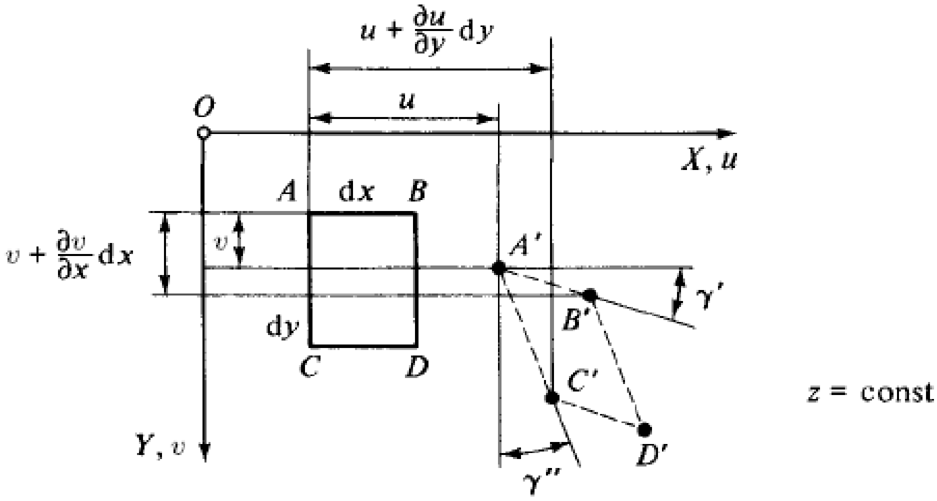


Figura 4.8 – Deformações por cisalhamento no elemento de placa (Szilard, 2004).

As deformações por cisalhamento segundo as direções *X* e *Y*, são escritas conforme as seguintes equações:

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.14}$$

$$\gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.15}$$

Analisando novamente a Fig. 4.7, o deslocamento axial u é determinado através da Eq. (4.16). De forma similar, o deslocamento axial v é determinado pela Eq. (4.17).

$$u = z\vartheta = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.16}$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{4.17}$$

A equação para a deformação por cisalhamento tem a seguinte forma:

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.18}$$

Substituindo as Equações (4.16) e (4.17) na Eq. (4.18):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial\left(-z\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-z\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.19}$$

Logo, as mudanças de curvatura (k_x e k_y) e de deformação do plano médio deslocado da placa (χ), podem ser determinadas pelas seguintes equações:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ;\ \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ ;\ \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.20}$$

4.1.4. Relação entre tensões e deslocamento para placas finas

De acordo com Szilard (2004), as tensões normais σ_x e σ_y, e de cisalhamento τ_{xy}, geram momentos de flexão, de torção e esforço cortante na placa em estudo. Estes esforços podem ser equacionados através da integração, ao longo da espessura da placa. A Fig, 4.9 mostra o estado de tensões de uma lâmina de material localizada a uma distância *z* do plano médio da placa.

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), para o equacionamento das relações entre as tensões, deformações e deslocamentos da placa, é necessário observar as hipóteses abordadas pela Teoria de Kirchhoff estudada no Item 4.1.1. Sendo assim, as deformações normais e de cisalhamento ε_z, γ_{xz} e γ_{yz} podem ser desprezadas. Levando em consideração a condição de material elástico para a placa adotada nas hipóteses, é possível utilizar a Lei de Hooke segundo duas direções (Szilard, 2004):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y \tag{4.21}$$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x \tag{4.22}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material, ν é o Coeficiente de Poisson do material e ε_x, ε_y são os coeficientes de deformação da placa nas direções X e Y.

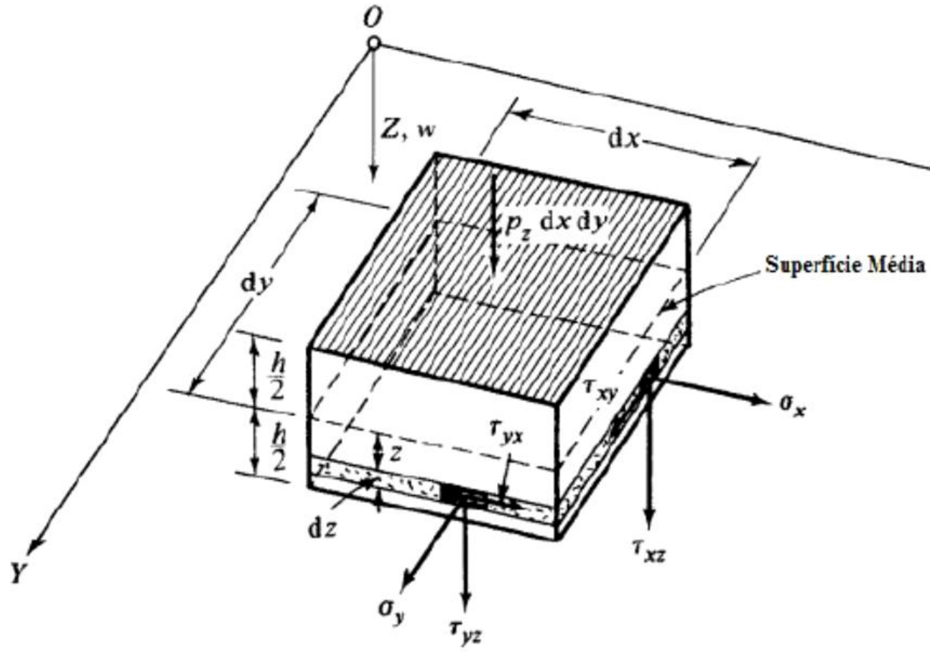


Figura 4.9 – Estado de tensões de um elemento de placa (Szilard, 2001).

Aplicando a Eq. (4.21) na Eq. (4.22) ou vice-versa, obtêm-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \tag{4.23}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \tag{4.24}$$

As Eqs. (4.23) e (4.24) representam as respectivas tensões normais da placa, nas direções de x e y. De acordo com a Fig. 4.6, verifica-se que o elemento infinitesimal da placa é submetido a momentos de torção m_{xy} e m_{yx}, provocados pelo carregamento p_z. Logo, além das tensões normais, também ocorrem tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} na placa em estudo, que serão regidas pela seguinte equação:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{4.25}$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material e γ_{xy} é o coeficiente de deformação por cisalhamento.

Através da área de integração submetida a tensões normais, de espessura dz e a uma distância z do plano médio do elemento, é possível escrever as equações de momento fletor por unidade de comprimento, m_x e m_y, para o elemento de placa:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \; ; \; m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \tag{4.26}$$

As tensões de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ geram momentos de torção no elemento de placa. De forma análoga ao caso das tensões normais, as equações para momentos de torção por unidade de comprimento, m_{xy} e m_{yx}, são escritas:

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \tag{4.27}$$

Substituindo as Eqs. (4.12) e (4.13) nas Eqs. (4.23) e (4.24), obtêm-se as equações para as tensões normais σ_x e σ_y, em termos de deflexão lateral w:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{4.28}$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{4.29}$$

Substituindo as Eqs. (4.28) e (4.29) na Eq. (4.26) e resolvendo as integrais, as relações entre os esforços internos e os deslocamentos gerados são obtidas:

$$m_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = D(k_x + \nu k_y) \tag{4.30}$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = D(k_y + \nu k_x) \tag{4.31}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{4.32}$$

onde D representa a rigidez à flexão da placa e k_x e k_y representam as mudanças de curvatura na direção de X e Y.

De maneira similar a tensão normal, a relação entre esforços e deslocamentos é obtida para o momento de torção $m_{xy} = m_{yx}$. Assim, substituindo a Eq. (4.19) na Eq. (4.25), obtêm-se as tensões de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{yx}$:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \times -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.33}$$

sendo a rigidez a torção da placa, G, dada pela seguinte equação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.34}$$

Isolando E na Eq. (4.34) e substituindo na Eq. (4.33):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.35}$$

Aplicando a Eq. (4.35) na Eq. (4.27), obtêm-se a Eq. (4.36), e resolvendo a integral, a Eq. (4.37) para o momento de torção em função dos deslocamentos é obtida.

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2G\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.36}$$

$$m_{xy} = m_{yx} = D(1-\nu)\chi \tag{4.37}$$

sendo χ a deformação do plano médio deslocado da placa. Substituindo as Eq. (4.30), (4.31) e (4.37) na Eq. (4.8), obtêm-se a equação diferencial governante para placas finas, de material elástico, no regime de pequenos deslocamentos e sob carregamento transversal:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D} \tag{4.38}$$

A Eq. (4.38) representa uma equação diferencial de quarta ordem, não homogênea, do tipo elíptica e com coeficientes constantes. Devido a isto, esta equação recebe a denominação de bi harmônica não homogênea (Szilard, 2004). Os expoentes das derivadas parciais de *w* não são superiores a um, verificando a linearidade da equação governante. A Eq. (4.39) é obtida, aplicando o operador Laplaciano bidimensional (∇). A mesma é apresentada em sua forma reduzida pela Eq. (4.40).

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{4.39}$$

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_z \tag{4.40}$$

Os esforços cortantes, q_x e q_y, podem ser definidos em termos de deflexão lateral *w*, através da substituição das Eq. (4.30), (4.31) e (4.37) nas Eq. (4.4) e (4.5).

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\partial^2 w \tag{4.41}$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\partial^2 w \tag{4.42}$$

A solução da Eq. (4.38) ocorre através da determinação da deflexão lateral da placa *w(x, y)*, representando a situação em que a placa fina está submetida a um carregamento transversal e satisfazendo as condições de contorno do problema.

4.1.5. Condições de Contorno para a Teoria de Kirchhoff

Seguindo o estudo proposto por Szilard (2004), a solução exata da Eq. (4.38) deve, simultaneamente, satisfazer a equação diferencial e as condições de contorno as quais a placa é submetida. Uma vez que a equação diferencial é de quarta ordem, são necessárias duas condições de contorno em cada aresta da placa, considerando tanto os deslocamentos como as forças internas. De acordo com a Teoria de Flexão de Placas, os componentes de deslocamento que serão utilizados na formulação das condições de contorno são as deflexões laterais e a inclinação. Da mesma forma, devem ser consideradas três componentes de forças internas: momento fletor, momento torçor e esforço cortante.

Algumas condições geométricas previstas pela magnitude do deslocamento (translação e rotação) podem ser utilizadas para a formulação das condições de contorno. A Figura 4.10 mostra a condição de contorno engastada da aresta de uma placa. Neste caso a deflexão transversal, *w*, e a inclinação da superfície da placa deformada, θ, são nulas na região engastada.

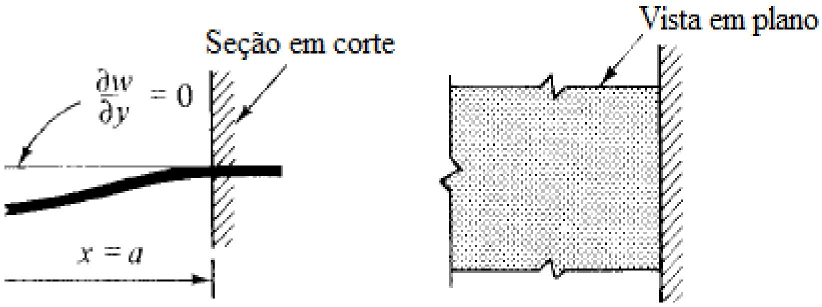


Figura 4.10 – Condição de contorno engastada da placa (Szilard, 2004).

Estas condições são formuladas de acordo com a Eq. (4.43) e Eq. (4.44), e são denominadas Condições de Contorno Geométricas (Szilard, 2004).

$$w_x = 0\ ;\ \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0\ e\ x = a \tag{4.43}$$

$$w_y = 0\ ;\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0\ e\ y = b \tag{4.44}$$

onde w_x e w_y são as deflexões laterais na direção dos eixos *X* e *Y*. As inclinações da superfície da placa deformada para os eixos *X* e *Y* são dadas por θ_x e θ_y. A Condição de

Contorno Estática ocorre quando a placa apresenta um de seus bordos completamente livre, sendo nulos o esforço cortante e o momento fletor no bordo livre, conforme a Fig. 4.11.

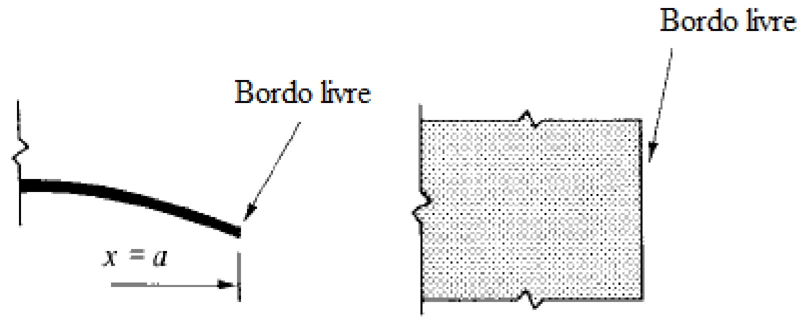


Figura 4.11 – Condição de contorno com um bordo livre da placa (Szilard, 2004).

As Condições de Contorno Estáticas são formuladas através conforme a Eq. (4.45) e Eq. (4.46).

$$\upsilon_x = m_x = 0 \text{ para } x = 0 \; e \; x = a \tag{4.45}$$

$$\upsilon_y = m_y = 0 \text{ para } y = 0 \; e \; y = b \tag{4.46}$$

onde υ_x e υ_y são os deslocamentos axiais nas direções dos eixos X e Y, e m_x, m_y são os momentos de flexão em torno dos eixos X e Y.

Os esforços atuantes no bordo da placa consistem do esforço de cisalhamento, momento de torção e momento fletor. Considerando os eixos de atuação X e Y no bordo, os deslocamentos axiais provocados pelos esforços atuantes na placa podem ser formulados da seguinte forma:

$$\upsilon_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] para \; x = 0 \; e \; x = a \tag{4.47}$$

$$\upsilon_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] para \; y = 0 \; e \; y = b \tag{4.48}$$

De acordo com Szilard (2004), os termos $\partial m_{xy}/\partial y$ e $\partial m_{yx}/\partial x$ na Eq. (4.47) e Eq. (4.48) representam as forças de cisalhamento provocadas pelos momentos de torção

$m_{xy}= m_{yx}$, estes termos são denominados Forças Complementares de Kirchhoff. Através da substituição dos momentos de torção por estas forças, Kirchhoff reduziu o numero de forças internas atuantes de três para duas: esforço cortante e momento fletor. Logo, as condições de contorno para o bordo livre da placa reduzem de três para duas, conforme a Eq. (4.49) e Eq. (4.50).

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x = 0\,;\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]=0\ \ para\ \ x=0\ e\ x=a \tag{4.49}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y = 0\,;\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]=0\ \ para\ \ y=0\ e\ y=b \tag{4.50}$$

A Fig. 4.12 mostra a condição de bordo simplesmente apoiado de uma placa, a qual é denominada Condição de Contorno Mista.

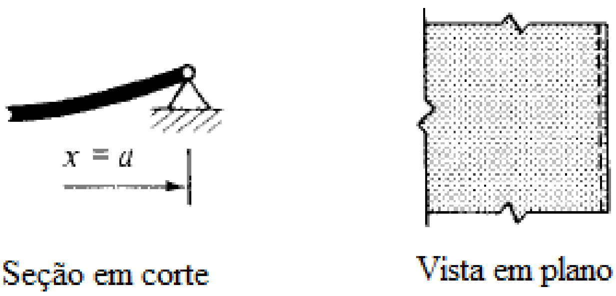


Figura 4.12 – Condição de contorno mista de uma placa (Szilard, 2004).

Uma vez que as deflexões laterais, w_x e w_y, e os momentos fletores, m_x e m_y, são nulos. Essas condições de vinculação são determinadas como mostra a Eq. (4.51) e Eq. (4.52).

$$w_x = 0\,;\ m_x = \ -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0\ \ para\ \ x=0\ e\ x=a \tag{4.51}$$

$$w_y = 0\,;\ m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0\ \ para\ \ y=0\ e\ y=b \tag{4.52}$$

Esta condição de contorno é importante para casos de placas retangulares, onde os momentos de torção geram forças de cisalhamento adicionais, criando forças resultantes R_0 que tendem a levantar os cantos da placa (Fig. 4.13). Sendo assim, a vinculação simplesmente apoiada protege a placa deste efeito indesejável, através da fixação dos cantos da mesma (Szilard, 2004).

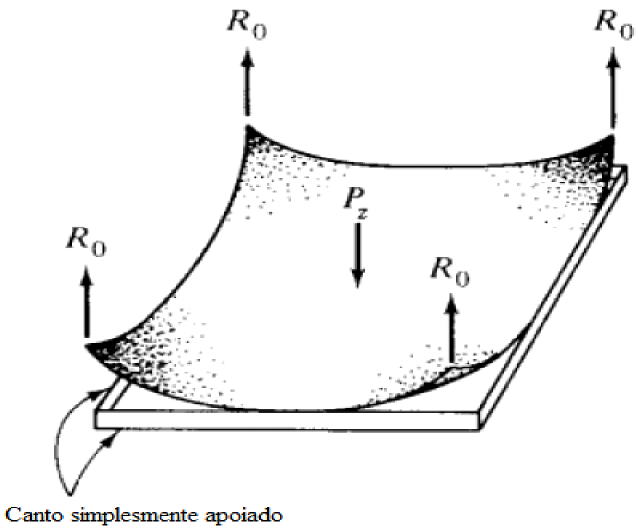


Figura 4.13 – Forças de canto em placas (Szilard, 2004).

A força resultante de canto, R_0, é determinada pela seguinte equação:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.53}$$

4.1.6. Soluções para a equação diferencial de placas finas

De acordo com Szilard (2004), uma solução rigorosa para a Eq. (4.38) deve satisfazer as condições de contorno impostas para cada problema, bem como a equação diferencial governante da placa. Consequentemente, sua solução é essencialmente um problema de valor de contorno de natureza física e matemática. Além disso, a aplicação das condições de contorno geram dificuldades matemáticas nas soluções. Sendo assim, em termos gerais, as soluções exatas para as equações diferenciais de placas finas são raras. Dependendo da linearidade da Eq. (4.38), a combinação linear pode ser usada, sob a forma de sobreposição de soluções, conforme mostra a Eq. (4.54).

$$w(x,y) = w_H(x,y) + W_p(x,y) \tag{4.54}$$

A Eq. (4.54) é uma forma geral de solução da equação diferencial, onde W_H é a solução da forma homogênea da Eq. (4.38), satisfazendo as condições de contorno da placa, e W_p é uma solução particular da forma não homogênea da Eq. (4.38), atendendo ao equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa. Em alguns casos específicos envolvendo condições de contorno e tipo de carregamento, a solução da equação diferencial pode ser obtida de forma direta, conforme é mostrado na Fig. (4.14).

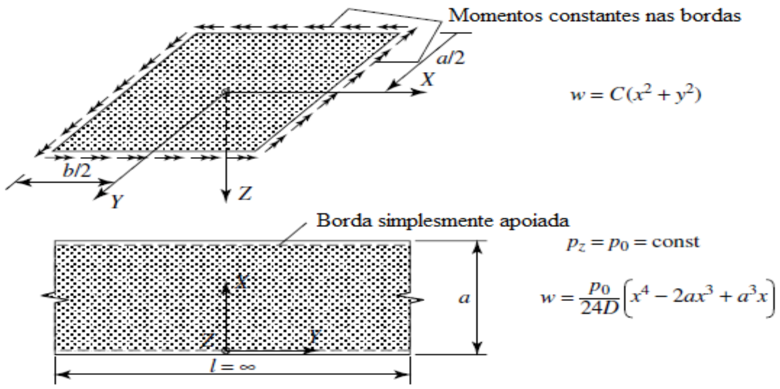


Figura 4.14 – Soluções diretas de *w (x, y)* para casos específicos (Szilard, 2004).

Segundo Szilard (2004), outras soluções envolvendo procedimentos especiais de cálculo também são encontradas em diversas bibliografias, dentre elas podem ser citadas as soluções de Navier e Lévy. A solução de Navier propõe a redução da equação diferencial de quarta ordem (Eq. (4.38)) para uma equação algébrica, através da aplicação de séries duplas de Fourier. Porém, esta solução apresentou boa convergência apenas para placas simplesmente apoiadas e com carregamentos distribuídos. A solução apresentada por Lévy é mais simples e apresenta uma convergência extremamente rápida em comparação com a de Navier, propondo a redução da Eq. (4.38) utilizando séries simples de Fourier. Entretanto, a solução é aplicada somente para placas com pelo menos dois bordos paralelos simplesmente apoiados, com cargas concentradas ou em linha, gerando manipulações matemáticas mais complexas.

4.2. TEORIA DE FLAMBAGEM DE PLACAS

De acordo com Okumoto et al. (2009), praticamente todas as partes de uma estrutura naval são compostas de placas e vigas, que por vezes, estão submetidas a carregamentos de compressão. Nestas circunstâncias, um componente estrutural apresenta um comportamento diferente quando submetido a um carregamento de tração, por exemplo. Para carregamentos axiais de tração, uma placa desenvolve tensões de cisalhamento, enquanto que em carregamentos axiais de compressão ocorre uma curvatura da peça, denominada flambagem. Logo, o estudo do fenômeno de flambagem é importante durante os procedimentos de cálculo estrutural de estruturas navais e offshore.

A Fig. 4.15 mostra uma placa fina (largura *b*, comprimento *a* e espessura *t*) submetida a um carregamento axial de compressão, considerando as bordas carregadas engastadas e as bordas não carregadas livres de vinculação (Åkesson, 2007).

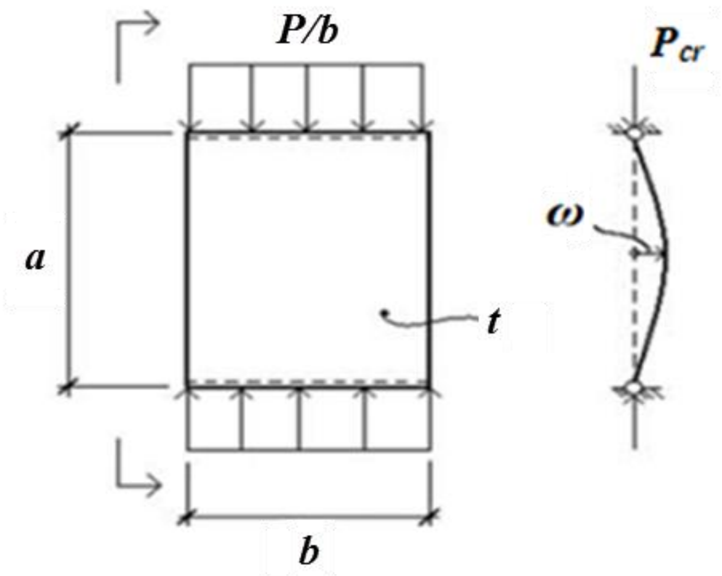


Figura 4.15 – Placa fina submetida a um carregamento de compressão axial (Åkesson, 2007).

Quando o carregamento alcança um valor crítico, P_{cr}, a placa sofre uma deformação de forma repentina (deslocamento *w*), podendo perder sua capacidade de suportar o carregamento, resultando no colapso da estrutura (Wang et al., 2005). Esta deformação lateral e curvilínea, mostrada na Fig. 4.15, indica a ocorrência do fenômeno de flambagem e a carga que provoca este fenômeno é denominada Carga Crítica. Para uma carga de compressão abaixo do valor crítico P_{cr}, é possível aplicar uma carga adicional sem a ocorrência da flambagem. Neste caso, a carga provoca um deslocamento lateral da placa, porém com a retirada desta carga o elemento volta a sua configuração original (Åkesson, 2007). O mínimo aumento do carregamento acima de um valor crítico provoca um grande deslocamento na estrutura, podendo ocorrer o colapso da mesma, conforme mostra a curva carga/deslocamento da Fig. 4.16.

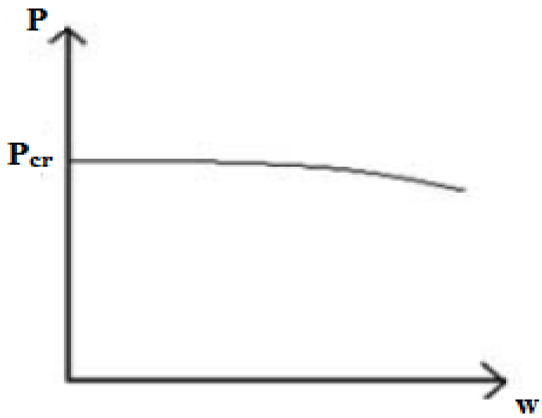


Figura 4.16 – Curva carga/deslocamento de uma placa carregada axialmente (Åkesson, 2007).

Hibbeller (2010) considera um mecanismo de barras para um melhor entendimento da flambagem. Conforme a Fig. 4.17 (a), este mecanismo é composto por duas barras sem peso, rígidas e acopladas por pinos nas duas extremidades. Quando as barras estão na posição vertical, uma pequena força *P* é aplicada no topo de uma delas. Esta posição de equilíbrio é perturbada, deslocando o pino em *A* até uma pequena distância Δ, comprimindo a mola, conforme a Fig. 4.17 (b). Quando as barras são deslocadas, a mola produz uma força de recuperação $F = k\Delta$, onde *k* é a rigidez da mola. A carga aplicada *P* desenvolve componentes horizontais $Px = P.tg\theta$, onde θ é a inclinação da barra (Fig. 4.17 (c)).

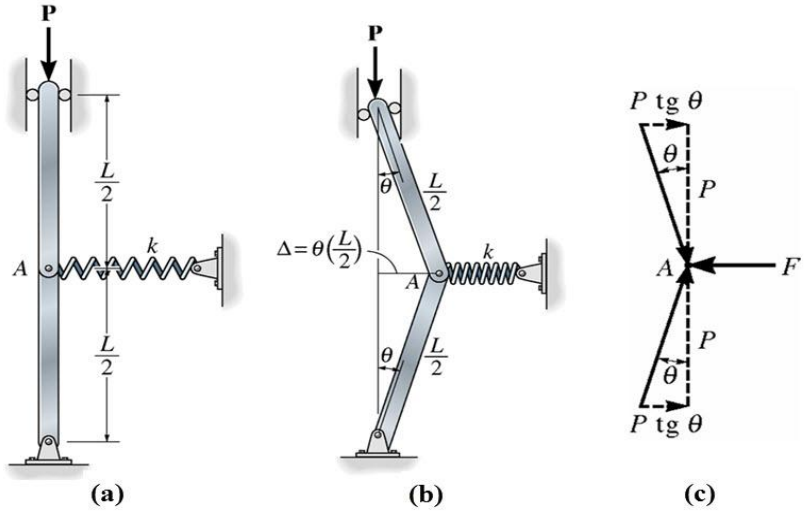


Figura 4.17 – Mecanismo de barras: (a) mecanismo em equilíbrio; (b) deslocamento do mecanismo, provocado pela força P; (c) diagrama de forças do mecanismo. (Hibbeller, 2010).

Visto que o valor de θ é pequeno, as equações da força perturbadora, F, e da força de restauração da mola, P_x, *são* respectivamente:

$$F = k.\theta.\frac{L}{2}\ , onde\ \Delta \approx \theta.\frac{L}{2} \tag{4.55}$$

$$2.P_x = 2.P.\theta\ , onde\ tg(\theta) \approx \theta \tag{4.56}$$

sendo *L/2* o comprimento de cada barra.

De acordo com Hibbeller (2010), se a força de restauração for maior que a força perturbadora, isto é, $k\theta L/2 > 2P\theta$, obtêm-se a Eq. (4.57). Esta equação é uma condição para equilíbrio estável, visto que a força exercida pela mola é adequada para devolver as barras a suas respectivas posições verticais. Quando a força perturbadora é maior que a força de restauração, isto é, $k\theta L/2 < 2P\theta$, obtêm-se a Eq. (4.58). Esta é uma condição de equilíbrio instável, visto que a força exercida pela mola não é suficiente para devolver as barras suas posições verticais, mantendo a inclinação das mesmas, que é provocada pela carga *P*.

$$P < \frac{kL}{4} \tag{4.57}$$

$$P > \frac{kL}{4} \tag{4.58}$$

O valor intermediário de *P*, definido pelo requisito $k\theta L/2 = 2P\theta$, representa um caso de mecanismo que está em equilíbrio neutro, conforme Eq. (4.59). Neste caso a carga *P* é a carga crítica, qualquer perturbação aplicada no mecanismo não fará com que ele volte a sua posição inicial e nem que se afaste mais da posição de equilíbrio, mantendo sua posição defletida (Hibbeler, 2010).

$$P = P_{cr} = \frac{kL}{4} \tag{4.59}$$

Os três estados de equilíbrio estudados são, graficamente, representados pela Fig. 4.18. O ponto de transição, onde $P=P_{cr}$, é denominado ponto de bifurcação. Sendo assim, o valor de P_{cr} representa a exata carga que provoca o deslocamento lateral do mecanismo.

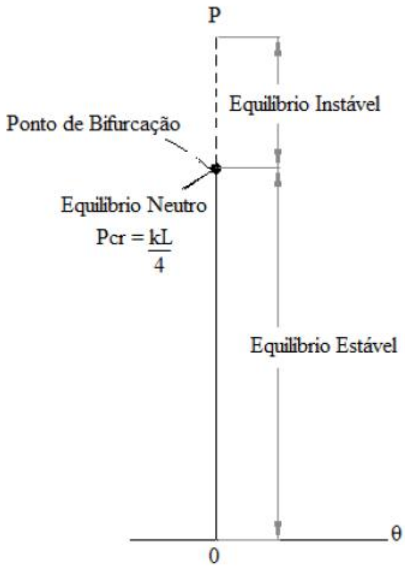


Figura 4.18 – Gráfico dos estados de equilíbrio provocados pela carga *P* (Hibbeller, 2010).

4.2.1. Carga Crítica de Flambagem

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), uma instabilidade estrutural ocorre com a transição da placa do estado de equilíbrio estável para o instável. É importante notar que durante essa transição, a placa passa pelo estado neutro de equilíbrio. Conforme Fig. 4.18, exatamente neste estado de equilíbrio, denominado ponto de bifurcação, que ocorre a carga, provocando um deslocamento lateral súbito da placa. Sendo assim, após o ponto de bifurcação, qualquer incremento de carga irá causar um aumento da deflexão lateral da placa, denominada modo de flambagem. Para valores de carga abaixo do valor de carga crítica, a deformação não é permanente, ou seja, se retirado o carregamento, a placa volta a sua configuração original. Quando um carregamento atinge o valor crítico, ocorre o fenômeno denominado flambagem elástica ou linear.

De acordo com Szilard (2004), a flambagem ocorre quando o material obedece a Lei de Hooke, ou seja, dentro do regime elástico linear. Além da análise de estabilidade elástica, o comportamento de placas planas pós-flambagem também apresenta uma importância considerável em termos práticos. Nestes casos, diferentemente de barras e colunas, o valor da carga crítica de flambagem em placas não é o mesmo que ocorre nos casos de colapso do elemento, onde essas cargas são denominadas pós-críticas e o regime denominado elasto-plástico ou não linear. De um modo geral, a solução para este tipo de problema, que contempla grandes deslocamentos, é determinada utilizando métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (Sentano, 2014).

Neste trabalho, a carga crítica de flambagem de uma placa submetida a um carregamento no plano, será definida através de uma equação diferencial baseada na análise linear de flambagem, utilizando o Método do Equilíbrio. Outros métodos como o Método da Energia ou uma abordagem dinâmica do problema podem ser citados, porém não serão abordados neste trabalho.

4.2.1.1 Equação diferencial para análise linear de flambagem

Segundo Szilard (2004), a equação diferencial governante de uma placa fina, definida no Item 4.1.4 deste trabalho, é baseada em uma placa submetida a um carregamento no plano médio. Este carregamento, que atua no próprio plano médio da placa, pode ser originado por esforços coplanares aplicados em suas bordas, ou decorrentes de uma variação de temperatura (Ventsel e Krauthammer, 2001). Além disso, quando os deslocamentos no plano da placa, u e v, são restringidos, surgem forças reativas em suas bordas. Porém, estas forças podem ser desprezadas quando estes deslocamentos transversais w são pequenos.

Szilard (2004) considera um elemento de placa fina, com dimensões dx, dy e espessura h, conforme Fig. 4.19. Este elemento apresenta material elástico linear, no regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, submetido a um carregamento aplicado no plano médio.

Este elemento apresenta forças internas por unidade de comprimento, que formam um conjunto de forças coplanares n_x, n_y e $n_{xy}=n_{yx}$, denominadas de forças de membrana. Os incrementos destes esforços normais e tangenciais, nos lados positivos do elemento, podem ser determinados através de expansão em Séries de Taylor de segunda ordem.

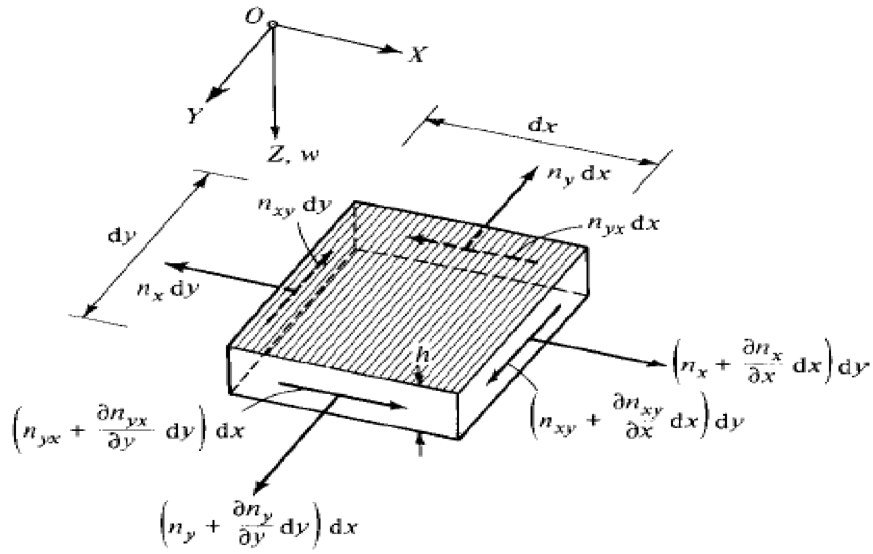


Fig. 4.19 – Elemento de placa fina sob carregamento no plano (Szilard, 2004).

Sendo assim, o equilíbrio de forças na direção de X é feito através da seguinte equação:

$$\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial n_y}dx\right)dy - n_x dy + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - n_{yx}dx = 0 \qquad (4.60)$$

Simplificando a Eq. (4.60):

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad (4.61)$$

De forma similar, o equilíbrio de forças na direção de Y é dado por:

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \qquad (4.62)$$

As Eqs. (4.61) e (4.62) são equações de equilíbrio para um estado de tensões bidimensional, em suas formas homogêneas. Logo, quando a espessura h é constante, estas equações são reduzidas de acordo com a Eq. (4.63), onde *Φ(x,y)* é a função de tensões de Airy:

$$n_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \; ; \; n_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \; ; \; n_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{4.63}$$

Em seguida, será considerada a condição de equilíbrio de forças do elemento *dxdy* na direção de *Z*. Considerando duas arestas do elemento de placa fixas, conforme Fig. 4.20, o somatório de forças na direção de *Z* será realizado conforme a Eq. (4.64).

