UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

ESTUDO COMPARATIVO DO COMPORTAMENTO DE PLACAS COM FUROS CIRCULARES, QUADRANGULARES E LOSANGULARES, SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL EM ESTRUTURAS NAVAIS E OCEÂNICAS.

BRUNA SUANEZ SENTANO

Rio Grande, outubro de 2014.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

ESTUDO COMPARATIVO DO COMPORTAMENTO DE PLACAS COM FUROS CIRCULARES, QUADRANGULARES E LOSANGULARES, SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL EM ESTRUTURAS NAVAIS E OCEÂNICAS.

BRUNA SUANEZ SENTANO

Dissertação apresentada à Comissão de Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Universidade Federal do Rio Grande, como quesito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Mauro de Vasconcellos Real, Dr. Eng. Civil.
Co - Orientador: Liércio André Isoldi, Dr. Eng. Mecânica.

Rio Grande, outubro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Paulo Roberto e Margarete, pelo amor, dedicação, incentivo e apoio ao longo da minha trajetória. Mais do que minha, esta conquista também é deles.

Aos meus irmãos, Paula, Raphael e Eduarda, pela amizade, carinho e companheirismo.

Ao meu companheiro de jornada, Paulo Antônio, pelo amor, paciência e estímulo.

Aos meus orientadores, Mauro de Vasconcellos Real e Liércio André Isoldi, pela orientação, paciência, amizade e incentivo ao longo da elaboração deste trabalho.

À coordenação e à secretaria do Curso de Pós – Graduação em Engenharia Oceânica pela disposição e ajuda.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior, CAPES, pelo apoio financeiro ao longo do trabalho.

À FURG por ofertar o curso de Engenharia Oceânica e por disponibilizar todos os recursos necessários nesta conquista.

“Não é importante a rapidez com que se aprende, mas que se aprenda.”

Kevin Paul Coates, Mark Evanier e Dennis Marks.

RESUMO

SENTANO, B. S., **Estudo comparativo do comportamento de placas com furos circulares, quadrangulares e losangulares, sob compressão uniaxial em estruturas navais e oceânicas.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós – Graduação em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, 2014.

Placas são elementos estruturais de superfície plana, cuja espessura é pequena quando comparada com as outras dimensões. Estes elementos tem imensa aplicabilidade na engenharia devido ao seu desempenho estrutural quando solicitada à flexão em razão da sua elevada relação resistência–peso e facilidade de descrição do seu comportamento mecânico, pois há eficientes métodos analíticos de cálculo. Estes tipos de estruturas podem ser delimitados por enrijecedores e constituem parte integrante de estruturas de navios, plataformas de petróleo offshore, comportas e docas flutuantes, por exemplo. Em estruturas navais, perfurações são comuns para a abertura de acessos, manutenção ou mesmo redução do seu peso total. Estas perfurações influenciam na máxima resistência desses elementos, pois ocorre uma alteração no comportamento mecânico da estrutura, devido à redistribuição das tensões ao longo da placa. Para o estudo do comportamento de placas com perfurações, foram realizadas análises lineares e não-lineares para a flambagem empregando–se o Método dos Elementos Finitos. A amostra dispõe de 300 placas em que a largura é mantida constante e o comprimento e espessura da placa e o tamanho do furo centralizado variados. A modelagem computacional foi realizada através do software ANSYS e, foi possível determinar a capacidade de carga para cada caso e permitindo analisar a influência do tamanho do furo, da esbeltez e do comprimento da placa em sua capacidade de carga das placas. A análise elástica apontou que o modo de flambagem se modifica ao passo que a relação a/b muda. Já a análise inelástica apresentou tensões últimas inferiores à tensão de escoamento do material em todos os casos. Quanto à influência do furo, foi verificado que quanto maior a perfuração menor é a carga de ruptura. Observa–se que a resistência última da placa não sofre influência significativa pela variação da relação a/b. Ambas as análises mostraram que placas mais espessas apresentam maior capacidade de carga e a geometria do furo não influencia significativamente na resistência da placa.

Palavras-chave: flambagem de placas, método dos elementos finitos, simulação numérica, análise linear, análise não-linear.

ABSTRACT

SENTANO, B. S., **Comparative study of the behavior of plates with circular, quadrangular and lozenge holes, under uniaxial compression in naval and offshores structures.** Dissertation (Master's degree in Oceanic Engineering) - Pos-Graduate Program in Oceanic Engineering, FURG, Rio Grande, 2014.

Plates are structural elements of flat surface, whose thickness is small compared to other dimensions. These elements have wide applicability in engineering due to its structural performance when subjected to bend, high strength-weight ratio and easy description of the mechanical behavior due to the efficient analytical calculation methods. These types of structures can be delimited by stiffeners which form part of ships structures, oil offshore rigs, locks and floating docks, for example. In naval structures, holes are common to open access, maintenance or reducing the total weight. These holes influence on the ultimate strength of these elements, because it occurs a change in mechanical behavior of the structure, due to the stresses redistribution along the plate. Elastic and inelastic buckling analyses were performed using the Finite Elements Method to study the behavior of plates with holes. The sample includes 300 plates where the width is kept constant and the length, the thickness and size of the central hole are varied. The computational modeling was on carried out using the ANSYS software, and it was possible to determine the load capacity for each case, allowing to analyze the influence of hole size, slenderness and aspect ratio of the plate in its load capacity. The elastic analysis indicated that buckling mode modifies while the a/b ratio changes. The inelastic analysis showed lower ultimate tension than the material flow stress in all cases. As for the influence of the hole, it was found that the higher the hole is smaller load breaking. It is observed that the ultimate strength of the plate is not significantly influenced by the variation of the a/b ratio. Both analyzes showed that thicker plates have a higher load capacity and the geometry of the hole doesn't influence significantly the strength of the plate.

Keywords: plate buckling, finite element method, numerical simulation, elastic analysis, inelastic analysis.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS **9**
LISTA DE FIGURAS **10**
LISTA DE SÍMBOLOS **16**
LISTA DE ABREVIATURAS **19**

1. INTRODUÇÃO 20
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS 20
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 22
1.3 OBJETIVOS 23
1.3.1 Objetivos gerais 23
1.3.2 Objetivos específicos 24

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **25**
2.1 TEORIA DE PLACAS FINAS 25
2.1.1 Introdução 25
2.1.2 Equação diferencial para placas finas 26
2.1.3 Condições de contorno 37
2.1.4 Solução da equação diferencial para placas finas 41
2.2 FLAMBAGEM DE PLACAS 42
2.2.1 Estabilidade de equilíbrio 43
2.2.2 Carga crítica de flambagem 46
2.2.3 Resistência pós - flambagem 55
2.2.4 Flambagem elástica e inelástica 57
2.2.5 Análise linear do problema de flambagem 57
2.2.6 Análise não-linear do problema de flambagem 57
2.2.7 Imperfeições iniciais geométricas 58
2.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA 59
2.3.1 Método dos elementos finitos 59
2.3.2 Discretização do domínio 60
2.3.3 Solução numérica linear das equações 61
2.3.4 Solução numérica não-linear das equações 62

3. METODOLOGIA **72**
3.1 SOFTWARE ANSYS 72
3.1.1 Pré - processamento 73
3.1.2 Processamento (ou solução) 80
3.1.3 Pós - processamento 80
3.2 TESTE DE CONVERGÊNCIA 80
3.2.1 Tipo de elemento 81
3.2.2 Tamanho de malha 85
3.3 VALIDAÇÃO DO MODELO 94
3.4 ESTUDO PARAMÉTRICO 101

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO **104**
4.1 FLAMBAGEM ELÁSTICA 104
4.1.1 Influência do furo 104
4.1.2 Efeito da esbeltez 114
4.1.3 Variação na proporção entre os parâmetros *a* e *b* 124
4.2 FLAMBAGEM INELÁSTICA 131
4.2.1 Influência do furo 131
4.2.2 Efeito da esbeltez 136
4.2.3 Variação na proporção entre os parâmetros *a* e *b* 146

5. CONCLUSÕES **155**
5.1 FLAMBAGEM ELÁSTICA 155
5.2 FLAMBAGEM INELÁSTICA 156
5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 157

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **158**

APÊNDICES **162**
A. RESULTADO DOS MODELOS NUMÉRICOS LINEARES 162
B. RESULTADO DOS MODELOS NUMÉRICOS NÃO-LINEARES 171

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Tabela de conectividades 66
Tabela 3.1 - Teste de convergência do elemento: Características da placa modelo 82
Tabela 3.2 - Teste de convergência do elemento SHELL93 83
Tabela 3.3 - Teste de convergência do elemento SHELL181 83
Tabela 3.4 - Teste de convergência do elemento SHELL93 84
Tabela 3.5 - Teste de convergência do elemento SHELL181 84
Tabela 3.6 - Características geométricas das placas modelo A, B e C para testes de convergência de malha 87
Tabela 3.7 - Características geométricas da placa modelo D para testes de convergência de malha 87
Tabela 3.8 - Teste de convergência de malha para Placa A 88
Tabela 3.9 - Teste de convergência de malha para Placa B 89
Tabela 3.10 - Teste de convergência de malha para Placa C 89
Tabela 3.11 - Teste de convergência de malha para Placa D 90
Tabela 3.12 - Teste de convergência de malha para Placa A 91
Tabela 3.13 - Teste de convergência de malha para Placa B 92
Tabela 3.14 - Teste de convergência de malha para Placa C 93
Tabela 3.15 - Valores experimentais obtidos por NARAYANAN e CHOW (1984) 96
Tabela 3.16 - Capacidades de carga 97
Tabela 3.17 – Carga crítica ANSYS 100
Tabela 3.18 - Variações paramétricas em relação ao comprimento 103
Tabela 3.19 - Variações paramétricas em relação à espessura 103
Tabela 3.20 - Variações paramétricas em relação ao tamanho do furo 103

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de aplicações práticas de elementos estruturais: (a) Estruturas metálicas; (b) Navios; (c) Asas de aviões (Moen e Shafer, 2009) 20
Figura 1.2 – Estrutura característica de um convés de navio (Kumar, 2007) 21
Figura 1.3 – Estrutura terciária do duplo – fundo de um navio (Pinto, 2011) 21
Figura 2.1 – Emprego de placas planas na construção naval (Szilard, 2004) 26
Figura 2.2 – Placa retangular sob carregamento transversal (Szilard, 2004) 27
Figura 2.3 – Estado de tensões de um elemento de placa (Szilard, 2004) 28
Figura 2.4 – Esforços atuantes em um elemento de placa (Szilard, 2004) 29
Figura 2.5 – Equilíbrio de um elemento de superfície média de placa (Szilard, 2004) 30
Figura 2.6 – Flexão de placa na direção *X* (Szilard, 2004) 32
Figura 2.7 – Estado de tensões de um elemento de placa (Szilard, 2004) 34
Figura 2.8 – Condições de contorno para placas (Szilard, 2004) 38
Figura 2.9 – Efeito de bordo do momento torçor em placas (Szilard, 2004) 39
Figura 2.10 – Esforços de canto em placas (Szilard, 2004) 40
Figura 2.11 – Placa retangular sob carregamento de compressão uniaxial aplicado no ponto médio (Szilard, 2004) 42
Figura 2.12 – (a) Equilíbrio estável; (b) Equilíbrio instável; (c) Equilíbrio neutro 43
Figura 2.13 – Mecanismo de barras acopladas por pinos (Hibbeler, 2010) 44
Figura 2.14 – Estados de equilíbrio (Hibbeler, 2010- adaptado) 45
Figura 2.15 – Ponto de bifurcação do modo de deformação de placas (Szilard, 2004) 46
Figura 2.16 – Elemento de placa submetido a um sistema de forças coplanares (Szilard, 2004) 48
Figura 2.17 – Forças de membrana em um elemento de placa deformado (Szilard, 2004) 49
Figura 2.18 – Placa submetida a esforços distribuídos em seus bordos (Szilard, 2004) 51
Figura 2.19 – Flambagem de uma faixa unitária de placa (Szilard, 2004) 53
Figura 2.20 – Diagrama carga x deslocamento pós-flambagem (Szilard, 2004) 55
Figura 2.21 – Redistribuição de tensões no estado de limite último, intervalo pós-crítico (Akesson, 2007) 56
Figura 2.22 – Imperfeições geométricas iniciais após o processo de soldagem (Amante, 2006) 58
Figura 2.23 – Descrição do domínio (Szilard, 2004) 60

Figura 2.24 – Descrição do elemento de linha, área e volume com número de nós (Madenci e Guven, 2006) 61
Figura 2.25 – Diagrama de corpo livre de um elemento de mola linear (Madenci e Guven, 2006) 63
Figura 2.26 – Sistema de molas lineares (Madenci e Guven, 2006) 65
Figura 2.27 – Exemplo no modo de solução para o sistema de molas lineares (Madenci e Guven, 2006) 70
Figura 2.28 – Solução aceitável para o sistema de molas lineares (Madenci e Guven, 2006). 71
Figura 3.1 – Placa com furo circular centrado submetido compressão uniaxial 73
Figura 3.2 – Placa com furo quadrado centrado submetido compressão uniaxial 74
Figura 3.3 – Placa com furo losangular centrado submetido compressão uniaxial 74
Figura 3.4 – Malha de elementos finitos com furo central circular 76
Figura 3.5 – Malha de elementos finitos com furo central quadrado 77
Figura 3.6 – Malha de elementos finitos com furo central losangular 77
Figura 3.7 – Condições de contorno para modelagem de placas 79
Figura 3.8 – Elemento SHELL181 81
Figura 3.9 – Elemento SHELL93 82
Figura 3.10 – Teste de convergência para tipo de elemento 83
Figura 3.11 – Teste de convergência para tipo de elemento 84
Figura 3.12 – Características geométricas da placa modelo A (sem furo) para teste de convergência de malha 85
Figura 3.13 – Características geométricas da placa modelo B (furo circular centrado) para teste de convergência de malha 86
Figura 3.14 – Características geométricas da placa modelo C (furo quadrado centrado) para teste de convergência de malha 86
Figura 3.15 – Características geométricas da placa modelo D (furo losangular centrado) para teste de convergência de malha 87
Figura 3.16 – Teste de convergência de malha para placa A 88
Figura 3.17 – Teste de convergência de malha para placa B 89
Figura 3.18 – Teste de convergência de malha para placa C 90
Figura 3.19 – Teste de convergência de malha para placa D 90
Figura 3.20 – Teste de convergência de malha para placa A 92
Figura 3.21 – Teste de convergência de malha para placa B 93
Figura 3.22 – Teste de convergência de malha para placa C 94

Figura 3.23 – Equipamento empregado nos testes experimentais realizados por Narayanan e Chow, em 1984 95
Figura 3.24 – Capacidade de carga da placa CIR3a 98
Figura 3.25 – Placa com furo losangular centrado (Correia, 2013) 99
Figura 3.26 – Placa com furo losangular centrado: carga crítica adimensional em função da razão H0/L0 (Correia, 2013) 99
Figura 3.27 – Placa de aço com furo central: (a) Circular; (b) Quadrado; (c) Losangular 102
Figura 4.1 – Influência do furo circular quando t = 10mm 105
Figura 4.2 – Influência do furo circular quando t = 15mm 105
Figura 4.3 – Influência do furo circular quando t = 22mm 106
Figura 4.4 – Influência do furo quadrado quando t = 10mm 106
Figura 4.5 – Influência do furo quadrado quando t = 15mm 107
Figura 4.6 – Influência do furo quadrado quando t = 22mm 107
Figura 4.7 – Influência do furo losangular quando t = 10mm..... 108
Figura 4.8 – Influência do furo losangular quando t = 15mm..... 108
Figura 4.9 – Influência do furo losangular quando t = 22mm..... 109
Figura 4.10 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação a/b = 1 e d/b: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011) 109
Figura 4.11 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação a/b = 2 e d/b: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011) 110
Figura 4.12 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação a/b = 3 e d/b: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011) 111
Figura 4.13 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação a/b = 4 e d/b: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011) 112
Figura 4.14 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação a/b = 5 e d/b: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011) 113
Figura 4.15 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação a/b = 6 e d/b: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 114
Figura 4.16 – Efeito da esbeltez quando a/b = 1 115
Figura 4.17 – Efeito da esbeltez quando a/b = 2 115
Figura 4.18 – Efeito da esbeltez quando a/b = 3 116
Figura 4.19 – Efeito da esbeltez quando a/b = 4 116
Figura 4.20 – Efeito da esbeltez quando a/b = 5 117
Figura 4.21 – Efeito da esbeltez quando a/b = 6 117

Figura 4.22 – Efeito da esbeltez quando a/b = 1 118
Figura 4.23 – Efeito da esbeltez quando a/b = 2 118
Figura 4.24 – Efeito da esbeltez quando a/b = 3 119
Figura 4.25 – Efeito da esbeltez quando a/b = 4 119
Figura 4.26 – Efeito da esbeltez quando a/b = 5 120
Figura 4.27 – Efeito da esbeltez quando a/b = 6 120
Figura 4.28 – Efeito da esbeltez quando a/b = 1 121
Figura 4.29 – Efeito da esbeltez quando a/b = 2 121
Figura 4.30 – Efeito da esbeltez quando a/b = 3 122
Figura 4.31 – Efeito da esbeltez quando a/b = 4 122
Figura 4.32 – Efeito da esbeltez quando a/b = 5 123
Figura 4.33 – Efeito da esbeltez quando a/b = 6 123
Figura 4.34 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 10mm 124
Figura 4.35 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 12,5mm 124
Figura 4.36 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 15mm 125
Figura 4.37 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 19mm 125
Figura 4.38 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 22mm 126
Figura 4.39 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 10mm 126
Figura 4.40 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 12,5mm 127
Figura 4.41 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 15mm 127
Figura 4.42 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 19mm 128
Figura 4.43 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 22mm 128
Figura 4.44 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 10mm 129
Figura 4.45 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 12,5mm 129
Figura 4.46 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 15mm 130
Figura 4.47 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 19mm 130
Figura 4.48 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 22mm 131
Figura 4.49 – Influência do furo circular em placas com relação a/b = 1 e t =10mm..... 132
Figura 4.50 – Influência do furo circular em placas com relação a/b = 1 e t =15mm..... 132
Figura 4.51 – Influência do furo circular em placas com relação a/b = 1 e t = 22mm..... 133
Figura 4.52 – Influência do furo quadrado em placas com relação a/b = 1 e t = 10mm..... 133
Figura 4.53 – Influência do furo quadrado em placas com relação a/b = 1 e t = 15mm..... 134
Figura 4.54 – Influência do furo quadrado em placas com relação a/b = 1 e t = 22mm..... 134
Figura 4.55 – Influência do furo losangular em placas com relação a/b = 1 e t = 10mm..... 135

Figura 4.56 – Influência do furo losangular em placas com relação a/b = 1 e t = 15mm 135
Figura 4.57 – Influência do furo losangular em placas com relação a/b = 1 e t = 22mm 136
Figura 4.58 – Efeito da esbeltez quando a/b = 1 137
Figura 4.59 – Efeito da esbeltez quando a/b = 2 137
Figura 4.60 – Efeito da esbeltez quando a/b = 3 138
Figura 4.61 – Efeito da esbeltez quando a/b = 4 138
Figura 4.62 – Efeito da esbeltez quando a/b = 5 139
Figura 4.63 – Efeito da esbeltez quando a/b = 6 139
Figura 4.64 – Efeito da esbeltez quando a/b = 1 140
Figura 4.65 – Efeito da esbeltez quando a/b = 2 140
Figura 4.66 – Efeito da esbeltez quando a/b = 3 141
Figura 4.67 – Efeito da esbeltez quando a/b = 4 141
Figura 4.68 – Efeito da esbeltez quando a/b = 5 142
Figura 4.69 – Efeito da esbeltez quando a/b = 6 142
Figura 4.70 – Efeito da esbeltez quando a/b = 1 143
Figura 4.71 – Efeito da esbeltez quando a/b = 2 143
Figura 4.72 – Efeito da esbeltez quando a/b = 3 144
Figura 4.73 – Efeito da esbeltez quando a/b = 4 144
Figura 4.74 – Efeito da esbeltez quando a/b = 5 145
Figura 4.75 – Efeito da esbeltez quando a/b = 6 145
Figura 4.76 – Flexo – compressão normal (Hibbeler, 2010) 146
Figura 4.77 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 10mm 147
Figura 4.78 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 12,5mm 147
Figura 4.79 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 15mm 148
Figura 4.80 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 19mm 148
Figura 4.81 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 22mm 149
Figura 4.82 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 10mm 149
Figura 4.83 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 12,5mm 150
Figura 4.84 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 15mm 150
Figura 4.85 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 19mm 151
Figura 4.86 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 22mm 151
Figura 4.87 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 10mm 152
Figura 4.88 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 12,5mm 152
Figura 4.89 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 15mm 153

Figura 4.90 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 19mm 153
Figura 4.91 – Variação no parâmetro de proporção quando t = 22mm 154

LISTA SÍMBOLOS

D	Rigidez à flexão da placa.
E	Módulo de elasticidade do material.
F	Vetor força.
$F^{(e)}$	Vetor força nodal.
I	Momento de inércia da área da seção transversal do elemento.
K	Matriz de rigidez.
$K^{(e)}$	Matriz de rigidez nodal.
M_x	Momento fletor na direção X.
M_{xy}	Momento torçor associado aos eixos X e Y.
M_y	Momento fletor na direção Y.
M_{yx}	Momento torçor associado aos eixos X e Y.
P_z	Força externa transversal ao plano da placa.
Q_x	Esforço cortante na direção X.
Q_y	Esforço cortante na direção Y.
R_0	Força resultante de canto.
a	Comprimento da placa.
b	Largura da placa.
d	Lado ou diâmetro do furo.
k	Rigidez da mola.
k_x	Curvatura na direção X.
k_y	Curvatura na direção Y.
m_x	Momento fletor na direção X por unidade de comprimento.
m_{xy}	Momento torçor associado aos eixos X e Y por unidade de comprimento.
m_y	Momento fletor na direção Y por unidade de comprimento.
m_{yx}	Momento torçor associado aos eixos X e Y por unidade de comprimento.
n_x	Esforço coplanar normal na direção X por unidade de comprimento.
n_{xy}	Esforço tangencial ao plano XoY por unidade de comprimento.
n_y	Esforço coplanar normal na direção Y por unidade de comprimento.
n_{yx}	Esforço tangencial ao plano XoY por unidade de comprimento.
$\overline{n_{cr}}$	Esforço normal na direção X por unidade de comprimento.
$\overline{n_x}$	Esforço coplanar normal de bordo na direção X por unidade de comprimento.

$\overline{n_{xy}}$ Esforço tangencial ao plano XoY de bordo por unidade de comprimento.

$\overline{n_y}$ Esforço coplanar normal de bordo na direção Y por unidade de comprimento.

p_z Força externa transversal ao plano da placa por unidade de comprimento.

$\tilde{p}z$ Carga lateral fictícia.

q_x Esforço cortante na direção X por unidade de comprimento.

q_y Esforço cortante na direção Y por unidade de comprimento.

t Espessura da placa.

u Componente axial de deslocamento sobre o eixo X.

u Vetor de incógnitas.

$u^{(e)}$ Vetor de incógnitas nodais.

v Componente axial de deslocamento sobre o eixo Y.

v_x Esforço cortante na direção X.

v_y Esforço cortante na direção Y.

w Componente transversal de deslocamento sobre o eixo Z.

w_h Solução homogênea para a equação diferencial.

w_p Solução particular para a equação diferencial.

w_0 Curvatura inicial da placa.

Φ Função tensão de Airy.

β Índice de esbeltez.

γ_{xy} Momento torçor associado aos eixos X e Y.

γ_{xz} Momento torçor associado aos eixos X e Z.

γ_{yz} Momento torçor associado aos eixos Y e Z.

ε_x Deflexão axial na direção X.

ε_y Deflexão axial na direção Y.

θ_x Deflexão na direção X.

θ_y Deflexão na direção Y.

λ Fator de carga.

Λ_{cr} Fator de carga crítica.

ν Coeficiente de Poisson.

σ_{cr} Tensão de flambagem elástica.

σ_x Tensão normal na direção X.

σ_y Tensão normal na direção Y.

σ_y Tensão de escoamento do material.

τ_{xy} Tensão de cisalhamento ao plano XoY.

τ_{xz} Tensão de cisalhamento ao plano *XoZ*.

τ_{yz} Tensão de cisalhamento ao plano *YoZ*.

χ Empenamento.

LISTA DE ABREVIATURAS

DOF Graus de liberdade.

MEF Método dos elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Placa fina é o elemento estrutural que possui a espessura muito menor que as suas outras dimensões. Tem imensa aplicabilidade na engenharia devido ao seu desempenho estrutural quando solicitada à flexão, além da elevada relação resistência–peso e a facilidade de descrição do seu comportamento mecânico devido os eficientes métodos analíticos de cálculo.

Os materiais usados na sua composição podem ser de natureza isotrópica, como aço, alumínio e titânio; ou compósita, que tem grande empregabilidade na engenharia estrutural moderna e constituída de metais e polímeros, metais e cerâmicas ou polímeros e cerâmicas. Estes elementos são empregados nas mais diversas tipologias estruturais no ramo das engenharias civil, mecânica, oceânica e naval, tais como prédios, pontes, reservatórios, automóveis, aeronaves, plataformas marítimas de extração petrolífera, torres de transmissão e entre outros (Figura 1.1).