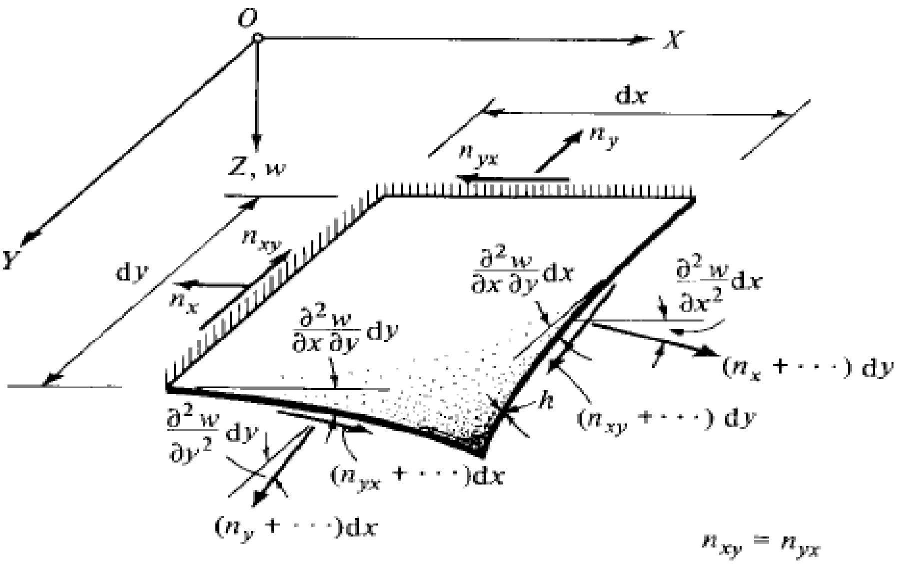


Figura 4.20 – Forças de membrana em um elemento de placa deformado (Szilard, 2004).

$$\begin{aligned} \sum F_z = &\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left(n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy\right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \\ &+ \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \end{aligned} \tag{4.64}$$

Simplificando e desprezando os termos de ordem superior da Eq. (4.64), obtêm-se a seguinte equação diferencial homogênea:

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p_z^*(x, y) \tag{4.65}$$

A carga lateral p_z*, responsável pelo efeito de deflexão, é considerada uma carga fictícea aplicada no plano da placa. Logo, aplicando este carregamento fictíceo na equação diferencial para placas finas, Eq. (4.38), a seguinte equação é obtida:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = p_z + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.66}$$

Aplicando as funções de tensão de Airy, a Eq. (4.66) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 w = \frac{p_z}{h} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.67}$$

Considerando o caso de a placa apresentar uma pequena curvatura inicial w_0, a Eq. (4.67) é reescrita da seguinte forma:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_z + n_x \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} \tag{4.68}$$

Segundo Szilard (2004), se as forças no plano n_x, n_y e n_{xy} não são conhecidas, a solução da Eq. (4.66) só pode ser obtida através do emprego de uma equação diferencial adicional, que expressa uma relação entre o deslocamento lateral w e as funções de tensão de Airy. Considerando este caso, a utilização de métodos numéricos, como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos, é o indicado para a solução da equação diferencial. Se as forças no plano n_x, n_y e n_{xy} forem independentes do deslocamento lateral w e conhecidas, a equação diferencial é resolvida da mesma maneira que a equação diferencial de placas, através dos métodos de Navier e Lévy.

4.2.1.2 Método do Equilíbrio

Ventsel e Krauthammer (2001) consideram um estado inicial de equilíbrio de uma placa (retangular de lados *a* e *b*) submetida a cargas distribuídas em seus extremos, atuando no plano médio da placa, conforme Fig. 4.21. No Método do Equilíbrio é assumido que para certos valores dessas cargas, a placa sofre uma discreta deflexão lateral (flambagem). Quando as cargas nos extremos da placa são ligeiramente elevadas acima do valor de carga crítica, as deflexões laterais *w* se aproximam de grandes valores. Independente do quão pequeno seja a elevação destas cargas. A menor carga correspondente a esta condição de valores de cargas é a carga crítica (Szilard, 2004).

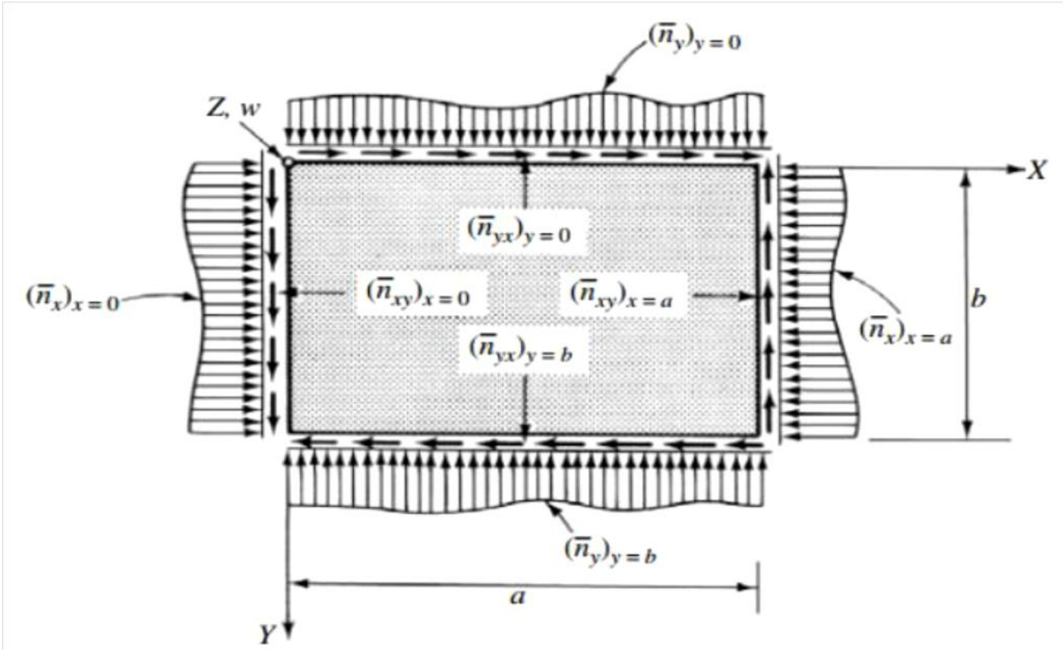


Figura 4.21 – Placa retangular submetida a carregamentos distribuídos em seus extremos (Szilard, 2004).

Considerando a Fig. 4.21, as forças coplanares normais $\overline{n_x}$, $\overline{n_y}$ e de cisalhamento $\overline{n_{xy}}$ aplicadas nos bordos da placa, são representadas através do produto entre um escalar, denominado fator de carga λ, e um valor de referência $\overline{n_{x0}}$, $\overline{n_{y0}}$ e $\overline{n_{xy0}}$, conforme a equação a seguir:

$$\overline{n_x} = -\lambda\overline{n_{x0}}\,, \qquad \overline{n_y} = -\lambda\overline{n_{y0}}\,, \qquad \overline{n_{xy}} = -\lambda\overline{n_{xy0}} \tag{4.69}$$

As forças normais comprimem o elemento, enquanto que as forças de cisalhamento atuam no sentido oposto aos eixos coordenados do elemento, justificando assim o sinal negativo na Eq. (4.69).

Segundo Szilard (2004), um aumento gradual do fator λ resulta em um aumento gradual das cargas $\overline{n_x}$, $\overline{n_y}$ e $\overline{n_{xy}}$ nos bordos da placa. Após certo valor de λ, a deformação lateral da placa torna-se independente do carregamento transversal p_z, ou seja, a placa passa do estado de equilíbrio estável para o neutro. No estado de equilíbrio neutro, o ponto de bifurcação é atingido, conforme Fig. 4.18, e a partir deste ponto, considerando a ausência do carregamento transversal p_z, passam a ocorrer deslocamentos laterais na placa. Logo, devido à ausência de cargas laterais, a equação diferencial pertinente ao estado neutro de equilíbrio em placas retangulares (Eq. (4.66)) apresenta forma homogênea, conforme a Eq. (4.70).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{D}\left(\overline{n_x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{n_y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\overline{n_{xy}}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \qquad (4.70)$$

Aplicando a Eq. (4.69) na Eq. (4.70), obtém-se a Eq. (4.71). Esta equação diferencial define o problema de flambagem ou instabilidade linear, em placas retangulares de material elástico e homogêneo (Szilard, 2004).

$$\nabla^4 \mathrm{w} + \frac{\lambda}{D}\left(\overline{n_{x0}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{n_{y0}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\overline{n_{xy0}}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0 \qquad (4.71)$$

De acordo com Szilard (2004), o problema de carga crítica em uma placa retangular é definido através do menor valor de λ, que conduz a placa ao estado de equilíbrio neutro, apresentando uma deformação levemente encurvada. Este valor recebe o nome de Valor Crítico, λ_{cr}, sendo a carga crítica de flambagem calculada através da multiplicação de λ_{cr} pelos respectivos carregamentos e derivadas de ordem inferior (Ventsel e Krauthammer, 2001). A solução do problema deve satisfazer a Eq. (4.71) e as respectivas condições de contorno, sendo esta equação classificada como um problema de autovalores, em termos matemáticos.

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), os valores críticos das forças aplicadas no plano podem ser encontrados através da solução das Eqs. (4.70) e (4.71). Entretanto, torna-se impossível determinar analiticamente a ordem de grandeza dos deslocamentos laterais *w*, devido às condições de homogeneidade destas equações, como: carregamento transversal p_z nulo ao longo da superfície da placa e a inexistência de momentos aplicados nos bordos da placa. Se o deslocamento *w* representar uma solução do problema, qualquer função que represente um produto escalar por *w* também será uma solução possível (Szilard, 2004). Isso significa que os valores exatos de deslocamentos laterais ao longo da placa não podem ser determinados, porém a forma da superfície deformada da placa (modo de flambagem) pode ser estabelecida.

De acordo com Szilard (2004), em termos de simplificação de análise, quando uma placa está sob ação combinada de forças, é comum especificar a relação entre as forças por razões constantes. Se, por exemplo, as forças normais de compressão em *X* forem dominantes e conhecidas, as forças normais de compressão $\overline{n_{y0}}$ e de cisalhamento $\overline{n_{xy0}}$ podem ser descritas como segue:

$$\overline{n_{y0}} = \alpha\overline{n_{x0}} \ , \qquad \overline{n_{xy0}} = \beta\overline{n_{x0}} \tag{4.72}$$

onde α e β são constantes que definem as proporções entre as forças de referência $\overline{n_{y0}}$ e $\overline{n_{x0}}$ e entre $\overline{n_{xy0}}$ e $\overline{n_{x0}}$. Segundo Baptista (2014), uma vez determinado o valor crítico para a força normal em X, ou seja, $(\overline{n_x})_{cr} = \lambda_{cr}\overline{n_{x0}}$, os valores críticos para as demais forças serão:

$$\left(\overline{n_y}\right)_{cr} = -\lambda_{cr}\alpha\overline{n_{x0}} \ , \qquad \left(\overline{n_{xy}}\right)_{cr} = -\lambda_{cr}\beta\overline{n_{x0}} \tag{4.73}$$

Szilard (2004) propõe uma simplificação adicional, através da análise de um valor de referência para uma faixa de placa unitária, atuando de forma similar a uma coluna isolada, conforme Fig. 4.22. O valor de referência tem como base a carga crítica de Euler, conforme a Eq. (4.74), onde a e h são o comprimento e a espessura da placa, e E e D são o módulo de elasticidade longitudinal e a rigidez à flexão, respectivamente.

$$\overline{n_{x0}} = \frac{\pi^2 D}{a^2} = \frac{\pi^2 E h^3}{12(1-\nu^2)a^2} \tag{4.74}$$

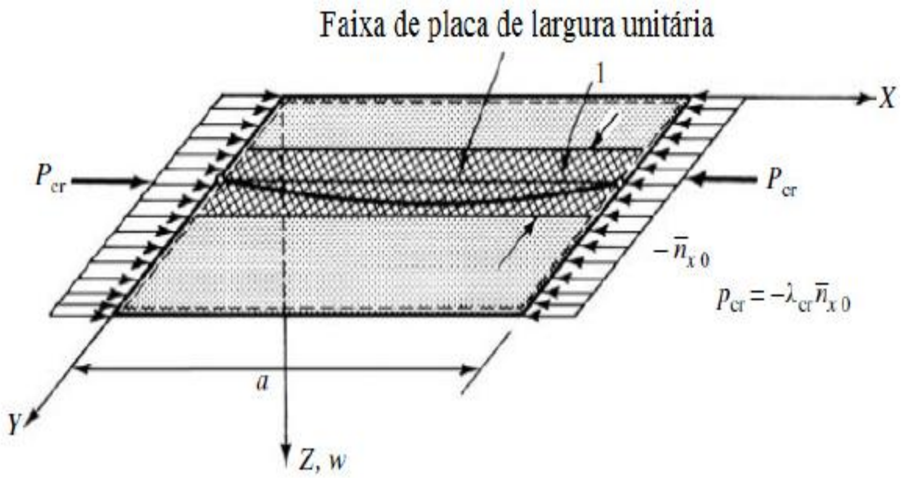


Figura 4.22 – Flambagem de uma faixa de placa unitária (Szilard, 2004 – Adaptado por Baptista, 2014).

Em geral, a solução para o problema de flambagem de placas pode ser apresentado através de um somatório de produtos de funções, dependentes de X e Y:

$$w(x,y) = \sum_m \sum_n W_{mn} X_m(x) Y_n(y) \tag{4.75}$$

Considerando o caso de uma placa simplesmente apoiada em todo seu contorno e livre de forças de cisalhamento (n_{xy}= 0), a solução da Eq. (4.75) é obtida:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \; para\; m,n = 1,2,3,\ldots \tag{4.76}$$

onde m e n são, respectivamente, os números de semiondas transversais e longitudinais da forma flambada da placa. Substituindo a Eq. (4.76) na Eq. (4.71) é obtida a Eq. (4.77). Logo, a carga crítica para a faixa de placa unitária da Fig. 4.22, é obtida através da seguinte equação:

$$p_{cr} = (\overline{n_x})_{cr} = \lambda_{cr}\overline{n_{x0}} = \lambda_{cr}\frac{\pi^2 D}{a^2} \tag{4.77}$$

onde, o fator de carga crítico, λ_{cr}, é dado pelo menor valor da Eq. (4.78):

$$\lambda_{cr} = \left[m\frac{b}{a} + \frac{n^2}{m}\frac{a}{b}\right]^2 \tag{4.78}$$

Na situação de carregamento crítico, o número de semiondas transversais para placas quadradas e retangulares será n = 1. Considerando uma placa quadrada na mesma situação de carga crítica, a relação entre as dimensões da placa serão a/b = b/a = 1 e o número de semiondas longitudinais será m = 1, resultando no valor do fator de carga crítico (menor valor de λ):

$$\lambda_{cr} = \left[m\frac{b}{a} + \frac{n^2}{m}\frac{a}{b}\right]^2 = \left[1\times 1 + \frac{1^2}{1}\times 1\right]^2 = 4 \tag{4.79}$$

Considerando uma placa retangular na situação de carregamento crítico, a relação entre as dimensões da placa serão a/b =1 e b/a = 1/2 e o número de semiondas longitudinais será m = 2, resultando no valor do fator de carga crítico (menor valor de λ):

$$\lambda_{cr} = \left[m\frac{b}{a} + \frac{n^2}{m}\frac{a}{b}\right]^2 = \left[2 \times \frac{1}{2} + \frac{1^2}{2} \times 1\right]^2 = 4 \tag{4.80}$$

Logo, aplicando o valor de λ_{cr} = 4 na Eq. (4.77), obtém-se a equação da carga crítica de flambagem para placas quadradas e retangulares simplesmente apoiadas:

$$p_{cr} = (\overline{n_x})_{cr} = \lambda_{cr}\overline{n_{x0}} = 4\frac{\pi^2 D}{a^2} \tag{4.81}$$

De acordo com Szilard (2004) a solução para outros tipos de condições de contorno da placa são mais complexas. Entretanto, desde que a placa apresente ao menos dois bordos opostos simplesmente apoiados e os mesmos não apresentem esforços de cisalhamento atuantes, é possível obter resultados para cargas críticas utilizando o método de Levy. Considerando que os bordos da placa na Fig. 4.22 estejam simplesmente apoiados somente em *x=0* e *x=a*, o modo de flambagem da placa pode ser representado pela seguinte função:

$$w(x, y) = \sum_m Y_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{4.82}$$

A solução da Eq. (4.82), segue o padrão geral da solução de equações diferenciais de placas finas abordado no item 4.1.6, com a excessão de que agora, as equações algébricas lineares correspondentes as condições de contorno são homogêneas (Szilard, 2004). Logo, a solução não trivial para as constantes de integração A_m, B_m, C_m e D_m, são obtidas simplesmente igualando a zero os determinantes das equações algébricas. As operações matemáticas para a solução da equação característica, no entanto, apresentam alto grau de dificuldade.

Para condições de contorno diferentes das citadas, a solução para flambagem linear de placas finas torna-se praticamente inviável, sendo indicado o uso de métodos numéricos e computacionais para a solução do problema, como o Método dos Elementos Finitos.

4.2.2. Comportamento pós-flambagem de placas finas

Com os avanços de pesquisas na área da indústria aeronáutica, após o ano de 1930, descobriu-se que as placas apresentam um comportamento de pós-flambagem completamente diferente ao de outras estruturas, como por exemplo, barras esbeltas (Roorda, 1980). Enquanto que um aumento mínimo da carga crítica de uma barra causa o colapso total desta estrutura, uma placa no estado de flambagem linear apresenta cargas de colapso muito maiores que a crítica. Este fato pode ser explicado pelo efeito das grandes deformações que ocorrem na fase de pós-flambagem. As condições de vinculação da placa também favorecem as cargas de colapso, evitando um aumento elevado dos deslocamentos laterais frente a cargas de colapso menores (Ventsel e Krauthammer, 2001). O fenômeno de pós-flambagem em placas é caracterizado não só pela flexão, mas também pela ação direta das tensões no plano. Logo, a capacidade de carga pós-flambagem permite um carregamento adicional após a deflexão lateral, ou seja, o colapso da placa não ocorre quando atingida a carga crítica de flambagem, e sim em um nível de carga superior (Baptista, 2014).

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), a carga adicional pós-flambagem em placas finas é de grande importância prática na concepção de estruturas navais e oceânicas. Estas estruturas geralmente são compostas por placas, sustentadas em suas extremidades por enrijecedores denominados longarinas ou longitudinais, conforme Fig. 4.23. Estas componentes tendem a manter a placa reta durante a flambagem, aumentando a quantidade de carga necessária para que ocorra a deflexão lateral da placa. Além disso, reduções de peso de uma estrutura podem ser obtidas, considerando o comportamento de pós-flambagem de uma placa (Ventsel e Krauthammer, 2001).

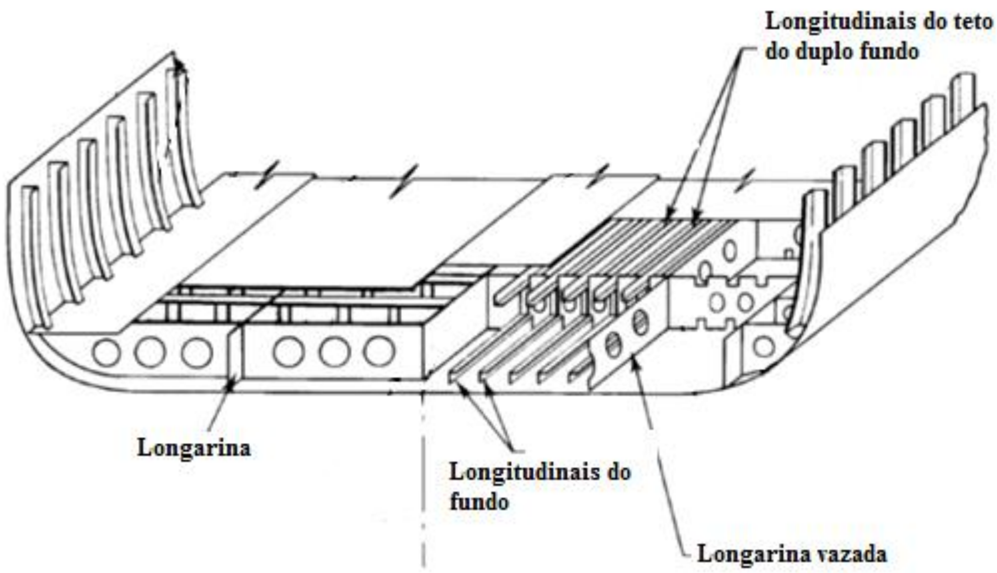


Figura 4.23 – Longarinas ou longitudinais no casco de um navio (Pinto, 2011).

Segundo Åkesson (2007), a capacidade de carga pós-flambagem de uma placa pode ser demonstrada de acordo com o gráfico carga/deslocamento da Fig. 4.24.

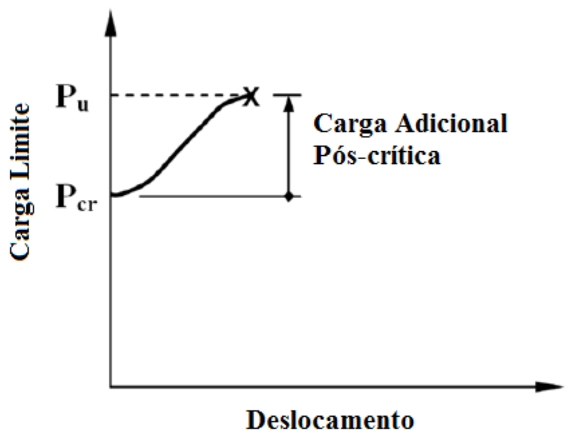


Figura 4.24 – Diagrama carga/deslocamento pós-flambagem linear (Åkesson, 2007).

Como pode ser observado no gráfico, a placa não entra em colapso no chamado ponto de bifurcação (P_{cr}), ao invés disso, ela suporta uma carga adicional mesmo após o deslocamento ocorrer, atingindo o colapso no ponto determinado pela carga de colapso, P_{u}. Isto ocorre devido à formação de uma membrana que estabiliza o deslocamento, através de uma tensão transversal. Após esta situação, a porção central da placa deformada perde grande parte de sua rigidez, forçando o carregamento a atuar no entorno desta região, próximo as arestas da placa, conforme Fig. 4.25. Logo, ocorre uma redistribuição de tensões da zona central enfraquecida para as regiões periféricas com maior rigidez, acarretando assim, em uma capacidade de carga pós-crítica maior para a placa (Åkesson, 2007).

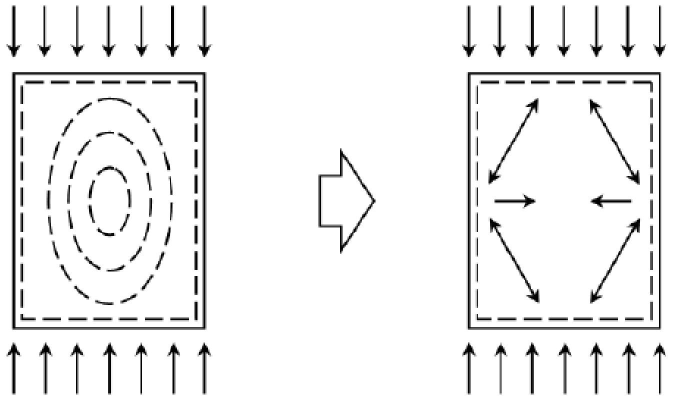


Figura 4.25 – Redistribuição de tensões e transferência de carregamento no estado pós-crítico de flambagem (Åkesson, 2007).

4.2.3. Características da Flambagem Elástica e Elasto-plástica

Uma comparação entre a flambagem elástica e elasto-plástica pode ser feita, levando em consideração as características físicas de uma placa metálica. De acordo com El-Sawy et al. (2004), o colapso de placas submetidas a compressão axial pode ser decorrente da falha do material ou devido ao deslocamento lateral da placa para fora do plano. Para placas com espessura pequena em relação a suas outras dimensões (placas finas ou esbeltas), que apresentam um material com tensão de escoamento σ_y, a instabilidade ocorre a uma tensão crítica σ_{cr} menor que σ_y, principalmente se a chapa não possuir perfurações. Essa tensão σ_{cr} é denominada tensão de flambagem elástica. Em contrapartida, para placas com maiores espessuras ou com grandes perfurações, a instabilidade pode ocorrer após o colapso do material em algum ponto específico da placa, ocorrendo a tensão de flambagem elasto-plástica. Ainda, se a espessura da placa for extremamente grande, pode ocorrer o colapso do material antes mesmo da ocorrência de qualquer deformação ou deslocamento considerável.

4.2.4. Análise do problema de Flambagem Linear

Conforme Wang et al. (2005), a flambagem elástica linear de componentes estruturais é a forma mais elementar de flambagem, e seu estudo é um passo essencial para a compreensão deste fenômeno em estruturas complexas, incluindo estruturas que apresentam comportamento de flambagem não linear, ou apresentem imperfeições geométricas, residuais, etc. A carga crítica que provoca a deformação elástica lateral apresenta grande importância, pois fornece a base para o equacionamento das fórmulas de flambagem, que normalmente são utilizadas em soluções numéricas e modelagem computacional.

A análise linear de flambagem em placas envolve a solução de equações diferenciais parciais, através da transformação destas em equações algébricas lineares e homogêneas. Logo, o problema é resolvido através dos conceitos de autovalores e autovetores, onde o menor autovalor encontrado corresponde a carga crítica de flambagem, enquanto o autovetor associado a carga crítica pode ser interpretado como o modo primário de flambagem, conforme foi mostrado na Eq. (4.71) (Sentano, 2014).

4.2.5. Análise do problema de Flambagem Não Linear

De acordo com Chages (1974), em termos de material constituinte do elemento estrutural, considera-se linear a relação entre as tensões e deformações, antes da tensão crítica ser alcançada, acarretando assim, uma resistência extra da placa frente às deformações iniciais. Quando isto não ocorre, a teoria para flambagem elástica linear deve ser substituída por uma análise do comportamento não linear, para a relação entre as tensões e deformações ocorridas. Além disso, todo estudo é feito com base na geometria inicial indeformada, porém se esta hipótese não é considerada, a análise é designada não linear geométrica (Baptista, 2014).

A teoria de flambagem não linear é extremamente complexa e difícil de ser estudada, sendo necessária a aplicação de métodos computacionais e algoritmos específicos para a analise não-linear física.

4.2.6. Efeito das Imperfeições Geométricas Iniciais

Conforme Gordo e Soares (2014), os elementos de placas presentes nas estruturas navais, em especial nos navios, apresentam imperfeições iniciais resultantes dos processos de fabricação do aço em siderúrgicas, processamento em caldeirarias e dos esforços a que são sujeitos nas operações de montagem. A presença de distorções nos elementos em placas metálicas, faz com que estas se comportem de forma diferenciada, tanto em tração como em compressão. As tensões geradas em decorrencia dos processos de fabricação, denominadas tensões resíduais, são as principais responsáveis pelas imperfeições iniciais que ocorrem em placas.

Em especial no caso de compressão, as consequências das imperfeições geométricas são muito mais acentuadas. De acordo com Gordo e Soares (2014), quanto maior a amplitude das imperfeições geométricas em placas, mais suave será o comportamento da curva em um gráfico de tensão-deformação, ou seja, para placas quase perfeitas o colapso súbito da mesma praticamente inexiste. Por outro lado, a forma e a amplitude das distorções geométricas iniciais ao longo de uma placa influenciam o modo de colapso, provocando variações negativas na sua resistência última.

Segundo Amante (2006), as imperfeições causadas pelos processos de fabricação, chamadas de imperfeições geométricas iniciais, são deformações dimensionais permanentes na estrutura e representa o afastamento da superfície real daquela idealizada em projeto. Essa deformação é caracterizada pela forma e magnitude e é a principal geradora de cargas de colapso. Na Figura 4.26 são apresentados alguns exemplos de imperfeições geométricas de fabricação e montagem.

Figura 4.26 – Processos de soldagem podem causar imperfeições geométricas iniciais em placas metálicas (Amante, 2006).

4.3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A simulação numérica é um processo computacional que visa a realização de um fenômeno físico, utilizando um ou mais programas ou computadores. Atualmente, o ramo da indústria naval e offshore utiliza em grande escala a modelagem computacional, citando como exemplo o fluxo de um navio no mar, que pode ser representado através da simulação numérica de um sistema físico (Seila, 1995). Logo, a simulação é utilizada para estudar a operação e as propriedades de um sistema, bem como prever sua evolução (C.E.A., 2010).

As simulações numéricas são realizadas, baseadas em modelos teóricos e matemáticos conhecidos, sendo então, uma adaptação de modelos matemáticos para sistemas numéricos. Um modelo nada mais é do que a descrição de um fenômeno, na linguagem de equações matemáticas. Atualmente, existem muitas teorias físicas que produzem modelos, os quais ainda não foram validados experimentalmente (C.E.A., 2010). Sendo assim, a simulação numérica é um processo interessante para a validação de teorias físicas.

Problemas de restrições físicas em placas finas, como por exemplo as condições de carregamento, vinculação e perfurações, tornam inviável a solução análitica para modelos de placas nestas condições. A programação é o principal meio de solução para estes casos, onde através da discretização, transforma-se as equações análiticas em códigos computacionais, tornando possível uma solução aproximada para o problema (C.E.A., 2010). Para isso, é necessária a aplicação de método numéricos para a obtenção de soluções do problema com boa precisão. Um dos métodos com maior empregabilidade na solução de problemas complexos envolvendo análise de componentes estruturais é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este método tem sua origem em processos de análise de estruturas propostos nos séculos XVIII e XIX, e em sua configuração atual apresenta uma crescente utilização, resultado do desenvolvimento nas áreas da mecânica, matemática, análise numérica e computação (Las Casas, 2000).

O estudo de estruturas, analisando principalmente tensões e deformações mecânicas, através de simulações computacionais, é conhecido como Mecânica dos Sólidos Computacional (Baptista, 2014). Um programa baseado no MEF comumente utilizado em Mecânica dos Sólidos Computacional é o software ANSYS®, que possui uma ampla variedade de soluções numéricas para problemas mecânicos. Sendo assim, o software ANSYS® foi utilizado para a simulação numérica do comportamento mecânico das placas envolvidas neste estudo.

4.3.1. Método dos Elementos Finitos

De acordo com Süli (2012), o Método dos Elementos Finitos (MEF) propõe uma solução aproximada para um sistema de equações diferenciais parciais, aplicando ferramentas e conceitos gerais baseados em métodos numéricos. Este método surgiu no ano de 1960, onde os projetistas Turner, Clough, Martin e Topp propuseram um método já consolidado de análise estrutural conhecido como análise matricial, onde realizavam a modelagem de painéis de aeronaves a partir de pequenos triângulos, capazes de cobrir toda a superfície de cada painel (Las Casas, 2000).

Originalmente, o MEF foi concebido como uma ferramenta analítica com utilização no campo da mecânica dos sólidos e de estruturas, sendo sua primeira formulação baseada em uma análise física direta (Burnett, 1987; Fletcher, 1984). Porém, o método está em constante desenvolvimento para a solução de diversos problemas em outras áreas da engenharia, sendo aplicado com sucesso em problemas de condução de calor, dinâmica dos fluídos, fluxo de infiltração e campos elétricos e magnéticos (Rao, 2004). O MEF também é uma ferramenta essencial e eficiente para resolver problemas estruturais no domínio da construção naval, podendo ser utilizado para vários problemas (lineares e não-lineares) de mecânica dos sólidos, dinâmica e estabilidade estrutural de navios (Okumoto et al., 2009).

Considerando uma aplicação específica para análise de tensões em placas, o MEF pode ser dividido em duas categorias, envolvendo problemas de valor de contorno: problemas relacionados ao equilíbrio e problemas de autovalores. Os problemas de equilíbrio buscam verificar os deslocamentos e a distribuição de tensões no estado estacionário. Os problemas de autovalores podem ser considerados como uma extensão dos problemas de equilíbrio, onde certos parâmetros, como os valores críticos das cargas de flambagem, são determinados além das configurações de estado estacionário (Rao, 2004). Com base no estado de equilíbrio estático de uma placa, a configuração da mesma é modificada por um conjunto de deslocamentos muito pequenos e compatíveis com as condições de contorno, que são denominadas deslocamentos virtuais. Sendo assim, o MEF baseia-se no Princípio dos Trabalhos Virtuais ou Princípio dos Deslocamentos Virtuais, que estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação (Cook et al., 2002; Zienkiewicz et al., 1988).

4.3.2. Fundamentos do MEF

De acordo com Okumoto et al. (2009), os métodos convencionais para solução de problemas de tensão e deformação utilizam teorias analíticas de placas na resolução, restringindo esses métodos para estruturas e carregamentos simples. O MEF é uma etapa essencial na modelagem de fenômenos físicos em diversas áreas da engenharia. Sendo assim, o MEF propõe-se a resolver, numericamente, estruturas com soluções analíticas complicadas, através do seguinte processo:

a) Discretização de Elementos Finitos

Segundo Szilard (2004) e Rao (2004), o MEF utiliza soluções locais aproximadas para a análise de tensões em placas. Este procedimento é chamado discretização de elementos finitos, onde uma placa é dividida em um número finito de elementos, não sobrepostos e interligados por pontos nodais, conforme Fig. 4.27. Um nó especifica a posição do elemento no espaço, onde existem graus de liberdade e as ações do problema físico. Os graus de liberdade (DOF) de um nó são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento (Madenci e Guven, 2006).

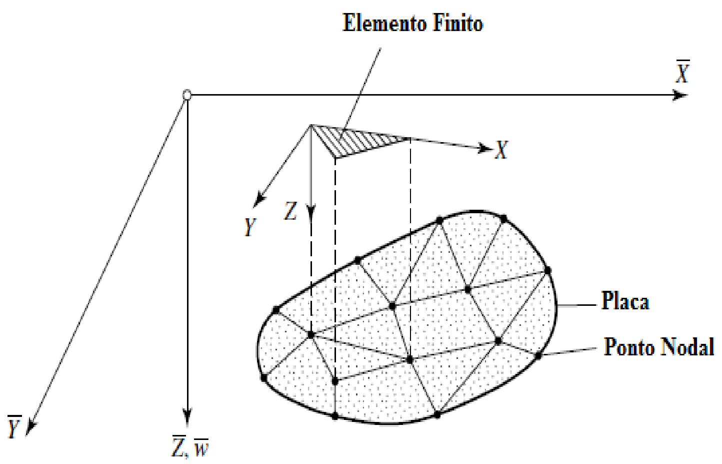


Figura 4.27 – Discretização de elementos finitos triangulares em uma placa (Szilard, 2004).

A discretização de elementos finitos pode ser realizada até mesmo para estruturas de grande porte, como mostrado na Fig. 4.28, sendo extremamente necessária a aplicação de métodos computacionais, devido a grande quantidade de elementos nestas estruturas.

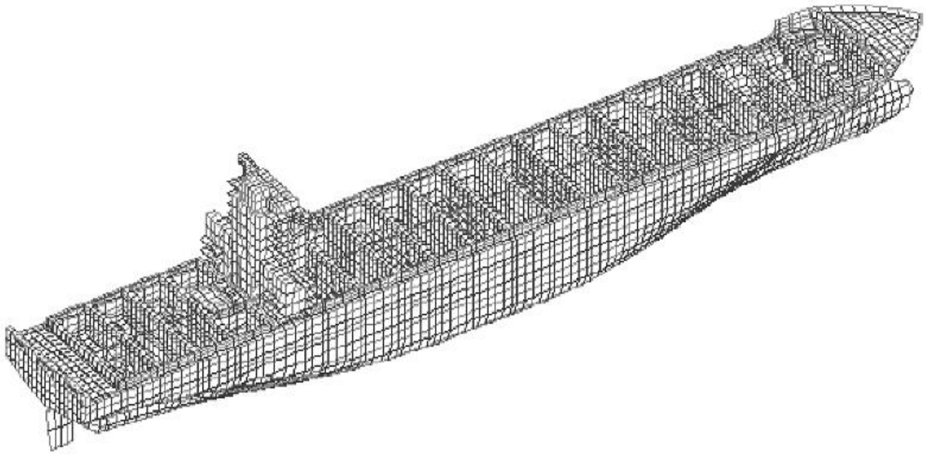


Figura 4.28 – Análise estrutural de um navio porta container, utilizando uma malha de elementos finitos global (Okumoto et al., 2009).