Figura 1.1 – Exemplos de aplicações práticas de elementos estruturais: (a) estruturas metálicas, (b) navios, (c) asas de aviões (Moen e Shafer, 2009).

De acordo com Kumar (2007), placas finas limitadas por enrijecedores são parte integrante das estruturas de navios, plataformas de petróleo offshore, comportas e docas flutuantes (Figura 1.2).

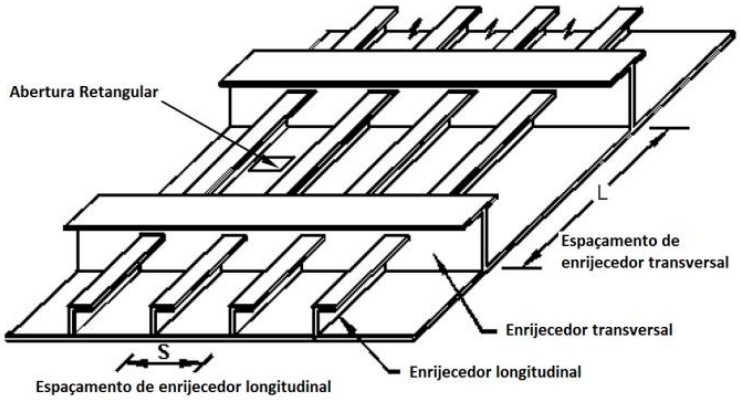

Figura 1.2 – Estrutura característica de um convés de navio (Kumar, 2007).

As aberturas que são realizadas nas placas servem para o acesso, a manutenção ou simplesmente para redução do peso total da estrutura (Figura 1.3) e influenciam na máxima resistência desses elementos, pois causam uma alteração no comportamento mecânico da estrutura, devido à redistribuição das tensões ao longo da placa.

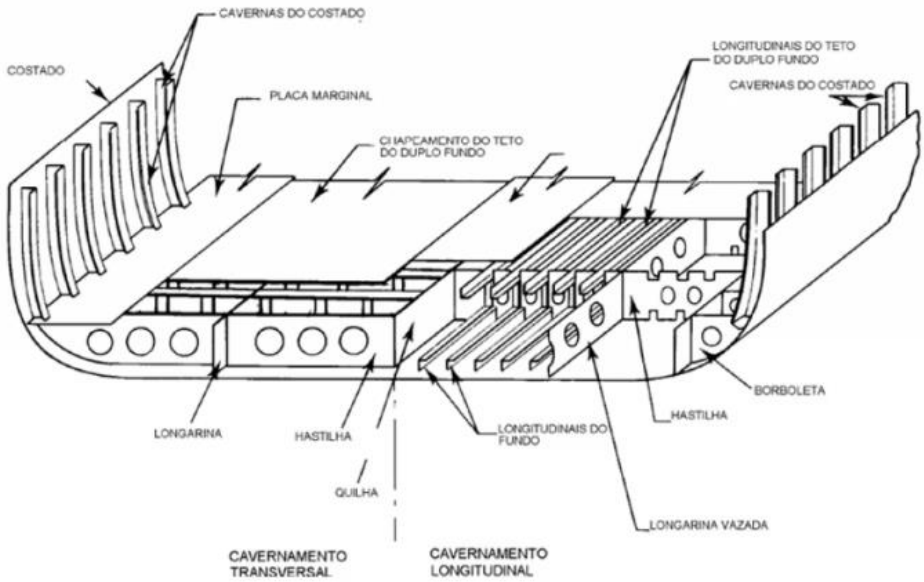

Figura 1.3 – Estrutura terciária do duplo – fundo de um navio (Pinto, 2011).

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo de flambagem de placas teve início na observação e verificação do comportamento de placas planas de embarcações. A primeira proposta de solução para placas foi de Saint–Venant (1883) em 1883. Em 1891, Bryan (1891) sugeriu a primeira solução de equação diferencial para placas, com a análise da tensão crítica elástica de uma placa retangular apoiada nos quatro bordos e sujeita a uma tensão uniforme de compressão longitudinal.

Em 1910, Timoshenko (1910) deu continuidade à análise elástica de placas, porém a solução proposta contém um número maior de condições de contorno. A análise inelástica começou com Bleich (1924) e desde então, a estabilidade de placas tem sido pesquisada e estudada por vários autores. São apontadas as seguintes referências:

- Narayanan e Chow (1984) desenvolveram experimentalmente gráficos que apresentam a capacidade de resistência à compressão uniaxial de placas perfuradas com furos quadrados e circulares.
- Roberts e Azizian (1984) criaram curvas que mostram a relação entre a força final de placas quadradas com orifícios centrais quadrados e circulares submetidos à compressão uniaxial, biaxial e o cisalhamento puro.
- Yettram e Brown (1985) analisaram o comportamento de estabilidade de placas planas quadradas com furos centrais quadrados.
- Shanmugam (1997) estudou os efeitos de furos em elementos de placa com enrijecedores sob compressão uniaxial, biaxial e cisalhamento puro.
- Shanmugan, Thevendran e Tan (1999) empregaram o Método dos Elementos Finitos na análise de flambagem inelástica de placas quadradas com aberturas centradas de geometria quadrada e circular. Comprovaram que a capacidade de carga das placas é influenciada por sua esbeltez e pelo tamanho e formato do furo, ou seja, concluíram que placas com furos circulares, em geral, possuem tensão de ruptura maior que as placas com furos quadrados.
- Paik, Thaymballi e Kim (2001) apresentaram formulações para a resistência última de chapas de navios submetidas a uma combinação de tensões de compressão uniaxial, cisalhamento no bordo e cargas de compressão lateral. Durante a pesquisa, foi realizada uma análise elastoplástica, controlando a tensão gerada quando é aplicado um deslocamento na placa.

- El – Sawy, Nazmy e Martini (2004) aplicaram o Método dos Elementos Finitos para estabelecer a tensão de flambagem elastoplástica de placas quadradas e retangulares simplesmente apoiadas com furo circular e sob carregamento uniaxial. Concluíram que cortes próximos à borda da placa devem ser evitados, uma vez que ocorre a redução da tensão crítica no modo de flambagem elastoplástica.
- Real e Isoldi (2011) empregando o Método dos Elementos Finitos estudaram o efeito da dimensão do furo e a localização da flambagem no modo elástico de placas retangulares submetidas a carregamento de compressão uniaxial uniforme.
- Helbig *et al.* (2013) analisou, numericamente, o comportamento mecânico sob flexão de placas finas de material compósito laminado e reforçado por fibras.
- Baptista (2014) estudou o comportamento inelástico de pós–flambagem de placas finas quadradas e retangulares, com e sem furos circulares centrados, de aço sob compressão uniaxial em estruturas navais e offshore.

As respostas encontradas através dos estudos teóricos de placas finas foram corroboradas através de pesquisas que empregam a solução numérica e a aplicação de métodos de análise computacional de placas.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta pesquisa é a análise linear e não-linear da flambagem de placas finas compostas de material isotrópico e homogêneo, submetida a carregamento mecânico uniaxial de compressão no próprio plano, estudando o efeito dos furos na capacidade de resistência.

1.3.1 Objetivos específicos

i. Simular, numericamente, placas finas de material isotrópico e homogêneo empregadas na construção de plataformas offshore de extração petrolífera;

ii. Simular, numericamente, placas maciças ou perfuradas, sendo que os furos variam de geometria, ou seja, os elementos terão perfurações circulares, quadrangulares ou losangulares;

iii. Realizar uma análise linear física e geométrica do comportamento pós–flambagem de placas com perfurações centrais submetidas a carregamento uniaxial em seu próprio plano;

iv. Realizar uma análise não linear física e geométrica do comportamento pós–flambagem de placas com perfurações centrais submetidas a carregamento uniaxial em seu próprio plano;

v. Estudar a influência das dimensões da placa (espessura, comprimento, tamanho e geometria do furo central) na resistência última.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. TEORIA DE PLACAS FINAS

2.1.1 Introdução

Placas são elementos estruturais de superfície plana em que a espessura é pequena quando comparada com as suas outras dimensões. Este tipo de elemento estrutural pode ser delineado por linhas retas ou curvas, embora as geometrias mais empregadas sejam a retangular e a circular. As condições de contorno para os apoios dos bordos podem ser:

- Bordo simples;
- Apoio simples;
- Engaste;
- Apoios pontuais (pilares) e;
- Apoios elásticos (molas de translação e molas de rotação).

As placas tem capacidade de suporte para carregamentos estáticos ou mecânicos que, em geral, agem ortogonalmente ao seu plano médio. A Figura 2.1 ilustra o emprego de placas planas na construção naval.

De acordo com Szilard (2004), o comportamento mecânico de placas planas é similar ao de grelhas formadas por vigas perpendiculares entre si, entretanto placas são estruturas que apresentam uma maior eficácia na resistência a cargas atuantes em superfície, pois possui comportamento resistente bidimensional devido à sua continuidade física e capacidade de suporte elevada aos momentos torçores impostos à estrutura. Por isso, quando a estrutura tem a função de revestir uma superfície, são muito utilizadas devido a questões de economia, visto que, dadas as suas características de resistência, placas permitem a construção de estruturas mais leves.

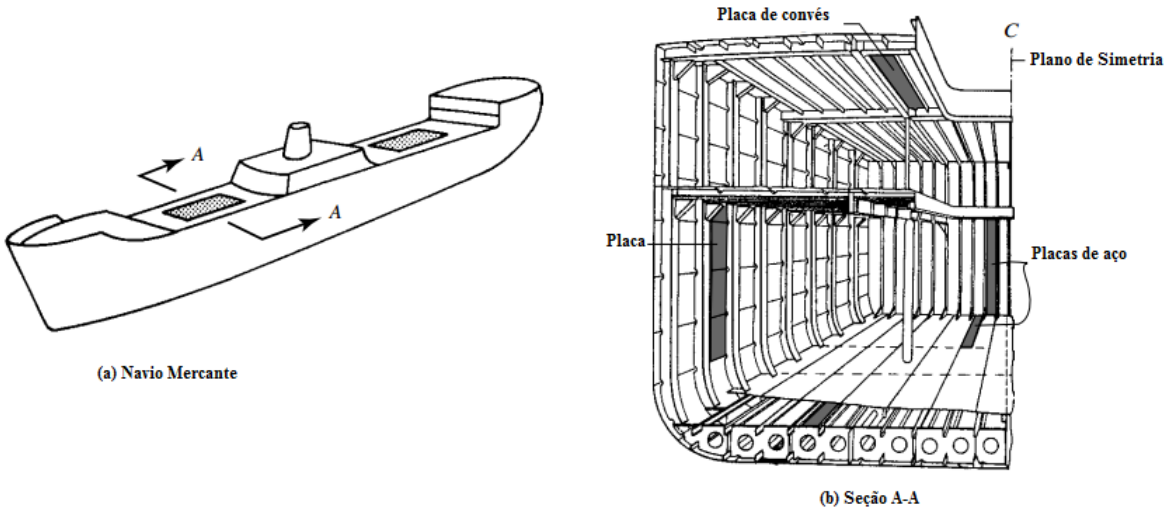

Figura 2.1 – Emprego de placas planas na construção naval (Szilard, 2004).

Quando comparadas às cascas, que são estruturas de superfície curva, também se sobressaem quanto à sua utilização. Isso ocorre, pois cascas possuem processos de fabricação mais complexos que as placas planas.

O estudo linear é limitado às placas finas, compostas de material elástico linear, que trabalham dentro do regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Entretanto o regime passa a ser de pequenas deformações e grandes deslocamentos quando se realiza a análise inelástica. Os problemas serão resolvidos por meio do Princípio de Superposição de Efeitos, o que permite a combinação de inúmeras soluções simples em questões mais complexas.

2.1.2 Equação diferencial para placas finas

Conforme Szilard (2004), o comportamento de placas finas de material elástico linear, no regime de pequenas deformações e de pequenos deslocamentos pode ser interpretado através de uma equação diferencial. A teoria de placas finas para pequenos deslocamentos possui a colaboração de Bernoulli, Lagrange, Navier, Poisson e Saint–Venant, entretanto foram as contribuições de Kirchhoff e Love que mais impactaram no desenvolvimento do estudo.

a. Sistema de coordenadas e convenção de sinais

A Figura 2.2 mostra os parâmetros geométricos de uma placa plana, o sistema de coordenadas adotado como referência e o carregamento atuante de superfície.

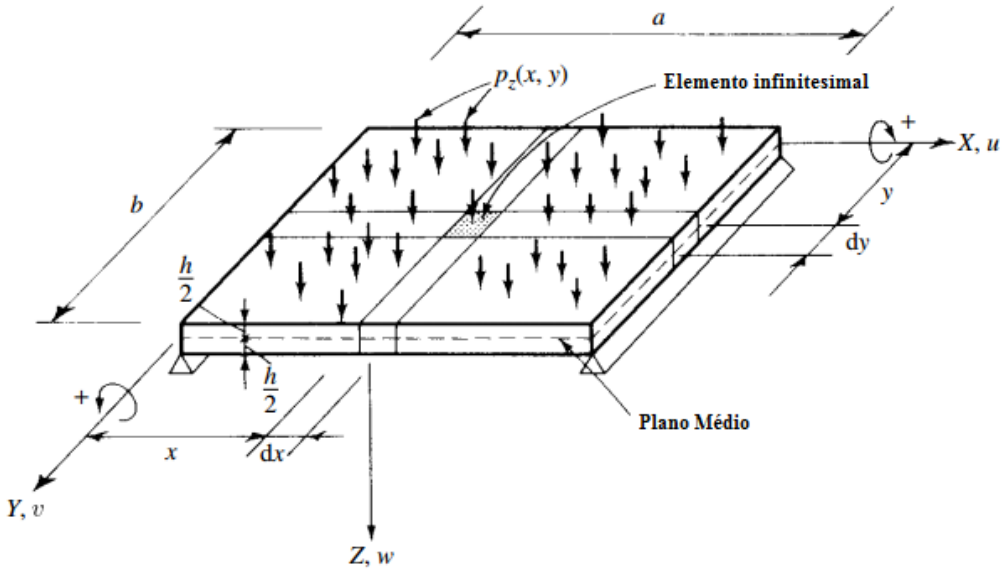

Figura 2.2 – Placa retangular sob carregamento transversal (Szilard, 2004).

Segundo Szilard (2004), a geometria da placa é caracterizada através do seu plano médio, que é o plano que secciona a espessura ao meio em cada ponto placa. Placas retangulares, em geral, empregam um sistema de coordenadas para a descrição da geometria.

As componentes de forças internas e externas são positivas quando apontarem para o sentido positivo dos eixos coordenados *X*, *Y* e *Z*. Já os componentes *u*, *v* e *w* são os que descrevem os deslocamentos. Para o presente trabalho, a convenção adotada será a usual em engenharia, em que os momentos fletores positivos são aqueles que tracionam as fibras inferiores da placa.

A equação diferencial para placas finas adota as seguintes hipóteses:

1. A placa é composta de material elástico linear, homogêneo e isotrópico.
2. A placa é inicialmente plana.
3. O plano médio da placa é livre de tensões durante a flexão.

4. A espessura da placa é constante e é pequena quando comparada as outras dimensões. A relação entre o lado menor da placa com a espessura deve ser maior ou igual a 10.

5. Os deslocamentos transversais *w (x, y)* são pequenos em relação à espessura da placa. A Teoria de Placas Finas é válida para situações em que a relação entre o deslocamento e a espessura é igual ou inferior a 10.

6. As rotações são pequenas em relação à unidade, ou seja, as inclinações da superfície média podem ser desprezadas.

7. As seções planas e normais ao plano médio da placa antes permanecem planas e normais à superfície média após a deformação, isto é, o efeito de empenamento que as deformações por cisalhamento exercem sobre a seção transversal à placa é desprezado.

8. As deformações causadas pelas forças coplanares sobre o plano médio são desprezadas, pois são muito pequenas quando comparadas com as deformações causadas por flexão.

Comprovadas experimentalmente, estas hipóteses são uma extensão da Teoria Clássica de Vigas para a Teoria de Placas Finas. Na Figura 2.3 é apresentado o estado de tensões de um elemento infinitesimal extraído do interior da placa que corrobora as hipóteses descritas anteriormente.

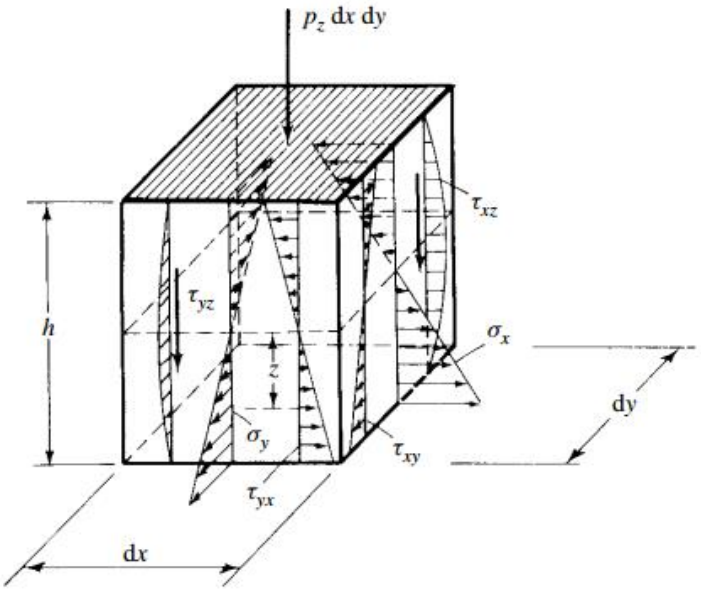

Figura 2.3 – Estado de tensões de um elemento de placa (Szilard, 2004).

b. Equilíbrio de um elemento de placa

A Figura 2.4 apresenta as forças resultantes solicitantes que agem transversalmente sobre um elemento de forma paralelepipédica extraído do interior da placa. São atribuídos sentidos positivos aos esforços atuantes sobre as faces convencionadas positivas do elemento. De forma análoga, os esforços que agem sobre as faces negativas, serão considerados negativos. Quanto à notação dos esforços, o primeiro índice corresponde à direção normal do plano em que o esforço é aplicado. Já o segundo índice, indica a direção transversal ao plano do elemento em que o esforço atua.

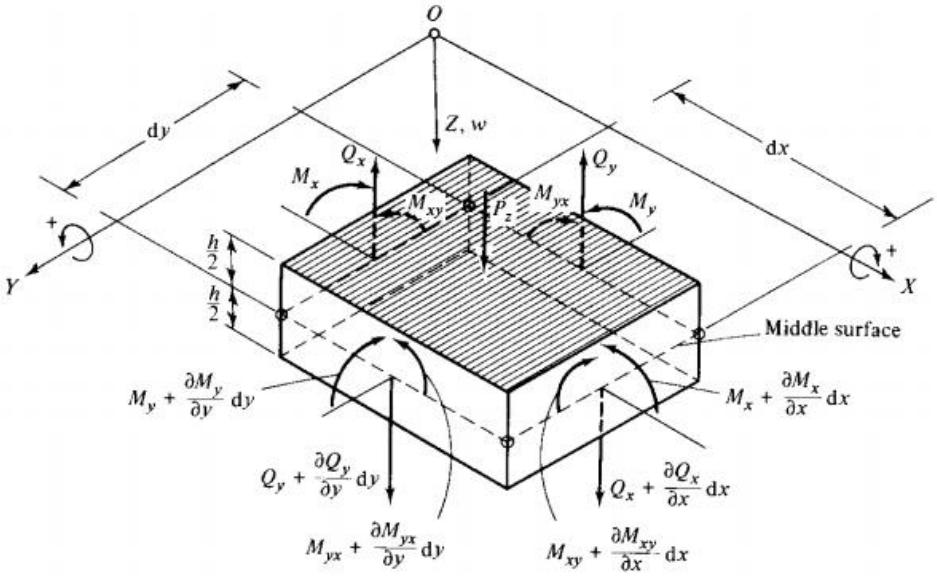

Figura 2.4 – Esforços atuantes em um elemento de placa (Szilard, 2004).

O comportamento mecânico de uma placa é similar ao de uma malha de vigas perpendiculares entre si, onde o esforço externo *Pz* é compensado pela ação dos esforços cortantes *Qx* e *Qy* e pelos momentos fletores *Mx* e *My*. O que diferencia elemento estrutural do outro, é que para as placas planas, os momentos torçores *Mxy* e *Myx* também colaboram à resistência ao carregamento externo.

Na teoria de placas, os esforços solicitantes atuam no plano médio por unidade de comprimento. Para que não ocorra erro na definição de forças ao longo de um comprimento em relação aos esforços resultantes, a notação adotada para esforços por unidade de comprimento é *qx*, *qy*, *mx*, *my*, *mxy* e *myx*. Na Figura 2.5 é apresentado um elemento da superfície média em equilíbrio sob a ação de uma carga distribuída *pz*.

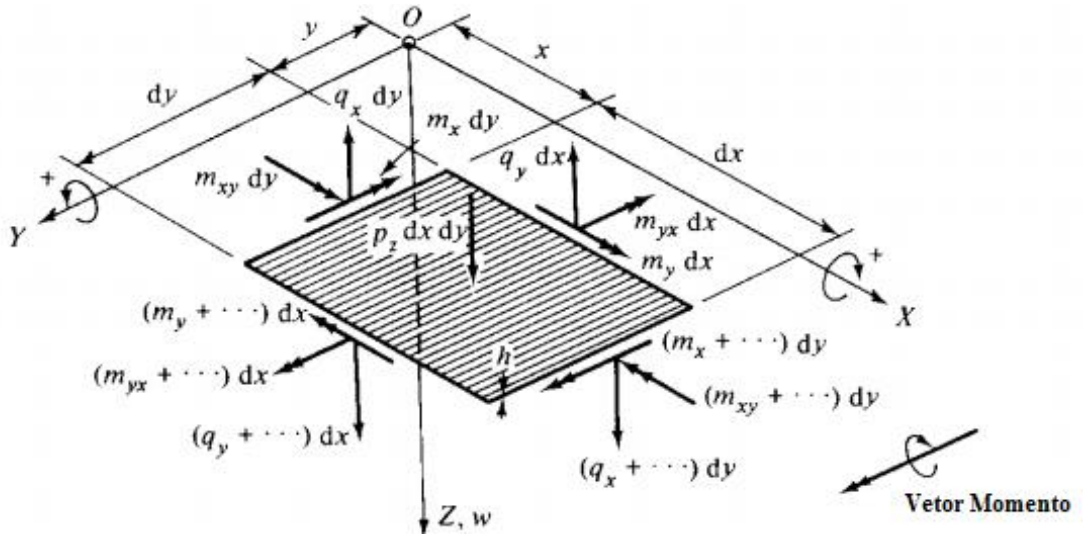

Figura 2.5 – Equilíbrio de um elemento de superfície média da placa (Szilard, 2004).

Visto que o elemento de placa está submetido apenas a cargas distribuídas transversais, de seis equações de equilíbrio, somente três são empregadas.

$$\sum M_x = 0\,; \sum M_y = 0\,; \sum F_z = 0 \tag{2.1}$$

O equilíbrio de momentos em torno do eixo coordenado *Y* que passa pelo centro do elemento:

$$\begin{aligned}\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - m_{yx}dx \\ - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy\frac{dx}{2} - q_x dy\frac{dx}{2} = 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

Expandindo e simplificando a Equação (2.2), e desprezando os infinitésimos de ordem superior:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dydx - q_x dxdy = 0 \tag{2.3}$$

Dividindo a Equação (2.3) por *dxdy* e isolando q_x:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \tag{2.4}$$

Da mesma forma, em relação ao equilíbrio de momento em torno do eixo *X* que passa pelo centro do elemento:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \tag{2.5}$$

Já em relação ao equilíbrio em torno do eixo *Z*:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy - q_x dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy\right) dx - q_y dx + p_z dx dy = 0 \tag{2.6}$$

Expandindo e simplificando a Equação (2.6) e, depois, dividindo o resultado por *dxdy*:

$$-p_z = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \tag{2.7}$$

Substituindo as Equações (2.4) e (2.5) em (2.7), e sabendo que pela reciprocidade de tensões de cisalhamento, em que *mxy = myx*, é obtida uma única equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \tag{2.8}$$

c. Relação deformação–deslocamento de placas finas

Segundo as hipóteses, as deformações de cisalhamento *γxz* e *γyz* e a deformação normal *εz* são desprezadas, ou seja, no elemento da placa ocorrem deformações normais *εx* e *εy* e a deformação por cisalhamento *γxy*.