Além disso, dependendo da geometria e da natureza física do problema, a discretização de elementos pode ser realizada conforme Fig. 4.29, através de linhas, áreas e volumes.

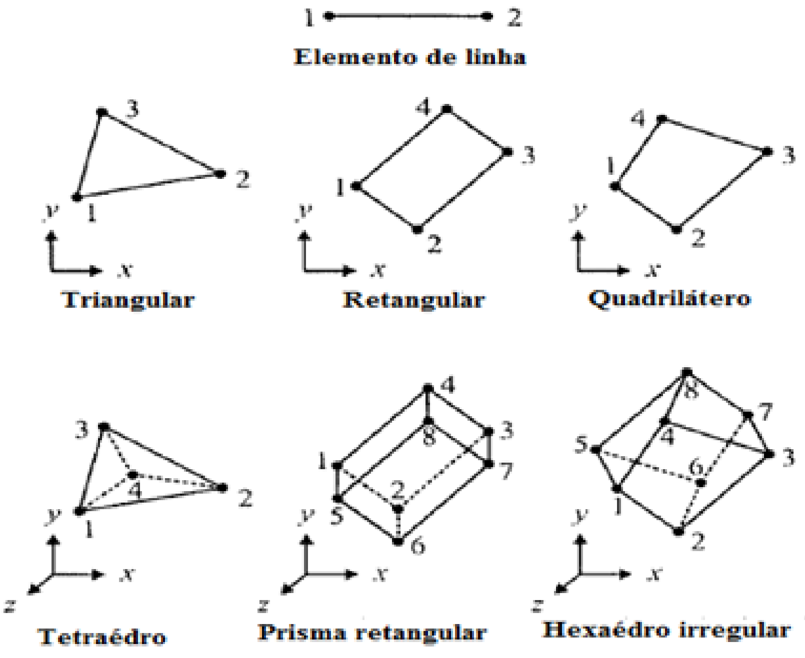


Figura 4.29 – Geometrias de elementos do MEF, considerando elementos de linha, área e volume (Okumoto et al., 2009).

b) Sistema Global de Equações

De acordo com Okumoto et al. (2009), a formulação de um modelo matemático para um elemento finito pode ser realizada, levando em consideração um elemento de mola, como mostra a Fig. 4.30.

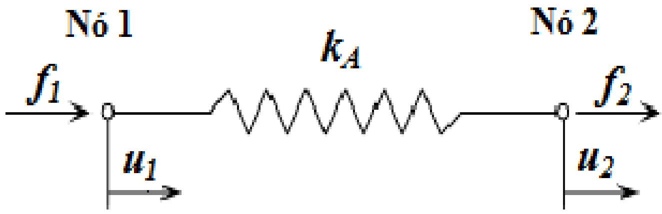


Figura 4.30 Sistema formado por um elemento de mola (Okumoto et al., 2009).

Na Figura 4.30, os deslocamentos dos nós *1* e *2* são representados por u_1 e u_2, a constante da mola é representada por k_A e o alongamento da mola por u_2-u_1. Logo as forças atuantes na mola são dadas por:

$$f_1 = -k_A(u_2 - u_1) \tag{4.79}$$

$$f_2 = k_A(u_2 - u_1) \tag{4.80}$$

As forças atuantes na forma matricial apresentam a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A \\ -k_A & k_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{4.81}$$

Logo, a Eq. (4.81) é denominada Sistema de Equações de um elemento e pode ser reescrita através da seguinte forma resumida:

$$\{\boldsymbol{f}^{(e)}\} = [\boldsymbol{k}^{(e)}]\{\boldsymbol{u}^{(e)}\} \tag{4.82}$$

onde $u^{(e)}$ é o vetor de incógnitas nodais do elemento, representando os deslocamentos, $k^{(e)}$ e $f^{(e)}$ são a matriz de rigidez e o vetor de força do elemento, respectivamente. O superescrito (e) é referente à numeração do elemento.

Conforme Madenci e Guven (2006), a Equação (4.82) representa as forças atuantes em apenas um elemento finito, sendo assim é necessária uma expressão global que inclua a equação de rigidez de cada elemento que compõe uma malha. A forma matricial para o sistema global de equações para uma malha de elementos finitos pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{F\} = [K].\{u\} \tag{4.83}$$

onde *K* é a matriz de rigidez global da estrutura, composta pelo conjunto de matrizes de rigidez de cada elemento da malha, *F* é o vetor força global, composto pelo conjunto de forças de cada elemento. O vetor *u* representa as incógnitas nodais.

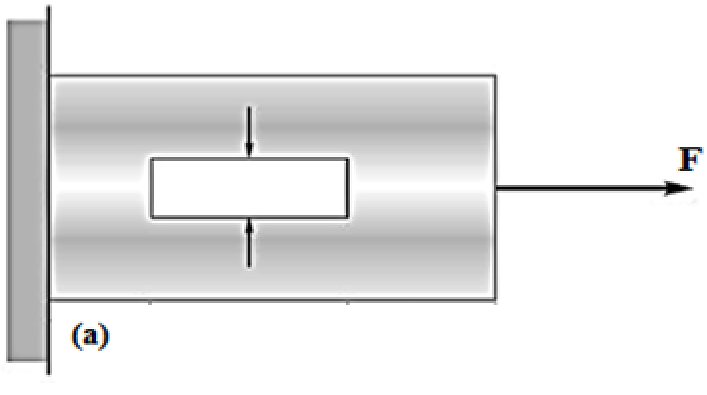
A matriz de rigidez global *K* pode ser obtida através do somatório das matrizes de rigidez $k^{(e)}$ de cada elemento, similarmente o vetor força global *F* também pode ser obtido através do somatório dos vetores de coeficientes $f^{(e)}$ de cada elemento:

$$K = \sum_{e=1}^{E} k^{(e)} \tag{4.84}$$

$$F = \sum_{e=1}^{E} f^{(e)} \tag{4.85}$$

onde *E* é referente ao número total de elementos. A matriz de rigidez e o vetor força de cada elemento apresentam respectivamente, a mesma dimensão da matriz de rigidez global e do vetor força global, sendo nulos os valores das linhas e colunas que não estão associadas aos nós do elemento *(e)*. A dimensão da matriz de rigidez e do vetor força global é ditado pelo número mais elevado de nós globais.

Saeed (2008) considera uma placa de aço engastada livre e carregada no bordo livre (Fig. 4.31 (a)), para a construção do sistema global de equações. Esta placa pode ser dividida em elementos de área retangulares, conforme Fig. 4.31 (b).



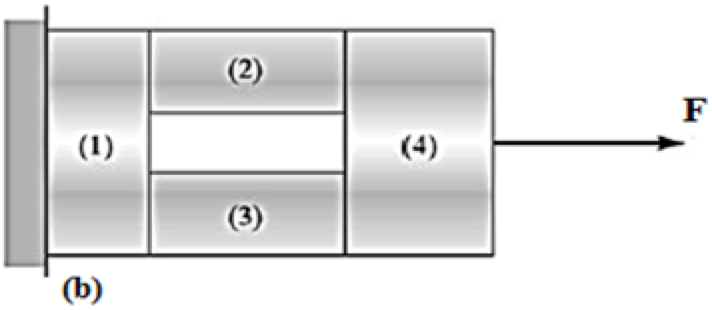


Figura 4.31 – Discretização de elementos finitos em uma placa de aço: (a) Placa de aço engastada livre e (b) Divisão em elementos de área retangulares (Saeed,2008).

De acordo com Madenci e Guven (2006) e Saeed (2008), os elementos apresentados na Fig. 4.31 (b) podem ser representados por um sistema linear de molas, conforme Fig. 4.32.

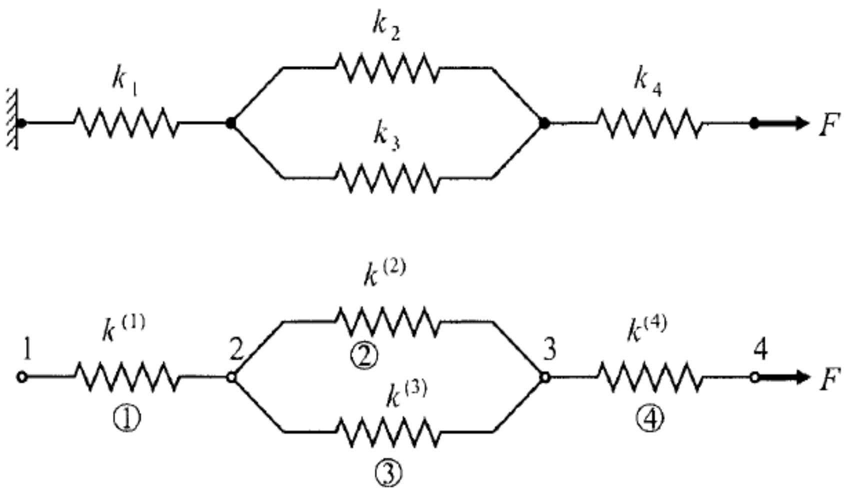


Figura 4.32 – Sistema linear de molas, composto por quatro elementos (Madenci e Guven, 2006).

O sistema de equações para cada elemento de mola é dado de acordo com a Eq. (4.82) e pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} {f_1}^{(e)} \\ {f_2}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {k_{11}}^{(e)} & {k_{12}}^{(e)} \\ {k_{21}}^{(e)} & {k_{22}}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {u_1}^{(e)} \\ {u_2}^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{4.86}$$

onde ${k_{11}}^{(e)} = {k_{22}}^{(e)} = k^{(e)}$ e ${k_{12}}^{(e)} = {k_{21}}^{(e)} = -k^{(e)}$. Os subescritos utilizados na Eq. (4.86) correspondem ao nó 1 e nó 2 de cada elemento, ou seja, o número de nós locais de cada elemento (e). O número de nós globais especifica a conectividade entre os elementos do sistema de molas da Fig. 4.33 e indicam a numeração das linhas e colunas não nulas da matriz de rigidez $k^{(e)}$, da Eq. (4.84). Estas informações estão apresentadas na Tab. 4.1.

Tabela 4.1 – Conectividade entre os nós (Madenci e Guven, 2006).

Número do Elemento	**Numeração Nó Local**	**Numeração Nó Global**
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	2
	2	3
4	1	3
	2	4

Segundo Madenci e Guven (2006), levando em consideração as Eq. (4.84), a dimensão da matriz de rigidez do sistema global de equações é (4 x 4). Logo, a matriz de rigidez de cada elemento é dada por:

Elemento 1:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

Elemento 2:

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

Elemento 3:

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

Elemento 4:

$$k^{(4)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

Sendo a fórmula da matriz de rigidez global dada por:

$$K = \sum_{e=1}^{4} k^{(e)} = k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + k^{(4)} \tag{4.91}$$

Substituindo as matrizes de rigidez de cada elemento na Eq. (4.91), obtêm-se a matriz de rigidez do sistema global:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & \left(k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} + k_{11}^{(3)}\right) & \left(k_{12}^{(2)} + k_{12}^{(3)}\right) & 0 \\ 0 & \left(k_{21}^{(2)} + k_{21}^{(3)}\right) & \left(k_{22}^{(2)} + k_{22}^{(3)} + k_{11}^{(4)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.92}$$

De forma similar, levando em consideração a Eq.(4.85), a dimensão do vetor de força do sistema global de equações é (4 x 1). Logo, o vetor de força de cada elemento $f^{(e)}$ é dado por:

Elemento 1:

$$f^{(1)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.93}$$

Elemento 2:

$$f^{(2)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.94}$$

Elemento 3:

$$f^{(3)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.95}$$

Elemento 4:

$$f^{(4)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{4.96}$$

Sendo a fórmula do vetor de forças global dada por:

$$F = \sum_{e=1}^{4} f^{(e)} = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)} \tag{4.97}$$

Substituindo os vetores de forças de cada elemento na Eq. (4.97):

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} = f_1^{(2)} = f_1^{(3)} \\ f_2^{(2)} = f_2^{(3)} = f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{4.98}$$

Juntamente com a matriz de rigidez global e o vetor de forças global, o vetor de incógnitas, u, será:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} \\ u_2^{(2)} = u_2^{(3)} = f_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{4.99}$$

c) Solução do Sistema Global de Equações

De acordo com Madenci e Guven (2006), para que o sistema global de equações tenha uma única solução, o determinante da matriz de rigidez deve ser diferente de zero. No entanto, uma análise da matriz de rigidez do sistema global revela que um dos seus autovalores é zero, resultando assim em uma matriz com determinante nulo. Portanto, a solução não é única. O autovetor correspondente ao autovalor nulo representa o modo de translação, enquanto que o restante dos autovalores, diferentes de zero, representam os modos de deformação.

Para valores específicos de ${k_{11}}^{(e)} = {k_{22}}^{(e)} = k^{(e)}$ e ${k_{12}}^{(e)} = {k_{21}}^{(e)} = -k^{(e)}$, a matriz de rigidez do sistema global apresenta a seguinte forma:

$$K = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

onde os autovalores são: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3 - \sqrt{5}$ e $\lambda_4 = 3 + \sqrt{5}$. Os correspondentes autovetores são dados por:

$$u^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, u^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, u^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 - \sqrt{5} \\ -2 + \sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix}, u^{(4)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 + \sqrt{5} \\ -2 - \sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.101}$$

cada um destes autovetores representa um possível modo de solução. A contribuição de cada modo de solução é ilustrada na Fig. 4.33.

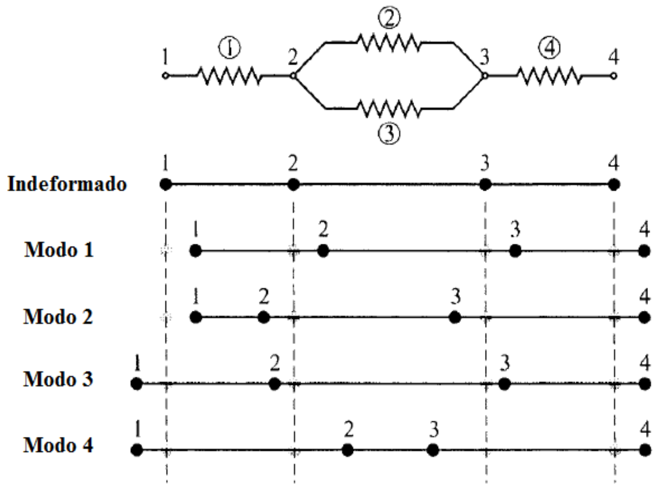


Figura 4.33 – Possíveis modos de solução para um sistema linear de molas (Madenci e Guven, 2006).

d) Condições de contorno

As restrições de movimento influenciam diretamente o modo de solução do sistema global de rigidez. Conforme é observado na Fig. 4.32, o nó *1* do sistema linear de molas está sob a condição de contorno engastada. Esta restrição é satisfeita através da imposição do autovetor $u_1 = 0$. Os deslocamentos nodais, u_i, ou as forças nodais, f_i, podem ser especificados em um determinado nó, porém, é fisicamente impossível determinar ambos como variáveis conhecidas ou desconhecidas. Logo, como o autovetor u_1 é conhecido, a força nodal f_1 é uma incógnita. Os deslocamentos nodais u_2, u_3 e u_4 também são tratados como incógnitas, e suas correspondentes forças nodais são dadas pelos seguintes valores: $f_2 = f_3 = 0$ e $f_4 = F$ (Madenci e Guven, 2006).

Sendo assim, as restrições são aplicadas no sistema global de equações (Eq. 4.83), resultando a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = F \end{Bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.102}$$

a qual é reduzida para o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.103}$$

a resolução da Eq. (4.103) resulta no seguinte equacionamento para a força nodal f_1:

$$-k^{(e)}u_2 = f_1 \tag{4.104}$$

A matriz de incógnitas da Eq. (4.103) já não apresenta uma solução singular. As seguintes soluções para estas incógnitas são obtidas a seguir:

$$u_2 = \frac{F}{k^{(e)}}, \qquad u_3 = \frac{3}{2}\frac{F}{k^{(e)}},\ u_4 = \frac{5}{2}\frac{F}{k^{(e)}} \tag{4.105}$$

A Eq. (4.104) para a força nodal f_1 é reduzida a $f_1 = -F$. Logo, fica concluído que existem abordagens sistemáticas para a montagem da matriz global de incógnitas, através da restrição de valores nodais específicos. As variáveis nodais especificadas são eliminadas com antecedência, através do sistema global de equações anterior à solução (Madenci e Guven, 2006). A solução final aceitável para o problema é ilustrada na Fig. 4.34.

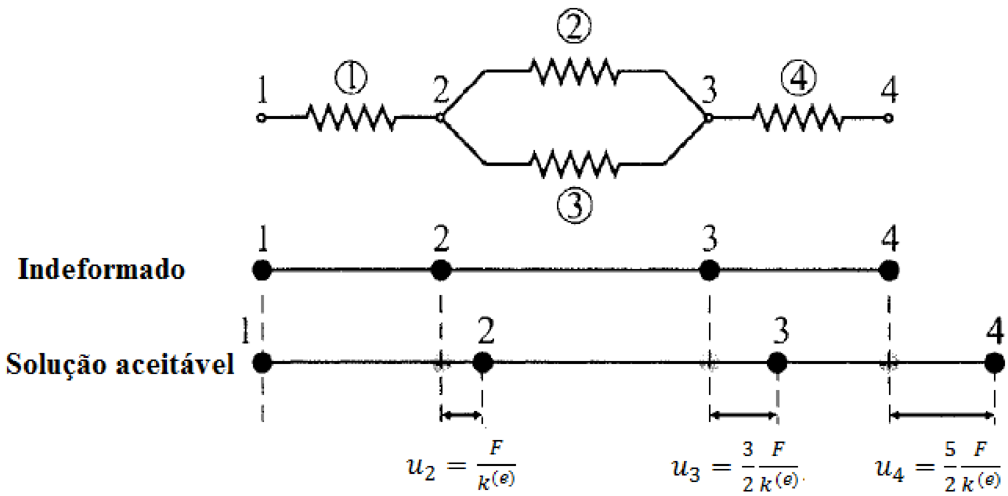


Figura 4.34 – Solução física aceitável para o sistema linear de molas (Madenci e Guven, 2006).

4.4. TEORIA CONSTRUCTAL

Idealizada pelo professor e engenheiro romeno Adrian Bejan em 1997, a Teoria Constructal é a visualização de que o desenvolvimento de sistemas de fluxos, sejam animados ou inanimados, é um fenômeno baseado em um principio físico, a *Lei Constructal*. Esta lei diz que para um sistema de fluxos com dimensões finitas persistir no tempo, suas configurações físicas (geométricas) devem evoluir de forma a facilitar o acesso das correntes que fluem através do sistema (Bejan e Zane, 2012).

A Teoria Constructal é baseada em três princípios fundamentais para descrever como as formas geométricas são determinadas: todos os sistemas de fluxo são sistemas físicos vivos, tanto os animados quanto os inanimados; a geração do design e sua evolução são baseadas em um princípio físico fundamental; os sistemas apresentam uma tendência universal de evoluir em um determinado sentido no tempo, tanto no sentido de tornar a geometria complexa quanto mais simples (Bejan e Lorente, 2008 e Bejan e Zane, 2012). Os fenômenos que ocorrem espontaneamente na natureza concordam com os princípios da física ditados pela *Lei Constructal*, onde o desenvolvimento da forma e estrutura sistemática de um fenômeno físico surge com o objetivo de facilitar o fluxo (Bejan e Zane, 2012). A chuva pode ser citada como um exemplo de fenômeno natural, onde as gotas se aglutinam e se movem juntas, gerando riachos, córregos e bacias hidrográficas, permitindo assim que a chuva realize trajetos com maior facilidade e rapidez (Reis e Gama, 2010).

De acordo com Bejan e Zane (2012), os sistemas de fluxo apresentam duas características ou propriedades básicas: o tipo de corrente de fluxo que se movimenta no sistema (fluído, calor, massa, tensão, informação) e a geometria ou forma (design) que o sistema como um todo apresenta. As descargas elétricas, por exemplo, são sistemas de fluxo que descarregam eletricidade (de forma eficiente) a partir das nuvens até um ponto específico na terra. As bacias hidrográficas são sistemas de fluxo que se desenvolvem, através do fluxo corrente de água originado em rios menores e se desenvolvendo na direção de rios maiores. O sistema circulatório de animais e humanos se desenvolvem de tal forma a gerar fluxo corrente de sangue de forma eficiente e rápida. Todos estes exemplos citados são ilustrados na Fig. 4.35 a), b), e c), e vão ao encontro do conceito de estruturas *Tree Like*, específico da Teoria Constructal, referente a geometria e forma de estruturas. Este conceito diz que toda estrutura que proporciona grande facilidade de fluxo em sistemas que movimentam uma corrente de um ponto a uma área ou de uma área a um ponto, é uma estrutura em forma de árvore. Porém, é importante observar que nem sempre a geometria mais complexa conduz ao melhor desempenho.

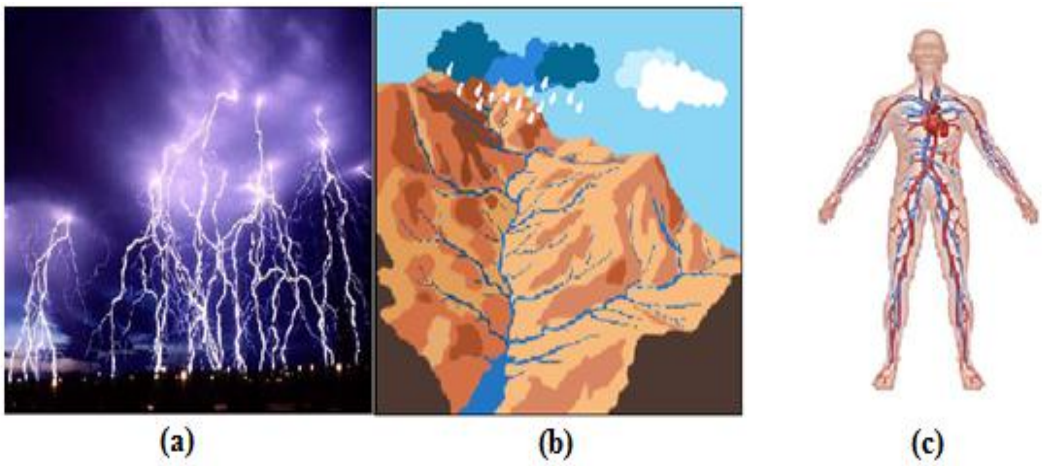


Figura 4.35 – Exemplos de sistemas de fluxo naturais em forma de árvore: (a) Descargas elétricas, (b) Bacia hidrográfica e (c) Sistema circulatório humano (Adaptado de: http://www.cosmoconsultoria.com.br/servicos/para-raios/imagens/para-raios.jpg; http://www.ecoanimateca.net.br/imagens_pedagogicas/295ilustra-ficha-bacias.JPG; http://www.fcnoticias.com.br/wp-content/uploads/Sistema-circulat%C3%B3rio1.jpg).

Um fator importante para o entendimento da Teoria Constructal, é a compreensão de que o desenvolvimento de um sistema de fluxo nunca acaba, ou seja, o fluxo está destinado a ser imperfeito. A função primordial do sistema é a manutenção do desenvolvimento de suas formas e geometrias, gerando uma constante distribuição das imperfeições, de modo que o sistema como um todo flua de forma eficaz e rápida (Bejan e Lorente, 2008 e Correia, 2013).

O método utilizado na aplicação da Lei Constructal é denominado *Constructal Design*. O *Constructal Design* é um método que relacionando graus de liberdade, restrições e função objetivo, permite avaliar a influência da geometria no desempenho de um sistema. Esse método vem sendo aplicado em diversos problemas de engenharia, nas áreas de mecânica dos fluidos, transferência de calor e, mais recentemente, em estudos de mecânica dos sólidos. Cabe destacar que se todas as possibilidades geométricas de um determinado sistema, propostas a partir da aplicação do método *Constructal Design* aliado a busca exaustiva, forem consideradas na análise, é possível então, comparando os resultados obtidos para a função objetivo desejada, a determinação da geometria ótima, ou seja, a geometria que conduz ao melhor desempenho desse sistema.

O método *Constructal Design* vem sendo aplicado, com bastante frequência e obtendo bons resultados, em diversos estudos no campo da mecânica dos sólidos e análise de tensões relacionada à engenharia naval e offshore. Diversos estudos como a determinação de geometrias ou dimensões que conduzam componentes estruturais aplicados em estruturas oceânicas a um melhor desempenho mecânico são realizados. Como exemplo pode ser citado a influência do comportamento mecânico de placas e vigas metálicas, quando alterada suas dimensões ou geometrias, verificando através do método *Constructal Design* quais dimensões e geometrias conduzem estes elementos a um desempenho mecânico superior, frente as solicitações mecânicas impostas. Outra situação bastante comum é a necessidade da realização de perfurações em placas e vigas metálicas aplicadas em estruturas navais e oceânicas, sendo o método *Constructal Design* uma ferramenta importante na determinação da geometria, quantidade, posição e dimensão destas perfurações de modo que estes componentes mantenham o melhor desempenho mecânico possível frente as solicitações mecânicas as quais serão impostos.

Existem diversos trabalhos que abordam o método *Constructal Design* na análise de tensões em placas perfuradas, como por exemplo, Rocha et al., 2013 que empregou o método na otimização de perfurações elípticas, retangulares e losangulares, em placas retangulares sujeitas ao fenômeno de flambagem elástica. Outro trabalho similar foi realizado por Helbig et al., 2014, onde o método *Constructal Design* foi utilizado para estudar a influência de perfurações elípticas, retangulares e losangulares, no comportamento de flambagem elástica e elasto-plástica de placas simplesmente apoiadas.

5. METODOLOGIA

A metodologia aplicada neste trabalho consiste na determinação dos procedimentos de análise matemática e numérica para o problema de flambagem de placas finas de aço, através de modelos analíticos e numéricos. O modelo analítico é aplicado somente para a análise linear (flambagem elástica) de placas sem perfuração, visto que a análise não linear (flambagem elasto-plástica) apresenta soluções matemáticas extremamente complexas. O modelo numérico é aplicado para as análises linear e não linear.

Uma verificação do modelo numérico para a análise linear será realizada através da comparação entre os resultados obtidos com o próprio modelo numérico, considerando uma placa retangular sem perfuração, e os resultados obtidos com o modelo analítico. Além disso, uma validação do modelo numérico para a análise não linear será realizada. Esta validação é realizada considerando uma placa quadrada com perfuração circular centralizada, através da comparação entre os resultados obtidos com o próprio modelo numérico e resultados experimentais obtidos por El-Sawy et al. (2001).

5.1. MODELO ANALÍTICO

A seguir serão descritos os procedimentos de solução analítica do problema de flambagem elástica de placas finas de aço. A magnitude da carga de pós-flambagem relativa a análise não linear depende de vários parâmetros, tais como as propriedades relativas à dimensão, condições de contorno, tipo de carregamento, etc. (Yoo e Lee, 2011). A teoria de flambagem não linear é extremamente complexa e difícil de ser estudada, sendo necessária a aplicação de métodos computacionais para a solução destes problemas.

5.1.1. Análise linear

Para a solução analítica do problema de flambagem elástica é considerada uma placa simplesmente apoiada de comprimento L, largura H, espessura t, e submetida a um carregamento axial de compressão P, conforme Fig. 5.1.

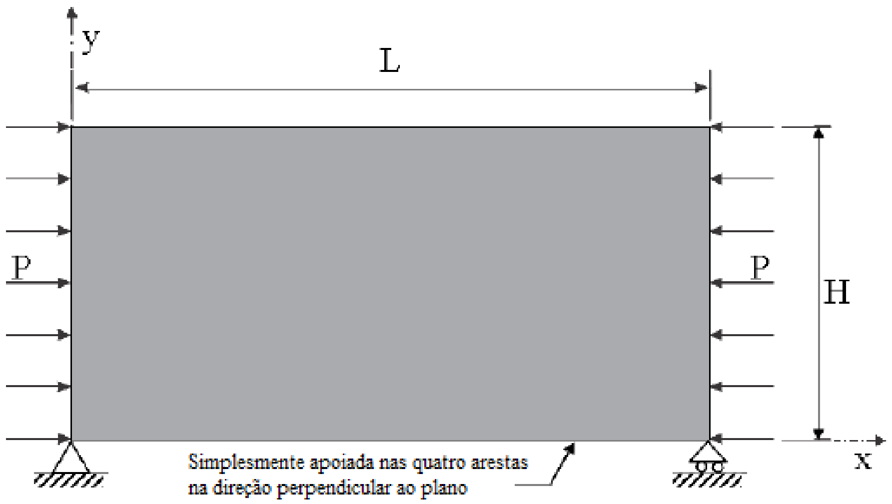


Figura 5.1 – Placa fina de aço submetida a um carregamento de compressão (Helbig et al., 2014).

A esbeltez desses componentes faz com que elas sejam suscetíveis a instabilidades como a flambagem (Real e Isoldi, 2010). De acordo com Wang et al. (2005) e El-Sawy e Nazmy (2001), a tensão crítica para flambagem elástica da placa, σ_{cr}, pode ser escrita como:

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12.(1-\nu^2)\left(\frac{H}{t}\right)^2} \tag{5.1}$$

onde π é uma constante matemática, ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de elasticidade (módulo de Young) e k é o coeficiente de flambagem da placa, dado por:

$$k = \left[m\left(\frac{H}{L}\right) + \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{L}{H}\right)\right]^2 \tag{5.2}$$

sendo m o modo de deformação da placa ou o número de meia ondas senoidais provocadas pela deformação por flambagem, na direção longitudinal.

Analisando a Fig. 5.1, quando se realiza um aumento gradativo do carregamento P, em um determinado valor de carga ocorrerá a flambagem elástica na placa, determinando a ocorrência da carga crítica. Sendo assim, para placas finas, a carga crítica, P_{cr} , pode ser escrita como o produto entre a tensão crítica de flambagem (Eq. 5.1) e a espessura da placa, t:

$$P_{cr} = \frac{k\pi^2 E t^3}{12H^2(1-\nu^2)} \tag{5.3}$$

5.2. MODELO NUMÉRICO

Neste item serão definidas equações matriciais baseadas nos fundamentos do MEF e específicas para os casos de flambagem elástica e elasto-plástica de placas.

5.2.1. Análise Linear

O procedimento numérico utilizado para o cálculo da carga que provoca a flambagem elástica é baseado em uma análise de autovalores e autovetores. Uma vez assumido que a estrutura apresenta um comportamento elástico linear, uma instabilidade estrutural é prevista, sendo o enfoque do estudo a verificação da carga que provoca a flambagem elástica do elemento. Para este tipo de análise, que envolve as condições de equilíbrio das equações de elementos finitos, é necessária a solução de equações algébricas homogêneas, cujo menor autovalor e autovetor correspondem, respectivamente, a carga crítica de flambagem e o modo de deformação elástica da estrutura (Madenci e Guven, 2006).

A formulação utilizada na análise é apresentada na forma matricial, incluindo tanto termos lineares como não lineares. A matriz de rigidez global de uma placa, $[K]$, é obtida através da soma de uma matriz de rigidez responsável pelas pequenas deformações no elemento, $[K_E]$, com outra matriz, $[K_G]$, chamada matriz de rigidez geométrica (Przemieniecki, 1985; Helbig et al., 2014). Esta matriz não depende apenas da geometria do elemento, mas também das tensões existentes no início do carregamento da placa, definido pelo passo de carga $\{P_0\}$. Sendo assim, quando o carregamento atinge um nível $\{P\}=\lambda\{P_0\}$, onde λ é um escalar, a matriz de rigidez global de uma placa pode ser escrita conforme a Eq. (5.4).

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \tag{5.4}$$

As equações de equilíbrio que regem o comportamento da placa podem ser definidas como:

$$\big[[K_E] + \lambda[K_G]\big]\{U\} = \lambda\{P_0\} \tag{5.5}$$

onde $\{U\}$ é o vetor deslocamento total da placa, determinado por:

$$\{U\} = \left[[K_E] + \lambda[K_G]\right]^{-1} \lambda\{P_0\} \tag{5.6}$$

Após a ocorrência da flambagem elástica, a placa apresenta grandes deslocamentos sem qualquer aumento de carga. Logo, o vetor deslocamento $\{U\}$ tende ao infinito quando:

$$det\left[[K_E] + \lambda[K_G]\right] = 0 \tag{5.7}$$

A Eq. (5.7) representa um problema de autovalores, apresentando como solução autovalores de λ, sendo o menor autovalor, λ_1, correspondente ao valor de carga crítica em que a flambagem elástica ocorre (Eq. (5.8)).

$$\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\} \tag{5.8}$$

Além da carga crítica, a configuração do deslocamento, provocado pela flambagem elástica, pode ser definida através da associação do vetor deslocamento $\{U\}$ com menor autovalor λ_1.

5.2.2. Análise não linear

A determinação da carga última de flambagem não linear é consideravelmente difícil, uma vez que a relação tensão-deformação para além do estado de flambagem elástica é mais complexa (Szilard, 2004). Para a verificação da carga última, uma carga de referência dada por $P_y = \sigma_y.t$, onde σ_y é a tensão de escoamento do material e t a espessura da placa, é aplicada em pequenos incrementos nas arestas paralelas ao eixo y da placa (ver Fig 5.1).

Para cada incremento de carga, o método de Newton-Raphson foi aplicado para determinar os deslocamentos que correspondem a configuração de equilíbrio da placa. A equação para o incremento de carga é dada por:

$$\{P\}_{i+1} = \{P\}_i + \{\Delta P\} \tag{5.9}$$

onde $\{P\}_i$ e $\{P\}_{i+1}$ correspondem as cargas externas aplicadas, considerando duas configurações de equilíbrio sucessivos da estrutura e $\{\Delta P\}$ é o vetor responsável pelo incremento de carga para atingir a configuração de equilíbrio. Os respectivos deslocamentos provocados pelos incrementos de cargas são descritos a seguir:

$$\{U\}_{i+1} = \{U\}_i + \{\Delta U\} \tag{5.10}$$

Para a Eq. (5.10), os vetores $\{U\}_i$ e $\{U\}_{i+1}$ correspondem aos deslocamentos, considerando duas configurações sucessivas de equilíbrio da estrutura e $\{\Delta U\}$ é o vetor responsável pelo incremento de deslocamentos necessários para atingir o equilíbrio. Incrementos de carga considerando configurações de instabilidade da placa também devem ser considerados. Logo, este incremento é dado pela seguinte equação:

$$\{\psi\} = \{P\}_{i+1} - \{F_{NL}\} \tag{5.11}$$

sendo $\{\psi\}$ o vetor de cargas em desequilíbrio e $\{F_{NL}\}$ o vetor de forças internas nodais não lineares. O vetor de cargas $\{\psi\}$ pode ser escrito em função dos deslocamentos gerados:

$$\{\psi\} = \{\Delta U\}\{K_t\} \tag{5.12}$$

onde $\{K_t\}$ é a matriz de rigidez tangente.

A carga de colapso da estrutura é atingida quando o vetor de cargas em desequilíbrio $\{\Psi\}$ é anulado, isto ocorre quando um determinado estágio de carregamento não provoca um aumento no deslocamento da placa (Helbig et al., 2014). Sendo assim, nesta fase o material atingiu o esgotamento de sua capacidade de resistência, pois as forças e tensões internas do material não podem aumentar, na intenção de manter um equilíbrio com as forças e tensões provocadas pelas cargas externas.

Neste trabalho, o critério de escoamento utilizado para as placas metálicas é baseado nos critérios de tensões equivalentes de von Mises.

5.2.3. Modelagem computacional

A modelagem computacional é realizada utilizando o software ANSYS Mechanical®. O software ANSYS® possui inúmeros tipos de elementos para, baseando-se no MEF, realizar a modelagem computacional dos mais variados tipos de problemas, através da criação de uma malha de elementos finitos. Neste trabalho, o elemento finito SHELL 93 foi utilizado. Este elemento é particularmente adequado para a modelagem computacional de placas e cascas com espessura fina. Esse é um elemento finito 2D que é chamado de 3D pois ele não é restrito ao plano *x*-*y*, podendo ser empregado em qualquer posição do espaço tridimensional, além de ser deformável na direção fora de seu plano. Este elemento pode ser carregado em seu plano (carregamentos de membrana) bem como fora de seu plano por momentos fletores e/ou torçores. Além disso, o elemento finito SHELL93 pode considerar grandes deslocamentos e plasticidade (Dufour, 2003; Ross, 2011).

Conforme mostra a Fig. 5.2, o elemento possui oito nós e apresenta seis graus de liberdade em cada nó, ou seja, três translações (nas direções dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente) e três rotações (em torno dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente) (ANSYS, 2005).

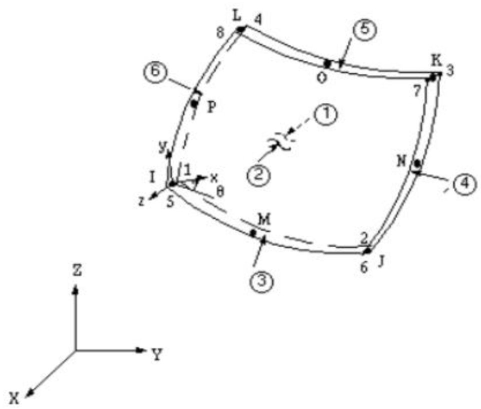


Figura 5.2 – Elemento finito SHELL93, do software ANSYS® (ANSYS, 2005).

Os modelos numéricos para a flambagem elástica (linear) e elasto-plástica (não linear), previamente apresentados, utilizam o elemento finito SHELL93, possibilitando a obtenção dos resultados para as cargas crítica e última de flambagem, respectivamente.

5.2.4. Verificação do modelo numérico para flambagem elástica

Para a verificação do modelo computacional que servirá de referência para a resolução do problema de flambagem elástica, adotou-se uma placa sem perfuração, ver Fig. 5.1, com as seguintes dimensões: H = 1000,00 mm, L = 2000,00 mm e t = 10,00 mm, respectivamente para a altura, comprimento e espessura. A simulação é realizada para uma malha composta por elementos quadrilaterais (SHELL93) de tamanho 20,00 mm, baseado nos trabalhos de Helbig et al. (2014) e Lorenzini et al. (2015). O resultado de carga crítica obtido numericamente, P_{cr} = 753,74 kN/m, é comparado com o resultado analítico produzido pela Eq. (5.3), P_{cr} = 759,20 kN/m (Helbig et al., 2014). Os resultados apresentam uma diferença pequena, de apenas 0,72%, o que possibilita a verificação do modelo numérico para a analise linear, utilizando uma dimensão de malha de 20,00 mm.

5.2.5. Validação do modelo numérico para flambagem elasto-plástica

A validação do modelo computacional utilizado para o problema de flambagem elasto-plástica é realizada através da utilização de resultados experimentais obtidos em El-Sawy et al. (2001). Foi considerada para a validação uma placa com H = 1000,00 mm, L = 1000 mm e t = 20,00 mm, respectivamente para a altura, comprimento e espessura, considerando uma perfuração circular centralizada de diâmetro igual a 300,00 mm. A simulação também é realizada para uma malha composta por elementos quadrilaterais (SHELL93) de tamanho 20,00 mm, baseado nos trabalhos de Helbig et al. (2014) e Lorenzini et al. (2015). O resultado da carga última obtida numericamente, P_u = 4340,00 kN/m, é comparada com o resultado experimental, P_u = 4270,00 kN/m, produzido por El-Sawy et al. (2001) para uma placa idêntica a adotada para o modelo numérico. Logo, o modelo computacional foi validado, com uma diferença entre os resultados de apenas 1,61% (Helbig et al., 2014).

5.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO *CONSTRUCTAL DESIGN*

No presente trabalho foi utilizado um modelo de placa de aço A-36, simplesmente apoiado e submetido a um carregamento axial de compressão. Além disso, foram considerados dois tipos de perfurações centralizadas: hexagonal longitudinal (Fig. 5.3) e hexagonal transversal (Fig. 5.4).

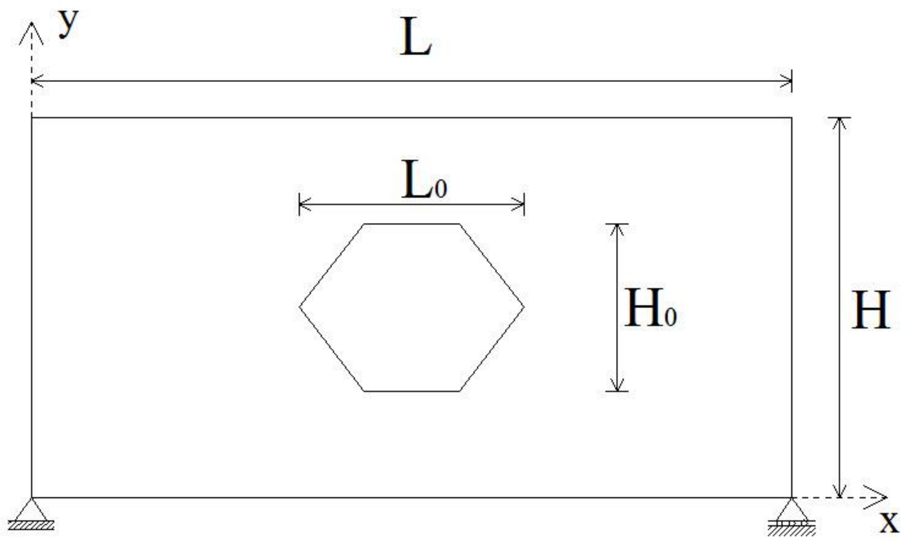


Figura 5.3 – Perfuração hexagonal longitudinal.

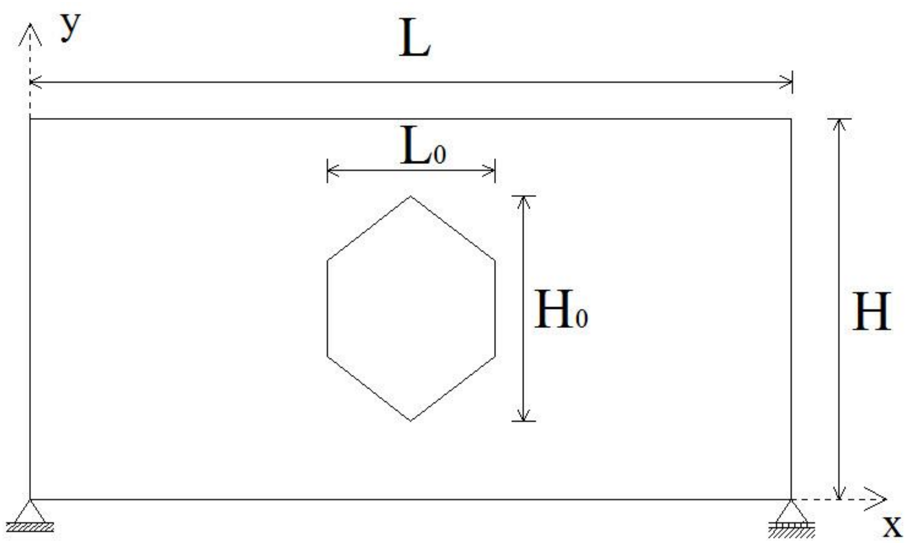


Figura 5.4 – Perfuração hexagonal transversal.

Considerando um grau de liberdade *H/L*, que relaciona a altura e comprimento da placa, dois valores foram estudados: *H/L* = 0,50 (placa retangular com *H* = 1000,00 mm e *L* = 2000,00 mm) e *H/L* = 1,00 (placa quadrada com *H* = 1414,20 mm e *L* = 1414,20 mm). A esbeltez de ambas as placas é representada pela relação *H/t*, sendo *t* a espessura da placa que possui o valor de 10,00 mm. Sendo assim, as placas com *H*/*L* = 0,50 e *H*/*L* = 1,00 possuem *H/t* = 100,00 e *H/t* = 141,42, respectivamente. Além disso, de acordo com El-Sawy et al. (2004), a placa é constituída de material considerado linear elástico, perfeitamente plástico e geometria inicial imperfeita, o que é considerado uma situação crítica para o aço. Sendo assim, a imperfeição geométrica inicial que segue o modo de flambagem elástica, w_0, é determinada pela seguinte equação:

$$w_0 = \frac{H}{2000} \tag{5.12}$$

De acordo com El-Sawy et al. (2004), a Eq. (5.12) foi obtida através de muitos ensaios com os menores valores de imperfeição, onde obteve-se resultados precisos na determinação da carga de flambagem elasto-plástica. Nestes ensaios, a carga uniaxial é gradualmente aplicada sobre a placa e a deformação para fora do plano é controlada (El-Sawy et al., 2004).

Para a realização de uma comparação consistente entre os dois tipos de perfurações hexagonais, uma restrição denominada fração de volume da perfuração, ϕ, é definida. Esta relação é dada pela razão entre o volume da perfuração, V_0, e o volume total da placa (sem perfuração), V, sendo determinada através da divisão dos furos em uma área retangular e duas triangulares, conforme mostra a Fig. 5.5.

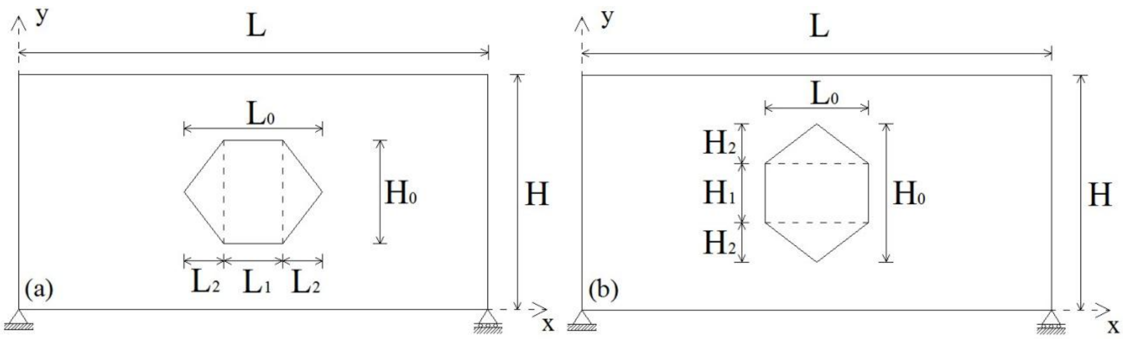


Figura 5.5 – Divisão dos furos em áreas conhecidas: (a) Furo hexagonal longitudinal e (b) Furo hexagonal transversal.

A divisão mostrada na Fig. 5.5 é realizada com o objetivo de obter o volume da perfuração da placa, V_0, que será dado pela soma das áreas do retângulo e dos triângulos multiplicado pela espessura da placa, t. Logo, fração de volume da perfuração hexagonal longitudinal e hexagonal transversal é, respectivamente:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left(H_0 L_1 + \frac{2 L_2 H_0}{2}\right)t}{HLt} = \frac{H_0 (L_1 + L_2) t}{HLt} = \frac{H_0 (L_1 + L_2)}{HL} = \frac{3}{4}\frac{L_0 H_0}{HL} \tag{5.14}$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left(L_0 H_1 + \frac{2H_2 L_0}{2} \right) t}{HLt} = \frac{L_0 (H_1 + H_2) t}{HLt} = \frac{L_0 (H_1 + H_2)}{HL} = \frac{3}{4} \frac{L_0 H_0}{HL} \tag{5.15}$$

sendo H_0 e L_0 as dimensões características da perfuração, conforme Fig. 5.5. Além disso, nas Eqs. (5.14) e (5.15) são consideradas as seguintes relações entre as dimensões das áreas retangular e triangular das perfurações: $L_1 = 2L_2$ e $H_1 = 2H_2$, resultando em $(L_1 + L_2) = (3/4)L_0$ e $(H_1 + H_2) = (3/4)H_0$.

No presente estudo, foram considerados os seguintes valores para a fração de volume da perfuração: $\phi = 0,10$, $\phi = 0,15$, $\phi = 0,20$ e $\phi = 0,25$. Através dos resultados obtidos para cada valor de fração de volume, será possível realizar uma comparação entre os dois tipos de furos adotados e entre as diferentes formas possíveis para cada tipo, obtidas através da variação do grau de liberdade H_0/L_0 (relação entre as dimensões características da perfuração). Além disso, também poderão ser realizadas comparações com o objetivo de verificar qual valor de fração de volume da perfuração apresenta os melhores resultados para cada tipo de perfuração e dimensão das placas. Outra restrição imposta é a distância mínima de 100,00 mm entre as arestas da placa e as arestas do furo. Essa restrição define então os limites para a variação da forma do furo, ou seja, define o intervalo de valores possíveis para a variação de H_0/L_0 em cada tipo de furo.

Na Figura 5.6 é ilustrada uma representação esquemática, para um melhor entendimento da aplicação do método *Constructal Design* nas simulações numéricas realizadas. Observa-se que para um valor de ϕ (quatro no total), são realizadas as simulações para as placas $H/L = 0,50$ e $H/L = 1,00$, considerando diversos valores de H_0/L_0 para as perfurações hexagonais longitudinais e transversais, obtendo assim a relação ótima $(H_0/L_0)_o$, que conduz as placas a um melhor desempenho.

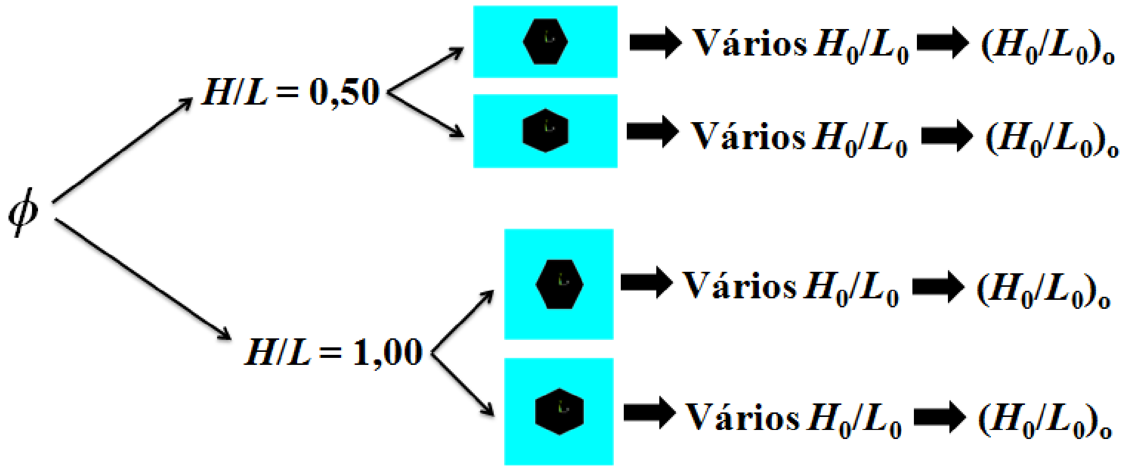


Figura 5.6 – Representação esquemática do processo de otimização geométrica.

Por fim, a função objetivo consiste em maximizar a carga crítica ou a carga última o que, consequentemente, conduza à determinação da forma (ou geometria) ótima para os dois tipos de perfuração, considerando cada fração de volume adotada para as placas H/L = 0,50 e H/L = 1,00.

6. RESULTADOS

Empregando os modelos computacionais para a flambagem elástica e elasto-plástica e considerando para ϕ = 0,10, ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25 a variação da forma de cada tipo de perfuração nas placas com H/L = 0,50 e H/L = 1,00, foi possível determinar para todos os casos simulados o valor de P_{cr} e de P_u. Com isso, a tensão crítica e a tensão última são obtidas, respectivamente por:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{t} \tag{6.1}$$

$$\sigma_u = \frac{P_u}{t} \tag{6.2}$$

Para que as tensões definidas nas Eq. (6.1) e (6.2) sejam adequadamente comparadas, as mesmas foram normalizadas através da tensão de escoamento (σ_y) do material da placa (que para o Aço A-36 é de 250 MPa), originando então a Tensão Limite Normalizada (*TLN*):

$$TLN = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \tag{6.3}$$

$$TLN = \frac{\sigma_u}{\sigma_y} \tag{6.4}$$

Com isso, as Figs. 6.1 e 6.2 apresentam a variação da *TLN* em função de H_0/L_0, para as placas H/L = 0,50, com perfuração hexagonal longitudinal e transversal, e ainda, considerando uma fração de volume ϕ = 0,10. Esta variação origina duas curvas para cada tipo de perfuração, referentes aos valores de *TLN* para a flambagem elástica e elasto-plástica. No canto superior direito das Fig. 6.1 e 6.2 é possível observar as características geométricas da perfuração com o menor valor de H_0/L_0 (placa da esquerda) e com o maior valor de H_0/L_0 (placa da direita).

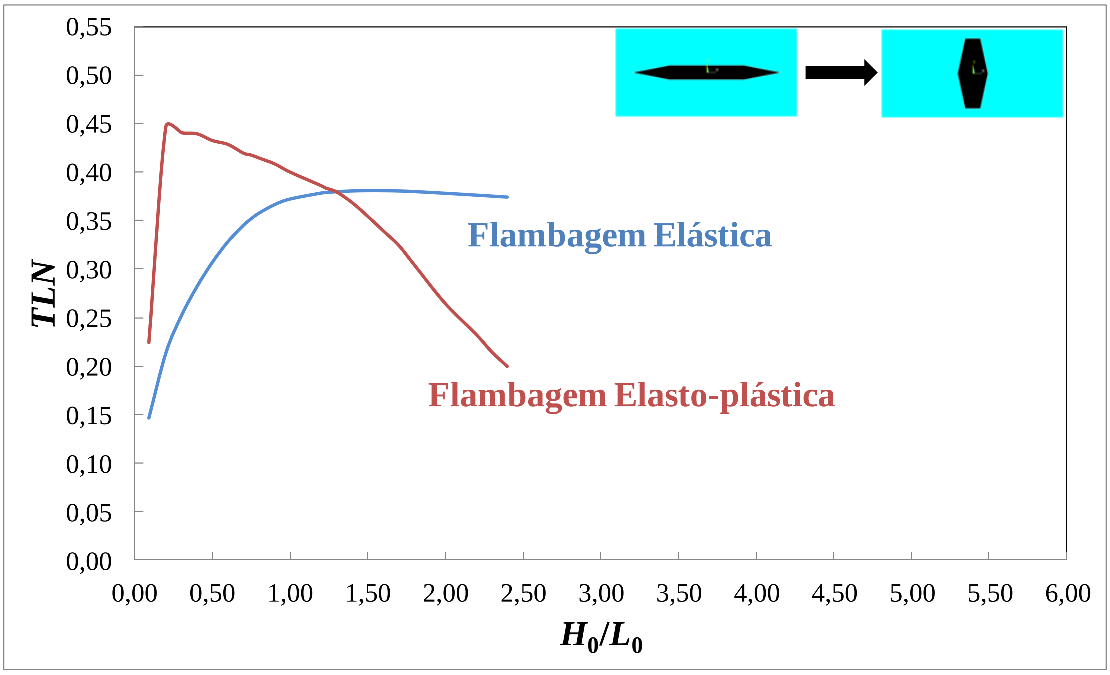


Figura 6.1 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,10 e perfuração hexagonal longitudinal.

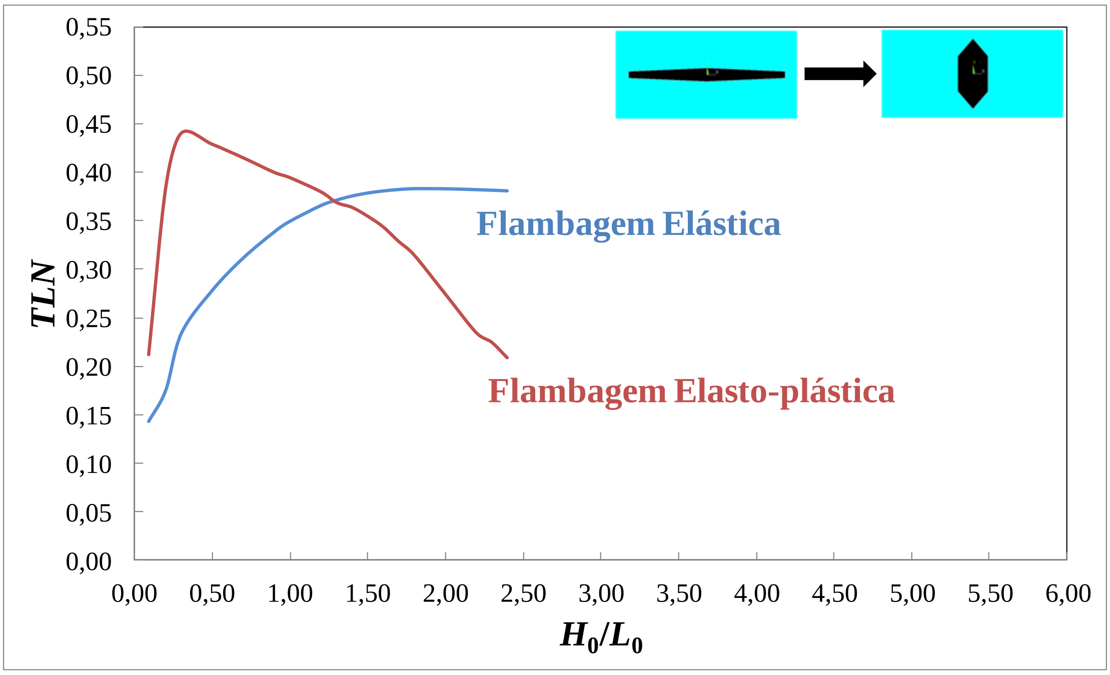


Figura 6.2 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,10 e perfuração hexagonal transversal.

Analisando os gráficos das Fig. 6.1 e 6.2, observa-se que para valores de H_0/L_0 localizados à esquerda do ponto de intersecção das curvas, a *TLN* última é atingida após a ocorrência da *TLN* crítica. Esta situação é caracterizada pelo posicionamento da curva de flambagem elástica abaixo da elasto-plástica, garantindo uma segurança quanto à ocorrência da tensão de colapso da placa segundo as normas de projeto vigentes. Já para os valores de H_0/L_0 localizados à direita do ponto de intersecção das curvas, a tensão de escoamento do material da placa é atingida para valores menores dos que causariam a flambagem elástica. Isso é caracterizado, nas Figs. 6.1 e 6.2, pelo posicionamento da curva de flambagem elasto-plástica abaixo da curva de flambagem elástica, e ocorre devido à geometria da perfuração que, para esses casos, diminui a área resistente da placa, ocasionando um grande aumento de tensão nas regiões próximas da perfuração. Sendo assim, nesta situação a análise linear não é válida, pois a mesma não será atingida.

Um comportamento mecânico similar é apresentado pelas curvas de flambagem elástica e elasto-plástica das placas com H/L = 1,00, ϕ = 0,10 e furo hexagonal longitudinal e transversal, conforme mostram as Figs. 6.3 e 6.4. Porém, em função da altura H ser maior para H/L = 1,00 do que para H/L = 0,50, é possível perceber um maior intervalo para a variação do grau de liberdade H_0/L_0. Também é possível observar, entre a perfuração hexagonal longitudinal e transversal, um aumento da relação H_0/L_0 referente aos pontos de intersecção entre as curvas de flambagem elástica e elasto-plástica.

Os resultados obtidos para cada relação H_0/L_0, que originam as curvas mostradas nas Fig. 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, podem ser vistos no Apêndice A deste trabalho. Além dos resultados para ϕ = 0,10, o Apêndice A também mostra os demais resultados de cada relação H_0/L_0 para os valores de ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25, para as placas H/L = 0,50 e H/L = 1,00, considerando perfurações hexagonais longitudinais e transversais.

Então, a partir dos resultados apresentados nas Figs. 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, foi possível a definição de curvas limite de flambagem, ou seja, valores limites de *TLN*, em função da variação de H_0/L_0, que determinam a ocorrência de flambagem elástica ou elasto-plástica para as placas perfuradas. Na Fig. 6.5 as curvas limite para a placa H/L = 0,50 e ϕ = 0,10, com perfuração hexagonal longitudinal (ver Fig. 6.1) e hexagonal transversal (ver Fig. 6.2), são apresentadas. Já na Fig. 6.6 as curvas limite de flambagem para a placa H/L = 1,00, ϕ = 0,10, com perfuração hexagonal longitudinal (ver Fig. 6.3) e hexagonal transversal (ver Fig. 6.4), são mostradas.

Como pode ser observado nas Figs. 6.5 e 6.6, cada curva limite é originada a partir das curvas de flambagem elástica e elasto-plástica, onde o ponto de intersecção define a máxima *TLN*, $(TLN)_m$, e, consequentemente, a forma ótima para cada tipo de perfuração hexagonal, $(H_0/L_0)_o$. Para valores de H_0/L_0 menores que $(H_0/L_0)_o$, o comportamento mecânico da placa é determinado pela flambagem elástica, enquanto que para valores de H_0/L_0 maiores que $(H_0/L_0)_o$, o comportamento mecânico da placa é determinado pela flambagem elasto-plástica.

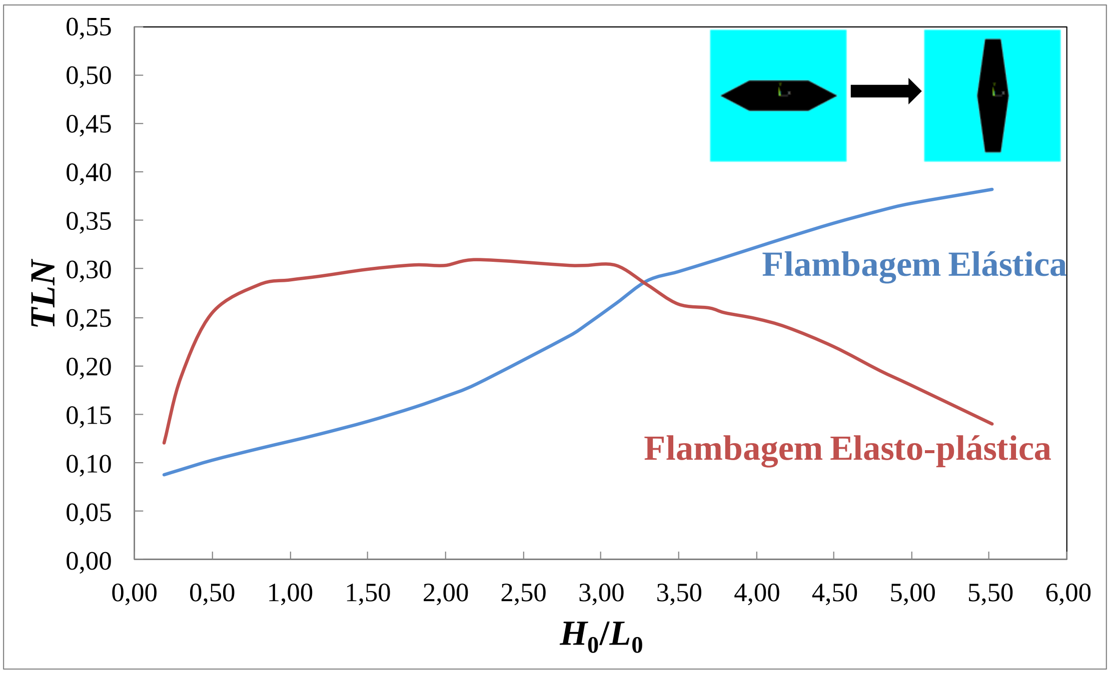


Figura 6.3 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,10 e perfuração hexagonal longitudinal.

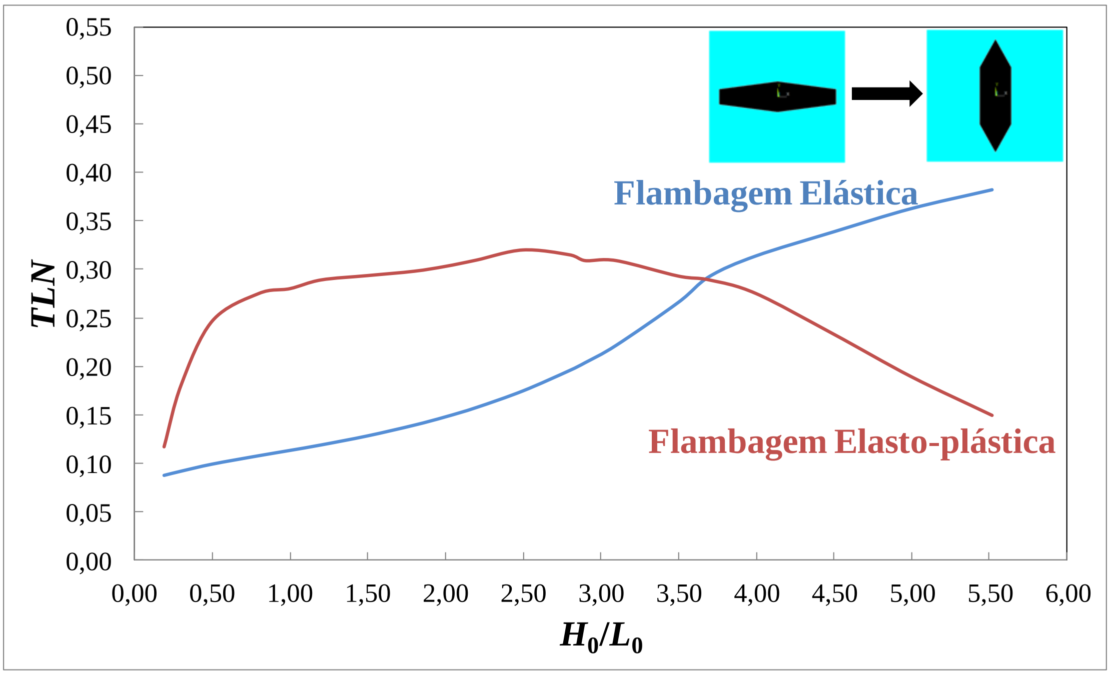


Figura 6.4 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,10 e perfuração hexagonal transversal.

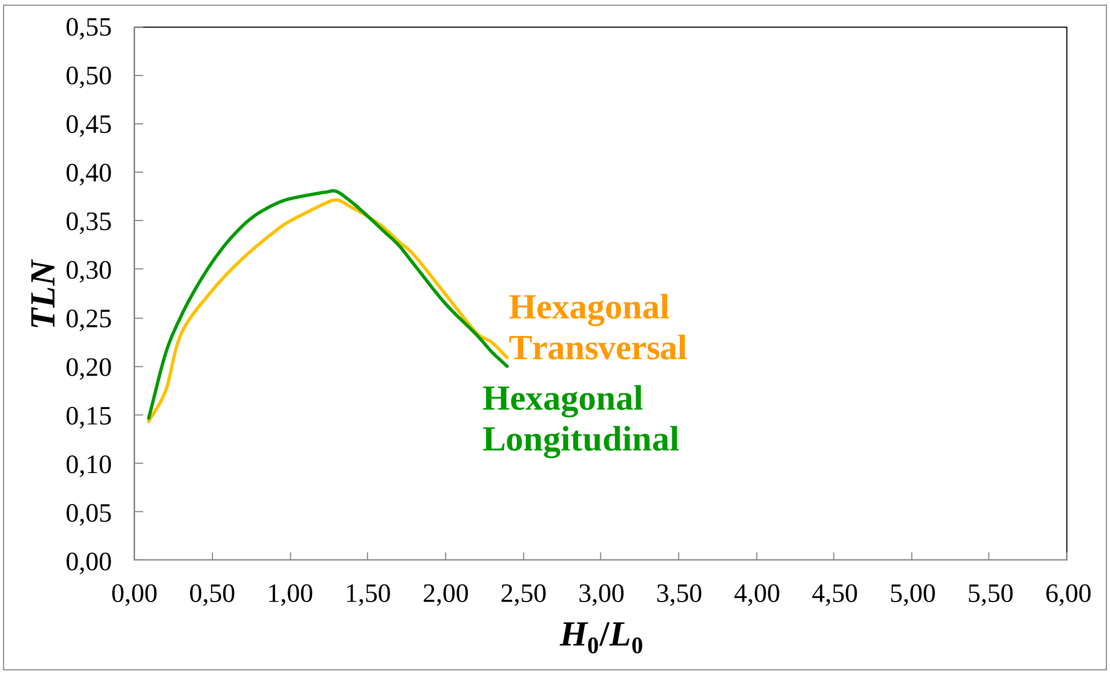


Figura 6.5 – Curvas limite de flambagem para uma placa com *H/L* = 0,50 e ϕ = 0,10.

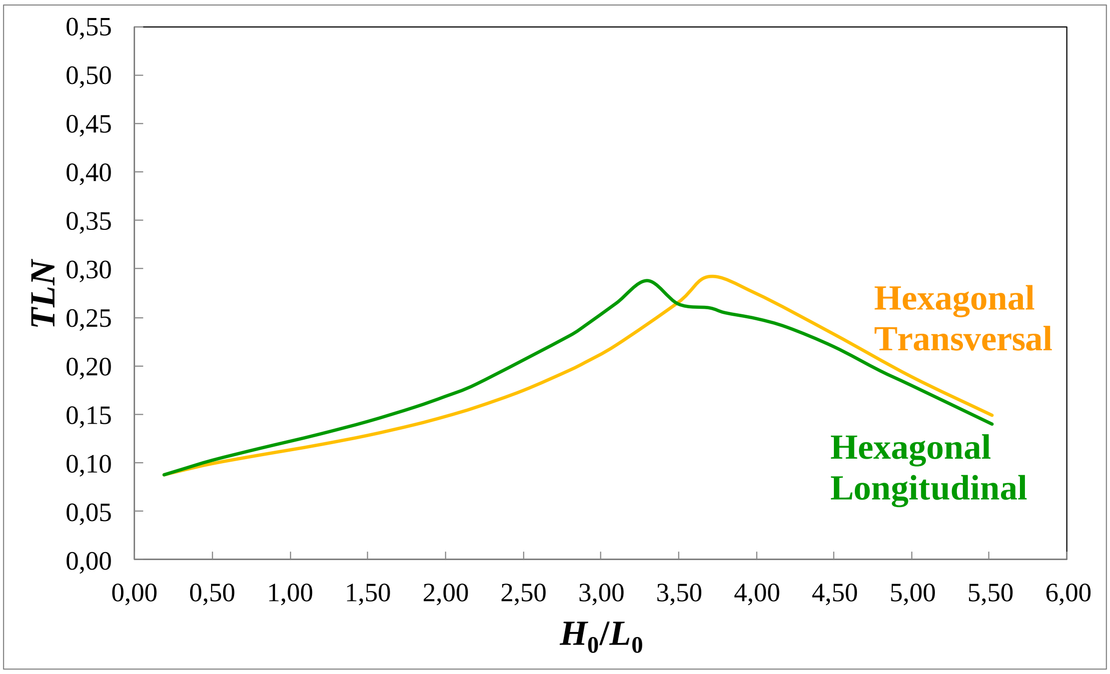


Figura 6.6 – Curvas limite de flambagem para uma placa com *H/L* = 1,00 e ϕ = 0,10.