De acordo com as hipóteses estabelecidas anteriormente e com a Figura 2.6, que apresenta a seção transversal de uma placa fletida que se encontra paralela ao eixo coordenado *X*, conclui–se que o deslocamento axial *u* em *A'* pode ser determinado através da expressão:

$$u = -z \cdot \theta = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.9}$$

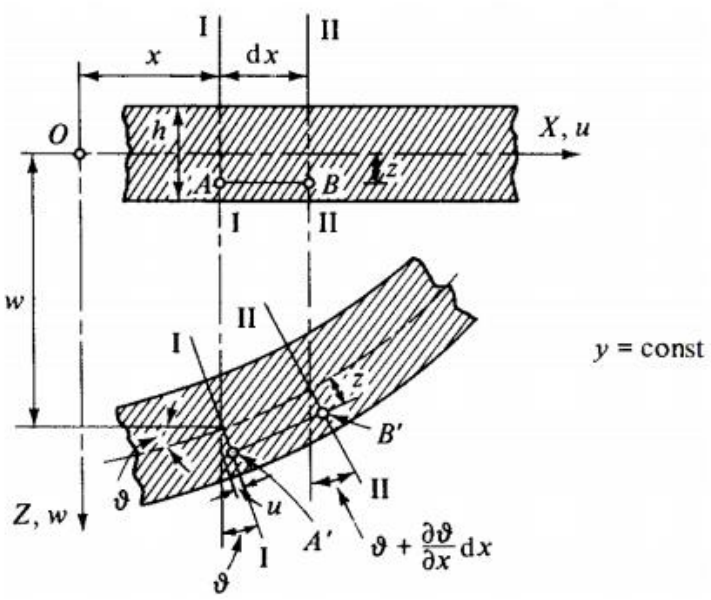

Figura 2.6 – Flexão de placa na direção *X* (Szilard, 2004).

De maneira análoga, o deslocamento axial *v* é dado por:

$$v = -z \cdot \theta = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.10}$$

Substituindo a expressão que determina o deslocamento axial *u* na relação deformação–deslocamento clássica de Mecânica dos Sólidos, obtém–se:

$$\varepsilon x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

De forma semelhante, a deflexão na direção do eixo *Y:*

$$\varepsilon y = \frac{\partial u}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.12}$$

A deformação por cisalhamento *γxy* pode ser associada com os deslocamentos axiais *u* e *v* pela expressão:

$$\gamma xy = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.13}$$

Substituindo as Equações (2.9) e (2.10) na Equação (2.13):

$$\gamma xy = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.14}$$

Logo, as curvaturas da placa nas direções *X* e *Y* e o seu empenamento podem ser determinadas através das equações:

$$kx = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \; ; \; ky = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \; ; \; \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{2.15}$$

d. Relações tensão – deslocamento para placas finas

De acordo com as hipóteses, a Figura 2.7 apresenta um estado de tensões de uma lâmina de material localizada a uma distância *z* do plano médio da placa.

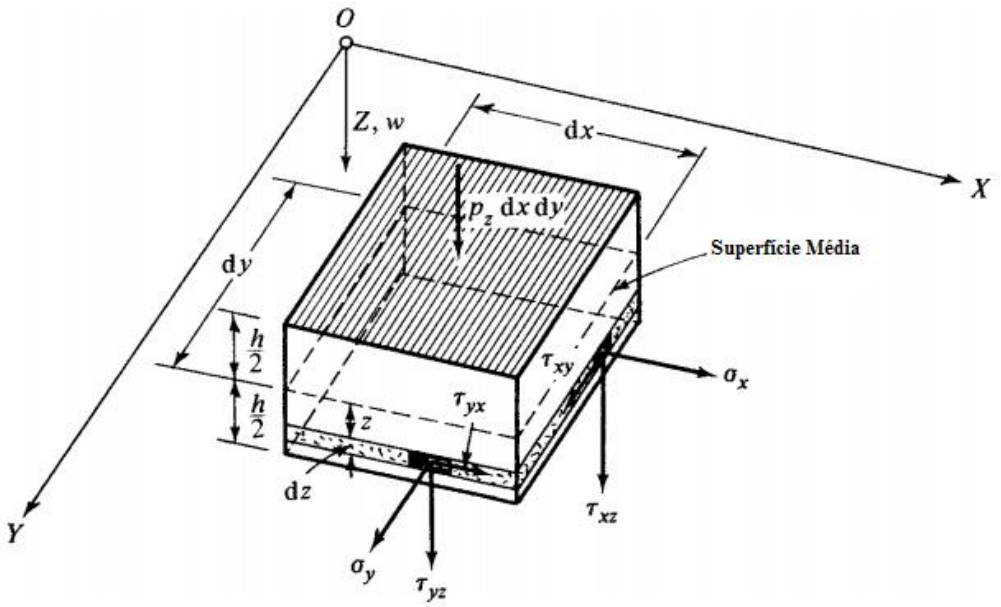

Figura 2.7 – Estado de tensões de um elemento de placa (Szilard, 2004).

As componentes de tensão situadas no plano *XOY* podem ser definidas pelas deformações aplicadas na Lei de Hooke, que é estabelecida através das Equações (2.16). (2.17) e (2.18), em que *E* é o módulo de elasticidade do material:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \tag{2.16}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \tag{2.17}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma xy = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma xy \tag{2.18}$$

Segundo as hipóteses, as deformações de cisalhamento *γxz* e *γyz* são desprezadas, logo não é possível determinar as tensões de cisalhamento *τxz* e *τyz* através da Lei de Hooke. Apesar deste fato não impossibilitar a aplicação da Teoria de Placas Finas na solução de problemas de engenharia, a falta das tensões *τxz* e *τyz* é uma inconsistência conceitual do estudo.

Substituindo as Equações (2.11), (2.12) e (2.14) em (2.16), (2.17) e (2.18), respectivamente, as relações tensão–deformação para placas finas são definidas:

$$\sigma_x = -\frac{z\,E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.19}$$

$$\sigma_y = -\frac{z\,E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.20}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{z\,E}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.21}$$

e. Relações esforço solicitante–deslocamento para placas finas

Da mesma forma que na Teoria de Vigas, na Teoria de Placas Finas definem–se os momentos fletores a partir da integração do produto das tensões normais ao longo da espessura da placa pela distância *z* até a superfície média. Logo, os momentos fletores, por unidade de comprimento, *mx* e *my* são determinados por:

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\, z dz \quad ; \quad m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y\, z dz \tag{2.22}$$

De modo semelhante, os momentos torçores *mxy* e *myx* são determinados pela integração do produto entre as tensões de cisalhamento *τxy* e *τyx* pela sua distância até o plano médio. Assim:

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy}\, z dz \quad ; \quad m_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx}\, z dz \tag{2.23}$$

Pela simetria do tensor das tensões *τxy* é igual a *τyx*, logo *mxy = myx*. Substituindo as Equações (2.19), (2.20) e (2.21) nas Equações (2.22) e (2.23), e integrando ao longo da espessura da placa, são definidas as relações esforços solicitantes–deslocamentos para placas finas:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\,(kx+\nu ky) \tag{2.24}$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -D\,(ky + \nu kx) \tag{2.25}$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)D\chi \tag{2.26}$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.27}$$

onde *D* é a rigidez à flexão da placa. Relacionando a rigidez à flexão da placa com a de uma viga largura unitária, que é determinada por *EI*, chega–se a conclusão que a placa apresenta uma rigidez maior devido ao efeito do coeficiente de Poisson.

Enfim, substituindo as Equações (2.24), (2.25) e (2.26) na Equação (2.8), determina–se a equação diferencial para um problema de placa fina, material elástico, no regime de pequenos deslocamentos e sob carregamento transversal:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D} \tag{2.28}$$

Aplicando o operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{2.29}$$

Reescrevendo a Eq. (2.28):

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_z \tag{2.30}$$

A Equação (2.28) é uma equação diferencial de quarta ordem linear, não–homogênea do tipo elíptica e com coeficientes constantes. A linearidade da equação se deve ao fato de que os

expoentes das derivadas parciais de *w* não são superiores a um. Esta equação pode ser denominada de bi–harmônica não– homogênea.

Os esforços cortantes podem ainda serem definidos em função do deslocamento transversal *w*. Com base nesta condição, a expressão é determinada substituindo as Equações (2.24), (2.25) e (2.26) nas Equações (2.4) e (2.5):

$$q_x = \frac{\partial mx}{\partial x} + \frac{\partial myx}{\partial y} = -D\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \tag{2.31}$$

$$q_y = \frac{\partial my}{\partial y} + \frac{\partial mxy}{\partial x} = -D\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \tag{2.32}$$

A solução para a Equação (2.28) é através da determinação da função *w (x,y)* que satisfaça as condições de contorno do problema e representa a situação em que a placa fina está submetida a um carregamento transversal.

2.1.3 Condições de contorno

A solução exata para placas finas sob carregamento transversal, além de satisfazer a equação diferencial, tem que obedecer às condições de contorno que regem o problema. Como a equação é parcial de quarta ordem, em cada direção de todos os bordos, há duas condições de contorno a serem satisfeitas. Estas condições podem ser no âmbito do deslocamento, em que são conhecidas como condições de contorno geométricas, ou dos esforços internos, que são as condições de contorno estáticas, ou também na combinação destas. Na Figura 2.8 são apresentadas as principais condições de contorno para placas.

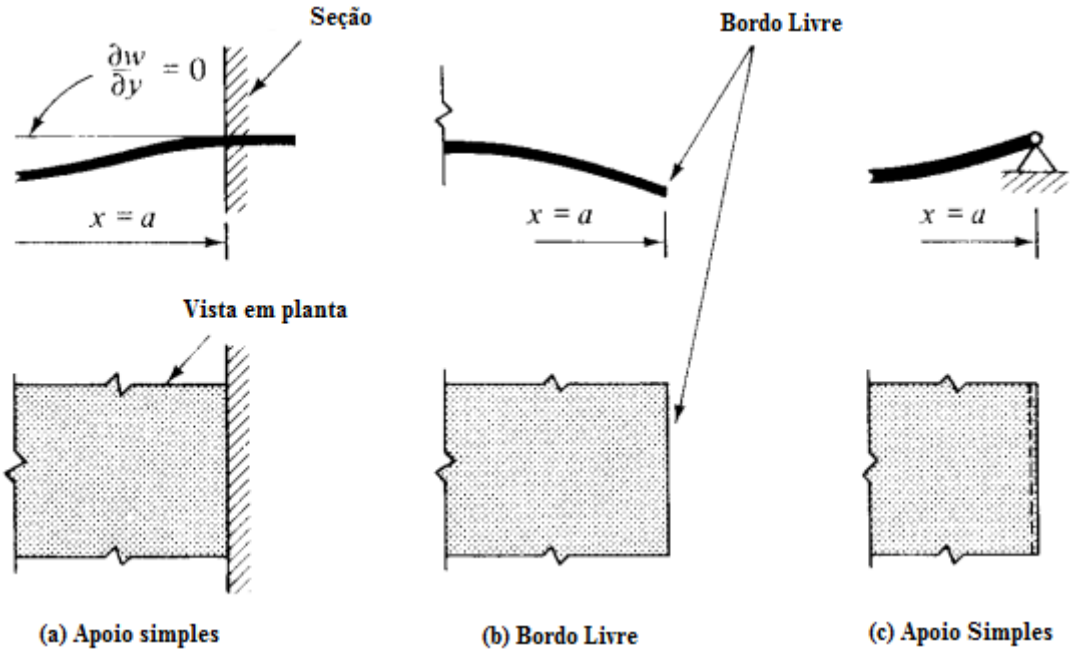

Figura 2.8 – Condições de contorno para placas (Szilard, 2004).

Ainda é possível que os bordos estejam sobre apoios elásticos que servem tanto para o deslocamento transversal como para a rotação.

a. Condições de contorno geométricas

A condição de contorno geométrica pode ser imposta em um bordo da placa ao se fixar o valor do deslocamento transversal ou da inclinação da placa na direção normal ao bordo. No caso de uma placa em que todos os seus bordos estão perfeitamente engastados, por exemplo, as condições de contorno seriam:

$$w = 0;\ \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0\ ,\ \text{em}\ x = 0\ \text{e}\ x = a \tag{2.33}$$

$$w = 0;\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\ ,\ \text{em}\ y = 0\ \text{e}\ y = b \tag{2.34}$$

b. Condições de contorno estáticas

Para a placa em que um dos seus bordos está completamente livre para se deslocar, as condições de contorno serão estáticas, pois o esforço cortante e o momento fletor neste bordo são nulos, visto que este não está carregado. Estas condições de contornos são descritas assim:

$$vx = mx = 0; \text{ , em } x = 0 \text{ ou } x = a \tag{2.35}$$

$$vy = my = 0 \text{ , em } y = 0 \text{ ou } y = b \tag{2.36}$$

Como foi visto anteriormente, a placa possui esforços solicitantes de esforço cortante, momento fletor e momento torçor (Figura 2.9). Logo, quando um bordo está completamente livre, ele deve atender a três condições de contorno, uma para cada esforço solicitante. Porém, Kirchhoff transformou o efeito do momento torçor nos bordos em um esforço cortante adicional. Assim, os tipos de esforços solicitantes passam de três para dois.

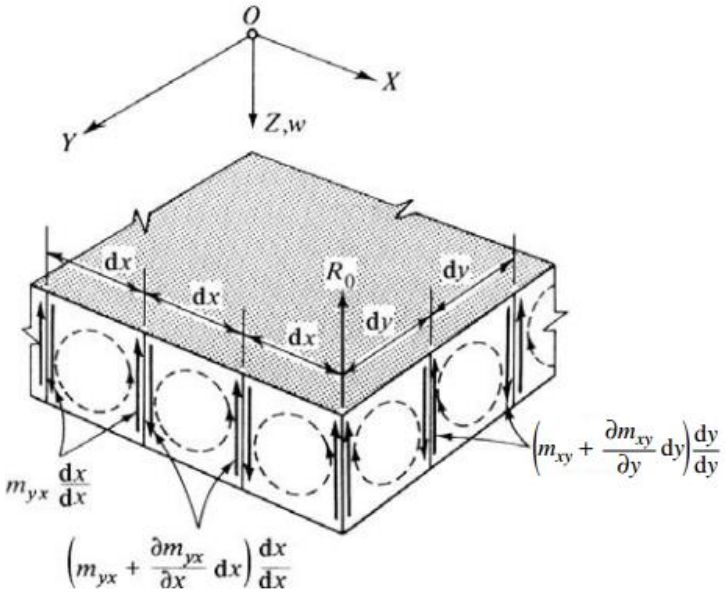

Figura 2.9 – Efeito de bordo do momento torços em placas (Szilard, 2004).

Desta forma, nos bordos da placa haverá uma parcela adicional de esforço cortante. Para os bordos em que a sua direção normal sejam os eixos *X* ou *Y*, este efeito pode ser descrito pelas equações.

$$v_x = q_x + \frac{\partial mxy}{\partial y} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right] \tag{2.37}$$

$$v_y = q_y + \frac{\partial myx}{\partial x} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right] \tag{2.38}$$

Logo, as condições de contorno em bordo livre reduzem–se de três para duas e são dadas por:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a \tag{2.39}$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right] = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ , em } y = 0 \text{ ou } y = b \tag{2.40}$$

Conforme a Figura 2.10, para o caso de placas simplesmente apoiadas, nos cantos os esforços cortantes adicionais gerados pelo momento torçor se somam, e não se cancelam, e por isso criam uma força resultante de canto R_0, que tende a levantar os cantos. A força R_0 é definida por:

$$R_0 = 2mxy = -2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.41}$$

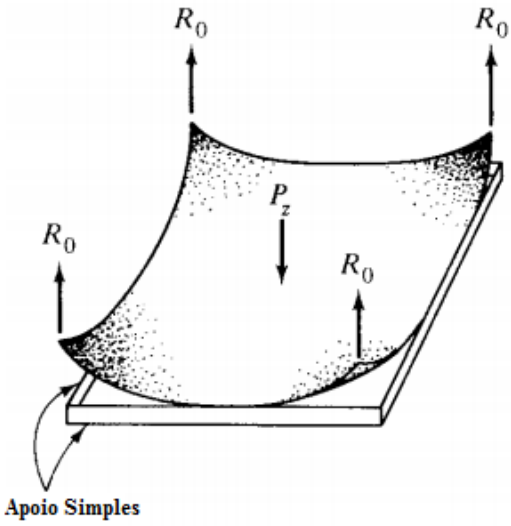

Figura 2.10 – Esforços de canto em placas (Szilard, 2004).

c. Condições de contorno mistas

Placas em que um bordo é simplesmente apoiado e simultaneamente as condições de deslocamento transversal e momento fletor na direção normal aos bordos nulos, quando se encontra descarregada, é um exemplo em que as condições mistas de contorno devem ser aplicadas. Estas condições são determinadas pelas equações:

$$w = 0 \; ; \; m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ , em } x = 0 \text{ ou } x = a \tag{2.42}$$

$$w = 0 \; ; \; m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \text{, em } y = 0 \text{ ou } y = b \tag{2.43}$$

2.1.4 Solução da equação diferencial

A solução da equação diferencial é uma função *w (x,y*) que satisfaça a Equação (2.28) e as condições de contorno. Entretanto, esse tipo de solução só é possível para situações em que o carregamento e as condições de contorno são muito simples.

De acordo com a linearidade de Equação (2.28), a solução pode ser determinada por meio da sobreposição de soluções, onde uma é homogênea *wh (x,y)*, na qual satisfaz as condições de contorno ao longo dos bordos da placa, e a outra particular *wp (x,y)*, que atenda o equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa. Logo, a solução geral é dada por:

$$w\,(x,y) = wh\,(x,y) + wp\,(x,y) \tag{2.44}$$

Outra forma de solução foi desenvolvida por Navier, em que a função *w (x,y*) e o carregamento transversal *pz (x,y)* são representados por séries de Fourrier, em que os coeficientes são definidos de tal forma que atendam as condições de contorno e garantam o equilíbrio do carregamento aplicado.

Lévy também apresentou a sua solução, que aplica séries simples de Fourrier, entretanto só pode ser empregada em placas com pelo menos dois bordos paralelos e simplesmente apoiada. A solução de Lévy apresenta mais rapidamente a convergência da solução do que a

solução de Navier. No entanto, quando o problema conta com geometria, condições de contorno e carregamento mais complexos, é indicado o emprego de métodos numéricos de solução como o Método dos Elementos Finitos.

A bibliografia clássica sobre Teoria de Placas tais como Timoshenko e Woinowsky–Krieger (1959) e Szilard (2004), apresenta as soluções em forma de tabelas para problemas de engenharia de maior interesse prático.

2.2 FLAMBAGEM DE PLACAS

Em geral, estruturas navais e oceânicas são constituídas por placas finas. É comum que estes elementos estruturais estejam sob carregamentos aplicados em seu próprio plano, conforme a Figura 2.11.

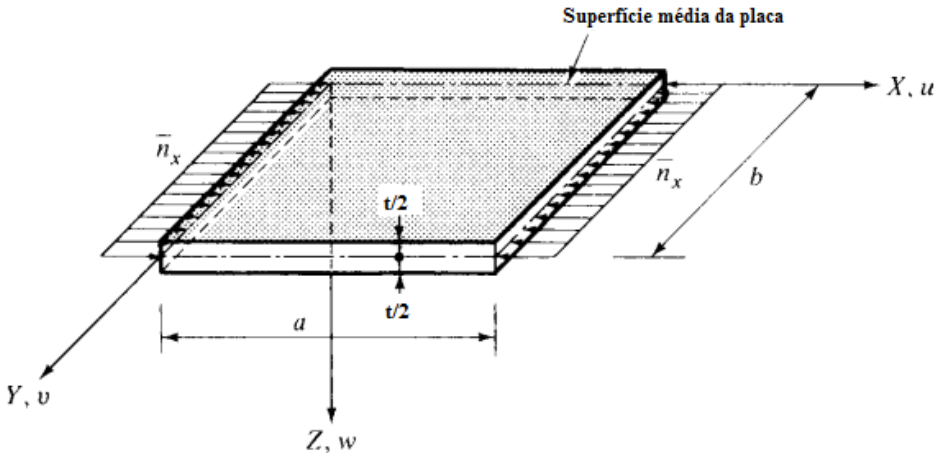

Figura 2.11 – Placa retangular sob carregamento de compressão uniaxial aplicado no plano médio (Szilard, 2004).

Forças de pequena intensidade aplicadas na superfície média, em geral, causam deformação também no plano médio de tal forma que não há deslocamento lateral *w*. Contudo, se a magnitude delas aumenta, o modo de deformação da placa se modifica, ou seja, a partir de um dado valor, as cargas causam deslocamentos transversais ao plano médio da placa.

Assim, o equilíbrio que era estável para pequenos carregamentos torna-se instável quando a intensidade da carga se eleva. Esse fenômeno é denominado de flambagem e o valor da força que o gera é chamado de carga crítica. Quando a carga crítica é atingida, para qualquer incremento de força é produzido um acréscimo nos deslocamentos transversais *w*, o que pode levar ao colapso da placa. A flambagem ocorre de maneira abrupta e dentro do regime elástico do material, ou seja, para tensões menores que a de escoamento e a estrutura atinge o colapso.

2.2.1 Estabilidade do equilíbrio

De acordo com a Figura 2.12, é observado que o problema de estabilidade de equilíbrio de placas é análogo ao comportamento de uma esfera sobre três diferentes tipos de superfícies.

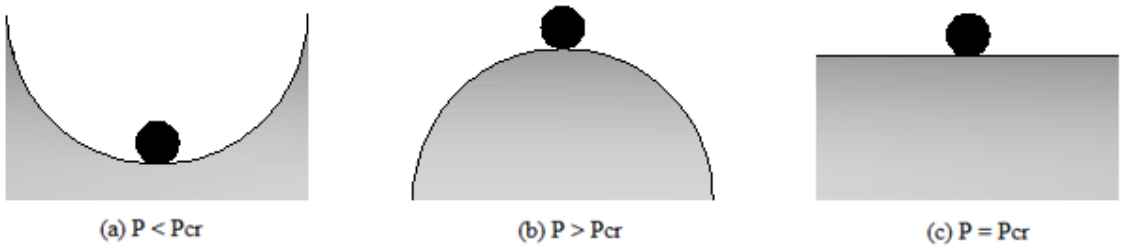

Figura 2.12 – (a) Equilíbrio estável; (b) Equilíbrio Instável; (c) Equilíbrio Neutro.

Estabilidade é um conceito relacionado com a capacidade da estrutura conseguir se estabelecer em uma posição de equilíbrio após uma perturbação externa, como a aplicação de uma força ou a imposição de um deslocamento. Apesar da esfera se encontrar em equilíbrio nos três casos, cada situação apresenta peculiaridades distintas.

Na Figura 2.12a se a esfera sofrer uma perturbação e se deslocar em relação a sua posição original de equilíbrio, ela retorna para a posição inicial após o fim da força perturbadora. Quando um corpo apresenta esse comportamento, diz-se que ele se encontra em estado de equilíbrio estável.

Já a esfera da Figura 2.12b, é ligeiramente perturbada da sua posição inicial e se movimenta para cada vez mais longe da posição de equilíbrio de repouso. Para este caso, o estado de equilíbrio é chamado de equilíbrio instável.

E por último, na Figura 2.12c após o deslocamento da esfera em relação ao posicionamento inicial, ela se move até um novo ponto diferente daquele de repouso e para, caracterizando o equilíbrio neutro.

De acordo com Hibbeler (2010), a fim de compreender melhor a natureza da instabilidade, considera-se um mecanismo formado por duas barras sem peso, rígidas e acoplada por pinos nas duas extremidades (Figura 2.13a).

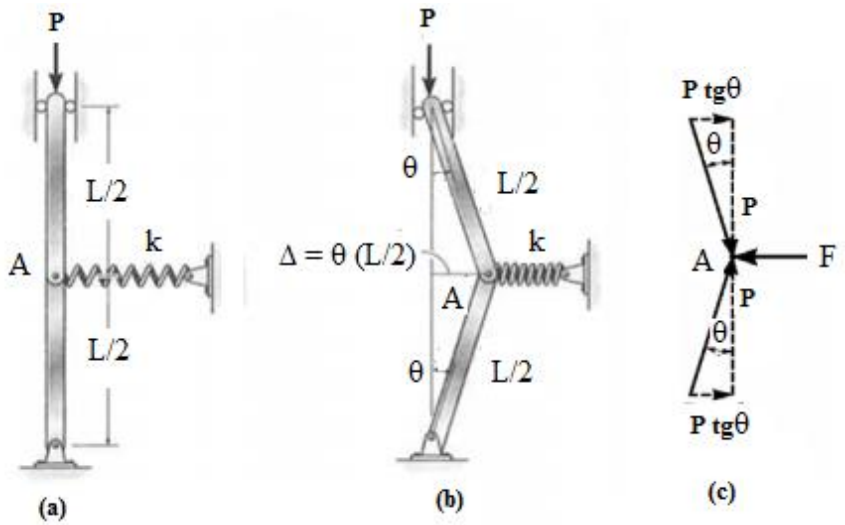

Figura 2.13 – Mecanismo de barras acopladas por pinos (Hibbeler, 2010).

Como pode ser observado na Figura 2.13, quando essas barras estão na posição vertical com uma força de pequena intensidade *P* aplicada em uma delas, a mola, que possui rigidez *k*, não está deformada. A posição de equilíbrio das barras pode ser modificada ao se deslocar o pino em *A* uma quantidade Δ (Figura 2.13b).

O diagrama de corpo livre (Figura 2.13c) mostra uma força de recuperação de posição da mola $F = k\Delta$ e duas componentes horizontais de *P* que empurram o pino para fora da posição de equilíbrio. O deslocamento $\Delta = \theta\left(\frac{L}{2}\right)$ é pequeno e a força perturbadora equivale a $Px = 2P\theta$.