Analisando as curvas limite para as placas *H/L* = 0,50 (Fig. 6.5), observa-se que o furo hexagonal longitudinal apresenta um comportamento mecânico melhor, atingindo uma $(TLN)_m$ = 0,380 para uma relação $(H_0/L_0)_o$ = 1,30, enquanto o furo hexagonal transversal apresenta uma $(TLN)_m$ = 0,372 para uma relação $(H_0/L_0)_o$ = 1,30.

No intervalo $0{,}09 \leq H_0/L_0 \leq 1{,}30$ para as placas $H/L = 0{,}50$ (Fig. 6.5), verifica-se um aumento dos valores da *TLN* para os dois tipos de perfurações, onde o furo hexagonal longitudinal apresentou um melhor desempenho, atingindo, por exemplo, uma $TLN = 0{,}307$ para uma relação $H_0/L_0 = 0{,}50$, enquanto que o furo hexagonal transversal obteve uma $TLN = 0{,}279$ para o mesmo valor de H_0/L_0. E no intervalo $1{,}50 \leq H_0/L_0 \leq 2{,}40$ para as placas $H/L = 0{,}50$, foi observada uma redução dos valores de *TLN* para os dois tipos de perfurações, com o furo hexagonal transversal apresentando um melhor desempenho, atingindo, por exemplo, uma $TLN = 0{,}275$ para uma relação $H_0/L_0 = 2{,}00$, enquanto que para o mesmo valor de H_0/L_0, o furo hexagonal longitudinal obteve uma $TLN = 0{,}265$.

Um comportamento similar pode ser observado para as placas com $H/L = 1{,}00$ na Fig. 6.6. Para o furo hexagonal transversal, o melhor comportamento mecânico sob flambagem permitiu atingir uma $(TLN)_m = 0{,}292$ para uma relação $(H_0/L_0)_o = 3{,}70$, enquanto que para o furo hexagonal longitudinal a $(TLN)_m = 0{,}288$ foi obtida a partir de uma relação $(H_0/L_0)_o = 3{,}30$. Já para o intervalo $0{,}19 \leq H_0/L_0 \leq 3{,}30$ verifica-se um aumento dos valores de *TLN* para os dois tipos de perfurações, onde o furo hexagonal longitudinal apresenta um melhor desempenho, atingindo, por exemplo, uma $TLN = 0{,}157$ para uma relação $H_0/L_0 = 1{,}80$, o furo hexagonal transversal obteve uma $TLN = 0{,}139$ para o mesmo valor de H_0/L_0. Já no intervalo $3{,}70 \leq H_0/L_0 \leq 5{,}52$ para as placas $H/L = 1{,}00$, nota-se uma redução dos valores de *TLN* para os dois tipos de perfurações, onde o furo hexagonal transversal apresenta um melhor desempenho, atingindo, por exemplo, uma $TLN = 0{,}275$ para uma relação $H_0/L_0 = 4{,}00$, enquanto que para o mesmo valor de H_0/L_0, o furo hexagonal transversal obteve uma $TLN = 0{,}249$.

Os gráficos de *TLN* em função de H_0/L_0 e as curvas limite originadas a partir das curvas de flambagem elástica e elasto-plástica destes gráficos, para os valores de $\phi = 0{,}15$, $\phi = 0{,}20$ e $\phi = 0{,}25$, para as placas $H/L = 0{,}50$ e $H/L = 1{,}00$, encontram-se no Apêndice B deste trabalho. Observando as Fig. B.3, B.6, B.9, B.12, B.15 e B.18 no Apêndice B, verifica-se que as curvas limite para as demais frações de volume (ϕ) apresentam um comportamento semelhante ao das curvas para $\phi = 0{,}10$ das placas $H/L = 0{,}50$ e $H/L = 1{,}00$, já analisadas. Comparando as curvas limite das Fig. B.3, B.9 e B.15 com as curvas da Fig 6.5, todas para $H/L = 0{,}50$, verifica-se que o furo hexagonal longitudinal apresenta melhores resultados na região que antecede a intersecção das curvas. Após a intersecção das curvas, os resultados são semelhantes para ambos os furos. Porém o furo hexagonal transversal apresenta um desempenho levemente superior. As mesmas situações são verificadas na comparação das Fig. B.6, B.12 e B.18, com a Fig. 6.5, todas para H/L = 1,00.

Na Tab. 6.1, a partir das informações obtidas nas Figs. 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8, são apresentados os valores máximos de *TLN*, as formas ótimas e os correspondentes tipos de perfurações para as placas analisadas. Além disso, considerando somente valores de H_0/L_0 maiores que $(H_0/L_0)_o$ em cada caso, são apresentados na Tab. 6.1 os piores resultados de *TLN* e seus respectivos valores de H_0/L_0. Optou-se por comparar os casos ótimos com os piores casos que possuem $H_0/L_0 > (H_0/L_0)_o$, pois nessas configurações ocorre a flambagem elasto-plástica que causa o colapso da estrutura. Valores de $H_0/L_0 <$ $(H_0/L_0)_o$ causam a flambagem elástica que, como já foi comentado, não caracterizam o colapso de estruturas uma vez que as placas possuem um comportamento pós-flambagem elástica.

Tabela 6.1 – Tensões limite máximas e mínimas para os casos estudados.

Tipo de Furo		H/L = 0,50				
		$(H_0/L_0)_o$	$(TLN)_m$	H_0/L_0	TLN	Diferença (%)
ϕ = 0,10	Hexagonal Long.	1,30	0,380	2,40	0,200	90,00
	Hexagonal Trans.	1,30	0,369	2,40	0,209	76,56
ϕ = 0,15	Hexagonal Long.	0,72	0,380	1,60	0,195	94,87
	Hexagonal Trans.	0,87	0,360	1,60	0,204	76,47
ϕ = 0,20	Hexagonal Long.	0,56	0,353	1,20	0,195	81,03
	Hexagonal Trans.	0,70	0,338	1,20	0,205	64,88
ϕ = 0,25	Hexagonal Long.	0,47	0,324	0,95	0,200	62,00
	Hexagonal Trans.	0,59	0,318	0,95	0,208	52,88
Tipo de Furo		H/L = 1,00				
		$(H_0/L_0)_o$	$(TLN)_m$	H_0/L_0	TLN	Diferença (%)
ϕ = 0,10	Hexagonal Long.	3,30	0,284	5,52	0,140	102,86
	Hexagonal Trans.	3,70	0,289	5,52	0,149	93,96
ϕ = 0,15	Hexagonal Long.	2,20	0,262	3,68	0,135	94,07
	Hexagonal Trans.	2,50	0,247	3,68	0,145	70,34
ϕ = 0,20	Hexagonal Long.	1,69	0,236	2,76	0,140	68,57
	Hexagonal Trans.	2,00	0,224	2,76	0,145	54,48
ϕ = 0,25	Hexagonal Long.	1,39	0,209	2,20	0,140	49,29
	Hexagonal Trans.	1,70	0,206	2,20	0,150	37,33

De acordo com a Tab. 6.1, considerando a melhoria do comportamento mecânico entre o caso ótimo e o pior caso para cada tipo de furo, a otimização geométrica realizada através do método *Constructal Design* indica que para as placas

H/L = 0,50 e *H/L* = 1,00, a perfuração hexagonal longitudinal apresentou uma melhoria de 94,87% para ϕ = 0,15 e 102,86% para ϕ = 0,10, respectivamente. Já a perfuração hexagonal transversal, apresentou uma melhoria de 76,56% e 93,96%, ambas para ϕ = 0,10, considerando *H/L* = 0,50 e *H/L* = 1,00, respectivamente. Os menores percentuais de melhorias ocorreram para a fração de volume ϕ = 0,25, onde, considerando a placa *H/L* = 0,50, os furos hexagonais longitudinal e transversal apresentaram uma melhoria de 62,00% e 52,88%, enquanto que para a placa *H/L* = 1,00 ocorreram melhorias de apenas 49,29% e 37,33%. Considerando o aumento de ϕ (Tab. 6.1), entre os valores de 0,10 e 0,25, é possível observar a ocorrência de uma redução gradativa dos percentuais de melhorias da $(TLN)_m$, para os dois tipos de perfuração da placa *H/L* = 1,00 e para a perfuração hexagonal transversal da placa *H/L* = 0,50. Esta situação ocorre devido ao aumento do volume da perfuração provocar uma redução do volume total da placa, provocando o colapso da placa para valores de $(TLN)_m$ menores. Para a perfuração hexagonal longitudinal da placa *H/L* = 0,50, observa-se um pequeno aumento no percentual de melhorias entre ϕ = 0,10 e ϕ = 0,15 de 90,00% para 94,87%, ocorrendo uma redução deste percentual para valores maiores de ϕ. Cabe destacar, que estas melhorias são obtidas apenas através da variação da forma do furo (grau de liberdade H_0/L_0).

Outra análise que pode ser realizada a partir dos resultados da Tabela 6.1 é a comparação entre os valores máximos de *TLN* para cada tipo de perfuração. É possível observar que, para ambas as placas, os maiores valores de $(TLN)_m$ foram encontrados para ϕ = 0,10. Logo, para a placa *H/L* = 0,50, o furo hexagonal longitudinal apresenta uma $(TLN)_m$ 2,89% superior ao valor obtido para o furo hexagonal transversal. Já para a placa *H/L* = 1,00, a geometria hexagonal transversal apresenta uma $(TLN)_m$ 1,73% superior ao valor obtido para o furo hexagonal longitudinal.

Ainda analisando os resultados apresentados na Tab. 6.1, é possível observar que não existe um único valor de H_0/L_0 que conduza ao comportamento superior, ou seja, não existe uma geometria universal para a perfuração que maximize *TLN*. Sendo assim, para cada valor de *H/L*, ϕ e tipo de perfuração é necessário definir um valor específico de $(H_0/L_0)_o$. Esse aspecto fica evidente quando as curvas limite são plotadas juntas.

Na Figura 6.7 são mostradas as curvas limite para todas as frações de volume estudadas, considerando a perfuração hexagonal longitudinal e a placa *H/L* = 0,50.

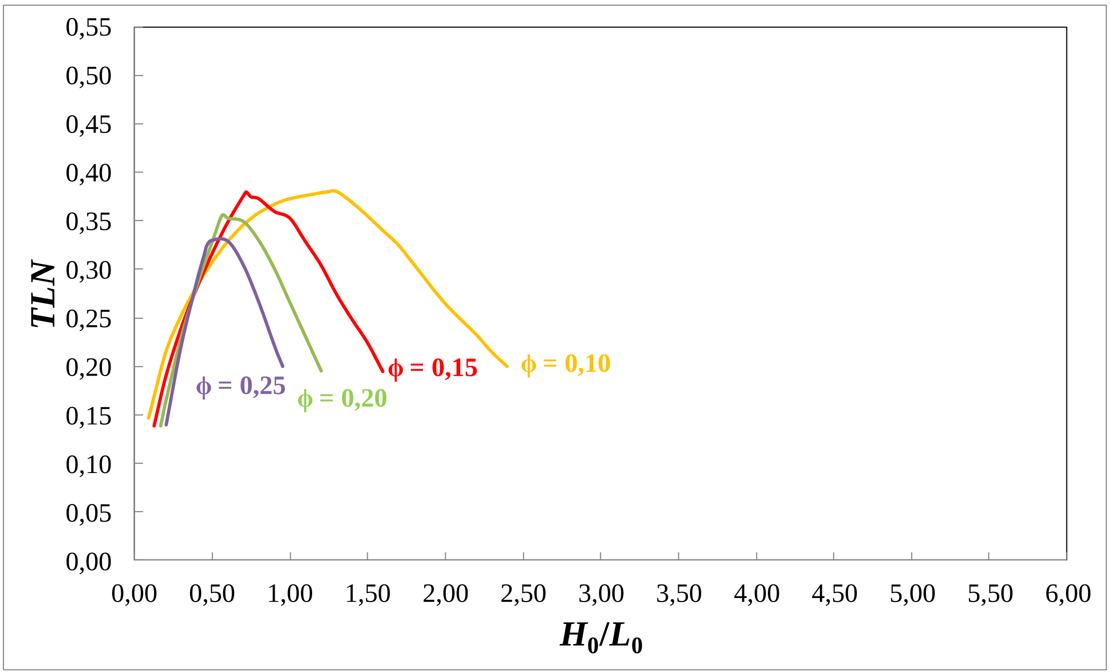


Figura 6.7 – Curvas limite de flambagem para placas com *H/L* = 0,50 e perfuração hexagonal longitudinal.

Através da análise das curvas limite da Fig. 6.7 é possível verificar a influência da variação de ϕ nos resultados de *TLN* e de $(H_0/L_0)_o$. Para um intervalo de $0{,}09 \leq H_0/L_0 \leq 0{,}40$, a fração de volume ϕ = 0,10 obteve o melhor desempenho, atingindo, por exemplo, um valor de *TLN* = 0,252 para uma relação H_0/L_0 = 0,30, enquanto que a fração ϕ = 0,25 obteve o pior desempenho, atingindo, por exemplo, um valor de *TLN* = 0,220 para uma relação H_0/L_0 = 0,30. Por outro lado, considerando o pequeno intervalo de $0{,}40 \leq H_0/L_0 \leq 0{,}50$, a fração de volume ϕ = 0,25 obteve os melhores resultados de *TLN*, enquanto que a fração ϕ = 0,10 obteve os piores resultados. Analisando o intervalo entre $0{,}50 \leq H_0/L_0 \leq 0{,}60$, verifica-se que a fração de volume ϕ = 0,20 apresentou os melhores resultados de *TLN* enquanto que a fração ϕ = 0,10 obteve os piores resultados. A fração ϕ = 0,10 atingiu, por exemplo, um valor de *TLN* = 0,307 para uma relação H_0/L_0 = 0,50, contra um valor de *TLN* = 0,329, obtido para a mesma relação H_0/L_0 e ϕ = 0,20. Considerando um intervalo de $0{,}60 \leq H_0/L_0 \leq 0{,}90$, as frações de volume ϕ = 0,15 e ϕ = 0,10 obtiveram o melhor e o pior desempenho, respectivamente. Dentro deste intervalo, para uma relação H_0/L_0 = 0,70, a fração ϕ = 0,15 obteve um valor de *TLN* = 0,376 enquanto que uma *TLN* = 0,346 foi obtida pela fração ϕ = 0,10. Para o intervalo de $0{,}90 \leq H_0/L_0 \leq 1{,}60$, a fração de volume ϕ = 0,10 apresenta resultados de *TLN* bastante superiores aos resultados obtidos por ϕ = 0,15, atingindo, por exemplo, uma

TLN = 0,340 para ϕ = 0,10 e uma *TLN* = 0,195 para ϕ = 0,15, considerando uma relação H_0/L_0 = 1,60.

A Figura 6.8 apresenta as curvas limite para todas as frações de volume estudadas, considerando placas H/L = 0,50 com perfuração hexagonal transversal.

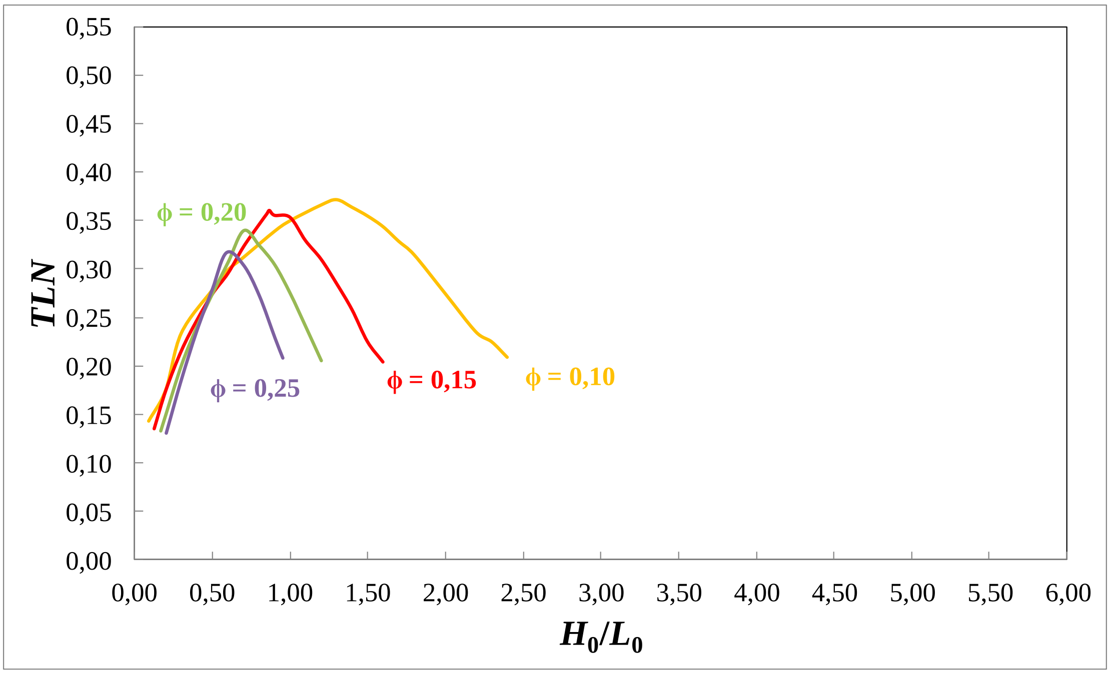


Figura 6.8 – Curvas limite de flambagem para placas com H/L = 0,50 e perfuração hexagonal transversal.

Através da comparação das curvas da Fig. 6.8 com as curvas da Fig. 6.7, verifica-se a semelhança entre os resultados obtidos, sendo que a análise feita para a Fig. 6.7, envolvendo intervalos de H_0/L_0 e as respectivas frações de volume que promovem os melhores resultados de *TLN*, é semelhante para as curvas da Fig. 6.8. Observando, de forma geral, as curvas de flambagem das Fig. 6.7 e 6.8, é possível notar que, independentemente da perfuração da placa ser hexagonal longitudinal ou transversal, o intervalo de relações H_0/L_0 simuladas diminui conforme o aumento da fração de volume, ϕ. Isso é explicado pois quanto menor for a quantidade de material retirado pela perfuração, maior é a variação geométrica possível para a realização da perfuração. Assim, comparando todas as curvas das Fig. 6.7 e 6.8, a fração ϕ = 0,10 apresenta o maior número de relações H_0/L_0 simuladas enquanto que o menor número de relações H_0/L_0 simuladas ocorre para ϕ = 0,25.

As Fig. 6.9 e 6.10 apresentam as curvas limite para todas as frações de volume estudadas, considerando placas *H/L* = 1,00 com perfuração hexagonal longitudinal e transversal, respectivamente.

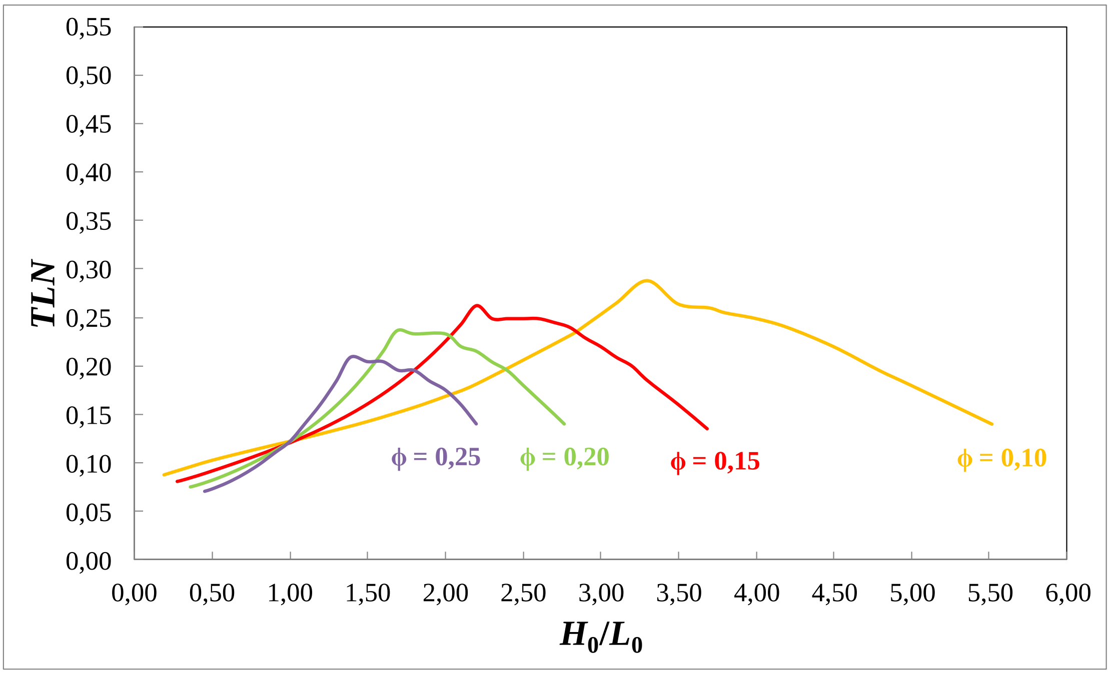


Figura 6.9 – Curvas limite de flambagem para placas com *H/L* = 1,00 e perfuração hexagonal longitudinal.

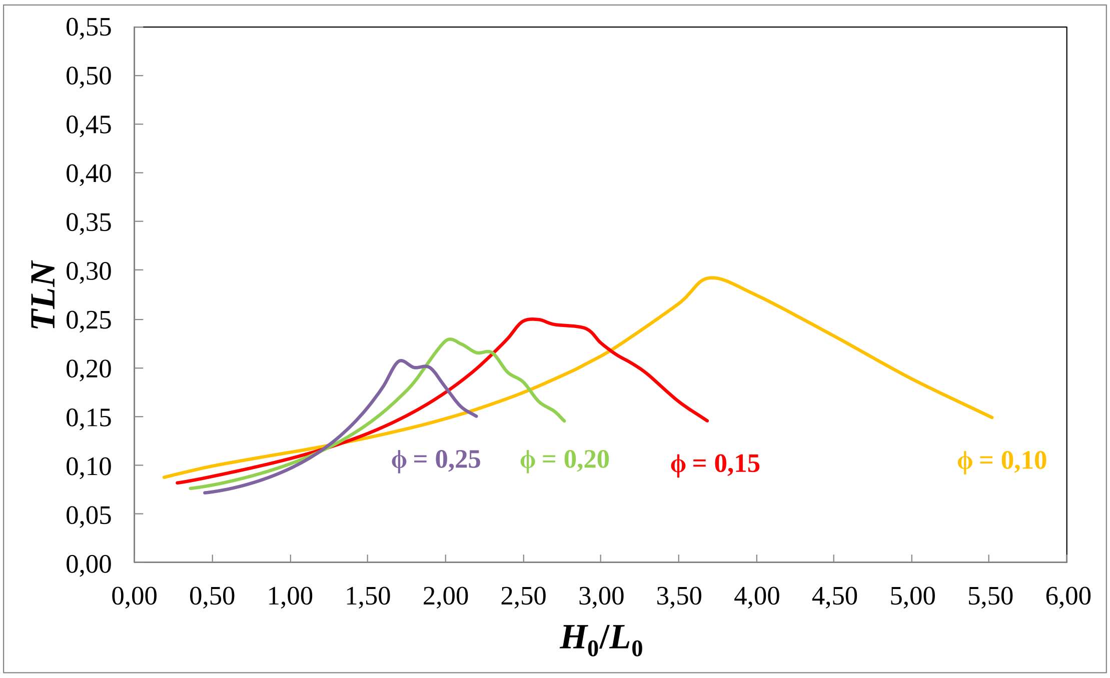


Figura 6.10 – Curvas limite de flambagem para placas com *H/L* = 1,00 e perfuração hexagonal transversal.

Nas Fig. 6.9 e 6.10, para todos os valores de ϕ, é possível ver que o intervalo de relações H_0/L_0 simuladas para placas H/L = 1,00 é maior do que para H/L = 0,50 (Fig. 6.7 e 6.8). A análise feita para a Fig. 6.7, envolvendo intervalos de H_0/L_0 e as respectivas frações de volume que promovem os melhores resultados de *TLN*, também é semelhante para as curvas das Fig. 6.9 e 6.10. Além disso, outras características que já foram observadas nas curvas limite para placas com H/L = 0,50 e ambos os tipos de perfuração (Fig. 6.7 e 6.8), também ocorrem para as curvas mostradas nas Fig. 6.9 e 6.10, como: o intervalo de relações H_0/L_0 simuladas diminui conforme o aumento de ϕ; a fração de volume ϕ = 0,10 apresenta o maior número de relações H_0/L_0 simuladas enquanto que o menor número de relações H_0/L_0 simuladas ocorre para ϕ = 0,25.

Realizando uma análise da influência do tipo de perfuração nas curvas das Fig. 6.9 e 6.10, fica evidente que para as placas H/L = 1,00 o tipo de perfuração utilizado implica no aumento da relação H_0/L_0 otimizada. Por exemplo, para ϕ = 0,10, uma relação otimizada $(H_0/L_0)_o$ = 3,30 foi obtida para uma $(TLN)_m$ = 0,284, considerando a perfuração hexagonal longitudinal (Fig. 6.9), enquanto uma relação otimizada $(H_0/L_0)_o$ = 3,70 foi obtida para uma $(TLN)_m$ = 0,289, considerando a perfuração hexagonal transversal (Fig. 6.10). Para os outros valores de ϕ essa mesma tendência foi observada. Levando em conta a mudança da perfuração hexagonal longitudinal para a transversal, ocorreram aumentos de $(H_0/L_0)_o$ = 2,20 para $(H_0/L_0)_o$ = 2,50, $(H_0/L_0)_o$ = 1,69 para $(H_0/L_0)_o$ = 2,00 e $(H_0/L_0)_o$ = 1,39 para $(H_0/L_0)_o$ = 1,70, respectivamente para ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25.

Os resultados de Tensão Limite Normalizada maximizadas ($(TLN)_m$) obtidos para cada valor de fração de volume da perfuração (ϕ) podem ser organizados em forma de gráficos, considerando a variação da $(TLN)_m$ através do aumento de ϕ, conforme mostra a Fig. 6.11.

Analisando as curvas (a), (b), (c) e (d) da Fig. 6.11, é possível observar a ocorrência da redução da $(TLN)_m$, conforme o aumento de ϕ. As curvas (c) e (d) foram as mais afetadas, apresentando uma redução da $(TLN)_m$ de 26,41% e 28,37%, entre ϕ = 0,10 e ϕ = 0,25. Já as curvas (a) e (b) apresentaram uma redução da $(TLN)_m$ de 17,28% e 16,04%, entre ϕ = 0,10 e ϕ = 0,25.

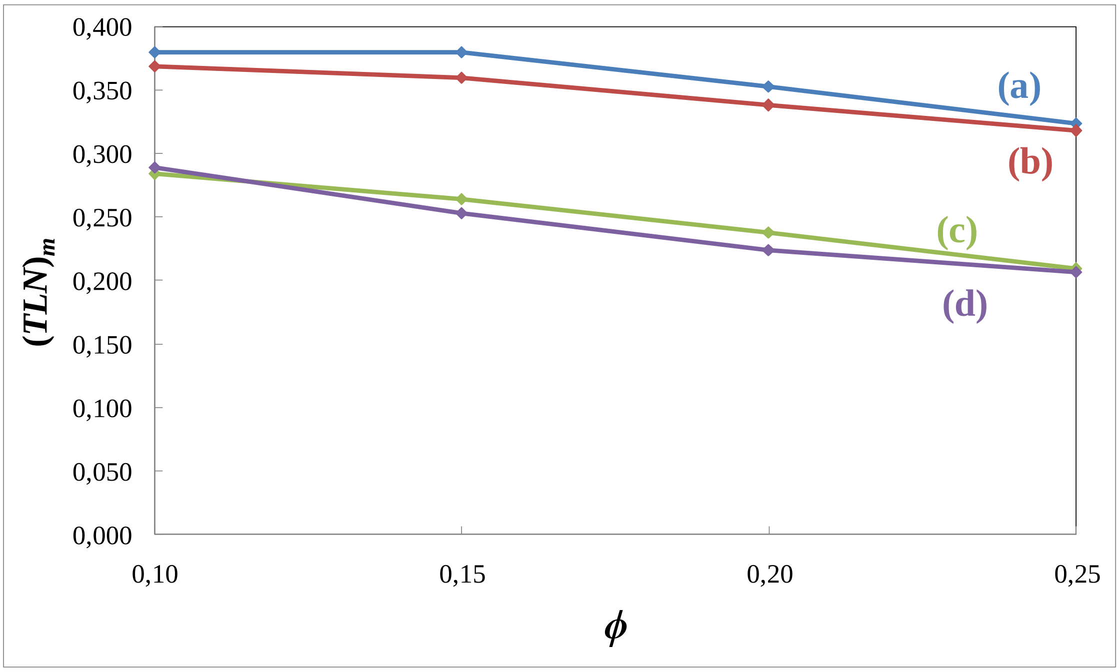


Figura 6.11 – $(TLN)_m$ em função de ϕ, considerando: (a) H/L = 0,50 e perfuração hexagonal longitudinal, (b) H/L = 0,50 e perfuração hexagonal transversal, (c) H/L = 1,00 e perfuração hexagonal longitudinal e (d) H/L = 1,00 e perfuração hexagonal transversal.

Levando em consideração a dimensão das placas estudadas, a Fig 6.11 indica que as placas H/L = 0,50 (curvas (a) e (b) da Fig. 6.11) apresentam melhor desempenho ou valores de $(TLN)_m$ maiores do que as placas H/L = 1,00 (curvas (c) e (d) da Fig. 6.11), independentemente do tipo de perfuração utilizada e da fração de volume, ϕ, aplicada. Esta situação ocorre devido as placas H/L = 0,50 apresentarem um comprimento L maior do que as placas H/L = 1,00, resultando na ocorrência de cargas críticas maiores em placas com comprimento L maiores. Considerando fração ϕ = 0,10, que obteve os maiores valores de $(TLN)_m$ dentre os demais valores de ϕ estudados, para a perfuração hexagonal longitudinal, a placa H/L = 1,00 obteve uma $(TLN)_m$ = 0,284 enquanto que a placa H/L = 0,50 obteve uma $(TLN)_m$ = 0,380, mostrando que, para esta situação, a placa H/L = 0,50 apresenta uma $(TLN)_m$ 33,80% superior à $(TLN)_m$ da placa H/L = 1,00. A mesma situação ocorre para a perfuração hexagonal transversal onde, para ϕ = 0,10, a placa H/L = 0,50 obteve um aumento da $(TLN)_m$ de 27,68% em comparação com a placa H/L = 1,00. Ainda observando a Fig. 6.11, a fração ϕ = 0,25 obteve os piores resultados dentre os valores de ϕ estudados, porém realizando a mesma comparação entre as dimensões das placas para ϕ = 0,25, verifica-se um aumento do percentual de $(TLN)_m$. Para a perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,25, a placa H/L = 1,00 obteve uma $(TLN)_m$ = 0,209 enquanto que a placa H/L = 0,50 obteve uma $(TLN)_m$ = 0,324, mostrando que, para esta situação, a placa H/L = 0,50 apresenta uma $(TLN)_m$ 55,02% superior à $(TLN)_m$ da placa H/L = 1,00. Comparando os resultados para a perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,25, um aumento da $(TLN)_m$ de 53,62% ocorre entre as placas H/L = 1,00 e H/L = 0,50. Esses percentuais de aumento, para ambos os tipos de perfuração, tendem a aumentar conforme o aumento da fração de volume ϕ, sendo o menor percentual de aumento conferido a ϕ = 0,10 e o maior a ϕ = 0,25.

Considerando o tipo de perfuração, nas curvas da Fig. 6.11 verifica-se que, através do posicionamento das curvas (a) e (b), a perfuração hexagonal longitudinal apresenta melhores resultados de $(TLN)_m$ do que a transversal, para H/L = 0,50 e considerando qualquer valor de ϕ. Para os valores de ϕ = 0,15 e ϕ = 0,20 a perfuração hexagonal longitudinal apresentou um valor de $(TLN)_m$ 5,56% e 4,47% maior do que os valores obtidos para a perfuração hexagonal transversal, enquanto que para os valores de ϕ = 0,10 e ϕ = 0,25 a perfuração hexagonal longitudinal apresentou um valor de $(TLN)_m$ 2,98% e 1,88% maior do que a perfuração hexagonal transversal. Essa situação pode ser facilmente observada nas curvas (a) e (b) da Fig. 6.11, onde para ϕ = 0,15 e ϕ = 0,20 a curva (a) fica afastada da curva (b) enquanto que para ϕ = 0,10 e ϕ = 0,25 as curvas ficam próximas. A mesma avaliação é feita para as curvas (c) e (d) da Fig. 6.11, ou seja, a perfuração hexagonal longitudinal também apresenta melhores resultados de $(TLN)_m$ do que a transversal para H/L = 1,00, considerando todos os valores de ϕ estudados, exceto para ϕ = 0,10, onde a perfuração hexagonal transversal apresentou uma $(TLN)_m$ levemente maior do que a do furo hexagonal longitudinal. Sendo assim, a mudança do tipo de perfuração (hexagonal transversal para hexagonal longitudinal) apresentou melhoras com relevância maior na $(TLN)_m$ das placas H/L = 0,50 do que nas placas H/L = 1,00, conforme pode ser observado na Fig. 6.11.

De forma similar a Fig. 6.11, as relações $(H_0/L_0)_o$ obtidas para cada valor de fração de volume da perfuração (ϕ) também podem ser organizadas em forma de gráficos, conforme mostra a Fig. 6.12.

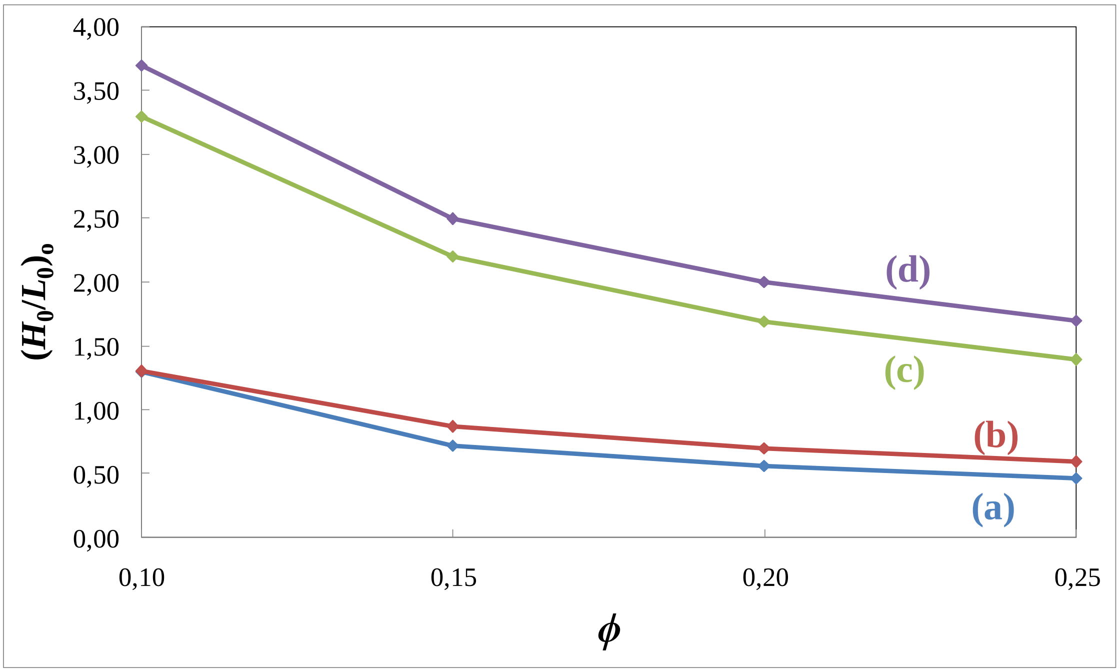


Figura 6.12 – $(H_0/L_0)_o$ em função de ϕ, considerando: (a) H/L = 0,50 e perfuração hexagonal longitudinal, (b) H/L = 0,50 e perfuração hexagonal transversal, (c) H/L = 1,00 e perfuração hexagonal longitudinal e (d) H/L = 1,00 e perfuração hexagonal transversal.