Caso a força de recuperação da mola for superior ao esforço de perturbação, ou seja, $\frac{kL\theta}{2} > 2P\theta$, o equilíbrio é denominado estável, visto que a força desenvolvida pela mola é

suficiente para restaurar a posição original do conjunto de barras. O equilíbrio estável pode ser determinado por:

$$P < \frac{kL}{4} \rightarrow Equilíbrio\ Estável \tag{2.45}$$

Caso contrário, $\frac{kL\theta}{2} < 2P\theta$, o mecanismo torna-se instável. Isto quer dizer que, caso a força P seja aplicada ocorre um pequeno deslocamento em A e o mecanismo tende a sair do equilíbrio e não retorna à posição inicial. O equilíbrio instável é definido por:

$$P > \frac{kL}{4} \rightarrow Equilíbrio\ Instável \tag{2.46}$$

Quando $\frac{kL\theta}{2} = 2P\theta$, o mecanismo se encontra em equilíbrio neutro e assim pode ser determinada a carga crítica. Logo:

$$P = \frac{kL}{4} \rightarrow Equilíbrio\ Neutro \tag{2.47}$$

Os três estados de equilíbrio são apresentados graficamente na Figura 2.14, em que o ponto de transição, em que a força P é igual ao valor crítico, é denominado de ponto de bifurcação.

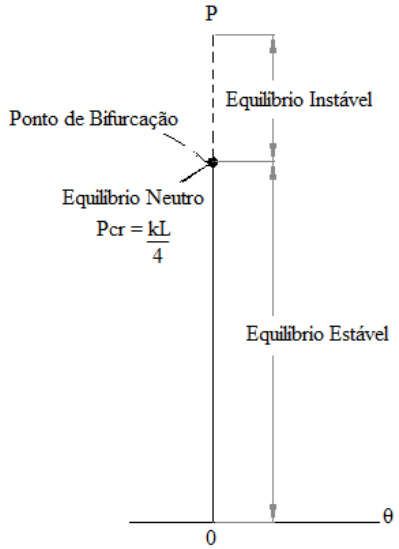

Figura 2.14 – Estados de equilíbrio (Hibbeler, 2010 - adaptado).

2.2.2 Carga crítica de flambagem

Na Teoria Clássica da Flambagem, uma estrutura passa do estado de equilíbrio estável para a condição de equilíbrio instável somente após assumir, mesmo que temporariamente, o estado de equilíbrio neutro. Esta condição permite a definição da carga crítica de uma estrutura matematicamente.

Em um problema de estabilidade elástica de placas, é na condição de equilíbrio neutro que se encontra o ponto de bifurcação no modo de deformação. Após o estado de equilíbrio neutro, para qualquer incremento de força a placa assume a forma deformada de uma superfície curva. Esta nova configuração deformação é denominado de modo de flambagem.

A flambagem ocorre enquanto o material ainda obedece a Lei de Hooke, ou seja, dentro do regime elástico linear. O limite que define o início do modo de deformação após a carga crítica ser atingida, que é o ponto de bifurcação, é apresentado na Figura 2.15.

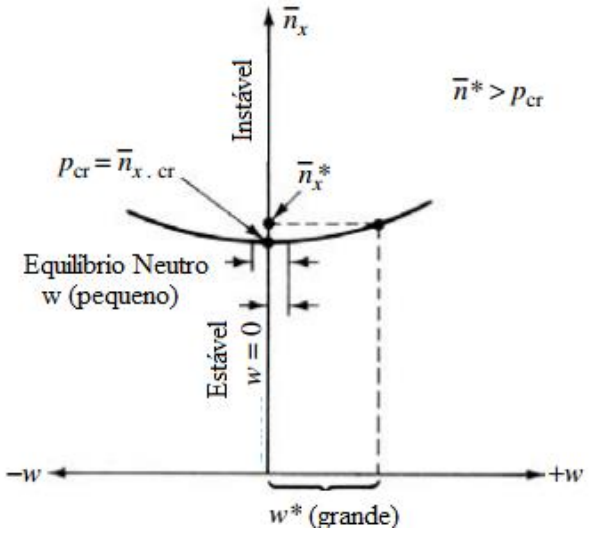

Figura 2.15 – Ponto de bifurcação do modo de deformação de placa (Szilard, 2004)

Uma questão importante no estudo de deformação de placas é a do comportamento de pós-flambagem, pois diferentemente de barras e colunas, a carga crítica de uma placa não é a mesma que a sua ruptura. Este fato se deve à redistribuição de tensões no plano da placa, assim o elemento absorve os incrementos de força mesmo após a flambagem. Porém, o comportamento de pós-flambagem em placas contempla as não-linearidades geométricas, devido à grandes deslocamentos; e físicas, que são de acordo com o comportamento elasto-

plástico do material. De um modo geral, a solução para este tipo de problema é determinado aplicando-se métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos.

A carga crítica de uma placa pode ser definida através de:

- Equação diferencial de equilíbrio de placa submetida a carregamento no plano;
- Métodos de energia ou;
- Abordagem dinâmica do problema.

Este trabalho empregará a equação diferencial de equilíbrio de placa submetida a carregamento no plano.

a. Equação diferencial para placas finas sob carregamento no plano

De acordo com Szilard (2004), o método para a determinação da carga crítica será aquele em que a equação diferencial rege o comportamento de placa fina de um material elástico linear, no regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, submetida a cargas em seu plano médio. Este carregamento que está na própria superfície média da placa pode ser originado por esforços coplanares aplicadas em suas bordas ou produzido através de variações de temperatura.

Além do mais, quando os deslocamentos no plano da placa *u* e *v* são restringidos, surgem forças reativas nos bordos. No entanto, estes esforços podem ser desprezados quando os deslocamentos transversais *w* da placa são pequenos.

Conforme o sistema de coordenadas da Figura 2.16, a equação diferencial da placa submetida a carregamento no plano é definida de acordo com o equilíbrio de um elemento de placa *dxdy* que possui espessura *h*.

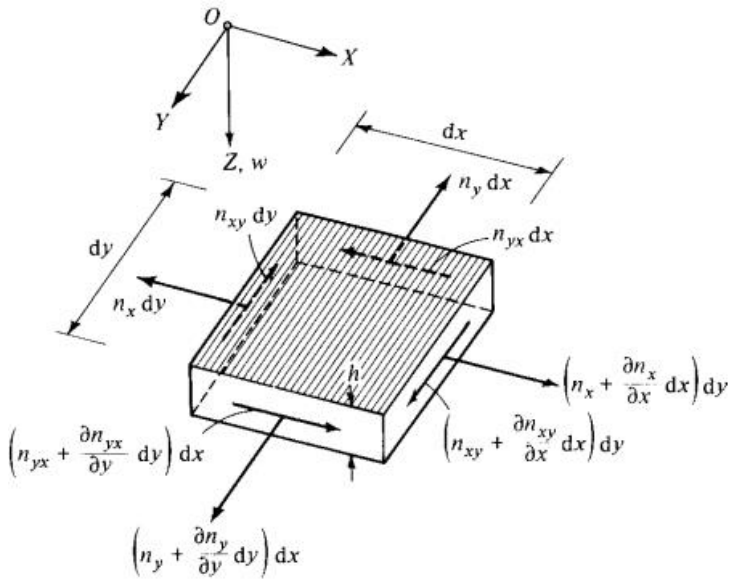

Figura 2.16 – Elemento de placa submetido a um sistema de forças coplanares (Szilard, 2014).

O elemento está sob um conjunto de esforços coplanares, por unidade de comprimento, *nx*, *ny* e *nxy* = *nyx*. Estas forças normais e tangencias são frequentemente denominadas de esforços de membrana. Os acréscimos destes esforços nos lados positivos do elemento podem ser determinados por meio da sua expansão em séries de Taylor interrompidas no segundo termo. Estima-se que o elemento não está submetido a forças de volume nas direções *X* e *Y*.

O equilíbrio de forças na direção *X* é igual a:

$$\left(nx + \frac{\partial nx}{\partial x}dx\right)dy - nxdy + \left(ny + \frac{\partial nyx}{\partial y}dy\right)dx - nyx\,dy = 0 \qquad (2.48)$$

Após as devidas simplificações:

$$\frac{\partial nx}{\partial x} + \frac{\partial nyx}{\partial y} = 0 \qquad (2.49)$$

De maneira análoga, a partir do equilíbrio de forças na direção *Y* define – se:

$$\frac{\partial nxy}{\partial x} + \frac{\partial ny}{\partial y} = 0 \qquad (2.50)$$

As Equações (2.49) e (2.50) constituem um sistema de equações diferenciais homogêneas. Umas das formas de solucionar o sistema é através da aplicação de funções de tensão de Airy $\Phi(x,y)$, como se observa na Equação (2.51).

$$nx = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \; ; \; ny = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \; ; \; nxy = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{2.51}$$

Logo, o sistema de equações diferenciais (2.49) e (2.50) está dentro do regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, e pode ser solucionado de maneira independente da equação diferencial da placa que é considerado separadamente.

Em relação ao eixo *Z*, a placa é considerada com inicialmente fletida, como pode ser observado na Figura 2.17. Para este eixo os bordos, que anteriormente eram livres, agora estão fixos e no plano *XOY*.

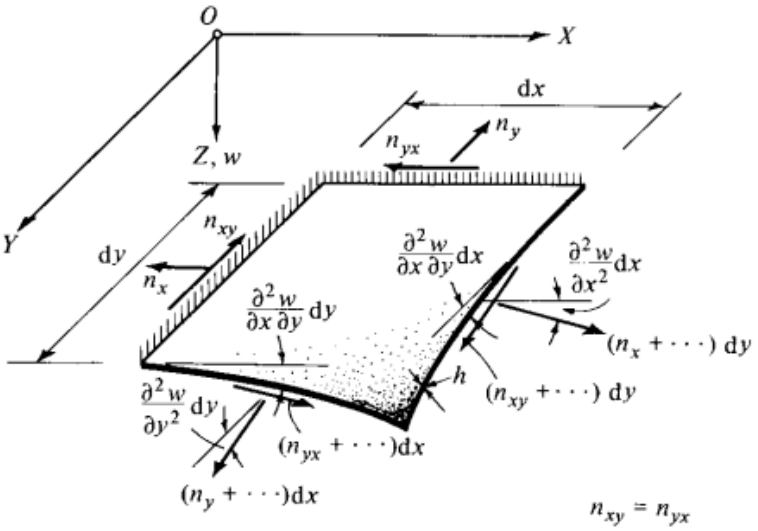

Figura 2.17 – Forças de membrana em um elemento de placa deformado (Szilard, 2004).

O equilíbrio de forças no eixo *Z* é igual a:

$$\sum Fz = \left(nx + \frac{\partial nx}{\partial x} dx\right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left(ny + \frac{\partial ny}{\partial y} dy\right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \left(nxy + \frac{\partial nxy}{\partial x} dx\right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \left(nyx + \frac{\partial nyx}{\partial y} dy\right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \tag{2.52}$$

Após as simplificações e desprezando os termos de ordem superior obtém-se a seguinte equação diferencial homogênea:

$$nx\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ny\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2nyx\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = {}^{x}pz(x,y) \tag{2.53}$$

O efeito das forças no plano é considerado com uma carga lateral fictícia ^{x}pz atuante sobre a placa. Ao somar esta parcela fictícia de carga lateral com a equação diferencial da (2.28) encontra-se:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = pz(x,y) + nx\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ny\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2nyx\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.54}$$

Caso as forças de membrana *nx*, *ny* e *nxy* forem constantes e conhecidos ao longo da superfície da placa, a Equação (2.54) é resolvida da mesma maneira que a equação diferencial da placa, onde são aplicados os métodos de Navier ou Lévy. Entretanto, se estes tipos de esforços se alterarem ao longo da placa, a função de tensão de Airy deve ser empregada na Equação (2.51).

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = pz(x,y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial -^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.55}$$

A Equação (2.55) é resolvida através do emprego de uma equação diferencial adicional que relaciona a função de tensão de Airy, $\Phi(x,y)$, com a função que determina os deslocamentos transversais $w(x,y)$. Quando não é possível, o uso de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, é o mais indicado.

Caso a placa possua uma curvatura inicial $w_0(x,y)$, a Equação (2.54) assume a seguinte forma:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = pz(x,y) + nx\frac{\partial^2 (w+wo)}{\partial x^2} + ny\frac{\partial^2 (w+wo)}{\partial y^2} + 2nyx\frac{\partial^2 (w+wo)}{\partial x \partial y} \tag{2.56}$$

As imperfeições iniciais geométricas em placas influenciam significativamente a carga crítica.

b. Determinação da carga crítica de placas através do Método do Equilíbrio

Na Figura 2.18 é observado uma placa retangular de lados *a* e *b*, originalmente plana e sob esforços coplanares $\overline{nx}$, $\overline{ny}$ e $\overline{nxy}$ aplicadas em seus bordos.

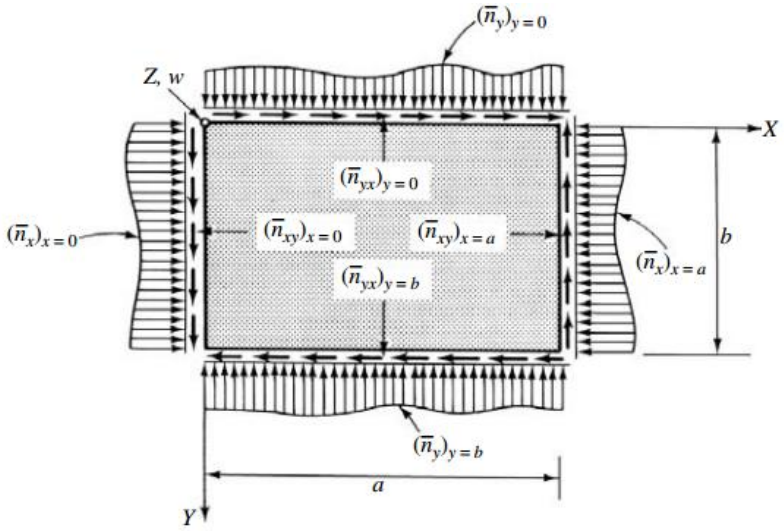

Figura 2.18 – Placa submetida a esforços distribuídos em seus bordos (Szilard, 2004).

Os esforços de bordo são representados como sendo o resultado do produto de um escalar λ, que é denominado de fator de carga, pelo valor de referência $\overline{n_0}$ da forma:

$$\overline{nx} = -\lambda\overline{nx_0};\ \overline{ny} = -\lambda\overline{ny_0};\overline{nxy} = -\lambda\overline{nxy_0} \tag{2.57}$$

O sinal de negativo das forças normais representa o estado de compressão do elemento. Já para as forças de cisalhamento, o negativo indica que as mesmas atuam no sentido oposto aos eixos coordenados nos bordos positivos da placa.

A elevação do valor do fator de carga λ aumenta os valores das forças de bordo coplanares $\overline{nx}$, $\overline{ny}$ e $\overline{nxy}$. O crescimento do valor λ significa que o equilíbrio da placa passa do estado estável para neutro.

No estado neutro de equilíbrio, encontra-se no modo de deformação da placa o ponto de bifurcação, como já foi observado na Figura 2.15. A partir do ponto de bifurcação, ocorre

deslocamentos transversais *w*, mesmo sem o carregamento transversal *pz* e a superfície média da placa, que inicialmente era plana, passa a apresentar uma curvatura.

Como a carga transversal é igual à zero, a equação diferencial (2.54), para o estado de equilíbrio neutro, transforma-se em equação diferencial homogênea.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{D}\left(\overline{nx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{ny}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\overline{nxy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \qquad (2.58)$$

A Equação (2.58) é a equação diferencial que rege o problema de flambagem de placas retangulares compostas de material elástico, linear, homogêneo e isotrópico. Já a equação diferencial de instabilidade elástica de placas, Equação (2.59), é determinada através da Equação (2.57) que define as forças de bordo. Logo:

$$\nabla^4 w + \frac{\lambda}{D}\left(\overline{nx_0}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{ny_0}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\overline{nxy_0}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0 \qquad (2.59)$$

Assim, o problema de carga crítica de uma placa retangular consiste na definição do menor valor do fator de carga λ que leva a placa ao ponto de bifurcação, ou seja, faça com que a placa atinja o estado de equilíbrio neutro em que a sua superfície é levemente encurvada. A Equação (2.59) é uma equação diferencial homogênea em que o fator de carga λ multiplica apenas as derivadas de ordem inferior. A solução para esta equação é chamada, em termos matemáticos, de solução de um problema de autovalores. A solução do problema tem que satisfazer a Equação (2.59) e as condições de contorno.

Entretanto, com a condição de não existir carregamento transversal *pz* ao longo da superfície da placa, ou seja, não existe equação diferencial homogênea, não há a ocorrência de momentos aplicados nos bordos (condições de contorno homogêneas), e por isso não é possível determinar a ordem de grandeza dos deslocamentos transversais *w*. Caso a função *w (x,y)* represente a solução do problema, para qualquer outra função que seja o produto de um valor escalar por *w*, a solução é possível. Fisicamente isto significa que, o modo de flambagem da placa pode ser definido, contudo os deslocamentos exatos em cada ponto ao longo da placa não podem ser determinados.

No caso de uma placa submetida a um carregamento combinado, constituído de forças normais e forças de cisalhamento ao mesmo tempo, em geral, são estabelecidas relações entre estes dois tipos de esforços a partir de razões constantes. Logo, um problema em que a força

normal que está na direção *X* seja o esforço dominante, isto é, $\overline{nx_0}$, podem ser empregadas as seguintes relações:

$$\overline{ny_0} = \alpha\overline{nx_0}\ ;\ \overline{nxy_0} = \beta\overline{nx_0} \tag{2.60}$$

onde as constantes α e β definem as proporções de $\overline{ny_0}$ e $\overline{nx_0}$ e entre $\overline{nxy_0}$ e $\overline{nxy_0}$, respectivamente.

Assim, uma vez definido o valor crítico para o esforço normal na direção *X*, em que $(\overline{nx})_{cr} = -\lambda_{cr}\,\overline{nx_0}$, os valores críticos para as demais forças serão:

$$(\overline{ny})_{cr} = -\lambda_{cr}\,\alpha\overline{nx_0}\ \ ;\ \ (\overline{nxy})_{cr} = -\lambda_{cr}\,\beta\overline{nx_0} \tag{2.61}$$

Uma maneira de simplificar a resolução do problema baseia-se em adotar como referência a carga crítica de Euler para uma faixa de placa de largura unitária, ou seja, como se fosse uma coluna isolada. A placa carregada está indicada na Figura 2.19.

$$\overline{nx_0} = \frac{\pi^2 D}{a^2} = \frac{\pi^2 h^3}{12(1-\nu^2)a^2} \tag{2.62}$$

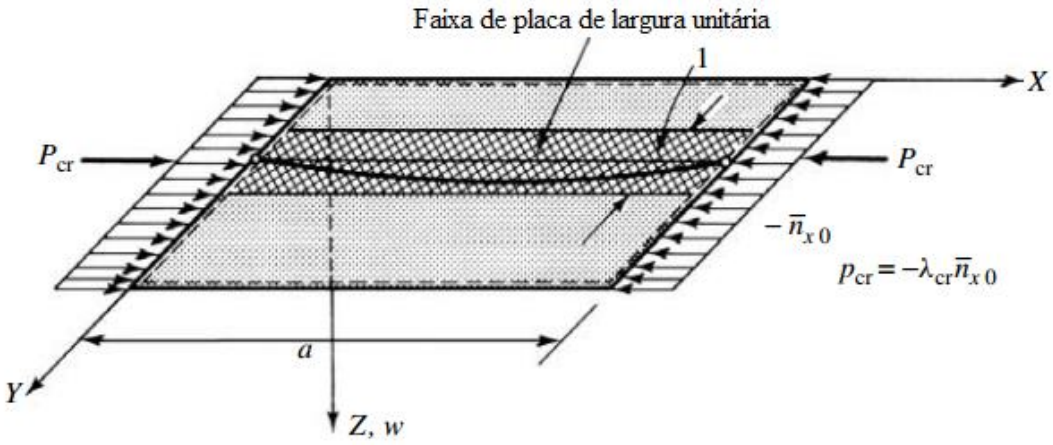

Figura 2.19 – Flambagem de uma faixa unitária de placa (Szilard, 2014).

De um modo geral, a solução para o problema de flambagem de placas é encontrada como o somatório dos produtos das funções que dependem isoladamente de *x* e de *y*.

$$w(x,y) = \sum_m \sum_n W_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y) \tag{2.63}$$

Substituindo a Equação (2.63) na equação diferencial da flambagem (2.59), e aplicando a condição de que a solução seja a não trivial, é encontrada a equação característica do problema. A equação característica do problema define o λ_{cr}, ou seja, que é o valor crítico para λ. O valor de λ_{cr} é o menor valor possível de λ que satisfaça de maneira exata a equação característica do problema. Logo, a carga crítica de placa é dada por:

$$(\overline{nx})_{cr} = \lambda_{cr}\, \overline{nx_0} = p_{cr} \tag{2.64}$$

Na situação de que a placa está simplesmente apoiada em todos os bordos, ela se encontra livre da ação de esforços de cisalhamento ($\overline{nxy} = 0$). Então, a solução do problema é dada por:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}\, sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) (m,n = 1,3,5\ldots) \tag{2.65}$$

Para estas condições, a minimização da equação característica leva ao valor crítico do fator de carga λ_{cr}. A carga crítca definida para outros tipos de condições de contorno possui métodos de cálculo mais complexos. No entanto, caso a placa possua dois bordos paralelos simplesmente apoiados, o método de Lévy pode ser empregado desde que os esforços de cisalhamento nos bordos sejam nulos ($\overline{nxy} = 0$).

Para a situação em que os bordos simplesmente apoiados estejam situados em *x = 0* e em *x = a*, o modo de flambagem da placa é representado pela seguninte função:

$$w(x,y) = \sum_m Y_m\, sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \tag{2.66}$$

O restante do procedimento de solução é similar ao já abordado no item 2.1.4 da Teoria de Placas Finas. Entretanto, percebe-se que as equações algébricas, que são resultado da aplicação das condições de contorno, serão homogêneas. Logo, a solução não trivial para as

constantes de integração *Am*, *Bm*, *Cm* e *Dm* deve ser definida igualando o deteteminante do sistema de equações algébricas que possua estas constantes a zero.

Deve ser observado que as operações matemáticas empregadas na equação característica para a solução de λ_{cr} são muito trabalhosas. Então, para as condições de contorno diferentes às já mencionadas, a definição da solução exata para a carga crítica da placa torna-se inviável, sendo indicado o emprego de métodos numéricos aproximados, tal como o Método dos Elementos Finitos.

2.2.3 Resistência pós - flambagem

Somente após 1930, com o desenvolvimento da indústria aeronáutica, que as pesquisas apontaram que as placas planas possuem elevada resistência pós–flambagem (Schuman e Back, 1959). Até esse período, estimava–se que a ruína de placas planas e de barras compridas (Roorda, 1980) e (Trahair e Bradford, 1988) eram análogas, pelo menos quanto à flambagem, ou seja, quando ocorre a flambagem a estrutura falha.

Entretanto, hoje se sabe que estruturas esbeltas, como as placas planas, apresentam a carga de ruptura maior que sua carga de flambagem. Isto é, a capacidade de carga pós–flambagem proporciona à estrutura uma força adicional mesmo após a inflexão local. Aliás, a capacidade de carga de colapso não depende, exclusivamente, da deformação elástica.

Em um projeto, o estado limite último de placas não se restringe à capacidade de carga para a tensão crítica de flambagem. Logo, a capacidade de carga máxima para placas sob compressão axial é constituída por duas parcelas: a carga de flambagem e a carga pós-crítica adicional. Esta força adicional pós-crítica é apresentada no diagrama carga x deslocamento da Figura 2.20.

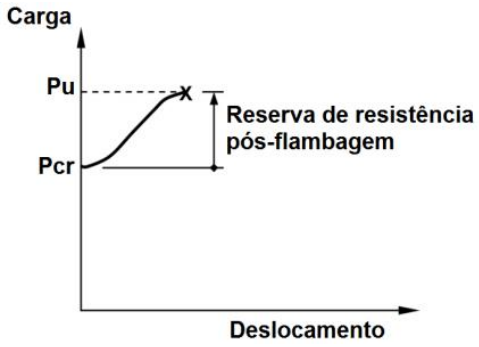

Figura 2.20 – Diagrama carga x deslocamento pós-flambagem (Akesson, 2007).

Segundo Akesson (2007), observa-se no diagrama que a placa não falha no ponto de bifurcação, ou seja, no estado de equilíbrio neutro. Aliás, a placa consegue suportar uma carga extra após a deformação elástica. Isso se deve ao fato de que, ocorre a formação de uma membrana que estabilizada a flambagem a partir do feixe de tensão transversal.

Quando ocorre a encurvatura da parte central, a placa perde a maior parte da sua rigidez, e em seguida a carga "reforça" a região enfraquecida ao conectar esta zona com as partes mais endurecidas em ambos os lados. Na Figura 2.21 é observado a redistribuição de tensões e a formação da membrana transversal de tensão.