A Figura 6.12 mostra que o aumento de ϕ provoca uma redução da relação $(H_0/L_0)_o$, para as dimensões de placas e tipos de perfuração analisados, sendo que, as placas H/L = 1,00 (curvas (c) e (d) da Fig. 6.12) apresentam reduções mais significativas de $(H_0/L_0)_o$ do que as placas H/L = 0,50 (curvas (a) e (b) da Fig. 6.12). O Apêndice C deste trabalho mostra as dimensões das perfurações das placas com H/L = 0,50 e H/L = 1,00 que apresentaram relações $(H_0/L_0)_o$, para todos os valores de ϕ e tipos de perfurações analisadas nesse trabalho. Nas figuras do Apêndice C, é possível observar que, através do aumento de ϕ, as perfurações tendem a aumentar sua dimensão L_0, ou seja, tendem a crescer na direção longitudinal da placa. Logo o aumento de ϕ, provoca uma redução da $(TLN)_m$ e $(H_0/L_0)_o$ das placas.

Considerando a influência do tipo de perfuração nas curvas da Fig. 6.12, para a placa H/L = 1,00 e os valores de ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25, a perfuração hexagonal transversal (curva (d)) apresentou relações $(H_0/L_0)_o$ maiores, em comparação com a perfuração hexagonal longitudinal (curva (c)). Sendo assim, é pelo fato de apresentar relações $(H_0/L_0)_o$ menores que, através da análise da Fig. 6.11, a perfuração hexagonal longitudinal apresentou melhor desempenho que a transversal. A mesma situação ocorre para a placa *H/L* = 0,50 (curvas (a) e (b) da Fig. 6.12) e os valores de ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25, sendo que é possível observar, através da aproximação das curvas, que as relações $(H_0/L_0)_o$ variam pouco e o desempenho da perfuração hexagonal longitudinal é ainda melhor que a transversal (ver Fig. 6.11).

Analisando todas as curvas da Fig. 6.12, fica confirmado que a fração de volume ϕ = 0,10 apresenta as maiores relações $(H_0/L_0)_o$ e, consequentemente, os maiores valores de $(TLN)_m$, comprovado na análise da Fig. 6.11. Outro aspecto importante que deve ser destacado é o fato de apesar das curvas (a) e (b) da Fig. 6.12 apresentarem o mesmo valor de $(H_0/L_0)_o$ = 1,30 para ϕ = 0,10, ocorre um aumento de $(TLN)_m$ = 0,369 para $(TLN)_m$ = 0,380 entre a perfuração hexagonal transversal e longitudinal na placa *H/L* = 0,50. Para as curvas (c) e (d) da Fig. 6.12 ocorre uma variação de $(H_0/L_0)_o$ = 3,30 para $(H_0/L_0)_o$ = 3,70 considerando ϕ = 0,10, o que provocou uma variação mínima na $(TLN)_m$ se for considerado o tipo de perfuração aplicado nas placas *H/L* = 1,00 (ver Fig. 6.11).

Por fim, as Figs. 6.13 e 6.14 mostram, respectivamente, para as placas com *H/L* = 0,50 e *H/L* = 1,00, a distribuição de tensões por von Mises, para os casos de apresentados na Tab. 6.1.

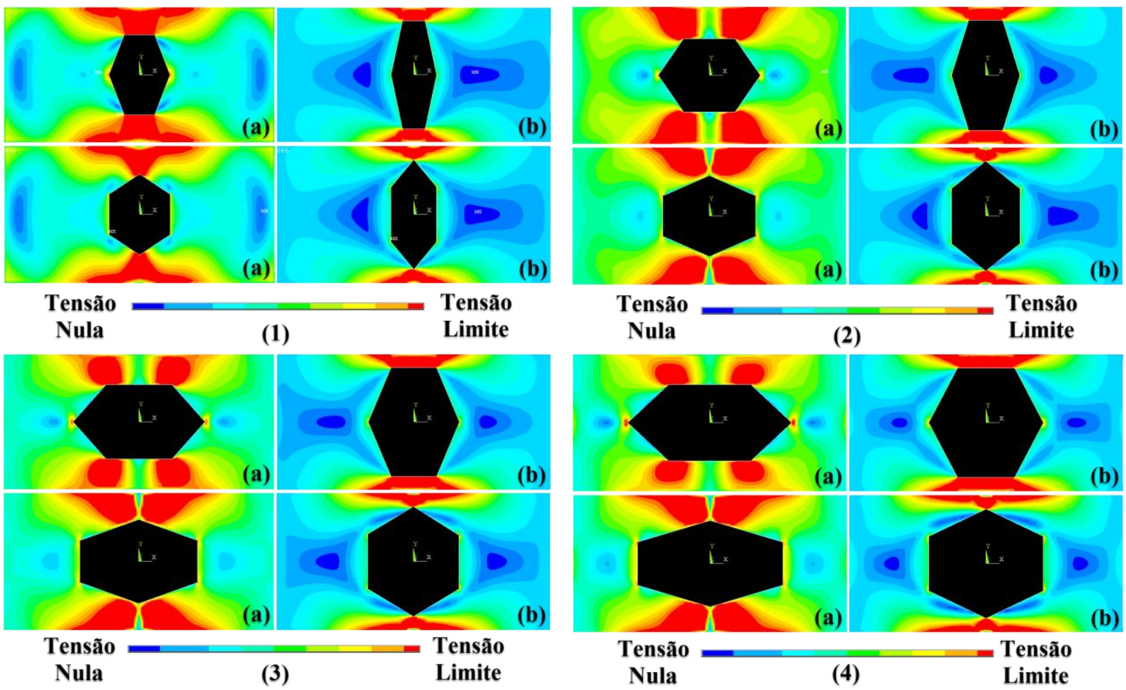


Figura 6.13 – Distribuição de tensões para placas *H/L* = 0,50 com perfurações hexagonais longitudinais e transversais, considerando (a) Casos ótimos e (b) Piores casos: (1) ϕ = 0,10, (2) ϕ = 0,15, (3) ϕ = 0,20 e (4) ϕ = 0,25.

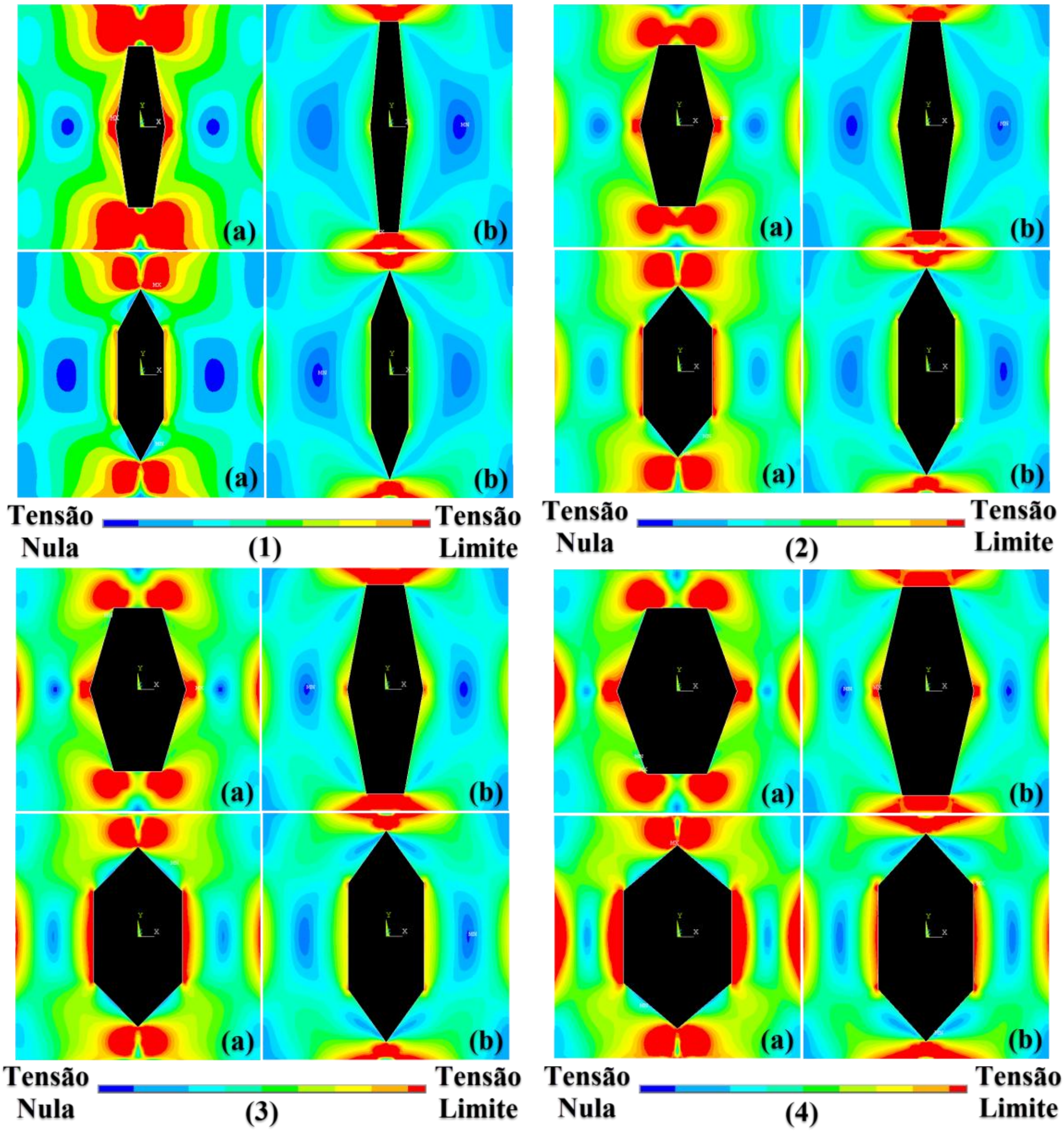


Figura 6.14 – Distribuição de tensões para placas *H/L* = 1,00 com perfurações hexagonais longitudinais e transversais, considerando (a) Casos ótimos e (b) Piores casos: (1) ϕ = 0,10, (2) ϕ = 0,15, (3) ϕ = 0,20 e (4) ϕ = 0,25.

Analisando as Figs. 6.13 e 6.14 observa-se que as geometrias ótimas apresentam uma melhor distribuição das tensões limites ao longo de toda a superfície das placas, enquanto que para os piores casos isso não acontece. Em outras palavras, as geometrias ótimas permitem que a tensão limite seja melhor distribuída em cada caso, o que faz com que uma maior região da placa seja exposta à essa tensão (cor vermelha nessas figuras), independente da fração de volume utilizada. Enquanto que nas piores geometrias, sempre uma região menor da placa está submetida à tensão limite, se comparada ao correspondente caso ótimo. Os princípios da Teoria Constructal justificam este comportamento mecânico superior alcançado pelas geometrias ótimas, através do princípio da ótima distribuição de imperfeições (Bejan e Zane, 2012). Cabe destacar que a distribuição de tensões do caso ótimo foi comparada com a distribuição de tensões do pior caso obtido através da análise de flambagem elasto-plástica, visto que esse tipo flambagem causará a falha da estrutura.

Analisando a Fig. 6.13, é possível observar que os casos ótimos das placas H/L = 0,50 com perfurações hexagonais longitudinais apresentaram melhores distribuições de tensões limite ao longo da placa, considerando frações de volume menores (ϕ = 0,10 e ϕ = 0,15). Enquanto que as frações maiores (ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25) apresentaram as piores distribuições de tensões limite ao longo da placa. Enquanto que na Fig. 6.14, é possível observar que os casos ótimos das placas H/L = 1,00 com perfurações hexagonais longitudinais apresentaram melhores distribuições de tensões limite ao longo da placa considerando frações ϕ = 0,10 e ϕ = 0,25.

7. CONCLUSÕES

Modelos numéricos para flambagem elástica e elasto-plástica de placas foram desenvolvidos, verificados e validados no software ANSYS®. Utilizando estes modelos, foram obtidas as cargas críticas e pós-críticas atuantes em placas de aço A-36, simplesmente apoiadas e com perfurações hexagonais centralizadas. O método *Constructal Design* foi aplicado permitindo a comparação dos resultados obtidos para os seguintes tipos de furos hexagonais: longitudinal e transversal. Através da variação do grau de liberdade H_0/L_0, mantendo como restrição as frações de volume da perfuração ϕ = 0,10, ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25, foi possível avaliar também a influência da forma (geometria) da perfuração no comportamento mecânico sob flambagem das placas. Além disso, foram considerados dois valores para a relação *H/L*, que especificam as dimensões de placa utilizadas: *H/L* = 0,50 e *H/L* = 1,00. Logo, os conceitos do método *Constructal Design* aliados à modelagem computacional e a busca exaustiva, possibilitam avaliar a influência que o tipo e a forma da perfuração causam na definição do comportamento de flambagem em placas perfuradas.

Através dos resultados obtidos, foi possível notar que a variação da forma da perfuração estabelece a ocorrência da flambagem elástica ou elasto-plástica na placa, independentemente do tipo de perfuração adotada. Na literatura consultada, essa mudança de comportamento de flambagem sempre foi relacionada à variação da espessura da placa. Sendo assim, essa é uma importante contribuição do presente estudo.

Foi observado que a mudança do regime elástico para o regime elasto-plástico de placas sob flambagem é definida pela intersecção das curvas de flambagem linear e não linear. Sendo assim, para descrever o fenômeno de flambagem nas placas perfuradas *H/L* = 0,50 e *H/L* = 1,00, uma curva limite de tensão para cada tipo de furo e cada fração de volume estudada, em função da variação do grau de liberdade H_0/L_0, é originada, através da união do comportamento de flambagem elástica e elasto-plástica, sendo esta outra contribuição científica relevante deste trabalho.

O melhor desempenho mecânico foi obtido exatamente no ponto de intersecção entre as curvas elástica e elasto-plástica. Este ponto de interseção é definido pela *TLN* maximizada, $(TLN)_m$, e sua respectiva relação H_0/L_0 ótima, $(H_0/L_0)_o$, para cada tipo de perfuração e fração de volume utilizados. Comparando os valores de *TLN* dos casos ótimos com os valores de *TLN* dos piores casos, ficou constatado que a fração de volume ϕ = 0,10 obteve os melhores percentuais de melhorias, entre 76,56% e 102,86%, enquanto que para ϕ = 0,25 ocorreram os piores percentuais de melhorias, entre 33,37% 62,00%, considerando todos os casos analisados. Essa situação ocorre devido à retirada de material da placa para a abertura da perfuração ser menor para fração ϕ = 0,10 do que para ϕ = 0,25. Além disso, foram feitas comparações entre as curvas limite para todos os valores de ϕ estudados, verificando entre intervalos de relações H_0/L_0, qual valor de ϕ obtém os melhores resultados, sendo também possível avaliar a influência do tipo de perfuração (hexagonal longitudinal e transversal) e da dimensão da placa utilizada.

Por fim, foi realizado um estudo sobre a variação da $(TLN)_m$ e $(H_0/L_0)_o$ conforme o aumento de ϕ, onde ficou comprovado que as placas *H/L* = 0,50 obtiveram melhor desempenho mecânico que as placas *H/L* = 1,00, independente do tipo de perfuração e valor de ϕ. Os resultados também indicam que ϕ = 0,10 obteve os melhores resultados de $(TLN)_m$ e ϕ = 0,25 obteve os piores resultados, para as duas dimensões de placa e tipos de perfuração. Com relação ao tipo de perfuração, fica concluído que a perfuração hexagonal longitudinal conduz às placas a um melhor desempenho mecânico do que a perfuração hexagonal transversal para as duas relações *H/L* da placa e todos os valores de ϕ. A exceção ocorre para *H/L* = 1,00 e ϕ = 0,10 onde o furo hexagonal transversal obteve melhor desempenho mecânico. O trabalho ainda apresenta as dimensões detalhadas das perfurações hexagonais longitudinais e transversais otimizadas, para as placas H/L = 0,50 e H/L = 1,00, considerando todos os valores de ϕ (Apêndice C).

Sendo assim, fica evidente que o método Constructal Design, aliado à simulação numérica estrutural, é uma ferramenta eficaz na análise da influência de perfurações hexagonais em placas submetidas ao fenômeno de flambagem, definindo para cada geometria de perfuração estudada, uma curva limite de tensão, com o objetivo de evitar a flambagem dos componentes estruturais.

Como sugestões para trabalhos futuros, recomenda-se a investigação de outros valores para a fração de volume dos furos hexagonais, outros valores para a relação H/L, bem com um estudo da influência da espessura da placa. Além disso, recomenda-se a realização de um estudo para identificar qual deve ser o espaçamento mínimo entre as bordas do furo e os lados da placa, de maneira que os resultados numéricos não sejam influenciados. Estudos considerando outros tipos de furos também são indicados.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÅKESSON, B. Plate buckling in bridges and other structure. Taylor & Francis. 2007.

AMANTE, D. D. A. M.. **Imperfeições de Fabricação na Construção Naval e Offshore.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2006.

ANSYS User’s manual (version 10.0). Swanson Analysis System Inc, Houston, 2005.

BAPTISTA, L. G.. Simulação Numérica Não-Linear do Comportamento Pós Flambagem de Placas Finas de Aço sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais e Offshore. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, 2014.

BEJAN, A. e LORENTE, S. Design with Constructal Theory. Wiley, Hoboken. 2008.

BEJAN, A. e ZANE, J. P. Design in nature. Doubleday. 2012.

BRYAN, G. H. On the stability of a plane under thrusts in its own plane with applications to the buckling of the sides of a ship. Proceedings of the London Mathematical Society, v. 22, 1891.

Burnett, D. S. Finite Element Analvsis. Reading, MA: Addison-Wesley, 1987.

CHAGES, A. Principles of Structural Stability Theory. Prentiee-Hall, Ine., Englewood Cliffs, University of Massachusetts, New Jersey, 1974.

CHENG, B.; e ZHAO, J. Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis. Thin-Walled Structures, v. 48, p. 905-914. 2010.

CHENG, L.; ZHENG, Y. LI, D. Research on Hole-Edge Stress Distrbution of Composite Materialz Plate with Complex Holes by Integral Equations Method. Journal of Mechanical Strength, 2006.

CHOW, F.-Y.; NARAYANAM, R., 1984. Buckling of Plates Containing Openings. In Seventh International Conference on Cold-Formed Steel Structures, pp. 39–45, 1984.

Commissariat à l'Energie Atomique (C.E.A.). Simulating to Understand and Predict. French Alternative Energies and Atomic Energy Commission, Communication Division, França, 2010.

Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J., 2002. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc..

CORREIA, A. L. G. Simulação Numérica e Constructal Design Aplicados à Análise do Comportamento Mecânico de Placas de Aço Submetidas à Flambagem Elástica Usadas em Estruturas Oceânicas. 2013. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, 2013.

DUFOUR, P.. **Picking an Element Type for Structural Analysis**. Belcan Engineering Group, Inc., p. 5, 2003.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S**.** Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. Thin-Walled Structures, vol. 39, pp. 983–998, 2001.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S.; MARTINI, M. I. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. Thin-Walled Structures, vol. 42, pp. 1083–1101, 2004.

EULER, L.. De motu vibratorio tympanorum, Novi Commentari Acad Petropolit. Vol. 10, pp. 243–260, 1766.

FLETCHER, C. A. J. **Computational Galerkin Methods**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

GERARD, G.; BECKER, H. Handbook of Structural Stability, Part1 – Buckling of Flat Plates. NACA TN 3781, 1957.

GERARD, G. Introduction to Structural Stability Theory. McGrawHill Book Company, New York, 1962.

GORDO, J. M.; SOARES, C. G. Efeito das Imperfeições Geométricas Iniciais na Resistência de Placas. Unidade de Engenharia e Tecnologia Naval, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2014.

HELBIG, D.; ROCHA, L. A. O.; DA SILVA, C. C. C.; DOS SANTOS, E. D.; REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. Numerical Simulation and Constructal Design Method Applied to the Study of the Cutouts Shape Influence in the Mechanical Behavior of Perforated Plates Subjected to Buckling. XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Fortaleza, CE, Brazil, November 23-26, 2014.

HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais, 7ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

JUNIOR, P. R. D. C. Efeito das Distorções no Comportamento Estrutural de Navio Suezmax. Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.

LAS CASAS, E. B. Notas sobre o Método dos Elementos Finitos- Versão Beta. Departamento de Engenharia de Estruturas, UFMG, Minas Gerais, 2000.

LORENZINI, G.; HELBIG, D.; DA SILVA, C.C.C.; REAL, M. V.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A.; ROCHA, L. A. O. Constructal design method applied to the nalysis of the cutout type and cutout shape influences in the mechanical behavior of thin steel plates subjected to buckling. Constructal Law & Second Law Conference, pp. 477-499, Parma, Itália, 2015.

MADENCI, E.; GUVEN, I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®. [S.l.]: Springer, 2006.

MAIORANA, E., PELLEGRINO, C.; MODENA, C. Non-linear analysis of perforated steel plates subjected to localized symmetrical load. Journal of Constructional Steel Research, vol. 65, pp. 959–964, 2009.

OKUMOTO, Y., TAKEDA, Y., MANO, M. e OKADA, T. Design of Ship Hull Structures - A Practical Guide for Engineers. Springer. 2009.

PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. Dover Publications, 1985.

PINTO, S. Elementos Estruturais de Navios. Rio de Janeiro, 2011.

POISSON, S.D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastique. Mem Acad Sci, vol. 8, p. 357 (1829).

RAO, S. S. The Finite Element Method in Engineering. Elsevier Science & Technology Books, Miami, USA, 2004.

REIS, A. H. e GAMA, C. Sand size versus beachface slope – an explanation based on the Constructal Law. Geomorphology. v. 114, p. 276-283, 2010.

ROCHA, L. A. O.; ISOLDI, L. A.; REAL, M. V.; DOS SANTOS, E. D.; CORREIA, A. L. G.; LORENZINE, G.; BISERNI, C**.** Constructal Design Applied to the Elastic Buckling of Thin Plates with Holes. Central European Journal of Engineering, vol. 3, pp. 475–483, 2013.

ROSS, C. T. F.. **Pressure Vessels - External Pressure Technology**. 2nd Ed., Woodhead Publishing, p. 482, 2011.

ROORDA, J. Buckling of elastic structures. Canadá: Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, 1980.

SAEED, M. Finite Element Analysis: Theory and application with ANSYS. 3ª Edição, Pearson Prentice Hall, 2008.

SENTANO, B. Estudo Comparativo do Comportamento de Placas com Furos Circulares, Quadrangulares e Losangulares, sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais E Oceânicas. 2014. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, 2014.

SILVA, V. P. Dimensionamento de Estruturas de Aço. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. São Paulo: USP, 2012.

SEILA, A.F. Introduction to Simulation. Proceedings of the Winter Simulation Conference, Terry College of Business, University of Georgia, Athens, Georgia, U.S.A., 1995.

SOLTANI, M. R.; BOUCHAIR, A.; MIMOUNE, M. Nonlinear FE analysis of the ultimate behavior of steel castellated beams. Journal of Constructional Steel Research, vol. 70, pp.101-114, 2012.

SÜLI, E. Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Diferencial Equations. Mathematical Institute, University of Oxford, USA, 2012.

SZILARD, R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods.[S.l.]. John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. Theory of Elastic Stability. 2nd edn, McGraw Hill, New York, 1961.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications. The Pennsyilvania State University, University Park. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001.

VOLMIR, A.S. Flexible Plates and Shells, Gos. Izd-vo Techn.-Teoret. Lit-ry, Moscow, Rússia, 1956.

WANG, C. M., WANG, C. Y. e REDDY, J. N. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press. 2005.

YAMAGUCHI, E. Basic Theory of Plates and Elastic Stability. Structural Engineering Handbook. CRC Press LLC. 1999.

YASUHISA, Y.; YU, T.; MASAKI, M.; TETSUO, O. Design of Ship Hull Structures: A Practical Guid for Engineers. Springer, 2009.

Yoo, C. H., & Lee, S. C. Stability of Structures - Principles and Applications. Elsevier, 2011.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L., 1988. The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill.

APÊNDICES

A. RESULTADOS OBTIDOS NO SOFTWARE ANSYS®

A seguir, são mostrados todos os resultados obtidos no software ANSYS® para a carga crítica de flambagem elástica, P_{cr}, e para carga última de flambagem elasto-plástica, P_u, considerando a variação da geometria da perfuração (relação H_0/L_0), além dos devidos valores de *TLN* crítica e *TLN* última.

Tabela A.1 – Resultados para placas H/L = 0,50, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,10.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN última*
0,09	1721,33	154,92	366,29	0,147	561,56	0,225
0,20	1154,70	230,94	534,62	0,214	1119,10	0,448
0,30	942,81	282,84	630,53	0,252	1102,80	0,441
0,50	730,30	365,15	768,71	0,307	1082,50	0,433
0,70	617,21	432,05	863,98	0,346	1050,00	0,420
0,90	544,33	489,90	917,14	0,367	1022,50	0,409
1,00	516,40	516,40	931,66	0,373	1001,20	0,400
1,20	471,40	565,69	947,12	0,379	966,25	0,387
1,30	452,91	588,79	950,61	0,380	950,00	0,380
1,40	436,44	611,00	952,58	0,381	922,50	0,369
1,50	421,64	632,45	953,36	0,381	887,50	0,355
1,60	408,25	653,19	953,29	0,381	850,00	0,340
1,70	396,06	673,30	952,55	0,381	812,50	0,325
1,80	384,90	692,82	951,00	0,380	762,50	0,305
2,00	365,15	730,29	946,60	0,379	662,50	0,265
2,20	348,16	765,93	941,79	0,377	582,50	0,233
2,30	340,50	783,16	939,28	0,376	537,50	0,215
2,40	333,33	800,01	936,71	0,375	500,00	0,200

Tabela A.2 – Resultados para placas *H/L* = 0,50, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,10.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,09	1721,33	154,92	357,60	0,143	530,55	0,212
0,20	1154,70	230,94	438,22	0,175	961,25	0,385
0,30	942,81	282,84	584,72	0,234	1101,20	0,440
0,50	730,30	365,15	696,44	0,279	1072,50	0,429
0,70	617,21	432,05	780,28	0,312	1037,50	0,415
0,90	544,33	489,90	847,57	0,339	1000,00	0,400
1,00	516,40	516,40	874,88	0,350	986,56	0,395
1,20	471,40	565,69	915,67	0,366	950,00	0,380
1,30	452,85	588,86	929,61	0,372	922,50	0,369
1,40	436,44	611,00	940,27	0,376	910,00	0,364
1,50	421,64	632,45	947,95	0,379	887,50	0,355
1,60	408,25	653,19	953,29	0,381	860,00	0,344
1,70	396,06	673,30	957,06	0,383	822,50	0,329
1,80	384,90	692,82	959,24	0,384	787,50	0,315
2,00	365,15	730,29	959,01	0,384	687,50	0,275
2,20	348,16	765,93	956,77	0,383	587,50	0,235
2,30	340,50	783,16	955,31	0,382	562,50	0,225
2,40	333,33	800,01	953,69	0,381	522,50	0,209

Tabela A.3 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,10.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,19	1184,69	225,09	219,19	0,088	300,86	0,120
0,30	942,80	282,84	232,73	0,093	472,50	0,189
0,50	730,29	365,14	256,75	0,103	637,50	0,255
0,80	577,34	461,88	286,80	0,115	710,00	0,284
1,00	516,39	516,40	305,69	0,122	722,50	0,289
1,20	471,40	565,68	325,09	0,130	732,50	0,293
1,50	421,63	632,45	356,81	0,143	750,00	0,300
1,80	384,90	692,81	393,40	0,157	761,25	0,305
2,00	365,14	730,30	421,52	0,169	760,00	0,304
2,20	348,15	765,94	453,28	0,181	775,00	0,310
2,80	308,60	864,10	578,01	0,231	760,00	0,304
2,90	303,24	879,37	604,16	0,242	760,00	0,304
3,10	293,29	909,21	661,76	0,265	760,00	0,304
3,30	284,26	938,09	720,21	0,288	710,00	0,284
3,50	276,02	966,10	743,60	0,297	660,00	0,264
3,70	268,46	993,30	768,22	0,307	650,00	0,260
4,00	258,20	1032,77	806,41	0,323	622,50	0,249
4,50	243,43	1095,43	868,71	0,347	550,00	0,220
5,00	230,94	1154,68	919,94	0,368	450,00	0,180
5,52	219,79	1213,26	956,06	0,382	350,00	0,140

Tabela A.4 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,10.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,19	1184,69	225,09	218,71	0,087	291,25	0,117
0,30	942,80	282,84	229,54	0,092	451,25	0,181
0,50	730,29	365,14	247,68	0,099	616,25	0,247
0,80	577,34	461,88	269,37	0,108	687,50	0,275
1,00	516,39	516,40	282,98	0,113	700,00	0,280
1,20	471,40	565,68	297,08	0,119	722,50	0,289
1,50	421,63	632,45	320,49	0,128	733,75	0,294
1,80	384,90	692,81	348,05	0,139	745,00	0,298
2,00	365,14	730,30	369,37	0,148	757,50	0,303
2,20	348,15	765,94	393,52	0,157	773,75	0,310
2,50	326,60	816,48	436,37	0,175	800,00	0,320
2,80	308,60	864,10	488,92	0,196	787,50	0,315
2,90	303,24	879,37	508,98	0,204	772,50	0,309
3,10	293,29	909,21	553,75	0,222	772,50	0,309
3,50	276,02	966,10	664,38	0,266	732,50	0,293
3,70	268,46	993,30	731,06	0,292	722,50	0,289
4,00	258,20	1032,77	784,19	0,314	687,50	0,275
4,50	243,43	1095,43	846,29	0,339	582,50	0,233
5,00	230,94	1154,68	906,21	0,362	472,50	0,189
5,52	219,79	1213,26	954,79	0,382	372,50	0,149

Tabela A.5 – Resultados para placas *H/L* = 0,50, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,15.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,12	1800,00	222,22	347,18	0,139	450,00	0,180
0,20	1414,20	282,85	475,40	0,190	986,56	0,395
0,30	1154,70	346,41	601,35	0,241	1024,10	0,410
0,40	1000,01	400,00	703,11	0,281	1011,20	0,404
0,50	894,43	447,21	793,01	0,317	995,00	0,398
0,60	816,50	489,90	872,78	0,349	972,50	0,389
0,70	755,93	529,15	939,89	0,376	950,00	0,380
0,72	746,40	535,91	950,04	0,380	950,00	0,380
0,75	730,30	547,72	967,18	0,387	937,50	0,375
0,80	707,11	565,69	989,76	0,396	932,50	0,373
0,90	666,67	600,00	1019,50	0,408	900,00	0,360
1,00	632,46	632,46	1033,20	0,413	882,50	0,353
1,10	603,02	663,32	1037,30	0,415	822,50	0,329
1,20	577,35	692,82	1036,20	0,414	762,50	0,305
1,30	554,70	721,11	1032,40	0,413	687,50	0,275
1,40	534,52	748,33	1027,20	0,411	622,50	0,249
1,50	516,40	774,60	1020,80	0,408	562,50	0,225
1,60	500,00	800,00	1014,50	0,406	487,50	0,195

Tabela A.6 – Resultados para placas *H/L* = 0,50, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,15.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,12	1800,00	222,22	338,11	0,135	418,75	0,168
0,20	1414,20	282,85	438,23	0,175	966,25	0,387
0,30	1154,70	346,41	539,78	0,216	1024,10	0,410
0,40	1000,01	400,00	618,04	0,247	1010,00	0,404
0,50	894,43	447,21	685,49	0,274	978,75	0,392
0,60	816,50	489,90	738,24	0,295	951,25	0,381
0,70	755,93	529,15	806,49	0,323	932,50	0,373
0,80	707,11	565,69	863,39	0,345	910,00	0,364
0,85	686,00	583,09	890,85	0,356	900,00	0,360
0,87	679,24	588,90	899,97	0,360	900,00	0,360
0,90	666,67	600,00	917,20	0,367	887,50	0,355
1,00	632,46	632,46	939,29	0,376	882,50	0,353
1,10	603,02	663,32	1003,40	0,401	822,50	0,329
1,20	577,35	692,82	1027,50	0,411	775,00	0,310
1,30	554,70	721,11	1040,10	0,416	712,50	0,285
1,40	534,52	748,33	1044,40	0,418	645,00	0,258
1,50	516,40	774,60	1044,40	0,418	562,50	0,225
1,60	500,00	800,00	1040,70	0,416	510,00	0,204

Tabela A.7 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,15.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,27	1214,20	329,43	201,23	0,080	256,25	0,103
0,30	1154,68	346,41	203,95	0,082	293,75	0,118
0,40	1000,00	399,99	215,73	0,086	396,56	0,159
0,50	894,42	447,21	228,78	0,092	488,75	0,196
0,60	816,49	489,89	242,33	0,097	559,06	0,224
0,70	755,92	529,15	256,25	0,103	611,25	0,245
0,80	707,10	565,68	270,65	0,108	646,56	0,259
0,90	666,66	599,99	285,78	0,114	666,25	0,267
1,00	632,45	632,45	301,66	0,121	688,75	0,276
1,20	577,35	692,81	337,06	0,135	722,50	0,289
1,40	534,52	748,32	378,68	0,151	751,25	0,301
1,60	500,00	799,99	428,61	0,171	737,50	0,295
1,80	471,40	848,52	489,47	0,196	737,50	0,295
2,00	447,21	894,42	564,26	0,226	672,50	0,269
2,20	426,40	938,07	656,12	0,262	660,00	0,264
2,40	408,24	979,79	729,13	0,292	622,50	0,249
2,60	392,23	1019,79	784,51	0,314	622,50	0,249
2,80	377,96	1058,29	844,81	0,338	600,00	0,240
3,00	365,15	1095,43	905,99	0,362	550,00	0,220
3,20	353,55	1131,36	960,48	0,384	500,00	0,200
3,50	338,06	1183,20	1017,90	0,407	400,00	0,160
3,69	329,45	1214,14	1039,90	0,416	337,50	0,135

Tabela A.8 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,15.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,27	1214,20	329,43	203,11	0,081	256,25	0,103
0,30	1154,68	346,41	204,66	0,082	284,38	0,114
0,40	1000,00	399,99	211,82	0,085	371,56	0,149
0,50	894,42	447,21	220,00	0,088	459,06	0,184
0,60	816,49	489,89	228,46	0,091	532,50	0,213
0,70	755,92	529,15	237,17	0,095	582,50	0,233
0,80	707,10	565,68	246,18	0,098	614,06	0,246
0,90	666,66	599,99	255,65	0,102	638,75	0,256
1,00	632,45	632,45	265,71	0,106	661,25	0,265
1,20	577,35	692,81	288,30	0,115	687,50	0,275
1,40	534,52	748,32	314,97	0,126	722,50	0,289
1,60	500,00	799,99	347,11	0,139	796,56	0,319
1,80	471,40	848,52	386,64	0,155	736,56	0,295
2,00	447,21	894,42	435,67	0,174	688,75	0,276
2,20	426,40	938,07	496,79	0,199	672,50	0,269
2,40	408,24	979,79	573,89	0,230	660,00	0,264
2,49	400,40	998,99	617,39	0,247	632,50	0,253
2,70	384,90	1039,22	728,27	0,291	610,00	0,244
2,90	371,39	1077,02	813,11	0,325	600,00	0,240
3,00	365,15	1095,43	843,20	0,337	562,50	0,225
3,20	353,55	1131,36	903,81	0,362	510,00	0,204
3,50	338,06	1183,20	987,92	0,395	412,50	0,165
3,69	329,45	1214,14	1029,50	0,412	362,50	0,145