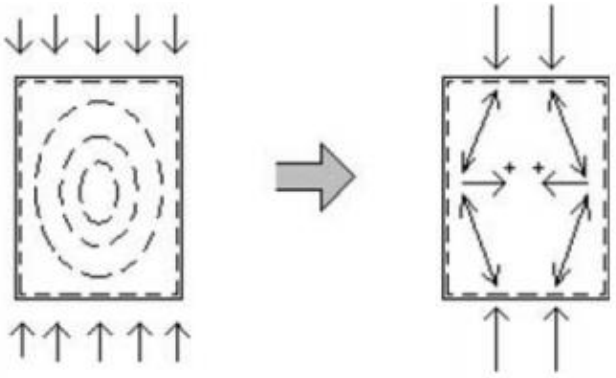

Figura 2.21 – Redistribuição de tensões no estado limite último, intervalo pós-crítico (Akesson, 2007)

O carregamento extra que pode ser imposto às placas é de grande valia para a indústria naval e aeroespacial, pois ao se conceber o comportamento de pós-flambagem é possível encontrar elevada economia de peso estrutural. Estas estruturas normalmente são suportadas por enrijecedores nos bordos que são instalados para que permaneçam retos.

Segundo Szilard (2004), a elevação da capacidade de carga para além da carga crítica se deve ao fato de que, as bordas longitudinais são limitadas por enrijecedores. Esse crescimento de capacidade de carga ocorre devido à redistribuição de tensões ao longo da placa.

2.2.4 Flambagem elástica e inelástica

De acordo com El – Sawy, Nazmy e Martini (2004), a falha de placas submetidas à compressão uniaxial pode ser devido à instabilidade de placa para fora do plano ou por falha do material. Placas finas, ou seja, placas com elevada relação largura/espessura, são constituídas de material com tensão de escoamento σy. A instabilidade de placas ocorre para uma tensão média σcr muito menor quando comparada à tensão de escoamento, principalmente em placas sem furos. Esta tensão crítica σcr é denominada de tensão de flambagem elástica.

Porém, em placas mais espessas, com baixa relação largura/espessura, ou placas com furos grandes, a flambagem pode ocorrer depois que o seu material constituinte atinja a tensão de escoamento. Este fenômeno é chamado de flambagem não-elástica ou elastoplástica. Já em casos em que a espessura é muito elevada, as placas podem ruir antes mesmo de qualquer considerável deformação.

2.2.5 Análise linear do problema de flambagem

A análise linear para flambagem é um problema de autovalores. As equações de equilíbrio empregam soluções de equações algébricas homogêneas nas quais o autovalor que possui o menor valor corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado pode ser interpretado como o modo primário de flambagem.

2.2.6 Análise não-linear do problema de flambagem

Em uma estrutura sólida, é comum ser analisado os deslocamentos causados por ações, que comparadas com as dimensões dos seus componentes, são considerados pequenas. Sob estas circunstâncias, é admitido que não há influência de mudança geométrica estrutural na distribuição de tensões e esforços.

A análise é realizada em placas em que a geometria inicial é indeformada. Caso contrário, a análise é dita não-linear geométrica. Também deve ser considerado que, em termos de material constituinte da estrutura, a relação entre tensões e deformações é linear. Quando esta simplificação não é considerada, é necessário a aplicação de algoritmos específicos na análise não-linear física.

2.2.7 Imperfeições iniciais geométricas

Estruturas navais e oceânicas são constituídas, basicamente, por painéis enrijecidos nos quais tem como processo de fabricação procedimentos de corte, conformação e soldagem. O comportamento mecânico de placas enrijecidas submetidas a cargas de compressão é complexo, pois há inúmeras combinações de estruturas, material e parâmetros de carga. A complexidade do problema aumenta quando são consideradas as imperfeições geométricas de fabricação.

Segundo Amante (2006), as imperfeições causadas pelos processos de fabricação, chamadas de imperfeições geométricas iniciais, são deformações dimensionais permanentes na estrutura e representa o afastamento da superfície real daquela idealizada em projeto. Essa deformação é caracterizada pela forma e magnitude e é a principal geradora de cargas de rupturas. Na Figura 2.22 são apresentados alguns exemplos de imperfeições geométricas de fabricação e montagem.

Figura 2.22 – Imperfeições geométricas iniciais após o processo de soldagem (Amante, 2006).

2.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

É comum surgirem problemas na engenharia em que a análise de placa com condições de carregamento e geometria complexas, onde não é possível determinar uma solução analítica. Estes problemas são resolvidos com a aplicação de métodos numéricos que permitem a definição da solução aproximada com boa precisão.

Um dos métodos mais aplicados na solução de problemas complexos de análise de placas é o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF passou a ser desenvolvido na década de 1950 e com o desenvolvimento da computação tem sido aplicado em inúmeros problemas de engenharia.

2.3.1 Método dos elementos finitos

De acordo com Madenci e Guven (2006), o MEF foi criado em 1956 e é uma técnica computacional empregada em soluções aproximadas em vários problemas de engenharia. Um fenomêno físico ocorre em meio contínuo, seja ele sólido, líquido ou gasoso, e envolve diversas variáveis de campo. Estas variáveis mudam de ponto a ponto, logo o seu domínio possui inifinitas soluções.

O MEF decompõe o domínio do problema em um finitos subdomínios, ou elementos, para os quais a solução sistemática é montada a partir do emprego de métodos residuais variacionais ou ponderados. Assim, o MEF reduz o problema a um número finito de incógnitas, pois divide o domínio em elementos e expressa a variável de campo desconhecida em termos de funções de aproximação assumidas em cada elemento.

Estas funções, conhecidas como funções de interpolação, são determinadas em termos de valores de variáveis de campo em pontos específicos (nós). Em geral, os nós estão situados ao longo dos limites do elemento e o conecta com elementos adjacentes.

A análise que requer o MEF pode ser dividida nas seguintes etapas:

- Discretização do domínio em um número finito de subdomínios ou elementos;
- Seleção das funções de interpolação;

- Desenvolvimento da matriz de elemento para o subdomínio;
- Construção das matrizes dos elementos para cada subdomínio para a obtenão da matriz global para todo o domínio;
- Detalhamento das condições de contorno do problema.

2.3.2 Discretização do domínio

Como pode ser observado na Figura 2.23, o meio contínuo, ou domínio, da placa é divido em um número finito de sub-regiões chamadas de elementos finitos. Estes subdomínios, ou elementos, não são sobrepostos e são ligados entre si através de nós.

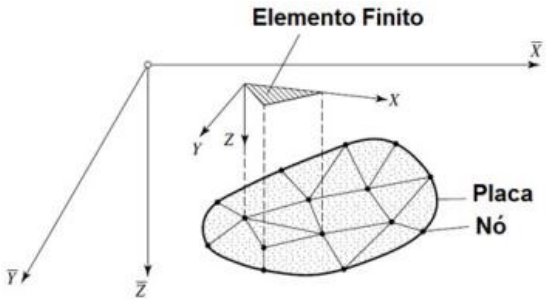

Figura 2.23 – Discretização de um domínio (Szilard, 2004).

Cada nó localiza por meio de coordenadas no espaço o lugar onde existem seis graus de liberdade e ações do problema físico. Graus de liberdade nada mais são que variáveis nodais atribuídas a um elemento. Conforme Madenci e Guven (2006), os graus de liberdade (DOF) de um nó são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento.

Para cada tipo de geometrica e naturezada física do problema, o domínio pode ser discretizado por elementos de tipos diferentes, tais como linhas, áreas ou de volume (Figura 2.24).

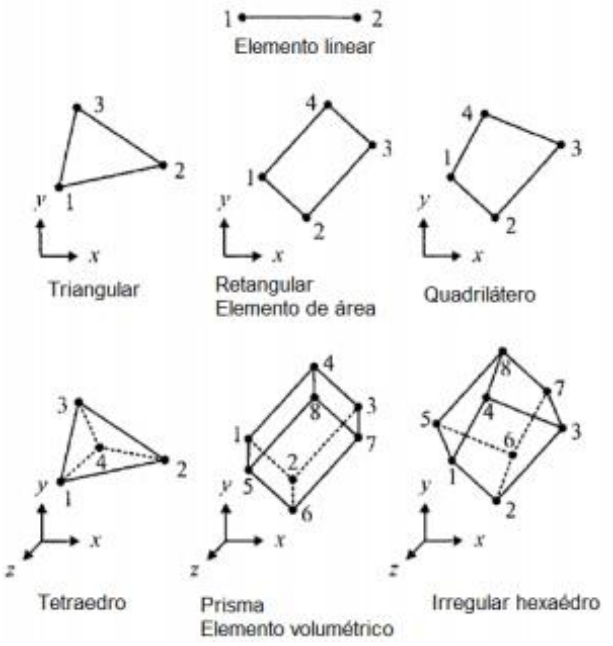

Figura 2.24 – Descrição de elemento de linha, área e volume com número de nós (Madenci e Guven, 2006).

Cada elemento, que é identidicado por um número, é determinado por uma sequência específica de números que é denomindada conectividade. O número de elemento é definido pelas caracterísiticas de convergência dos elementos selecionado.

2.3.3 Solução numérica linear das equações

A flambagem linear de placas emprega a solução através de autovalores. Este sistema pode ser encontrada em notação matricial.

A matriz global de rigidez *[K]* é definida através das matriz de rigidez convencional para pequenas deformações $[K_E]$ e a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$.

$$[K] = [KE] + [KG] \tag{2.67}$$

No entanto, a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$ não é, unicamente determinada, pela geometria da placa, mas também pela forma interna da estrutura no início do carregamento $\{P_0\}$. Quando o carregamento é igual a:

$$\{P_O\} = \lambda \{P_O\} \tag{2.68}$$

onde λ é um escalar.

A matriz de rigidez é definida por:

$$[K] = [KE] + \lambda [KG] \tag{2.69}$$

As equações governantes de equilíbrio são definidas por:

$$[[KE] + \lambda [KG]] \{U\} = \lambda \{P0\} \tag{2.70}$$

onde {U} é o vetor deslocamento, que pode ser definido por:

$$\{U\} = \left[[KE] + \lambda [KG]\right] - 1 \ \lambda \{P_O\} \tag{2.71}$$

A análise linear de flambagem de placas apresenta acréscimo nos deslocamentos mesmo sem incrementos de carga. Matematicamente, pode ser determinada a matriz inversa através do quociente da matriz adjunta pelo determinante dos coeficientes. Desta forma, o vetor de deslocamentos *{U}* tende ao infinito no momento que:

$$\det|[KE] + \lambda [KG]| = 0 \tag{2.72}$$

A solução da Equação (2.72) é o menor autovalor para o problema, que é de autovalores. Este valor representa a carga crítica de flambagem da placa definida pela Equação (2.68).

2.3.4 Solução numérica não-linear das equações

O problema é solucionado por um sistema global de equações. Este sistema pode ser encontrada em notação matricial.

$$[K][u] = [F] \tag{2.73}$$

onde *K* é a matriz de rigidez do sistema, *u* é o vetor de incógnitas e *F* é o vetor de força.

De acordo com a natureza do problema, *K* pode ser dependente de *u*, isto é, *K = K(u)* e *F* depende do tempo, ou seja, *F = F(t).*

a. Abordagem direta

Conforme Madenci e Guven (2006), apesar da abordagem direta, ou sistema de mola linear, ser mais adequada para problemas simples, é fundamental para a análise típica de elementos finitos. De acordo com a Figura 2.25, uma mola linear com rigidez *k* tem dois nós. Em cada nó, forças axiais f_1 e f_2 são aplicadas, gerando deslocamentos positivos u_1 e u_2. O deslocamento resultante da mola é:

$$u = u_1 - u_2 \tag{2.74}$$

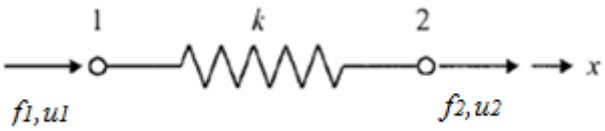

Figura 2.25– Diagrama de corpo livre de um elemento de mola linear (Madenci e Guven, 2006).

A força axial é determinada por:

$$f_1 = ku = k(u_1 - u_2) \tag{2.75}$$

O equilíbrio de forças resultante é:

$$f_2 = -f_1 \tag{2.76}$$

Substituindo:

$$f_2 = -ku = -k\,(u1 - u2) \tag{2.77}$$

Rearranjando as Equações (2.75) e (2.77) e reescrevendo as equações resultantes em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \; ou \; k^{(e)} u^{(e)} = f^{(e)} \tag{2.78}$$

onde $u^{(e)}$ é o vetor de incógnitas nodais que representa os deslocamentos, e $k^{(e)}$ e $f^{(e)}$ se referem às características do elemento como matriz de rigidez e o vetor de força, respectivamente. O superescrito *(e)* denota o número do elemento.

A matriz de rigidez pode ser escrita na forma indicial $k_{ij}^{(e)}$:

$$k^{(e)} \sim k_{ij}{}^{(e)} \tag{2.79}$$

onde o subescrito *i* e *j* descreve a posição do elemento na matriz de rigidez, onde *i* é o número da linha e *j* o da coluna. O coeficiente $k_{ij}^{(e)}$ pode ser interpretado como a força necessária no nó *i* para produzir um deslocamento unitário no nó *j* enquanto todos os nós restantes estão fixos.

b. Sistema global de equações

O modelo de um problema de engenharia que emprega elementos finitos, exige a montagem de um sistema global de equações, conforme observado na Equação (2.73). No sistema global de matrizes, a matriz *K* pode ser definida através da expansão de matrizes de coeficientes dos elementos, $k^{(e)}$, a partir do somatório:

$$K = \sum_{e=1}^{E} k^{(e)} \tag{2.80}$$

onde *E* indica o número total de elementos.

A expansão das matrizes características dos elementos são de mesma ordem que a matriz de rigidez global, porém as linhas e colunas são iguais a zero para os nós não associados com os elementos *(e)*. A ordem da matriz global é definida pelo maior número entre os números de nós globais e pelo número de graus de liberdade por nó.

De maneira análoga, o vetor de forças *F*, é determinado pela expansão dos vetores de coeficientes dos elementos, $f^{(e)}$, a partir do somatório:

$$F = \sum_{e=1}^{E} f^{(e)} \tag{2.81}$$

A expansão dos vetores de força dos elementos são de mesma ordem que o vetor de força global, porém as linhas e colunas são iguais a zero para os nós não associados com os elementos *(e)*. A ordem do vetor de forças global é definida pelo maior número entre os números de nós globais.

Conforme Madenci e Guven (2006), o sistema de molas lineares são considerados na montagem da matriz do sistema global e vetor de forças global (Figura 2.26). Associado ao elemento *(e)*, as equações para um elemento de mola são reescrita na Equação (2.82).

$$\begin{bmatrix} k_{11}{}^{(e)} & k_{12}{}^{(e)} \\ k_{21}{}^{(e)} & k_{22}{}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^{(e)} \\ u_2{}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1{}^{(e)} \\ f_2{}^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{2.82}$$

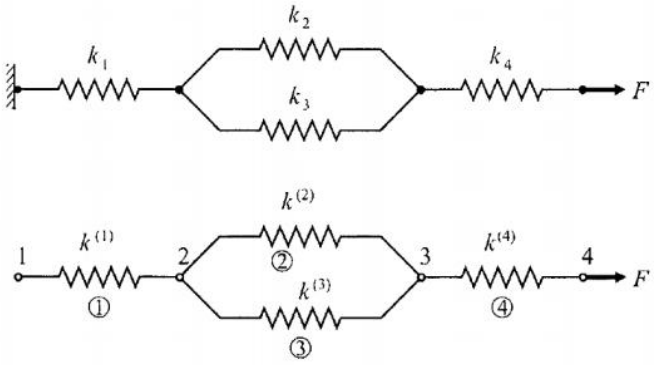

Figura 2.26 – Sistema de molas lineares (Madenci e Guven, 2006).

Tabela 2.1 – Tabela de conectividade.

Número do Elemento	Número de nó local	Número de nó global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	2
	2	3
4	1	3
	2	4

Conforme a Equação (2.80), a ordem da matriz do sistema global é igual a quatro e a contribuição de cada elemento é dada por:

Elemento 1:

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \equiv \mathbf{k}^{(1)} \tag{2.83}$$

Elemento 2:

$$\begin{matrix} \boxed{2} & \boxed{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \equiv \mathbf{k}^{(2)} \tag{2.84}$$

Elemento 3:

$$\begin{matrix} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \begin{matrix}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{matrix} \equiv \mathbf{k}^{(3)} \tag{2.85}$$

Elemento 4:

$$\begin{matrix} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \begin{matrix}\boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{matrix} \equiv \mathbf{k}^{(4)} \tag{2.86}$$

onde:

$$K = \sum_{e=1}^{4} k^{(e)} = k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + k^{(4)} \tag{2.87}$$

ou ainda:

$$K = \begin{bmatrix} {k_{11}}^{(1)} & {k_{12}}^{(1)} & 0 & 0 \\ {k_{21}}^{(1)} & ({k_{22}}^{(1)} + {k_{11}}^{(2)} + {k_{11}}^{(3)}) & ({k_{12}}^{(2)} + {k_{12}}^{(3)}) & 0 \\ 0 & ({k_{21}}^{(2)} + {k_{21}}^{(3)}) & ({k_{22}}^{(2)} + {k_{22}}^{(3)} + {k_{11}}^{(4)}) & {k_{12}}^{(4)} \\ 0 & 0 & {k_{21}}^{(4)} & {k_{22}}^{(4)} \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

Já em relação a Equação (2.81), a ordem do vetor de força global é (4x1) e a contribuição específica em cada elemento é dada por:

Elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(1)} \tag{2.89}$$

Elememento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(2)} \tag{2.90}$$

Elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(3)} \tag{2.91}$$

Elemento 4:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(4)} \tag{2.92}$$

onde:

$$F = \sum_{e=1}^{4} f^{(e)} = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)} \tag{2.93}$$

ou ainda:

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} = f_1^{(2)} = f_1^{(3)} \\ f_2^{(2)} = f_2^{(3)} = f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{2.94}$$

Da mesma forma que a construção da matriz de rigidez global do sistema e do vetor de forças global, o vetor de incónitas *u* será dado por:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} \\ u_2^{(2)} = u_2^{(3)} = u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{2.95}$$

c. Solução do sistema global de equações

A solução única do sistema global de equações é definida pelo determinante da sua matriz diferente de zero. Entretanto, um dos autovalores para a matriz global do sistema é nulo e por isso, é encontrada uma matriz singular. Logo, a solução não é mais única.

O autovalor nulo representa o modo de translação, já os autovalores não nulos restantantes representam o modo de deformação. Para o caso em que $k_{11}^{(e)} = k_{22}^{(e)} = k^{(e)}$ e $k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = -k^{(e)}$, a matriz global do sistema é:

$$K = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

Para os autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt{5}$ e $\lambda_4 = 3 + \sqrt{5}$ os correspondentes autovetores são:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(4)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2+\sqrt{5} \\ -2-\sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.97}$$

onde cada autovetor representa um possível modo de solução.

A contibuição de cada modo de solução encontra-se na Figura 2.27.

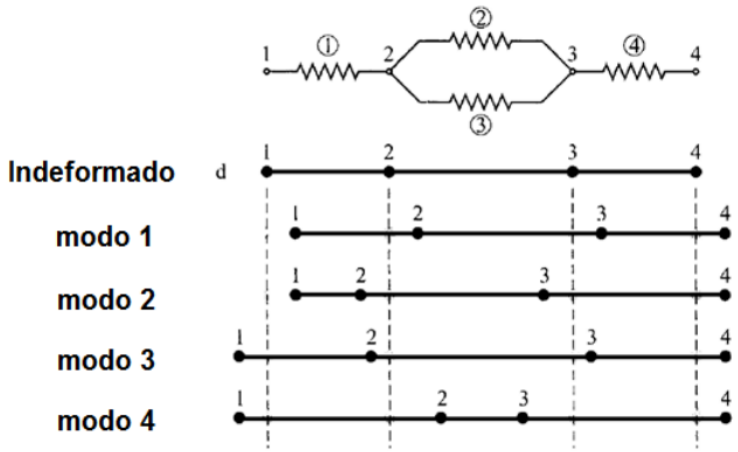

Figura 2.27 – Exemplo de modo de solução para o sistema de molas lineares (Madenci e Guven, 2006)

d. Condições de contorno

Como pode ser observado na Figura 2.26, o nó 1 não pode se deslocar. Esta restrição tem como função impor a condição de contorno $u_1 = 0$.

Os deslocamento no nó u_i e as forças aplicadas no nó f_i podem ser especificadas em cada nó. Porém é fisicamente impossível especificar ambos como conhecido ou desconhecido. Logo, a força nodal f_i é mantida como uma das incógnitas do problema.

Os deslocamentos nodais u_2, u_3 e u_4 são incógnitas e as suas respectivas forças nodais são $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ e $f_4 = F$. Substituindo estas condições no sistema global de equações:

$$k^{(e)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1 = 0\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}f_1\\ f_2 = 0\\ f_3 = 0\\ f_4 = F\end{Bmatrix} \tag{2.98}$$

Como o nó 1 está restringido, o sistema global de equações fica na forma:

$$k^{(e)} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ F\end{Bmatrix} \tag{2.99}$$

E:

$$-\,k^{(e)}\,u_2 = f_1 \tag{2.100}$$

A matriz de coeficientes não é mais singular em Equação (2.99). Portanto, as soluções para estas equações são:

$$u_2 = \frac{F}{k^{(e)}}\;;\; u_3 = \frac{3F}{2k^{(e)}}\;;\; u_4 = \frac{5F}{2k^{(e)}} \tag{2.101}$$

A força nodal desconhecida f_1 é definida como $f_1 = -F$. A solução física do problema é apresentada na Figura 2.28.

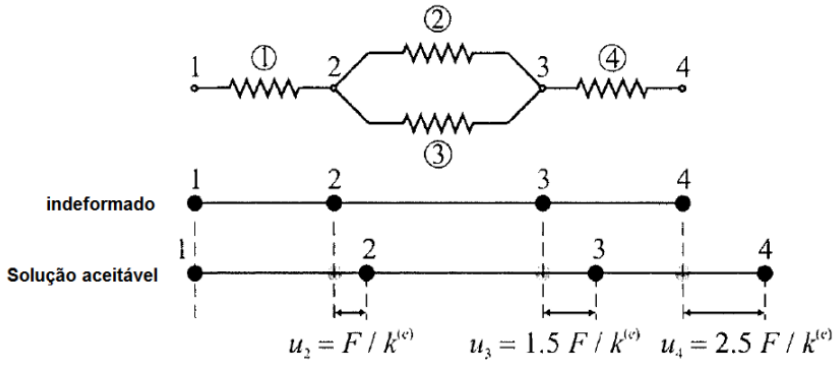

Figura 2.28 – Solução física aceitável para o sistema de molas lineares (Madenci e Guven, 2006).

3. METODOLOGIA

Os fenômenos físicos, de natureza simples ou complexa, podem ser modelados computacionalmente, de modo que os problemas de engenharia possam ser simulados numericamente com o emprego de conceitos de matemática e ciências da computação. Com o avanço científico e tecnológico, a simulação numérica se tornou o principal instrumento no estudo de estruturas.

Na Mecânica dos Sólidos Computacional as tensões e deformações mecânicas são analisadas computacionalmente, e os softwares comerciais apresentam interfaces sofisticadas e facilitam na definição e solução do problema, bem como na análise dos resultados. Neste trabalho, o software utilizado nas análises será o ANSYS Mechanical®.

3.1. SOFTWARE ANSYS

O software ANSYS é um programa computacional empregado em inúmeros problemas de engenharia embasado no Método dos Elementos Finitos. O software apresenta sete diferentes categorias de análises estruturais:

- Estática;
- Modal;
- Harmônica;
- Dinâmica transiente;
- Espectral;
- Flambagem e;
- Dinâmica explícita.

As etapas principais de análise realizadas pelo software ANSYS são:

- Pré – processamento;

- Processamento (solução) e;
- Pós – processamento.

3.1.1. Pré–processamento

a. Domínio computacional

O modelo da placa inicia–se com a geração de um retângulo de dimensões *a*×*b* mm. A criação do furo depende da geometria adotada, como se vê a seguir:

- *Área do furo circular*: é gerado um círculo de diâmetro *d* mm, cujas coordenadas *x* e *y* do centro correspondem com as da placa e são definidas pelos parâmetros *a* e *b* da placa (Figura 3.1).

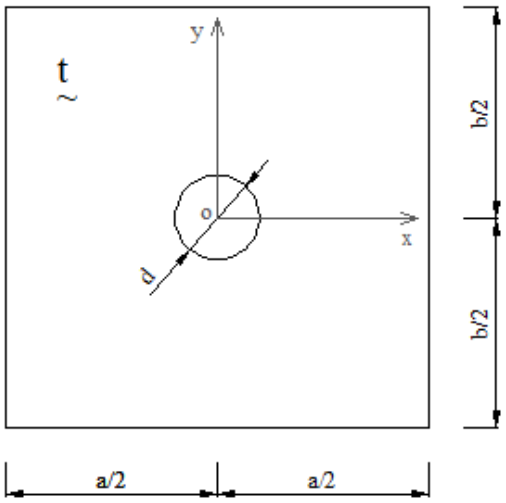

Figura 3.1 – Placa com furo circular centrado.

- *Área do furo quadrado*: é gerado um quadrado de dimensão *d*×*d* mm com a origem determinada pelos parâmetros *a* e *b* da placa e *d* do furo (Figura 3.2). Assim, as coordenadas da origem do furo são definidas por:

$$P = \left(\frac{a}{2} - \frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) \tag{3.1}$$

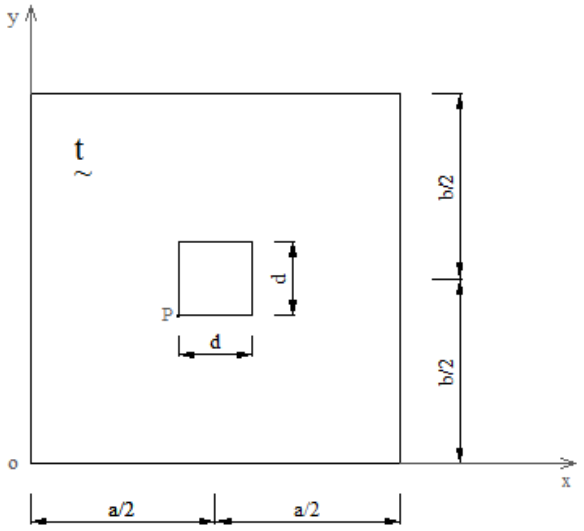

Figura 3.2 – Placa com furo quadrado centrado.

- *Área do furo losangular*: para a geração do furo é preciso, primeiramente, criar quatro "*keypoints*" com as coordenadas definidas em relação aos parâmetros *a*, *b* e *d* em mm (Figura 3.3).

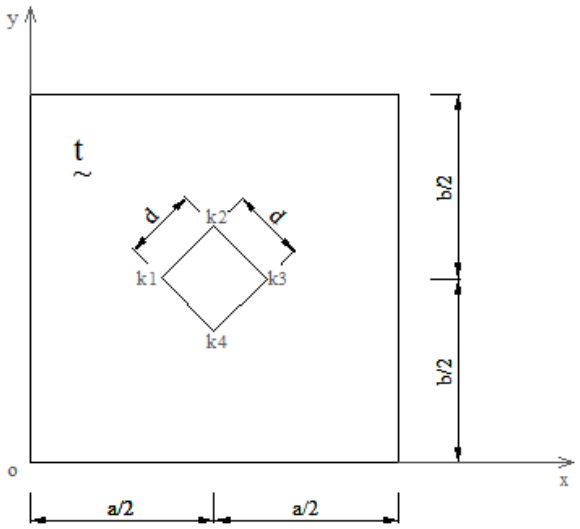

Figura 3.3 – Placa com furo losangular centrado.

As coordenadas dos "*keypoints*" são definidas por:

$$k_1 = \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}d, \frac{b}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$k_2 = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}d\right) \tag{3.3}$$

$$k_3 = \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}d, \frac{b}{2}\right) \tag{3.4}$$

$$k_4 = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}d\right) \tag{3.5}$$

A partir dos "*keypoints*", são gerados os nós. Logo:

$$k_1 = n_1 \tag{3.6}$$

$$k_2 = n_2 \tag{3.7}$$

$$k_3 = n_3 \tag{3.8}$$

$$k_4 = n_4 \tag{3.9}$$

Depois, criam–se as linhas que interceptam os nós. Assim:

$$L_1 = \overline{n_1 n_4} \tag{3.10}$$

$$L_2 = \overline{n_4 n_3} \tag{3.11}$$

$$L_3 = \overline{n_3 n_2} \tag{3.12}$$

$$L_4 = \overline{n_2 n_1} \tag{3.13}$$

Por fim, cria–se uma área interna a partir das linhas.

Após estabelecer a geometria da placa e do furo, emprega–se a operação "*Booleans*" da opção "*Subtract Areas*" e a área do furo é subtraída da placa. É nesta fase da análise que o tipo de elemento finito empregado é definido.

No menu "*Real Constants*" os parâmetros espessura *t* da placa, módulo de elasticidade *E*, a tensão de escoamento do material σy e coeficiente de Poisson *v* são informados.

b. Geração da malha:

A divisão do domínio é compatível com o tamanho dos elementos que é determinado no comando "*Size Controls*", disponível no menu "*Meshing*" em "*Mesh Tool*".

Na região do furo, que é de maior interesse para análise, é realizado o refinamento da malha, como pode ser observado nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6, uma vez que ocorre uma concentração de tensões na região.

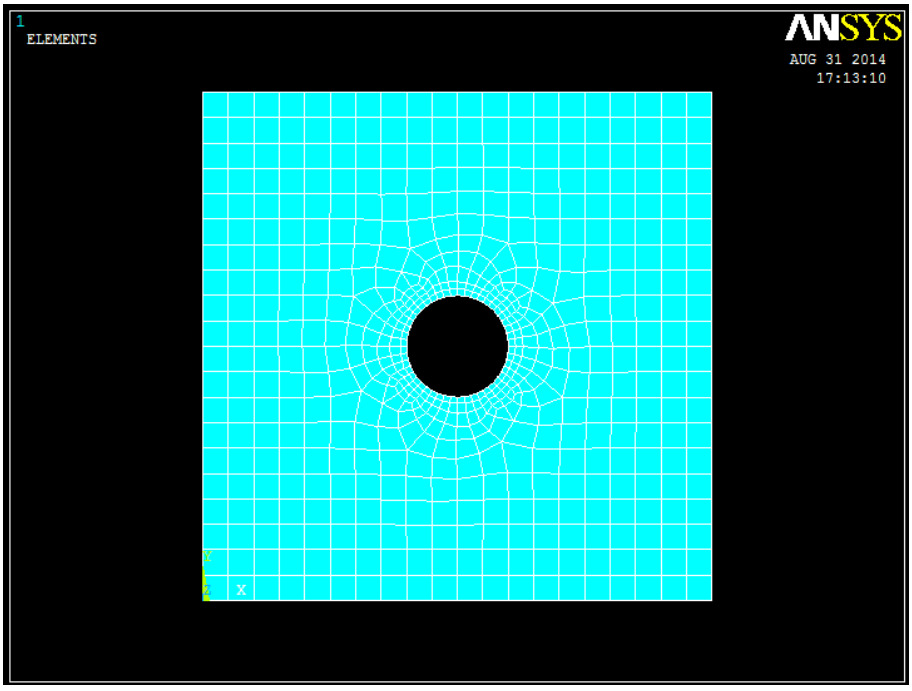

Figura 3.4 – Malha de elementos finitos de uma placa com furo central circular.

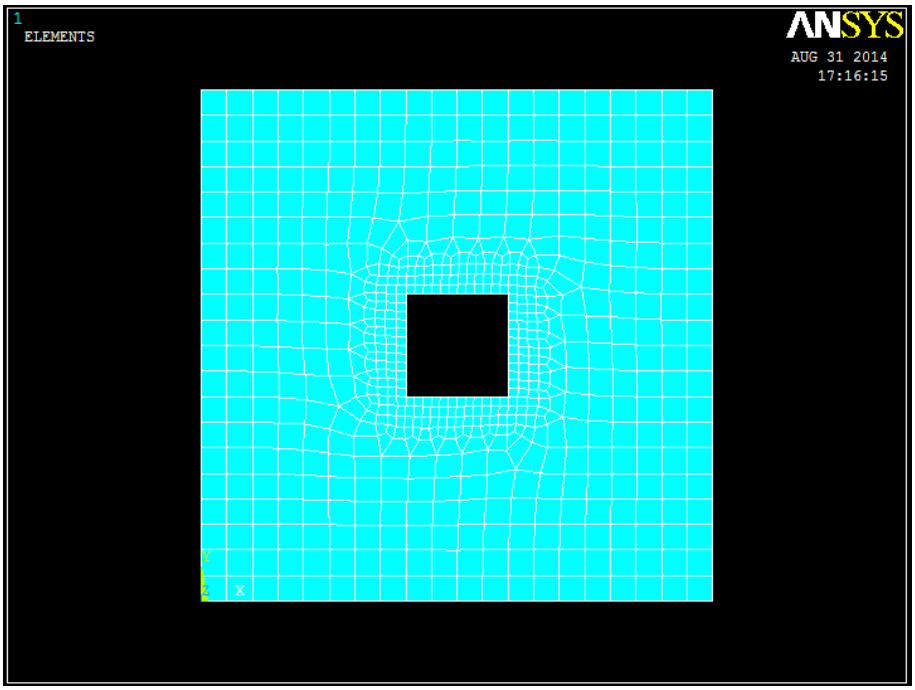

Figura 3.5 – Malha de elementos finitos de uma placa com furo central quadrado.

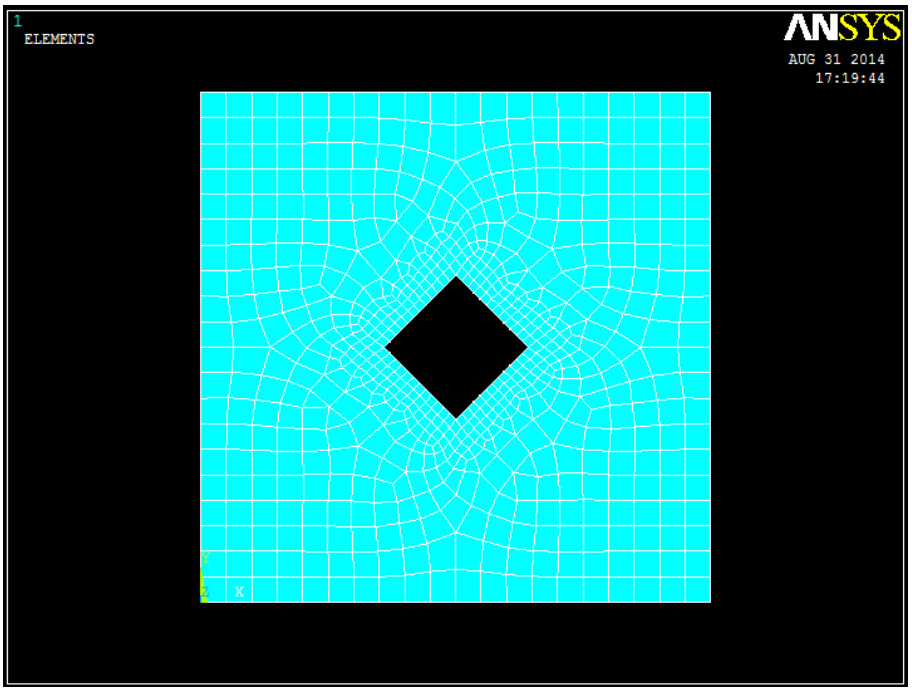

Figura 3.6 – Malha de elementos finitos de uma placa com furo central losangular.

c. *Condições iniciais*:

De acordo com Helbig *et al.* (2013) a análise de flambagem não–linear de placa é mais complexa que a elástica, pois a relação tensão–deformação ultrapassa os limite de proporção. A placa é constituída de material considerado linear elástico, perfeitamente plástico e geometria inicial imperfeita, em que o modo de flambagem de uma pré–análise de autovalor elástico é admitida. Segundo El–Sawy, Nasmy e Martini (2004), o valor inicial de imperfeição é determinado pela expressão:

$$w_o = \frac{b}{2000} \tag{3.14}$$

onde b é a largura da placa em milímetros.

d. *Condições de contorno*:

De acordo com Kumar (2007), as quatro bordas das placas devem ser consideradas como simplesmente apoiadas e todos os nós ao longo de todas as bordas restringidos à deflexão e rotação ao longo da espessura (*Uz, Rz = 0*). Nota-se na Figura 3.7 que as bordas descarregadas podem se deformar no plano, porém continuam em linha reta. Isto ocorre devido o acoplamento de todos os nós ao longo das bordas descarregadas no plano do deslocamento (*Uy*), fazendo com que os deslocamentos sejam uniformes ao longo do comprimento da placa.

Empregando esta condição, é possível simular a situação em que a placa se encontra com reforços longitudinais e transversais. Com a borda da placa restringida, surge uma força causada pelo carregamento da borda. O bordo reativo é restringido para a deformação axial (*Ux = 0*).

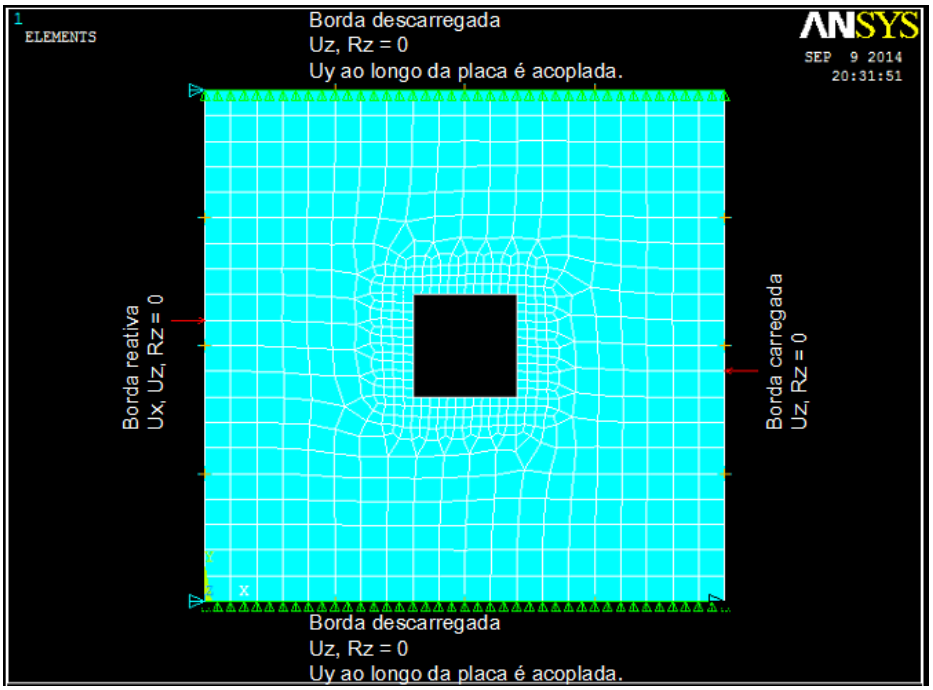

Figura 3.7 – Condições de contorno para a modelagem das placas.

Independente da natureza geométrica da placa (quadrada ou retangular) e do furo (circular, quadrado ou losangular), as condições de contorno são as mesmas.

e. *Determinar o fenômeno físico a ser modelado*:

A análise de placas por elementos finitos possibilita modelar linearmente e não linearmente não só o material, como a geometria da placa através de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Os incrementos de deslocamento *Ux = 0,010a*, quando *x = 0*, são aplicados ao longo da direção do carregamento.

A solução para a situação de equilíbrio é realizada através do equacionamento que emprega o processo de iteração Newton–Raphson. Logo, o somatório dos esforços axiais aplicados ao longo do bordo carregado, para cada incremento de deslocamento, oferece a carga última da amostra.

3.1.2 Processamento (ou solução)

Estágio em que as equações de conservação são resolvidas pelo software ANSYS. Para a análise linear, o software resolve um conjunto de equações lineares. Já a análise não–linear, encontra a solução do problema, determinando a carga como função do tempo e o incremento de tempo, ou seja, o ANSYS decompõe a simulação em um número de incrementos de tempo e ajusta a solução aproximada de equilíbrio no final de cada incremento de tempo.

A aplicação do método de Newton–Raphson tem uma função importantíssima na solução de problemas não–lineares, uma vez que a série de iterações usadas pelo método determina um resultado admissível para cada incremento de tempo. Na hipótese de, a resposta de alguma iteração não convirja, o software realizada outra iteração, procurando o equilíbrio entre as forças internas e externas.

Vale ressaltar, que para cada iteração de um caso não–linear, o software constrói um modelo de matriz de rigidez e soluciona o sistema de equações. Conforme Junior (2009), o gasto computacional para a solução de uma iteração de um problema inelástico é semelhante à solução linear completa, ou seja, o custo computacional de uma análise não–linear é maior do que uma análise linear.

3.1.3 Pós – processamento

É nesta etapa em que as soluções encontradas na fase de *"Processamento"* são investigadas. Caso algum erro tenha sido cometido nas fases anteriores, é neste estágio da análise que ele será identificado. Assim, quando todas as falhas, se existirem, forem detectadas, o problema é corrigido e a análise reiniciada.

3.2 TESTE DE CONVERGÊNCIA

O grau de precisão da solução proposta pelo programa depende do número de elementos que constituem a malha. Isto é, para uma maior a precisão da resposta, maior deverá ser o

refinamento da malha. Contudo, para malhas mais refinadas o esforço computacional é maior. Neste caso, o responsável pela análise deve determinar o tamanho da malha que apresente uma solução satisfatória que ao mesmo tempo possua um período de processamento razoável.

A seguir, serão avaliados dois diferentes tipos de elementos e dois tamanhos de malhas que atendam as condições necessárias do processamento dos problemas aplicados neste presente trabalho. Foram realizados testes lineares e não-lineares.

3.2.1 Tipo de elemento

Procurando o tipo de elemento que apresentasse o resultado com mais rapidez, foram designados dois tipos de elementos do software ANSYS, o SHELL181 e o SHELL93. O elemento do tipo SHELL foi escolhido, pois possui aplicabilidade na modelagem de estruturas finas, ou seja, estruturas em que a espessura é muito pequena em relação às outras dimensões.

O elemento SHELL181 apresenta quatro nós, onde cada nó possui seis graus de liberdade, três de rotação e três de translação, como mostra a Figura 3.8.

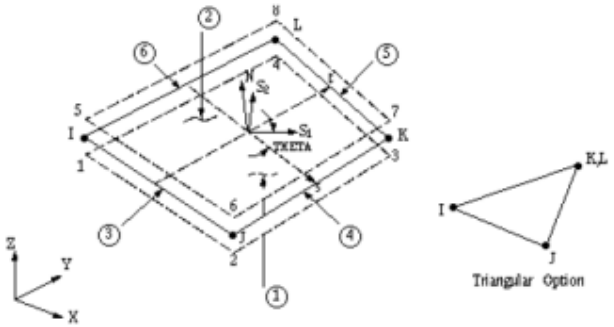

Figura 3.8 – Elemento SHELL181.

Já o elemento SHELL93 tem oito nós, onde cada nó possui seis graus de liberdade, três de rotação e três de translação, como mostra a Figura 3.9.

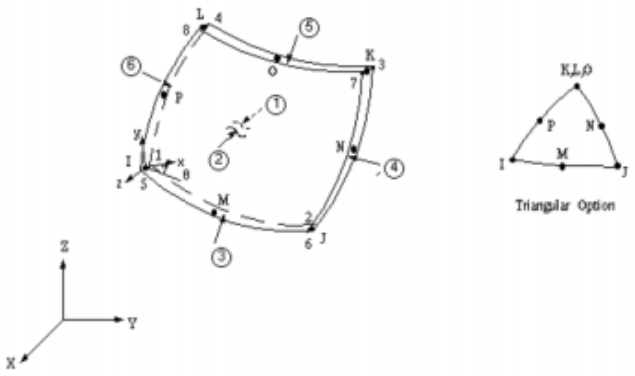

Figura 3.9 – Elemento SHELL93.

Os testes foram aplicados em uma placa quadrada com furo quadrado centrado que apresenta características que estão apontadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Teste de convergência do elemento: Características da placa modelo.

a = b (mm)	t (mm)	d (mm)	d/b	b/t	w_0 (mm)	E (GPa)	σy (MPa)
125	1,615	25	0,2	77,4	0,097	210	323,3

Após a escolha, a placa foi modelada de acordo com os critérios estabelecidos ao longo da dissertação.

a. Flambagem linear

As simulações a seguir têm como objetivo determinar o tipo de elemento a ser adotado na análise linear de flambagem das placas. Os resultados obtidos da simulação, em que o tamanho do elemento varia se encontram nas Tabelas 3.2 e 3.3 e Figura 3.10.

Tabela 3.2 – Teste de convergência do elemento SHELL93.

Teste	Tamanho do elemento (mm)	Malha	Pcr, ANSYS (kN)	Diferença Relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	25	b/5	174,53	0,518	4,196
2	12,5	b/10	173,47	-0,092	4,306
3	6,25	b/20	173,62	0,006	5,569
4	3,125	b/40	173,63	0,000	9,017

Tabela 3.3 – Teste de convergência do elemento SHELL181.

Teste	Tamanho do elemento (mm)	Malha	Pcr, ANSYS (kN)	Diferença Relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	25	b/5	177,05	1,004	4,259
2	12,5	b/10	176,93	0,936	4,368
3	6,25	b/20	175,96	0,382	4,446
4	3,125	b/40	175,29	0,000	6,068

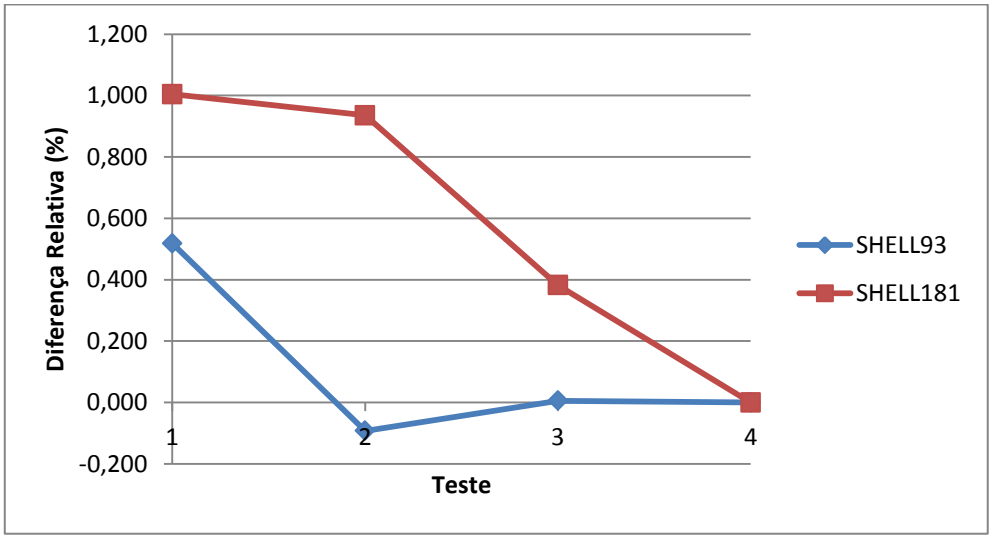

Figura 3.10 – Teste de convergência para o tipo de elemento.

Observa – se que o elemento SHELL93 apresenta resultados melhores e por isso será o tipo de elemento adotado na análise linear, mesmo que seu tempo de processamento for maior que o do elemento SHELL181. Isso se deve ao fato de que o elemento SHELL 93 possuir oito nós, enquanto o SHELL181, quatro.

b. Flambagem não-linear

As simulações a seguir têm como objetivo determinar o tipo de elemento a ser adotado na análise não-linear de flambagem das placas. Os resultados da simulação para placas em que o tamanho do elemento varia estão nas Tabelas 3.4 e 3.5 e na Figura 3.11.

Tabela 3.4 – Teste de convergência do elemento SHELL93.

Teste	Tamanho do elemento (mm)	Malha	P, ANSYS (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	25	b/5	34,2541	0,705	237,278
2	12,5	b/10	34,0584	0,129	661,585
3	6,25	b/20	34,0101	0,013	2122,300
4	3,125	b/40	34,0144	0,000	5029,987

Tabela 3.5 – Teste de convergência do elemento SHELL181.

Teste	Tamanho do elemento (mm)	Malha	P, ANSYS (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	25	b/5	35,4634	3,642	26,130
2	12,5	b/10	34,7688	1,612	69,452
3	6,25	b/20	34,3805	0,477	133,864
4	3,125	b/40	34,2173	0,000	195,095

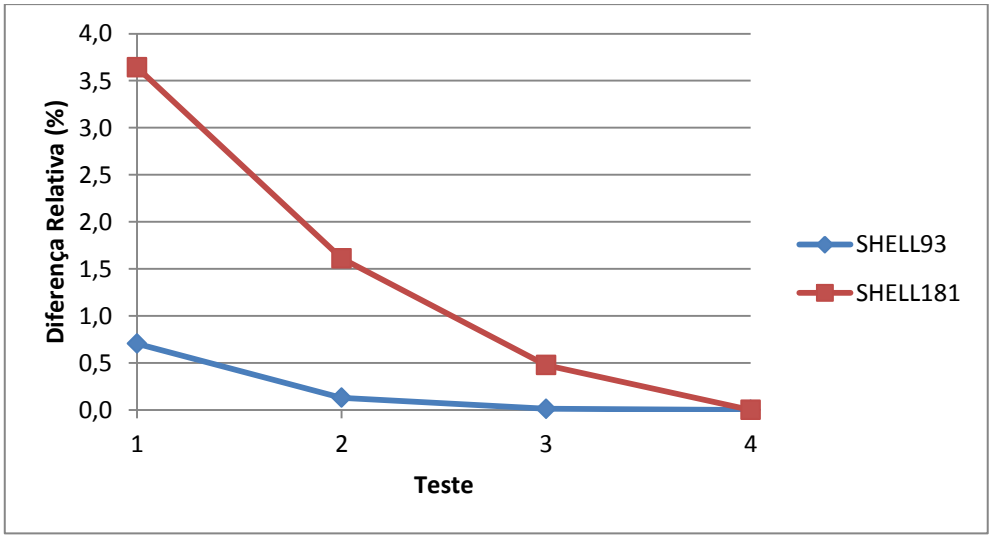

Figura 3.11 – Teste de convergência para o tipo de elemento.