Tabela A.9 – Resultados para placas *H/L* = 0,50, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,20.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,16	1800,00	296,30	345,57	0,138	431,25	0,173
0,20	1633,00	326,60	412,61	0,165	627,81	0,251
0,30	1333,33	400,00	578,78	0,232	916,25	0,367
0,40	1154,70	461,88	709,09	0,284	910,00	0,364
0,50	1032,80	516,40	823,70	0,329	888,75	0,356
0,56	975,90	546,50	888,30	0,355	882,50	0,353
0,60	942,81	565,68	930,13	0,372	881,25	0,353
0,70	872,87	611,01	1029,20	0,412	872,50	0,349
0,80	816,50	653,20	1109,70	0,444	822,50	0,329
0,90	769,80	692,82	1144,50	0,458	750,00	0,300
1,00	730,30	730,30	1144,20	0,458	662,50	0,265
1,10	696,31	765,94	1121,60	0,449	575,00	0,230
1,20	666,67	800,00	1119,90	0,448	487,50	0,195

Tabela A.10 – Resultados para placas *H/L* = 0,50, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,20.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,16	1800,00	296,30	331,01	0,132	401,25	0,161
0,20	1633,00	326,60	376,38	0,151	581,56	0,233
0,30	1333,33	400,00	503,02	0,201	930,31	0,372
0,40	1154,70	461,88	601,90	0,241	923,75	0,370
0,50	1032,80	516,40	687,14	0,275	888,75	0,356
0,60	942,81	565,68	767,58	0,307	856,48	0,343
0,70	872,87	611,01	848,62	0,339	845,00	0,338
0,80	816,50	653,20	933,62	0,373	810,00	0,324
0,90	769,80	692,82	1024,10	0,410	760,00	0,304
1,00	730,30	730,30	1109,50	0,444	685,94	0,274
1,10	696,31	765,94	1152,60	0,461	600,00	0,240
1,20	666,67	800,00	1156,60	0,463	512,50	0,205

Tabela A.11 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,20.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN última*
0,36	1214,20	439,24	187,67	0,075	243,75	0,098
0,40	1154,69	461,88	191,60	0,077	271,88	0,109
0,50	1032,79	516,39	204,68	0,082	346,56	0,139
0,60	942,80	565,68	220,37	0,088	411,25	0,165
0,70	872,87	611,00	238,04	0,095	482,50	0,193
0,80	816,49	653,19	257,62	0,103	528,75	0,212
0,90	769,80	692,81	279,47	0,112	574,04	0,230
1,00	730,29	730,29	303,91	0,122	612,50	0,245
1,10	696,31	765,93	331,37	0,133	637,50	0,255
1,20	666,66	799,99	362,55	0,145	646,56	0,259
1,30	640,51	832,66	397,95	0,159	653,75	0,262
1,40	617,21	864,09	438,20	0,175	601,56	0,241
1,50	596,28	894,42	484,45	0,194	622,50	0,249
1,60	577,35	923,75	537,24	0,215	587,50	0,235
1,69	561,76	949,38	590,61	0,236	595,00	0,238
1,80	544,33	979,79	663,11	0,265	582,50	0,233
2,00	516,39	1032,79	765,30	0,306	582,50	0,233
2,10	503,95	1058,29	818,53	0,327	550,00	0,220
2,20	492,36	1083,20	877,45	0,351	537,50	0,215
2,30	481,54	1107,54	939,46	0,376	510,00	0,204
2,40	471,40	1131,36	999,69	0,400	487,50	0,195
2,50	461,88	1154,69	1051,10	0,420	450,00	0,180
2,60	452,91	1177,56	1088,80	0,436	412,50	0,165
2,70	444,44	1199,99	1114,40	0,446	375,00	0,150
2,76	439,24	1214,20	1126,20	0,450	350,00	0,140

Tabela A.12 – Resultados para placas H/L = 1,00, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,20.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	TLN crítica	P_u (kN/mm)	TLN última
0,36	1214,20	439,24	189,99	0,076	237,50	0,095
0,40	1154,69	461,88	191,78	0,077	256,25	0,103
0,50	1032,79	516,39	198,30	0,079	336,56	0,135
0,60	942,80	565,68	206,56	0,083	401,25	0,161
0,70	872,87	611,00	216,10	0,086	458,44	0,183
0,80	816,49	653,19	226,84	0,091	509,06	0,204
0,90	769,80	692,81	238,90	0,096	549,06	0,220
1,00	730,29	730,29	252,49	0,101	586,56	0,235
1,10	696,31	765,93	267,84	0,107	619,06	0,248
1,20	666,66	799,99	285,32	0,114	624,06	0,250
1,30	640,51	832,66	305,29	0,122	623,75	0,250
1,40	617,21	864,09	328,29	0,131	615,31	0,246
1,50	596,28	894,42	354,53	0,142	596,56	0,239
1,60	577,35	923,75	385,22	0,154	610,00	0,244
1,70	560,11	952,18	420,93	0,168	595,00	0,238
1,80	544,33	979,79	462,46	0,185	588,75	0,236
2,00	516,39	1032,79	567,19	0,227	560,00	0,224
2,10	503,95	1058,29	624,79	0,250	560,00	0,224
2,20	492,36	1083,20	705,14	0,282	537,50	0,215
2,30	481,54	1107,54	785,91	0,314	537,50	0,215
2,40	471,40	1131,36	871,03	0,348	487,50	0,195
2,50	461,88	1154,69	936,73	0,375	462,50	0,185
2,60	452,91	1177,56	998,85	0,400	412,50	0,165
2,70	444,44	1199,99	1057,70	0,423	387,50	0,155
2,76	439,24	1214,20	1090,00	0,436	362,50	0,145

Tabela A.13 – Resultados para placas H/L = 0,50, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,25.

L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	TLN crítica	P_u (kN/mm)	TLN última
1800,00	370,37	349,53	0,140	400,00	0,160
1490,70	447,22	550,03	0,220	736,56	0,295
1291,00	516,40	717,15	0,287	806,88	0,323
1217,16	547,72	789,85	0,316	817,50	0,327
1197,37	556,78	810,99	0,324	810,00	0,324
1154,70	577,35	859,62	0,344	825,00	0,330
1054,09	632,46	997,44	0,399	822,50	0,329
975,90	683,13	1139,80	0,456	760,00	0,304
912,87	730,30	1268,60	0,507	662,50	0,265
860,67	774,59	1276,30	0,511	550,00	0,220
837,71	795,82	1264,00	0,506	500,00	0,200

Tabela A.14 – Resultados para placas *H/L* = 0,50, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,25.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,21	1800,00	370,37	325,81	0,130	378,75	0,152
0,30	1490,70	447,22	460,86	0,184	730,31	0,292
0,40	1291,00	516,40	589,07	0,236	828,75	0,332
0,50	1154,70	577,35	697,97	0,279	808,75	0,324
0,59	1062,99	627,16	792,49	0,317	795,00	0,318
0,70	975,90	683,13	916,84	0,367	760,00	0,304
0,80	912,87	730,30	1050,00	0,420	681,25	0,273
0,90	860,67	774,59	1211,40	0,485	571,88	0,229
0,95	837,71	795,82	1284,50	0,514	520,00	0,208

Tabela A.15 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal longitudinal e ϕ = 0,25.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN* última
0,45	1214,20	549,05	176,70	0,071	222,50	0,089
0,50	1154,69	577,34	182,71	0,073	251,25	0,101
0,60	1054,08	632,45	199,16	0,080	303,36	0,121
0,70	975,89	683,12	219,92	0,088	361,56	0,145
0,80	912,86	730,29	244,90	0,098	401,56	0,161
0,90	860,66	774,59	274,63	0,110	446,56	0,179
1,00	816,49	816,49	304,67	0,122	488,75	0,196
1,10	778,49	856,34	351,86	0,141	500,00	0,200
1,20	745,35	894,42	401,64	0,161	510,00	0,204
1,30	716,11	930,94	460,43	0,184	512,50	0,205
1,39	692,54	962,63	521,12	0,208	522,50	0,209
1,50	666,66	999,99	605,00	0,242	510,00	0,204
1,60	645,49	1032,79	686,67	0,275	510,00	0,204
1,70	626,22	1064,57	769,42	0,308	487,50	0,195
1,80	608,57	1095,44	851,63	0,341	487,50	0,195
1,90	592,34	1125,45	934,87	0,374	460,00	0,184
2,00	577,35	1154,69	1021,80	0,409	437,50	0,175
2,10	563,43	1183,20	1112,90	0,445	400,00	0,160
2,20	550,48	1211,05	1192,60	0,477	350,00	0,140

Tabela A.16 – Resultados para placas *H/L* = 1,00, com perfuração hexagonal transversal e ϕ = 0,25.

H_0/L_0	L_0 (mm)	H_0 (mm)	P_{cr} (kN/mm)	*TLN* crítica	P_u (kN/mm)	*TLN última*
0,45	1214,20	549,05	178,57	0,071	222,50	0,089
0,50	1154,69	577,34	180,85	0,072	238,75	0,096
0,60	1054,08	632,45	187,83	0,075	301,56	0,121
0,70	975,89	683,12	197,31	0,079	351,56	0,141
0,80	912,86	730,29	209,16	0,084	399,06	0,160
0,90	860,66	774,59	223,53	0,089	436,56	0,175
1,00	816,49	816,49	240,80	0,096	464,06	0,186
1,10	778,49	856,34	261,54	0,105	483,75	0,194
1,20	745,35	894,42	286,56	0,115	496,56	0,199
1,30	716,11	930,94	316,59	0,127	501,25	0,201
1,40	690,06	966,08	353,12	0,141	505,55	0,202
1,50	666,66	999,99	397,24	0,159	510,00	0,204
1,60	645,49	1032,79	451,03	0,180	510,00	0,204
1,70	626,22	1064,57	515,91	0,206	516,25	0,207
1,80	608,57	1095,44	593,02	0,237	500,00	0,200
1,90	592,34	1125,45	682,37	0,273	500,00	0,200
2,00	577,35	1154,69	777,60	0,311	450,00	0,180
2,10	563,43	1183,20	895,49	0,358	400,00	0,160
2,20	550,48	1211,05	1027,00	0,411	375,00	0,150

B. RESULTADOS GRÁFICOS

A seguir serão mostradas as curvas da *TLN* em função de H_0/L_0 e as curvas limite originadas a partir da intersecção das curvas de flambagem elástica e elasto-plástica, dos casos de placas H/L = 0,50 e H/L = 1,00, com perfurações hexagonais longitudinais e transversais para ϕ = 0,15, ϕ = 0,20 e ϕ = 0,25. No canto superior esquerdo das figuras que seguem, é possível observar as características geométricas da perfuração com o menor valor de H_0/L_0 (placa da esquerda) e com o maior valor de H_0/L_0 (placa da direita).

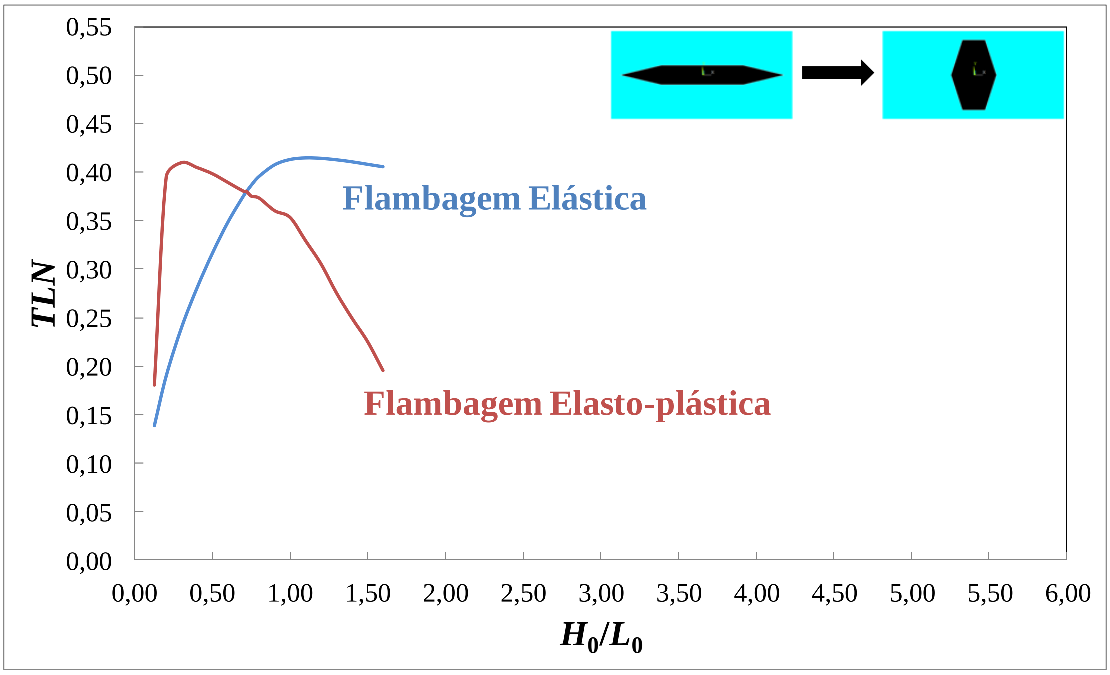


Figura B.1 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,15 e perfuração hexagonal longitudinal.

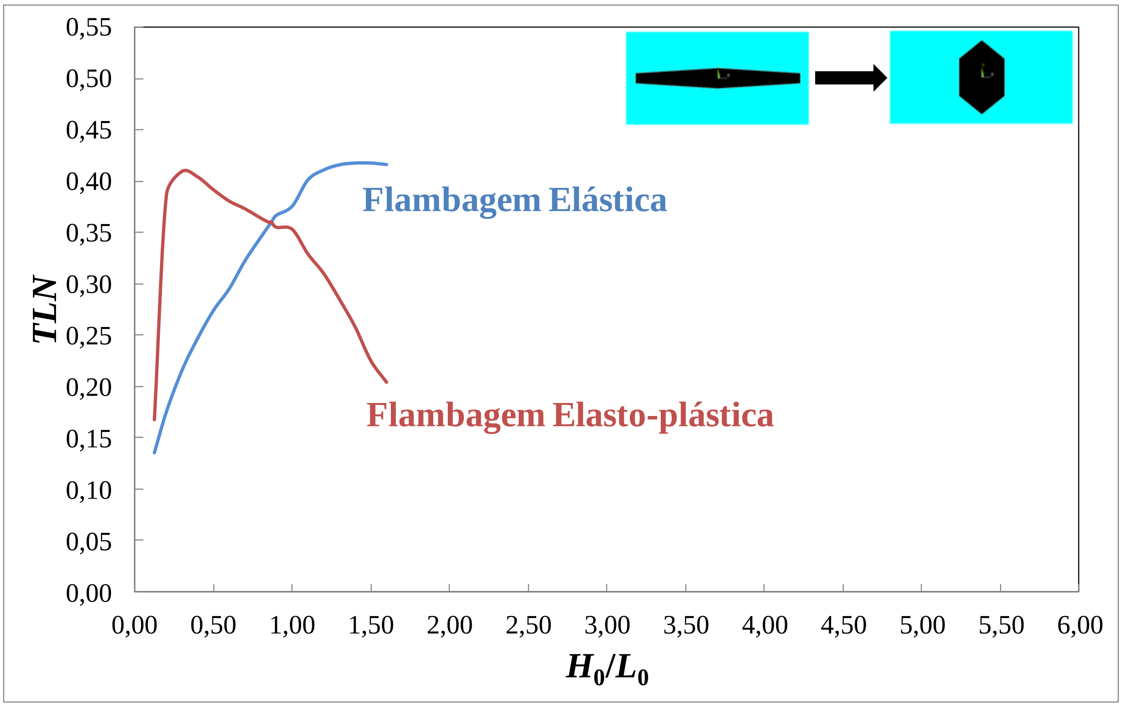


Figura B.2 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,15 e perfuração hexagonal transversal.

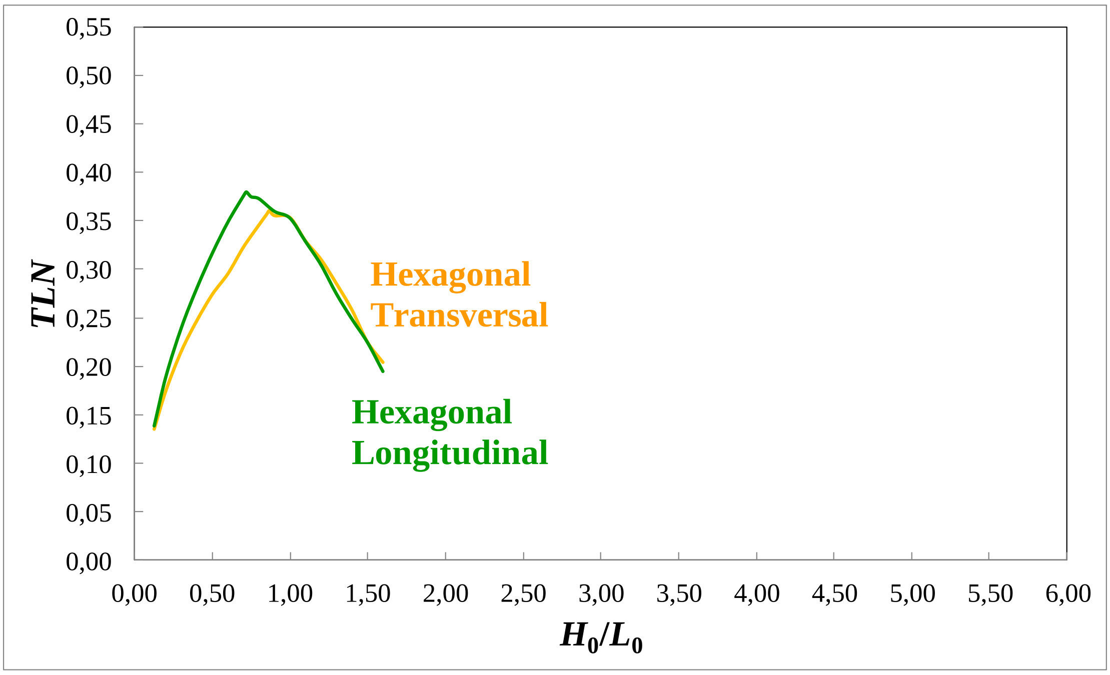


Figura B.3 – Curvas limite de flambagem para uma placa com H/L = 0,50 e ϕ = 0,15.

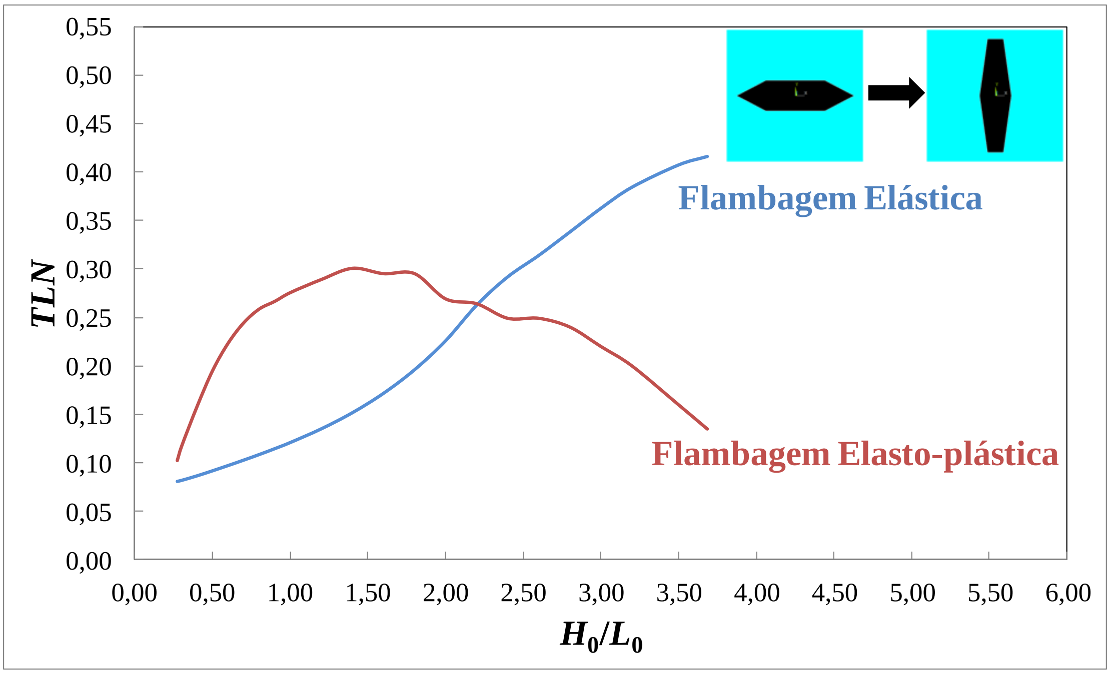


Figura B.4 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,15 e perfuração hexagonal longitudinal.

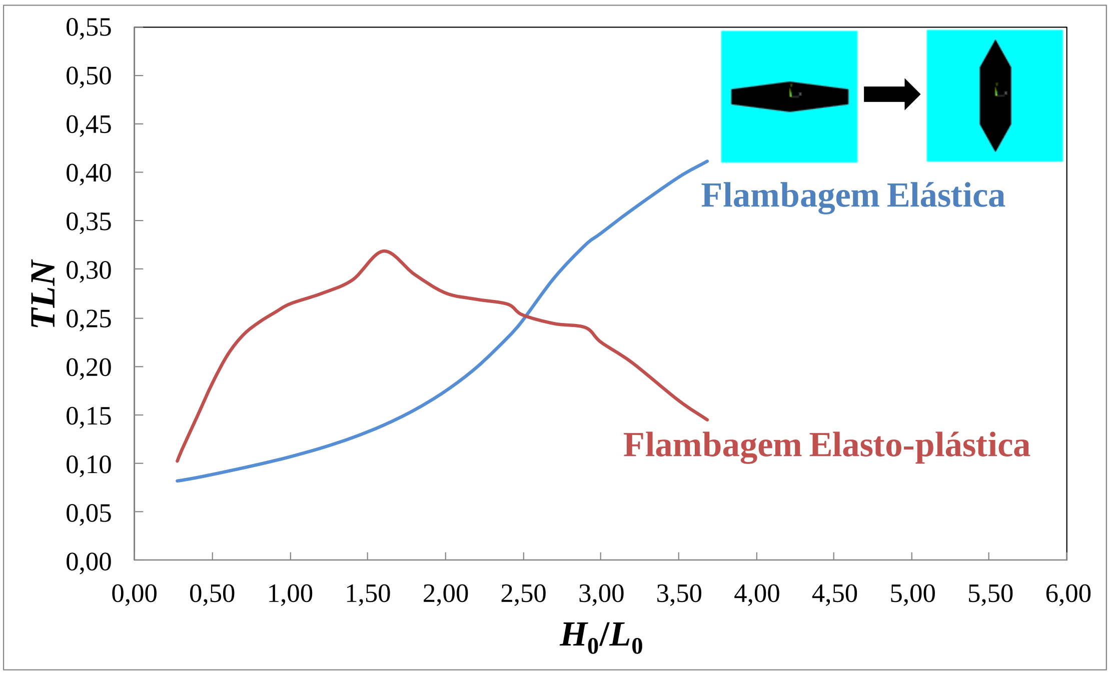


Figura B.5 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,15 e perfuração hexagonal transversal.

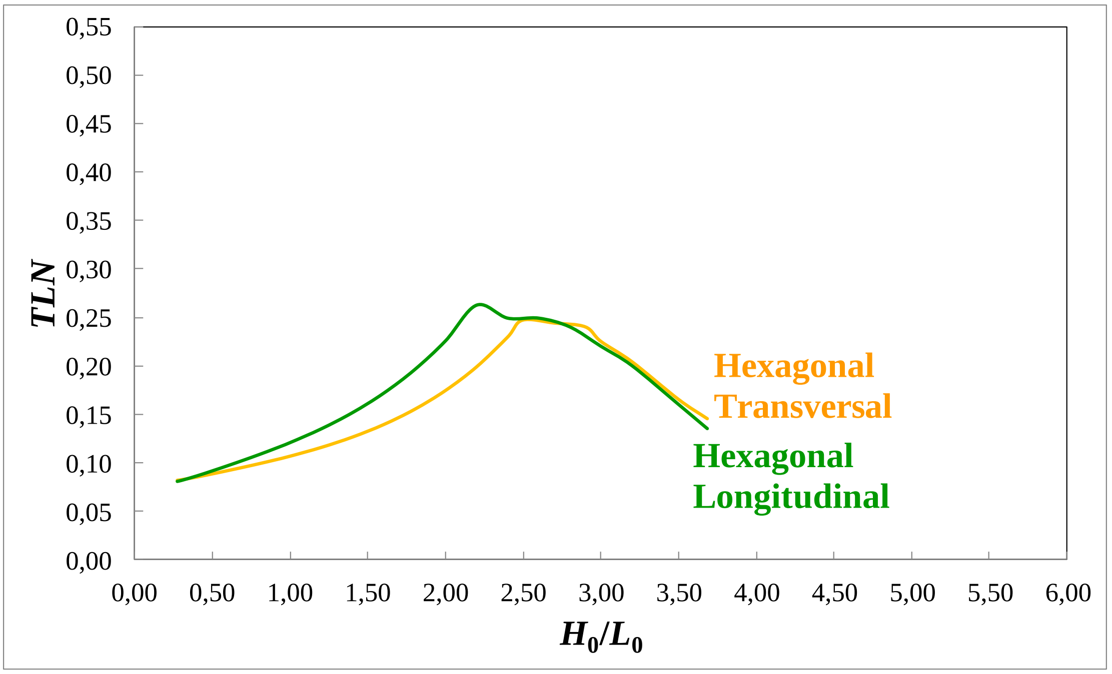


Figura B.6 – Curvas limite de flambagem para uma placa com H/L = 1,00 e ϕ = 0,15.

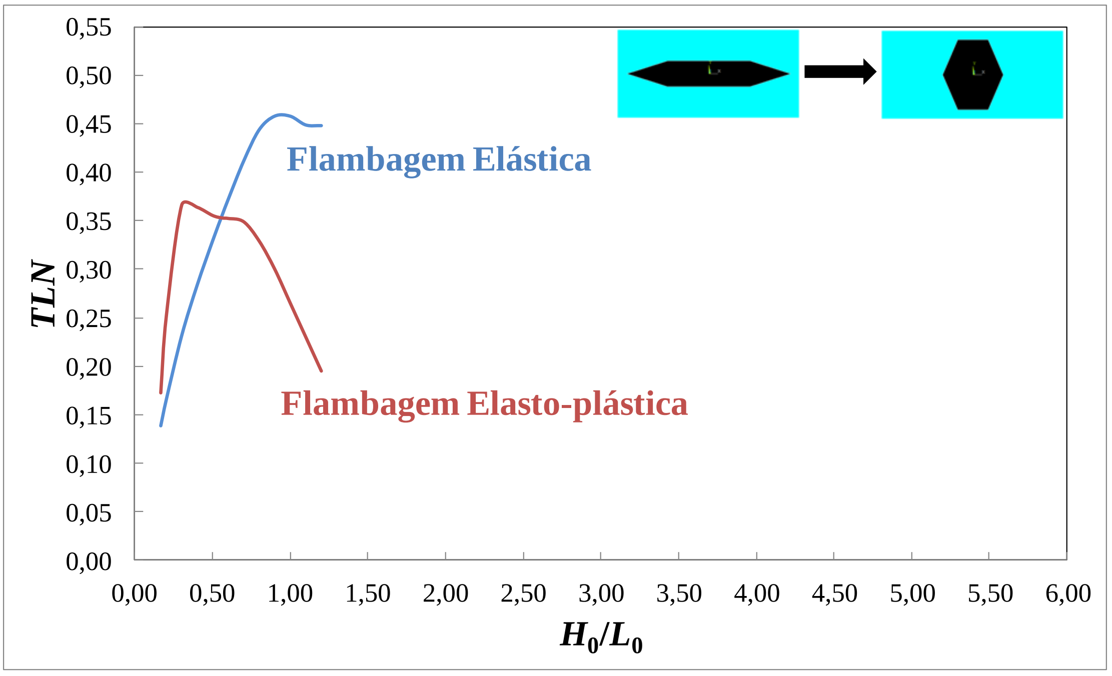


Figura B.7 – TLN em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,20 e perfuração hexagonal longitudinal.

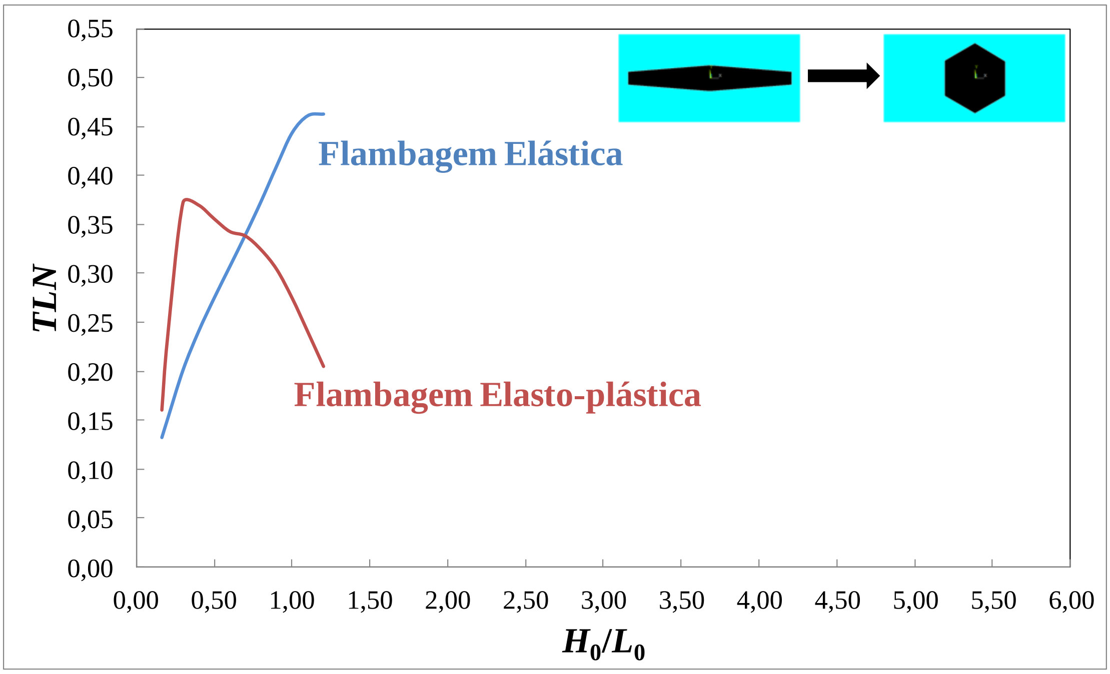


Figura B.8 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,20 e perfuração hexagonal transversal.

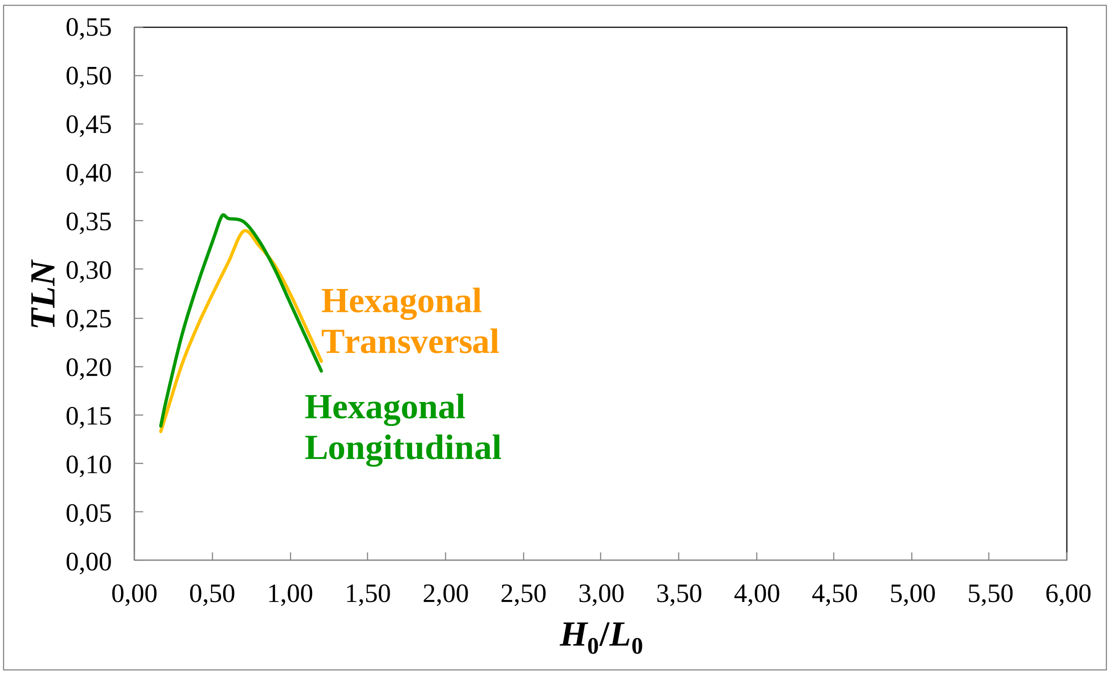


Figura B.9 – Curvas limite de flambagem para uma placa com H/L = 0,50 e ϕ = 0,20.

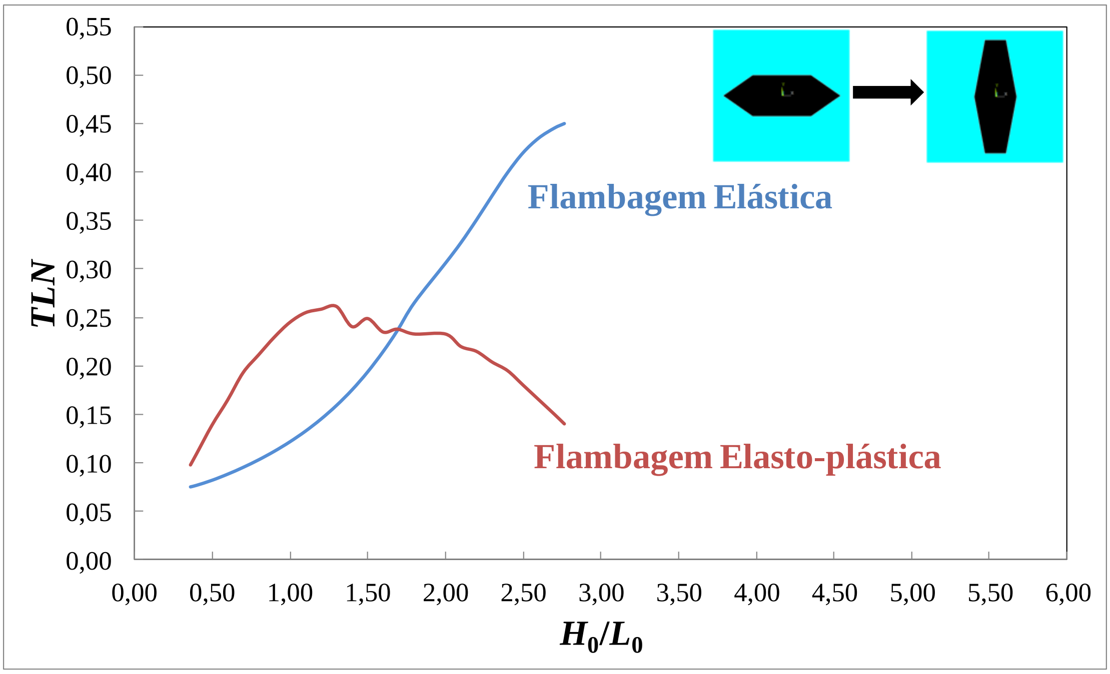


Figura B.10 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,20 e perfuração hexagonal longitudinal.