Observa – se que o elemento SHELL93 apresenta resultados melhores e por isso será o tipo de elemento adotado na análise não-linear, mesmo que seu tempo de processamento for maior que o do elemento SHELL181.

.

3.2.2. Tamanho da malha

Quanto ao tamanho da malha foram realizados testes para quatro diferentes tipos de placas classificadas da seguinte maneira:

A. Modelo A: placa maciça (sem furo);
B. Modelo B: placa com furo circular central;
C. Modelo C: placa com furo quadrado central;
D. Modelo D: placa com furo losangular central;

As placas A, B e C estão caracterizadas nas Figuras 3.12, 3.13 e 3.14. e na Tabela 3.6.

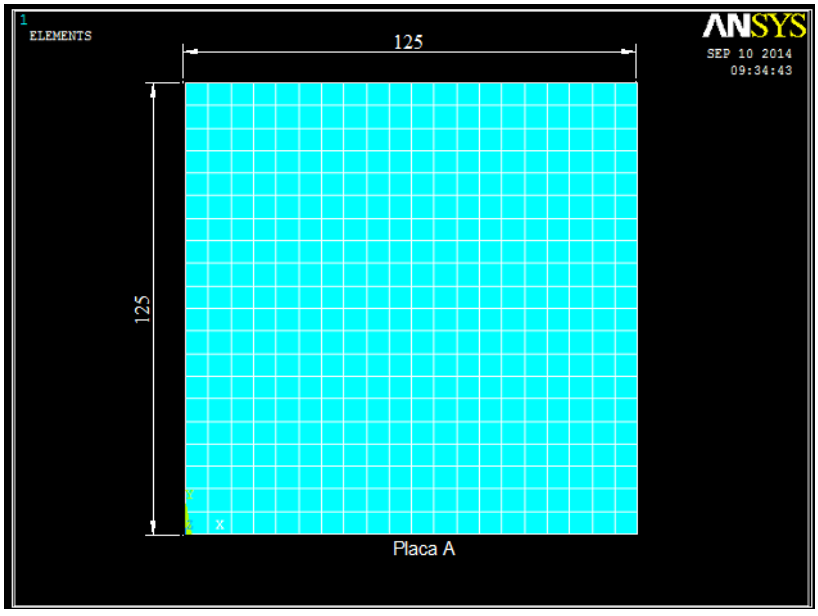

Figura 3.12 – Características geométricas da placa A (sem furo) para teste de convergência de malha.

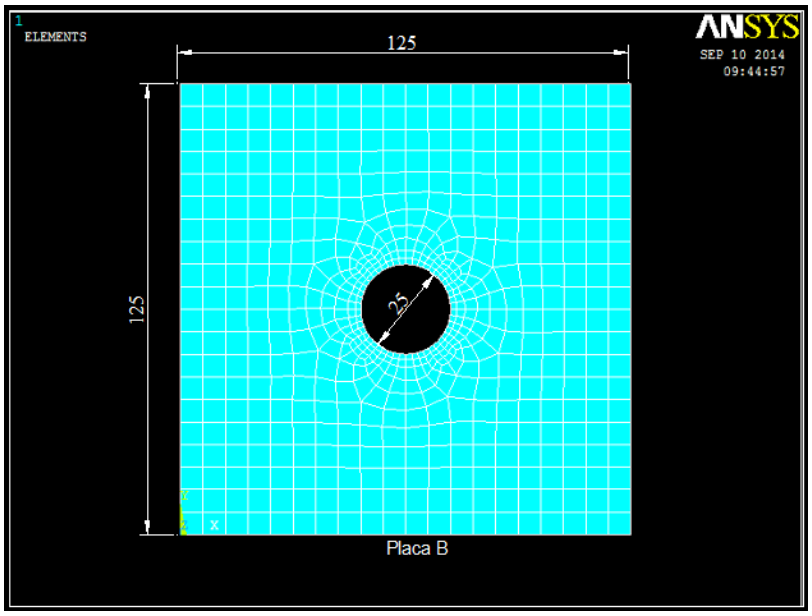

Figura 3.13 – Características geométricas da placa modelo B (furo circular centrado) para teste de convergência de malha.

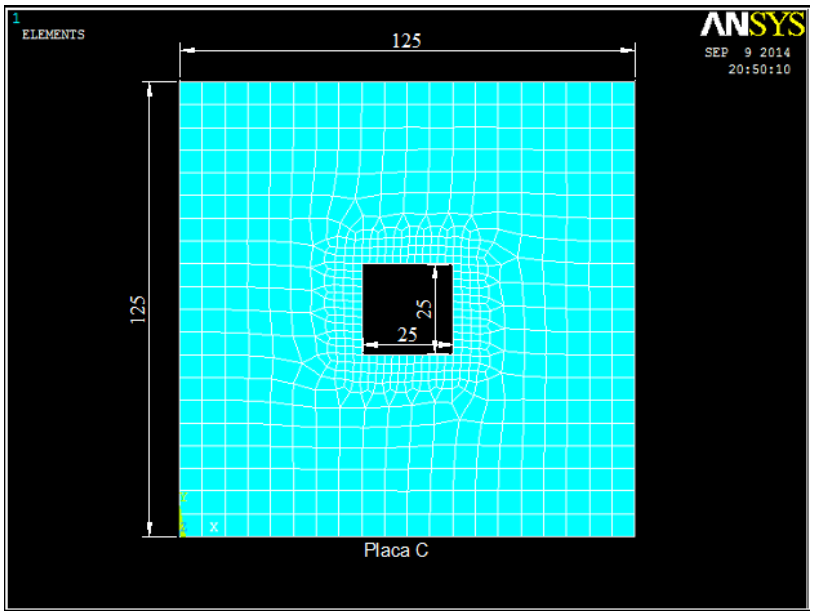

Figura 3.14 – Características geométricas da placa modelo C (furo quadrado centrado) para teste de convergência de malha.

Tabela 3.6 – Características geométricas das placas modelo A, B e C para o teste de convergência de malha.

Placa	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	b/t	w_0 (mm)	E (GPa)	σy (Mpa)
A	125	125	1,615	0	77,4	0,229	210	323,3
B	125	125	1,615	25	77,4	0,097	210	323,3
C	125	125	1,615	25	77,4	0,097	210	323,3

Já as características geométricas do modelo D encontram-se na Figura 3.15 e na Tabela 3.7.

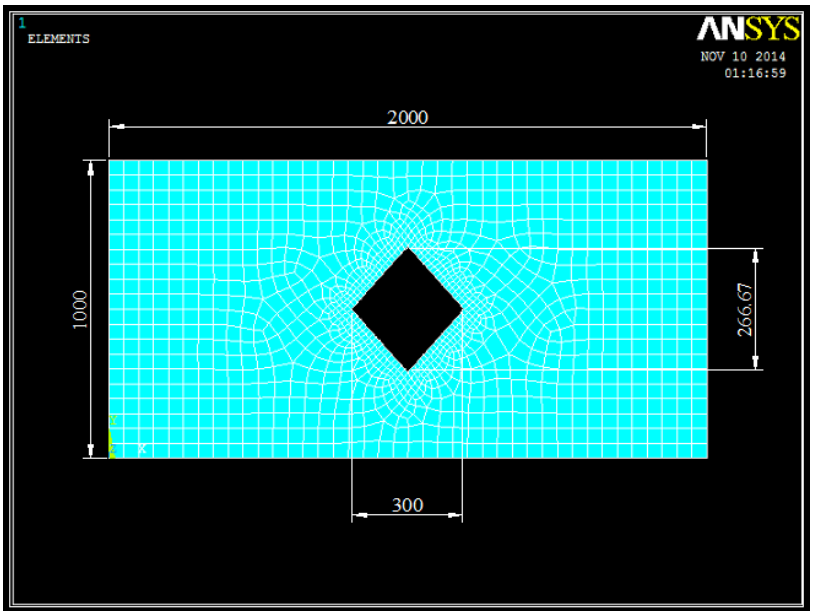

Figura 3.15 – Características geométricas da placa modelo D (furo losangular centrado) para teste de convergência de malha.

Tabela 3.7 – Características geométricas da placa modelo D para o teste de convergência de malha.

Placa	a (mm)	b (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	b_0 (mm)	b/t	w_0 (mm)	E (GPa)	σy (Mpa)
D	2000	1000	10	266,67	300	100	1	210	323,3

a. Flambagem linear

Os resultados obtidos estão apresentados nas Tabelas 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11 e nas Figuras 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19.

Tabela 3.8 – Teste de convergência de malha para a placa A.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	Pcr, Ansys (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	25	25	b/5	186,21	0,011	4,727
2	125	b/10	100	12,5	b/10	186,2	0,005	4,259
3	125	b/20	400	6,25	b/20	186,18	-0,005	4,196
4	125	b/40	1600	3,125	b/40	186,19	0,000	4,321

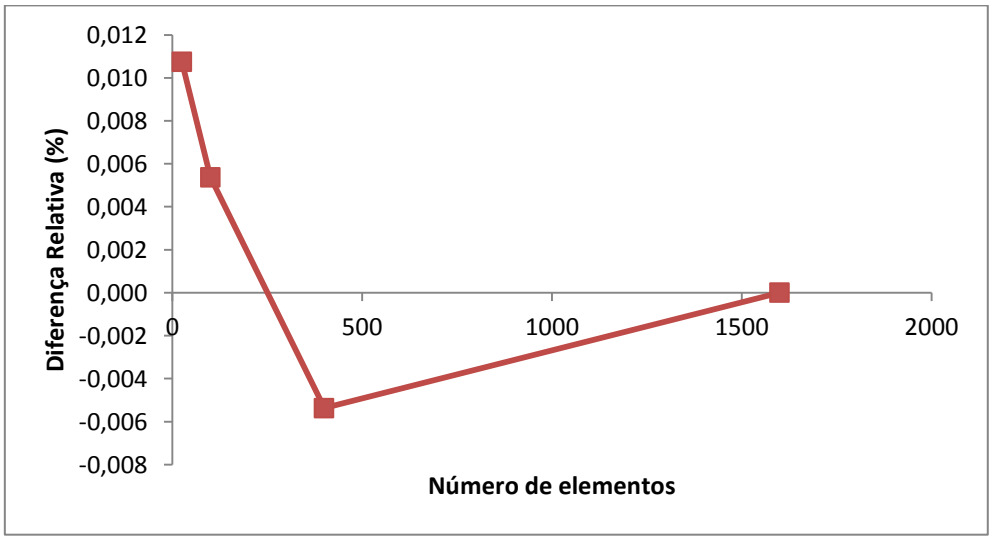

Figura 3.16 – Teste de convergência de malha para a placa A.

Tabela 3.9 – Teste de convergência de malha para a placa B.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	Pcr, Ansys (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	25	25	b/5	179,51	1,127	4,898
2	125	b/10	100	12,5	b/10	177,39	-0,068	4,524
3	125	b/20	400	6,25	b/20	177,52	0,006	5,663
4	125	b/40	1600	3,125	b/40	177,51	0,000	9,532

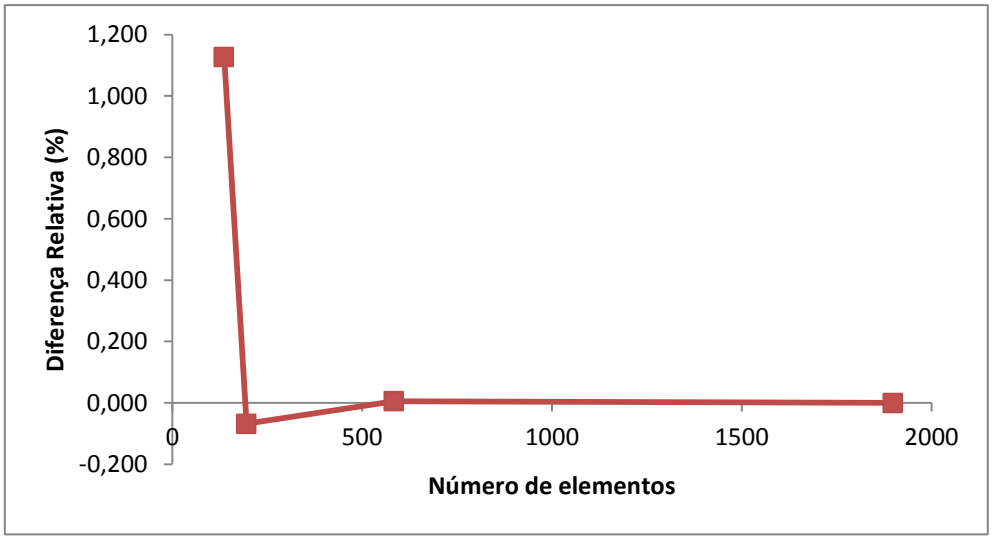

Figura 3.17 – Teste de convergência de malha para a placa B.

Tabela 3.10 – Teste de convergência de malha para a placa C.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	Pcr, Ansys (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	25	25	b/5	174,53	0,518	4,618
2	125	b/10	100	12,5	b/10	173,47	-0,092	4,508
3	125	b/20	400	6,25	b/20	173,62	-0,006	5,975
4	125	b/40	1600	3,125	b/40	173,63	0,000	9,469

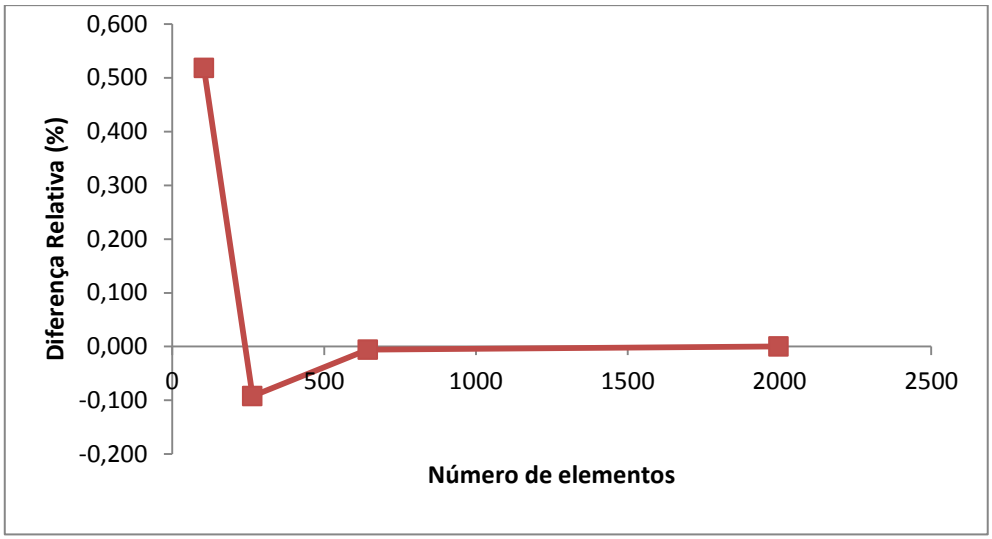

Figura 3.18 – Teste de convergência de malha para a placa C.

Tabela 3.11 – Teste de convergência de malha para a placa D.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	Pcr, Ansys (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	221	400	b/5	865,43	0,946	5,148
2	125	b/10	414	200	b/10	858,34	0,119	5,413
3	125	b/20	1155	100	b/20	857,74	0,049	7,020
4	125	b/40	3798	50	b/40	857,32	0,000	16,443

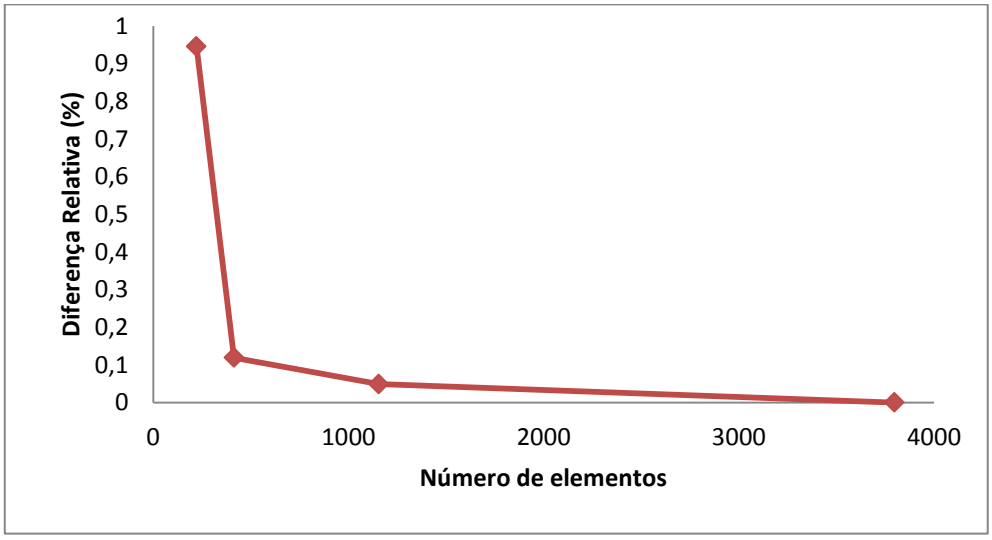

Figura 3.19 – Teste de convergência de malha para a placa D.

Observa–se que quanto maior for o refinamento da malha, melhor serão os resultados obtidos, porém o tempo de processamento da solução também é maior. Logo, critérios como refinamento do modelo numérico e o tempo disponível para a simulação devem ser considerados.

Os resultados encontrados no *Teste 4* foram considerados na determinação na diferença relativa. Nota–se que as análises apontam o *Teste 4* como o mais preciso na solução do problema, visto que a malha é mais refinada e conta com elementos do tamanho correspondente a largura *b* da placa dividida por 40. Entretanto, o *Teste 3* apresentou resultados com precisão adequada e tempo de processamento menor que o *Teste 4*. Logo, o tamanho da malha adotado para o presente trabalho foi a que possui elementos com tamanho *b/20*.

b. Flambagem não-linear

As Tabelas 3.12, 3.13 e 3.14 e as Figuras 3.20, 3.21 e 3.22 apresentam os resultados obtidos para o teste de malha para as placas A, B, e C.

Tabela 3.12 – Teste de convergência de malha para a placa A.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	P, ult Ansys (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	25	25	b/5	40,2502	1,903	41,933
2	125	b/10	100	12,5	b/10	39,8734	0,949	39,484
3	125	b/20	400	6,25	b/20	39,4986	0,382	40,685
4	125	b/40	1600	3,125	b/40	39,3483	0,000	40,139

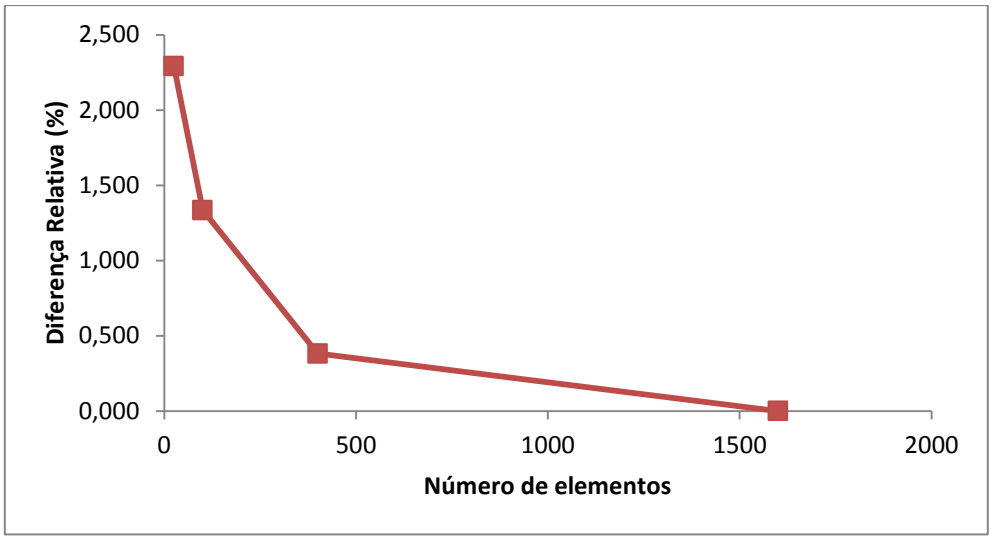

Figura 3.20 – Teste de convergência de malha para a placa A.

Tabela 3.13 – Teste de convergência de malha para a placa B.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	P, ult Ansys (kN)	Diferença relativa (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	136	25	b/5	38,0393	0,886	339,209
2	125	b/10	195	12,5	b/10	37,7492	0,116	501,746
3	125	b/20	584	6,25	b/20	37,7053	-0,086	1376,615
4	125	b/40	1899	3,125	b/40	37,7377	0,000	6837,087

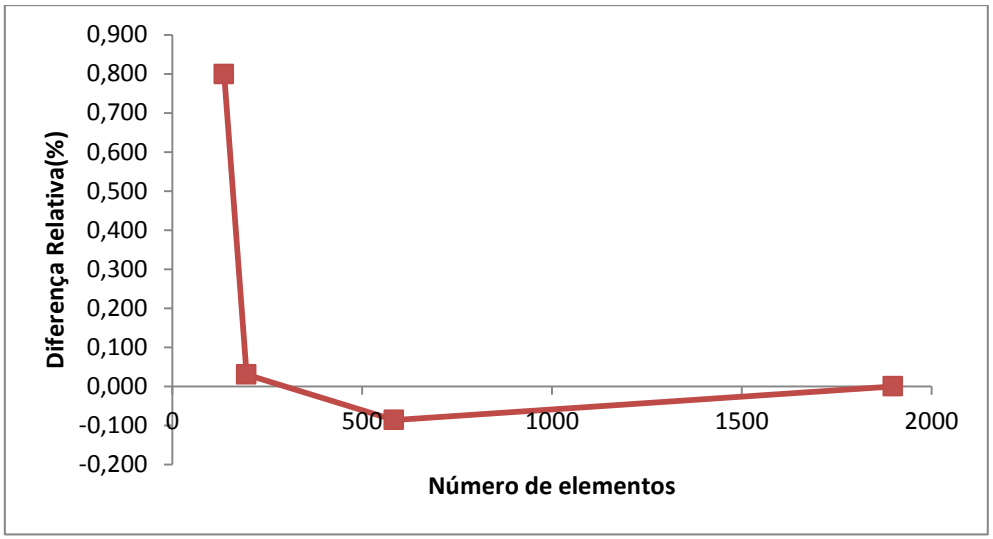

Figura 3.21 – Teste de convergência de malha para a placa B.

Tabela 3.14 – Teste de convergência de malha para a placa C.

Teste	a=b (mm)	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha	P, ult Ansys (kN)	Erro relativo (%)	Tempo de Processamento (s)
1	125	b/5	104	25	b/5	34,2541	0,717	266,434
2	125	b/10	264	12,5	b/10	34,0584	0,142	718,307
3	125	b/20	644	6,25	b/20	34,0101	-0,013	2179,287
4	125	b/40	1997	3,125	b/40	34,0144	0,000	4607,817

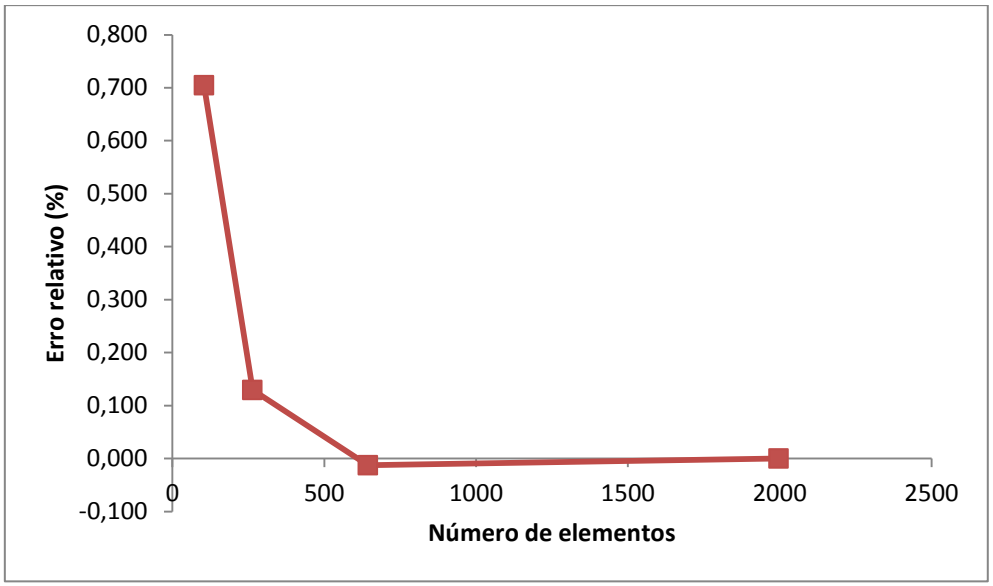

Figura 3.22 – Teste de convergência de malha para a placa C.