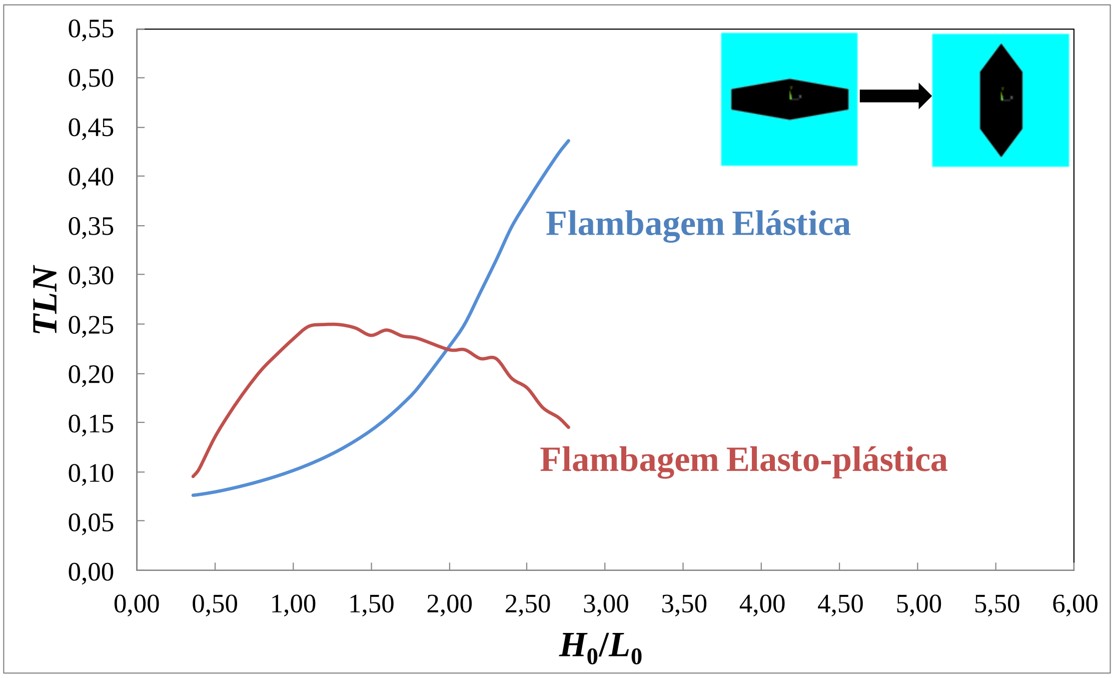


Figura B.11 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,20 e perfuração hexagonal transversal.

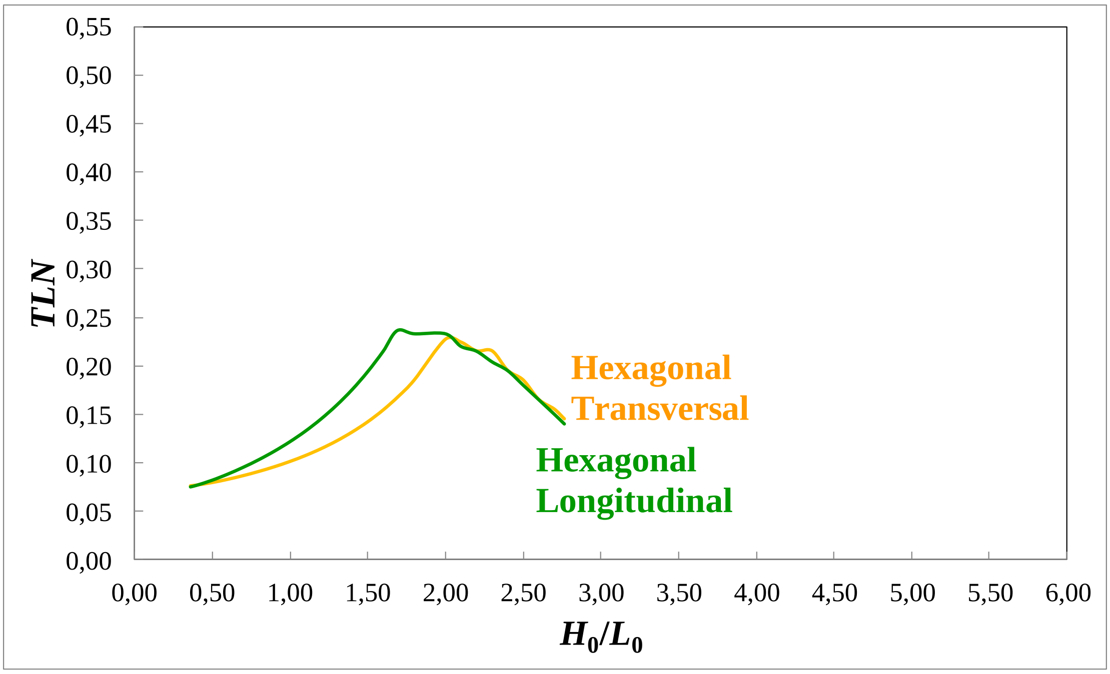


Figura B.12 – Curvas limite de flambagem para uma placa com *H/L* = 1,00 e ϕ = 0,20.

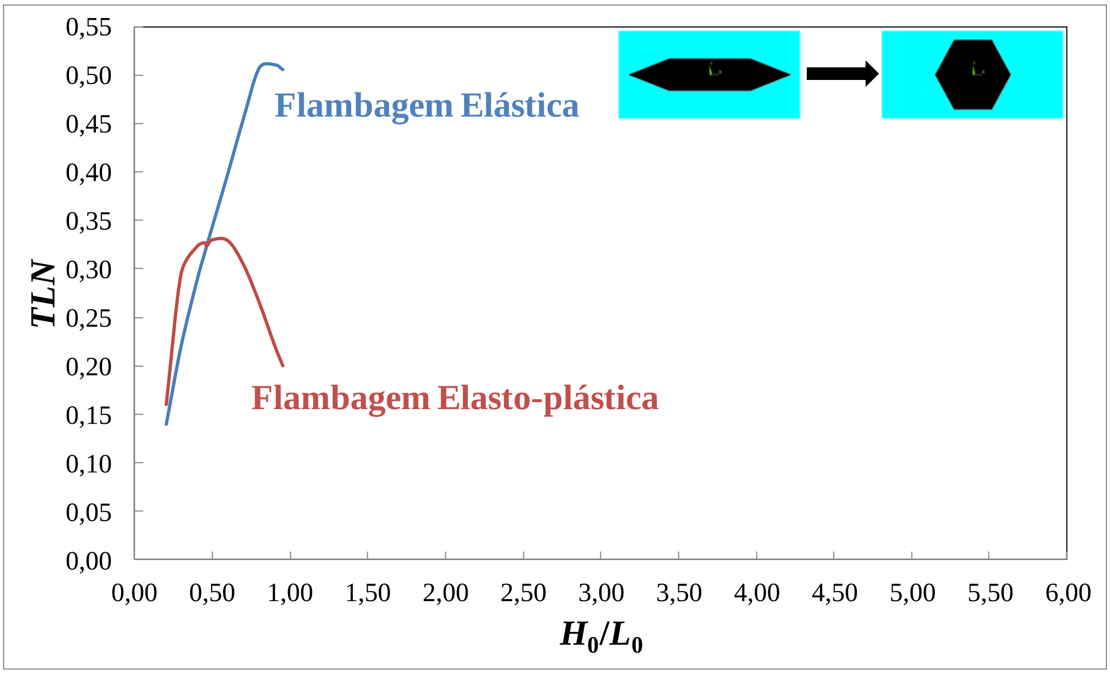


Figura B.13 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com *H/L* = 0,50, ϕ = 0,25 e perfuração hexagonal longitudinal.

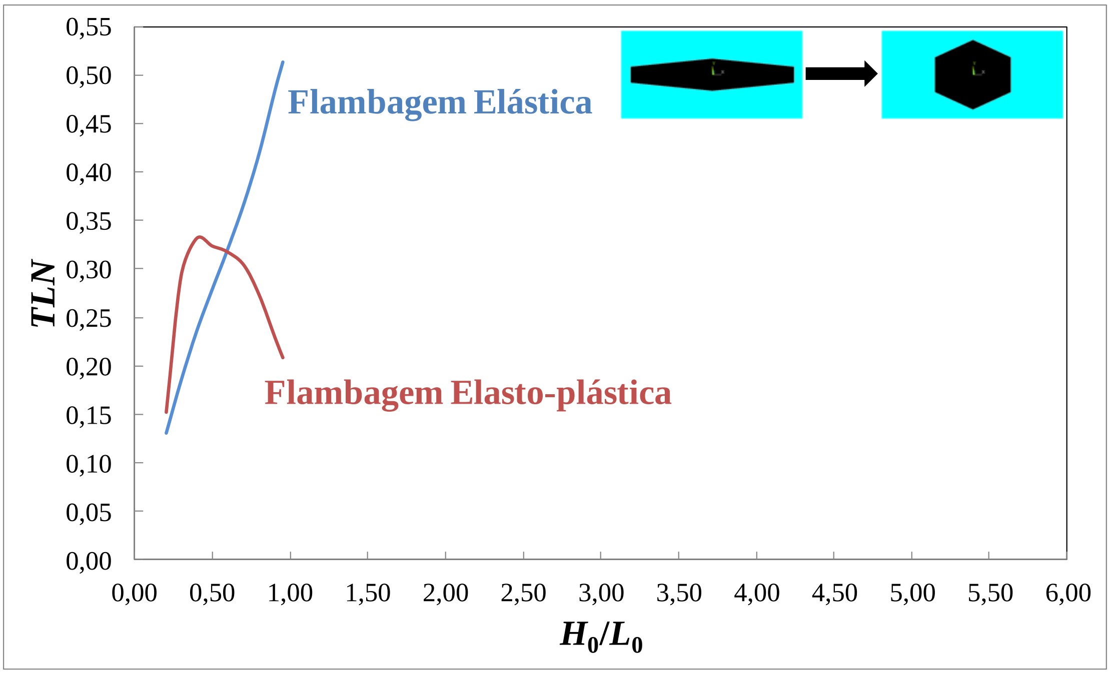


Figura B.14 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,50, ϕ = 0,25 e perfuração hexagonal transversal.

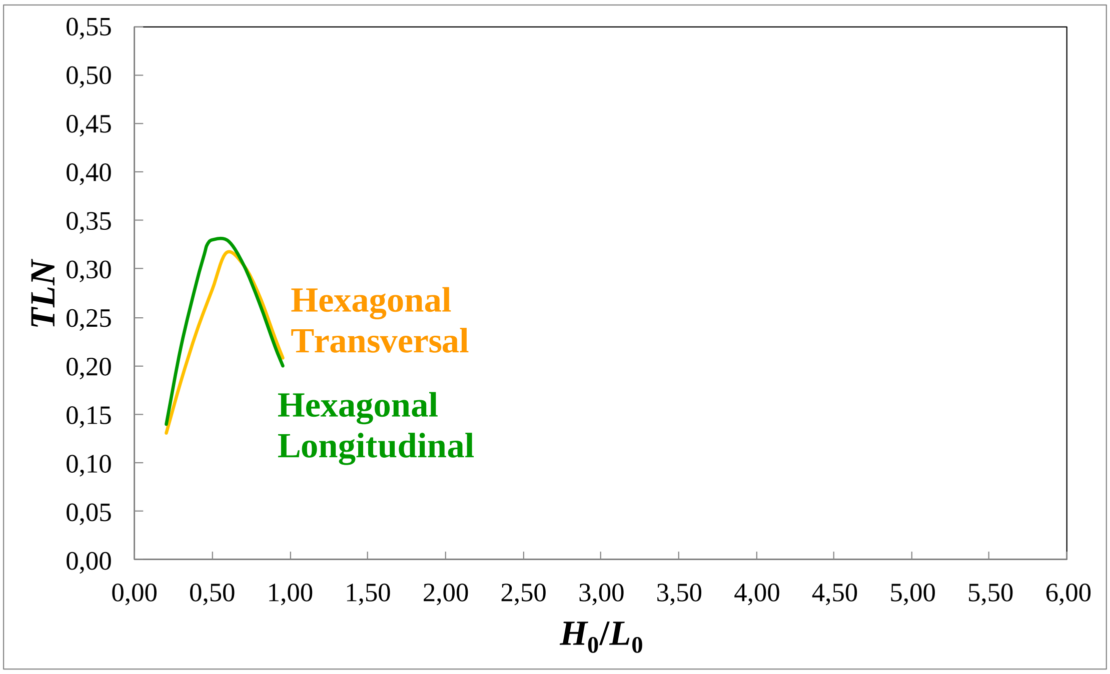


Figura B.15 – Curvas limite de flambagem para uma placa com H/L = 0,50 e ϕ = 0,25.

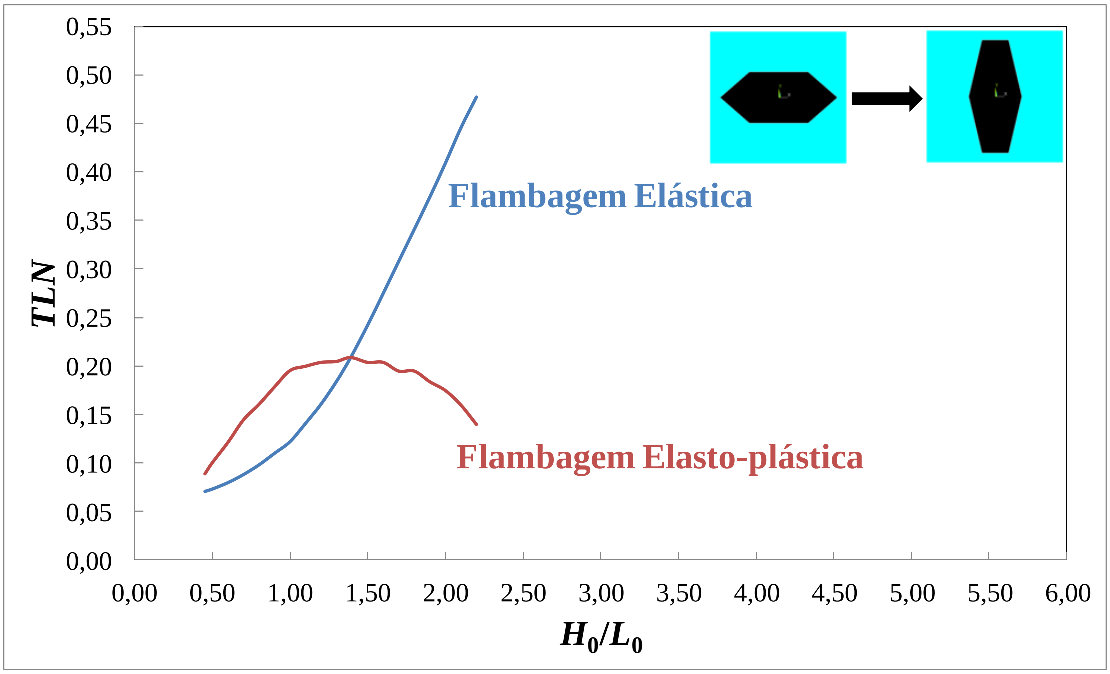


Figura B.16 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,25 e perfuração hexagonal longitudinal.

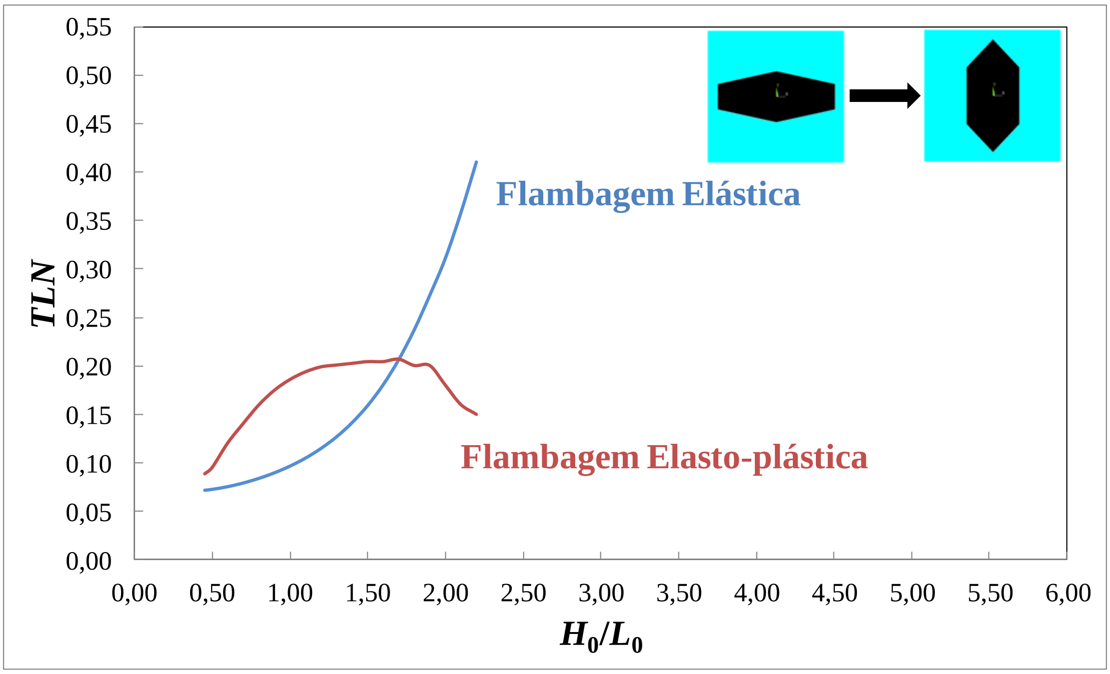


Figura B.17 – *TLN* em função de H_0/L_0, para a placa com H/L = 1,00, ϕ = 0,25 e perfuração hexagonal transversal.

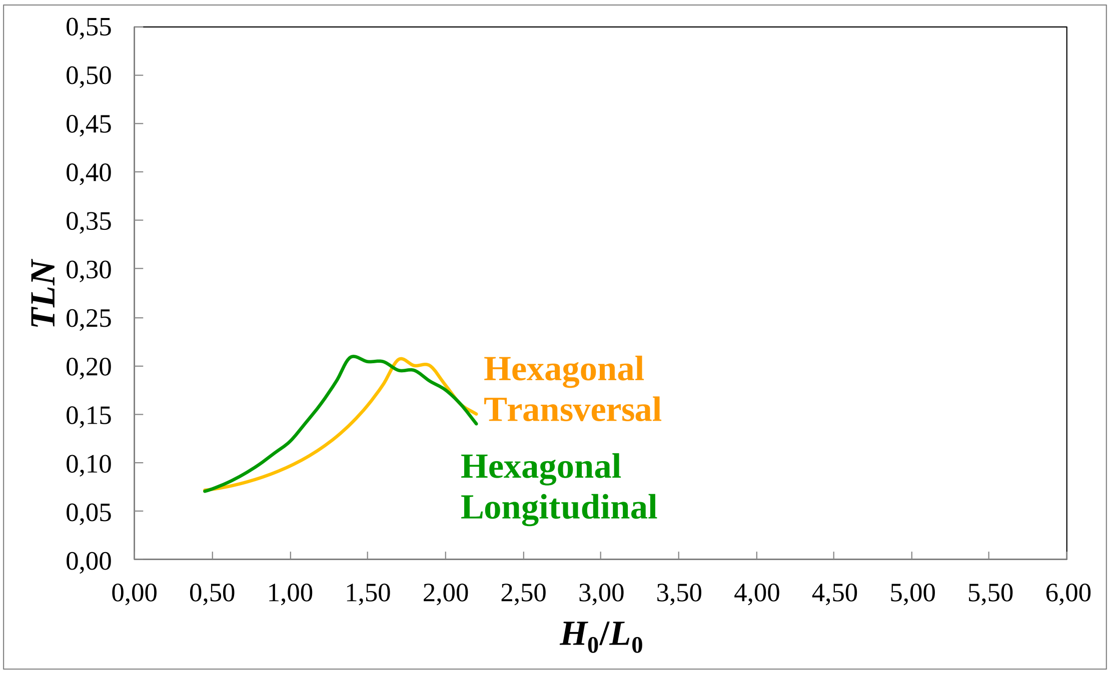


Figura B.18 – Curvas limite de flambagem para uma placa com *H/L* = 1,00 e ϕ = 0,25.

C. GEOMETRIAS ÓTIMAS DE PERFURAÇÃO

A sequência de figuras a seguir mostram as dimensões das perfurações otimizadas, para as frações de volume e dimensões de placas estudadas.

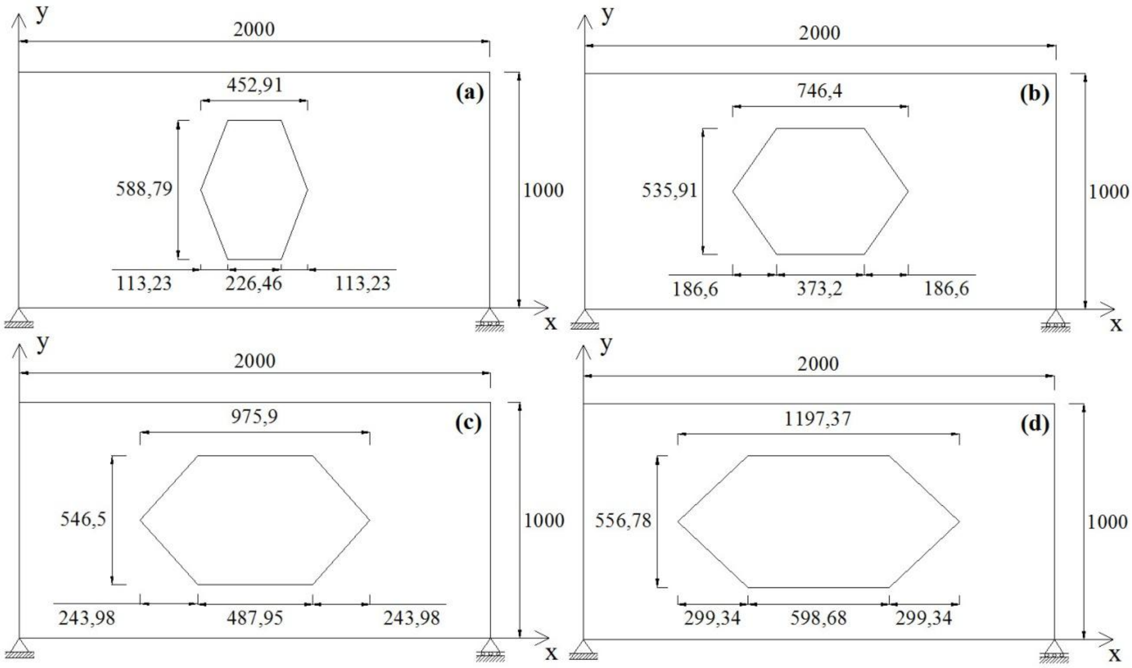


Figura C.1 – Geometrias ótimas para a perfuração hexagonal longitudinal e H/L = 0,50, em milímetros (mm): (a) ϕ = 0,10, $(H_0/L_0)_o$ = 1,30 e $(TLN)_m$ = 0,380; (b) ϕ = 0,15, $(H_0/L_0)_o$ = 0,718 e $(TLN)_m$ = 0,380; (c) ϕ = 0,20, $(H_0/L_0)_o$ = 0,56 e $(TLN)_m$ = 0,353; (d) ϕ = 0,25, $(H_0/L_0)_o$ = 0,465 e $(TLN)_m$ = 0,324.

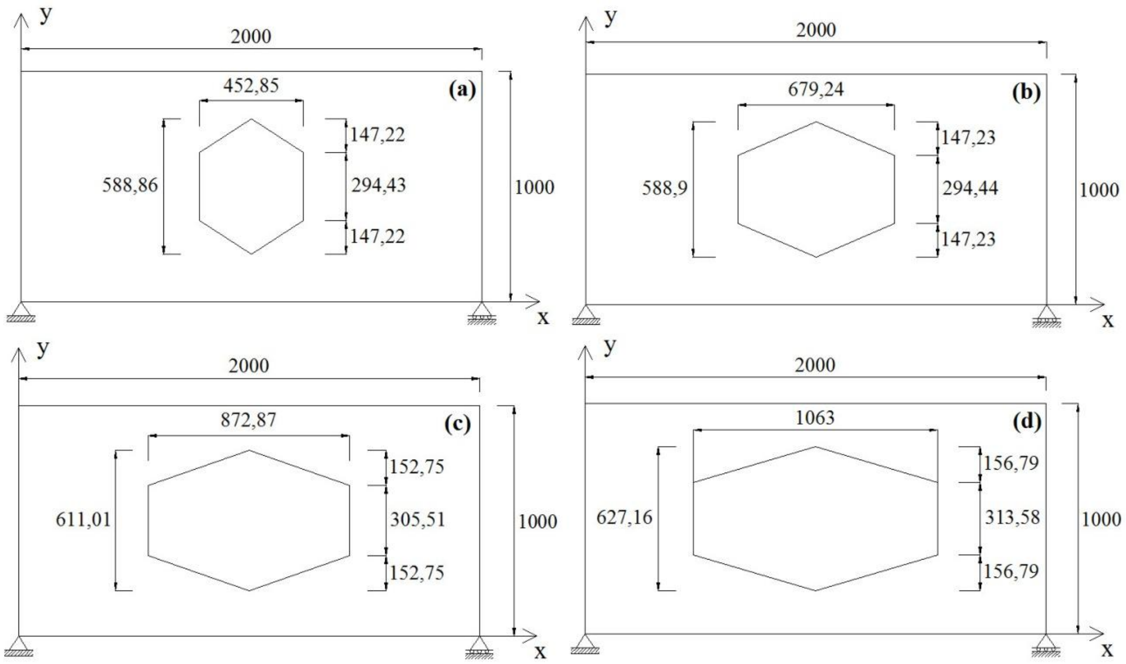


Figura C.2 – Geometrias ótimas para a perfuração hexagonal transversal e H/L = 0,50, em milímetros (mm): (a) ϕ = 0,10, $(H_0/L_0)_o$ = 1,30 e $(TLN)_m$ = 0,369; (b) ϕ = 0,15, $(H_0/L_0)_o$ = 0,867 e $(TLN)_m$ = 0,360; (c) ϕ = 0,20, $(H_0/L_0)_o$ = 0,70 e $(TLN)_m$ = 0,338; (d) ϕ = 0,25, $(H_0/L_0)_o$ = 0,59 e $(TLN)_m$ = 0,318.

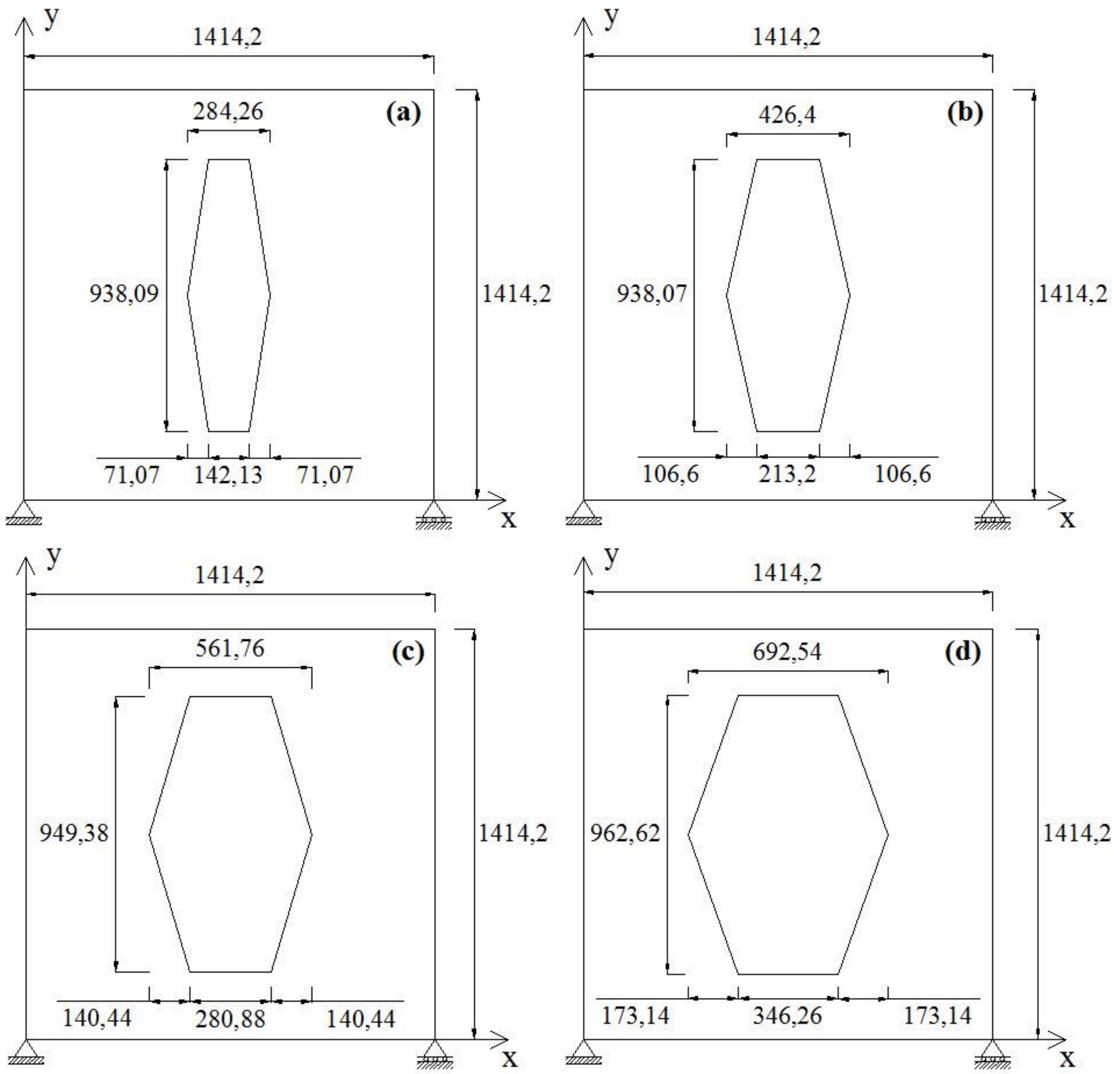


Figura C.3 – Geometrias ótimas para a perfuração hexagonal longitudinal e H/L = 1,00, em milímetros (mm): (a) ϕ = 0,10, $(H_0/L_0)_o$ = 3,30 e $(TLN)_m$ = 0,284; (b) ϕ = 0,15, $(H_0/L_0)_o$ = 2,20 e $(TLN)_m$ = 0,264; (c) ϕ = 0,20, $(H_0/L_0)_o$ = 1,69 e $(TLN)_m$ = 0,238; (d) ϕ = 0,25, $(H_0/L_0)_o$ = 1,39 e $(TLN)_m$ = 0,209.

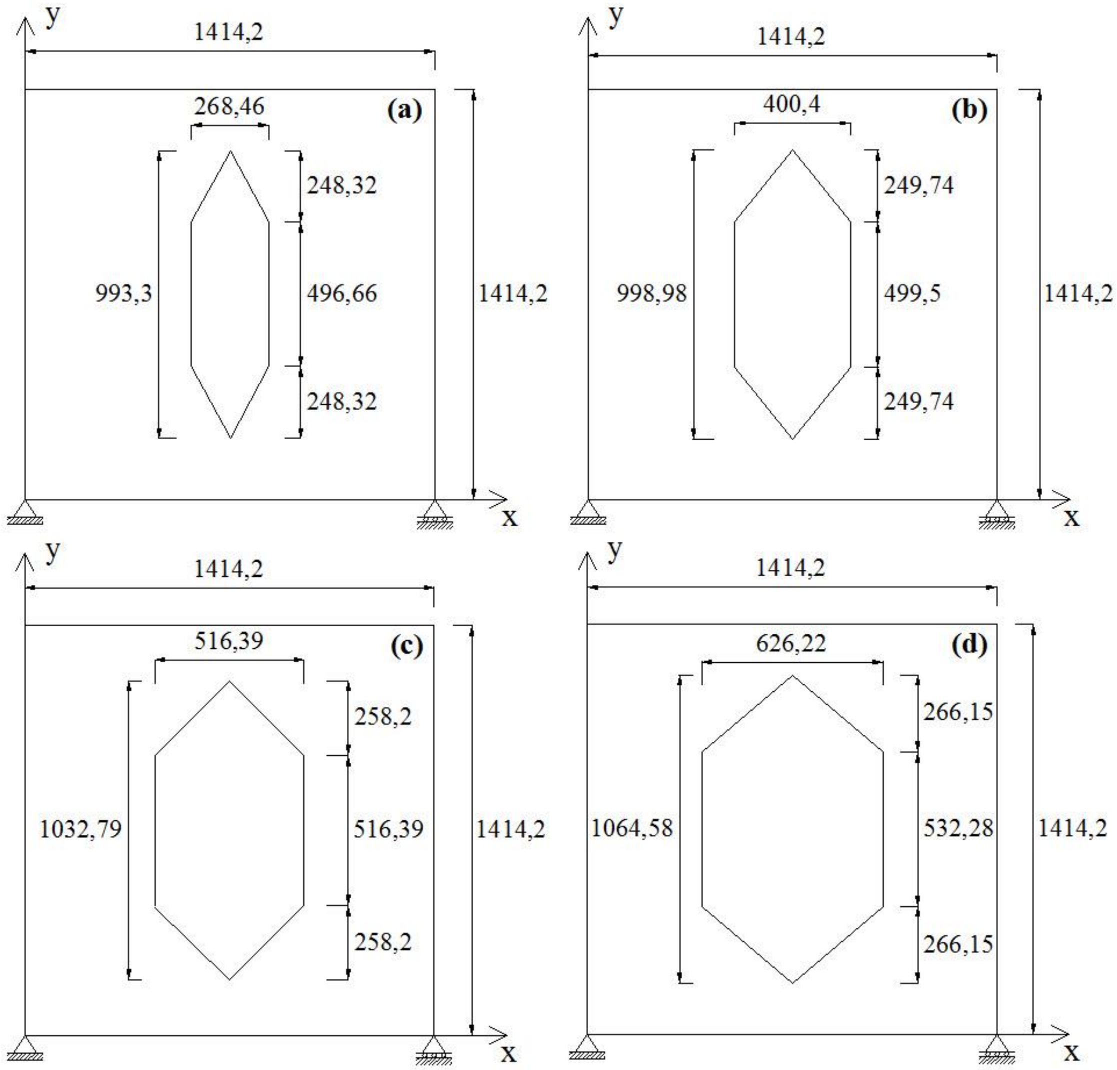


Figura C.4 – Geometrias ótimas para a perfuração hexagonal transversal e H/L = 1,00, em milímetros (mm): (a) ϕ = 0,10, $(H_0/L_0)_o$ = 3,70 e $(TLN)_m$ = 0,289; (b) ϕ = 0,15, $(H_0/L_0)_o$ = 2,495 e $(TLN)_m$ = 0,253; (c) ϕ = 0,20, $(H_0/L_0)_o$ = 2,00 e $(TLN)_m$ = 0,224; (d) ϕ = 0,25, $(H_0/L_0)_o$ = 1,70 e $(TLN)_m$ = 0,207.