Os resultados obtidos no *Teste 4* foram considerados na determinação da diferença relativa. Os testes apontam o *Teste 4* como o mais preciso na solução do problema. No entanto, o *Teste 3* apresentou resultados com precisão satisfatória e tempo de processamento menor que o *Teste 4*. Logo, o tamanho da malha adotado para o presente trabalho foi a que possui elementos com tamanho *b/20*. Não há bibliografia sobre análise inelástica para a capacidade de carga pós-flambagem de placas com perfurações losangulares centrais.

3.3 VALIDAÇÃO DO MODELO

Foram considerados os resultados experimentais obtidos em Narayanan e Chow (1984) para a validação do modelo para as placas maciças, placas com furos circulares e placas com perfurações quadrangulares. Já a validação do modelo para placas com furos losangulares, foram avaliados os resultados obtidos do estudo realizado por Correia (2013).

O estudo de Narayanan e Chow (1984) prevê a capacidade de carga máxima e o comportamento pós– flambagem de placas perfuradas.

O equipamento empregado no ensaio (Figura 3.23) aplica sobre as placas esforços de compressão uniaxial, ou seja, o dispositivo aplica um carregamento axial de no máximo 90kN no eixo *x* ou eixo *y*. A carga é empregada sobre o painel por intermédio de macacos

hidráulicos que atuam sobre os blocos que possuem grupos de rolamentos que tem como função simular o apoio, que é do tipo simplesmente apoiado. Rolamentos similares são usados nas extremidades carregadas.

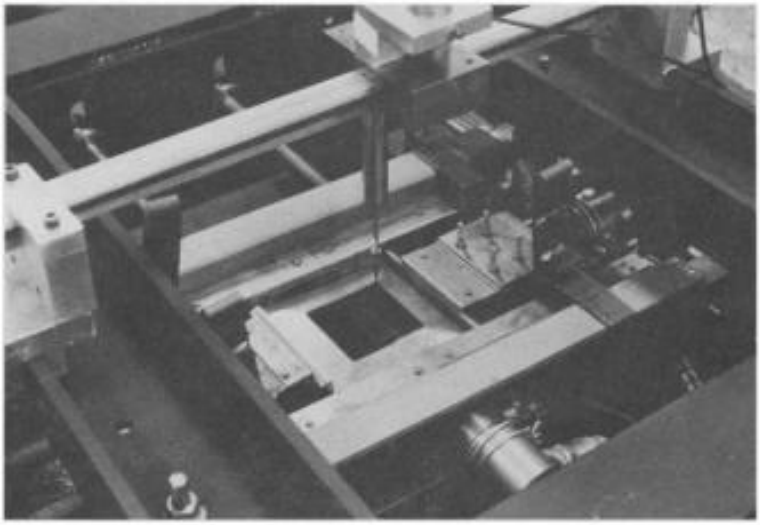

Figura 3.23 – Equipamento empregado nos testes experimentais realizados por Narayanan e Chow, em 1984.

As cargas empregadas são mensuradas por uma célula de carga calibrada e o encolhimento axial das placas por um único par de transdutores fixados na horizontal.

Já as deformações iniciais e as de fora do plano da placa, são medidas por meio de transdutores de deslocamento linear. Os transdutores, em sua totalidade, são acoplados em voltímetros digitais que são calibrados para que a sua precisão de medição tenha deslocamento de 0,001mm.

A validação do modelo empregado no presente trabalho será através da comparação das cargas máximas obtidas pelo modelo numérico e simulado pelo software ANSYS, que utilizada o Método dos Elementos Finitos com a solução experimental. Na Tabela 3.15 são apresentados os resultados dos testes experimentais elaborados por Narayanam e Chow (1984).

Tabela 3.15 – Valores experimentais obtidos por Narayanan e Chow (1984).

PLACA	a=b (mm)	t (mm)	d (mm)	d/b	b/t	w0 (mm)	E (GPa)	σy (MPa)	P,ult (kN)
PL1A	125	1,615	0	0	77,40	0,229	210	323,3	39,32
CIR2a	125	1,615	25	0,2	77,40	0,229	210	323,3	37,46
CIR2b	125	1,615	25	0,2	77,40	0,097	210	323,3	38,7
CIR3a	125	1,615	37,5	0,3	77,40	0,136	210	323,3	33,94
CIR4a	125	1,615	50	0,4	77,40	0,304	210	323,3	29,57
CIR4b	125	1,615	50	0,4	77,40	0,127	210	323,3	28,39
CIR5a	125	1,615	62,5	0,5	77,40	0,279	210	323,3	27,35
CIR6	86	2,032	25	0,29	42,32	0,254	210	334,7	42,17
CIR7	86	1,615	25	0,29	53,25	0,229	210	323,3	26,18
CIR8	86	0,972	25	0,29	88,48	0,102	210	317,6	12,35
CIR9	86	0,693	25	0,29	124,10	0,051	210	322,8	7,33
CIR10	86	2,032	40	0,47	42,32	0,102	210	334,7	33,64
CIR11	86	1,615	40	0,47	53,25	0,279	210	323,3	22,14
CIR12	86	0,972	40	0,47	88,48	0,152	210	317,6	10,89
SQ2	125	1,615	25	0,2	77,40	0,097	210	323,3	33,48
SQ3	125	1,615	37,5	0,3	77,40	0,141	210	323,3	28,85
SQ4	125	1,615	50	0,4	77,40	0,113	210	323,3	25,52
SQ5	125	1,615	62,5	0,5	77,40	0,209	210	323,3	21,86

Nos ensaios elaborados por Narayanan e Chow (1984), os nós nos lados não carregados não foram restringidos e, por isso o acoplamento não é considerado na validação do modelo. A validação do modelo empregado no presente trabalho será através da comparação das cargas máximas obtidas pelo modelo numérico e simulado pelo software ANSYS, que utilizada o Método dos Elementos Finitos, com a solução experimental.

A Tabela 3.16 apresenta a carga última das placas perfuradas experimentais encontradas através do software ANSYS e os resultados obtidos por Narayanan e Chow (1984).

Tabela 3.16 – Capacidade de carga.

PLACA	Pult,exp(kN)	Pult,ANSYS(kN)	Pult,ANSYS/ Pult,exp	Diferença relativa (%)
PL1a	39,32	35,11	0,89	10,71
CIR2a	37,46	34,28	0,92	8,49
CIR2b	38,7	34,64	0,90	10,49
CIR3a	33,94	33,18	0,98	2,24
CIR4a	29,57	30,81	1,04	-4,19
CIR4b	28,39	31,18	1,10	-9,83
CIR5a	27,35	28,07	1,03	-2,63
CIR6	42,17	39,9	0,95	5,38
CIR7	26,18	28,14	1,07	-7,49
CIR8	12,35	12,55	1,02	-1,62
CIR9	7,33	7,19	0,98	1,91
CIR10	33,64	31,5	0,94	6,36
CIR11	22,14	23,07	1,04	-4,20
CIR12	10,89	11,21	1,03	-2,94
SQ2	33,48	34,01	1,02	-1,58
SQ3	28,85	31,88	1,11	-10,50
SQ4	25,52	29,36	1,15	-15,05
SQ5	21,86	26,44	1,21	-20,95

Observa–se que a subestimação ou superestimação pelo modelo numérico apresentou bons resultados, onde o erro relativo médio é de 0,0197 e coeficiente de variação de 0,0445.

A placa CIR3a é apresentada na Figura 3.24, que compara a solução experimental de Narayanan e Chow (1984) com os resultados obtidos através do ANSYS.

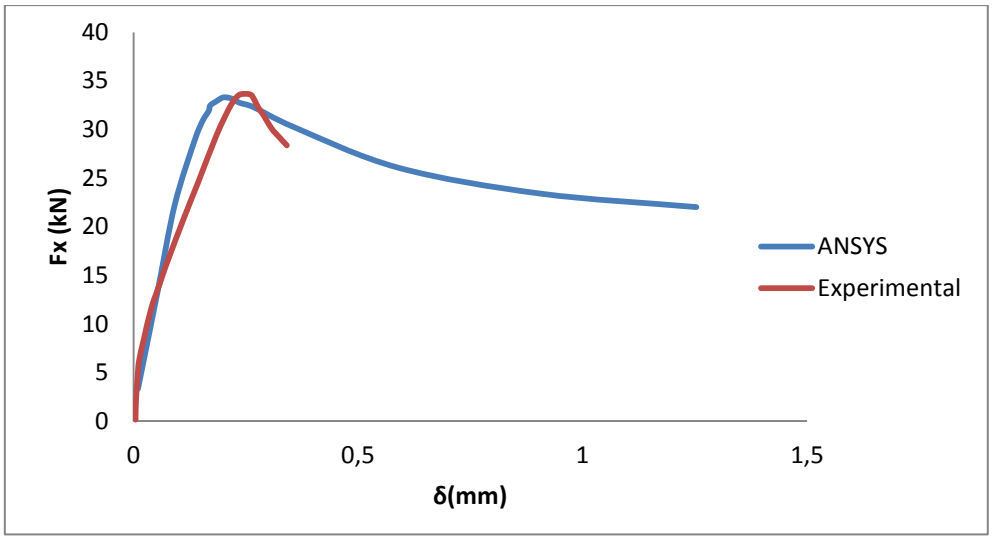

Figura 3.24 – Capacidade de carga da placa CIR3a.

Conclui–se que o modelo numérico que emprega o MEF consegue modelar o comportamento e prever a capacidade de carga de placas para as placas maciças e perfuradas (furo circular e quadrado central) com precisão satisfatória.

Já Correia (2013), analisou o comportamento mecânico de placas de aço perfuradas submetidas à flambagem elástica através de simulação numérica. Em uma das vertentes de sua investigação, Correia (2013) estudou três placas de mesma dimensão, porém com geometrias de furos diferentes.

A análise considerou variados valores de fração volumétrica para cada forma de furo. De acordo com Correia (2013), a variação volumétrica de placas perfuradas com furos losangulares centrais, pode ser definida pela Equação (3.15):

$$\phi = \frac{V_o}{V} = \frac{H_0 L_0}{2HL} \tag{3.15}$$

onde ϕ é a variação volumétrica, V_0 é o volume do furo, V é o volume total da placa sem furo, H_0 é a característica dimensional do furo na direção y e L_0 é a característica dimensional do furo na direção x, como pode ser observado na Figura 3.25.

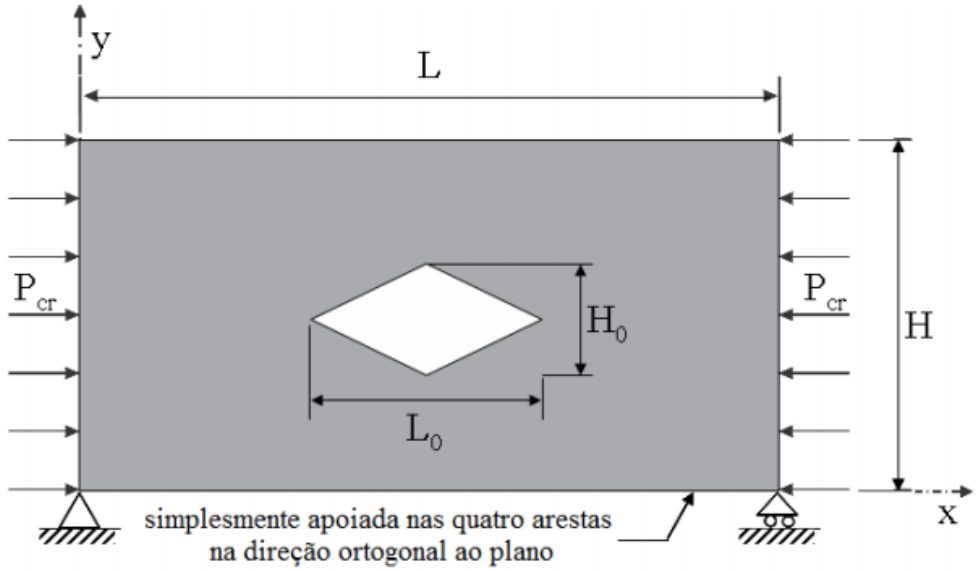

Figura 3.25 – Placa com furo losangular centrado (Correia, 2013).

Como se observa na Figura 3.26, Correia (2013) determinou para a placa com furo losangular centrado, a carga crítica adimensional de flambagem em função da relação H_0/L_0.

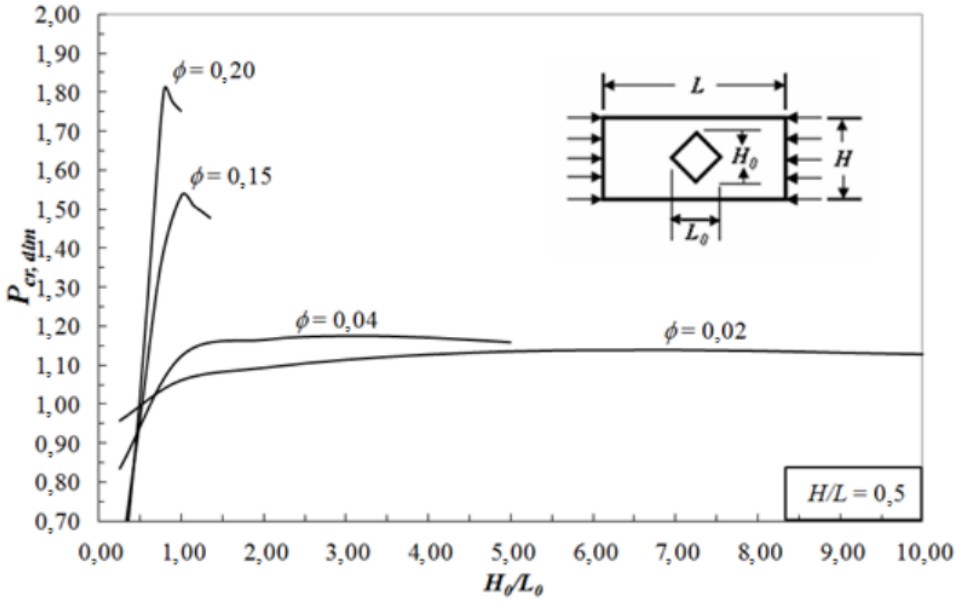

Figura 3.26 – Placa com furo losangular centrado: carga crítica adimensional em função da razão H_0/L_0 (Correia, 2013).

A validação do modelo empregado será através da comparação da carga crítica adimensional obtida pelo modelo numérico e simulado pelo software ANSYS com a solução proposta por Correia (2013).

Assim:

$$\phi = \frac{300 \times 266{,}67}{2 \times 1000 \times 2000} = 0{,}02 \tag{3.16}$$

E:

$$\frac{H_0}{L_0} = \frac{300}{266{,}67} = 1{,}125 \tag{3.17}$$

Com base nas Equações 3.16 e 3.17 e a Figura 3.26, o valor encontrado para a carga crítica adimensionalizada no modelo definido por Correia (2013) é igual a 1,081. A carga crítica adimensionalizada é definida por:

$$P_{cr,adm} = \frac{P_{cr,cf}}{P_{cr,sf}} \tag{3.18}$$

onde $P_{cr,adm}$ é a carga crítica de adimensionalizada, $P_{cr,cf}$ é a carga crítica da placa perfurada em kN e $P_{cr,sf}$ é a carga crítica da placa maciça (sem furo) em kN.

A Tabela 3.17 apresenta as características geométricas e os resultados obtidos das simulações numéricas para as placas PS (placa maciça) e PL (placa com furo losangular central).

Tabela 3.17 – Carga crítica ANSYS.

Placa	a (mm)	b (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	b_0 (mm)	b/t	E (GPa)	σy (Mpa)	P_{cr} (kN)
PS	2000	1000	10	0	0	100	210	323,3	753,85
PL	125	62,5	10	0	0	38,40	210	323,3	857,74

Desta forma:

$$P_{cr,adm} = \frac{857,74}{753,85} = 1,138 \tag{3.19}$$

Observa–se que o modelo numérico apresentou bom resultado, pois o erro relativo médio entre $P_{cr,adm}$ definido por Correia (2013) e $P_{cr,adm}$ do ANSYS é igual a 0,0527. Logo, o modelo numérico consegue modelar o comportamento e prever a capacidade de carga elástica de placas para as placas com furo losangular central com precisão satisfatória. A pesquisa de Correia (2013) não contemplou a análise inelástica de flambagem de placas perfuradas.

3.4 ESTUDO PARAMÉTRICO

As análises elásticas e inelásticas de flambagem foram realizadas para um grupo de 300 placas que possuem ou não perfurações centrais, submetidas à compressão uniaxial. A amostra foi dividida em:

- 30 placas sem furo;
- 90 placas com furo circular;
- 90 placas com furo quadrangular e;
- 90 placas com furo losangular.

As características geométricas e do material das placas estão descritas a seguir:

- *a*: comprimento, em mm;
- *b*: largura, em mm;
- *t*: espessura, em mm;
- *d*: diâmetro do furo (circular) ou lado do furo (quadrado e losangular), em mm;
- *E*: Módulo de elasticidade do aço igual a 210GPa;
- *v*: Coeficiente de Poisson igual a 0,3;
- *Material*: Aço AH36, em que a tensão de escoamento σy = 355MPa.

Quanto ao material, são empregados, em plataformas marítimas de extração de petróleo e gás, torres de transmissão e na construção naval, aços de alta resistência e baixa liga em que σy se limita entre 310 e 355MPa.

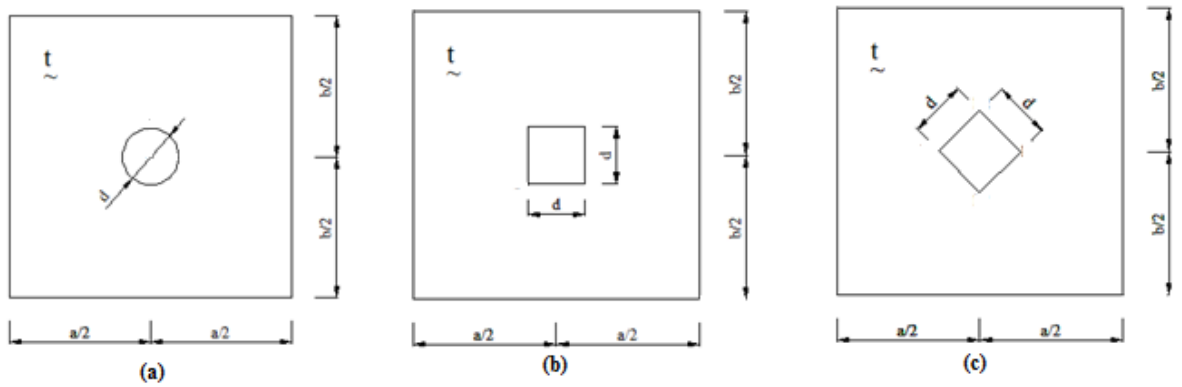

Figura 3.27 – Placa de aço com furo central: (a) Circular; (b) Quadrado; (c) Losangular.

As simulações foram distribuídas em seis grupos, onde cada um apresenta variações paramétricas em relação:

- ao tamanho da placa;
- à espessura da placa e;
- ao tamanho do furo.

A largura *b* é constante e igual a 900mm. Já o comprimento *a* varia entre 900mm, 1800mm, 2700mm, 3600mm, 4500mm e 5400mm. Quanto à espessura *t*, a variação compreende o intervalo de 10mm, 12,5mm, 15mm, 19mm e 22mm. E o parâmetro *d* varia entre 180mm, 360mm e 540mm.

O índice de esbeltez β é definido por Paik (2007) através da expressão:

$$\beta = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \tag{3.20}$$

As Tabelas 3.18, 3.19 e 3.20 apresentam os parâmetros das placas, bem como as relações *b/d* e *a/b*.

Tabela 3.18 – Variações paramétricas em relação ao comprimento.

GRUPO	a (mm)	b (mm)	a/b
1	900	900	1
2	1800	900	2
3	2700	900	3
4	3600	900	4
5	4500	900	5
6	5400	900	6

Tabela 3.19 – Variações paramétricas em relação à espessura.

t (mm)	B	b/t
10	2,19	90
12,5	1,75	72
15	1,46	60
19	1,15	47,37
22	0,99	40,91

Tabela 3.20 – Variações paramétricas em relação ao diâmetro do furo.

d (mm)	d/b
0	0,0
180	0,2
360	0,4
540	0,6

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. FLAMBAGEM ELÁSTICA

4.1.1. Influência do furo

Na análise linear, ao contrário do comportamento inelástico, não é possível estudar os deslocamentos ao longo do comprimento *a*, logo se obtém apenas o valor da carga crítica para a flambagem. Neste caso, verifica–se a relação entre a tensão crítica $\sigma_{cr} = {}^{N_{cr}}/_{t}$, das placas perfuradas ou não, com a variação do tamanho do furo, esbeltez da placa e a relação a/b.

As Figuras 4.1 a 4.9, apresentam as relações para três placas que possuem espessura de 10mm, 15mm e 22mm, com um único furo central no qual varia de tamanho e geometria. Os índices de esbeltez das placas variam entre β = 2,19, β = 1,46 e β = 0,99, logo são classificadas como finas, moderadamente espessas e espessas. Deve ser observado que o índice de esbeltez de placas de navios e estruturas offshore é de 1,50 a 3,50 (Paik, Thayamballi e Kim, 2001).

a. Furo circular

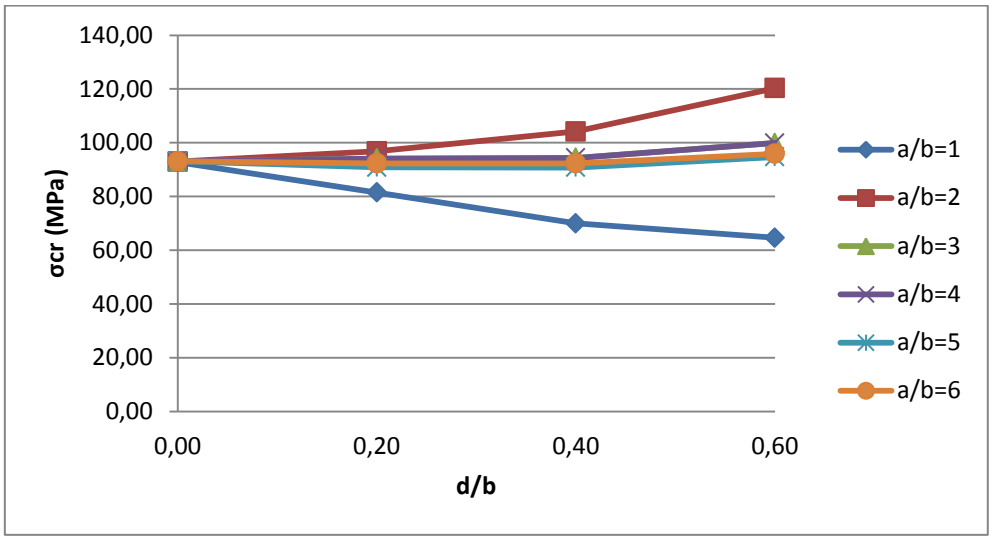

Figura 4.1 – Influência do furo circular na placa quando *t*=10mm.

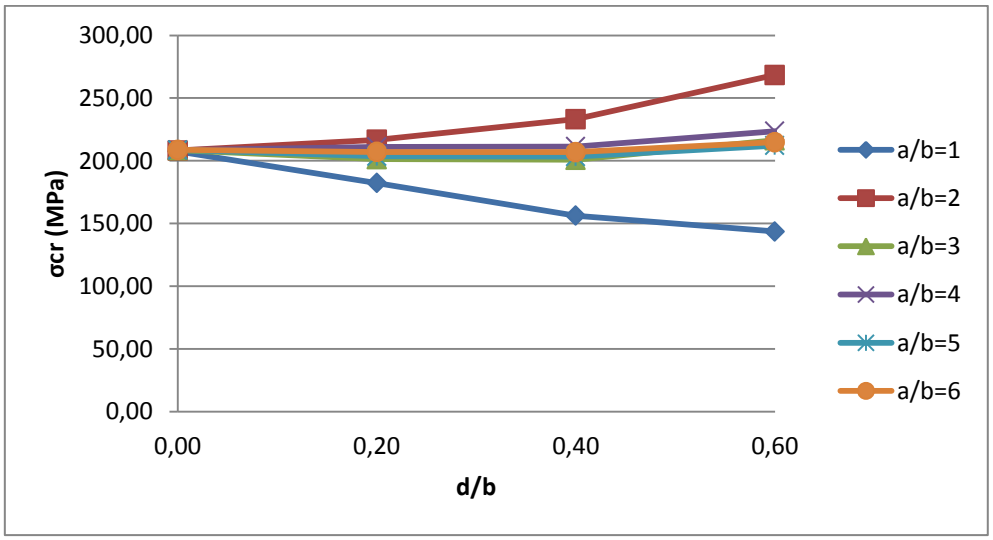

Figura 4.2 – Influência do furo circular na placa quando *t*=15mm.

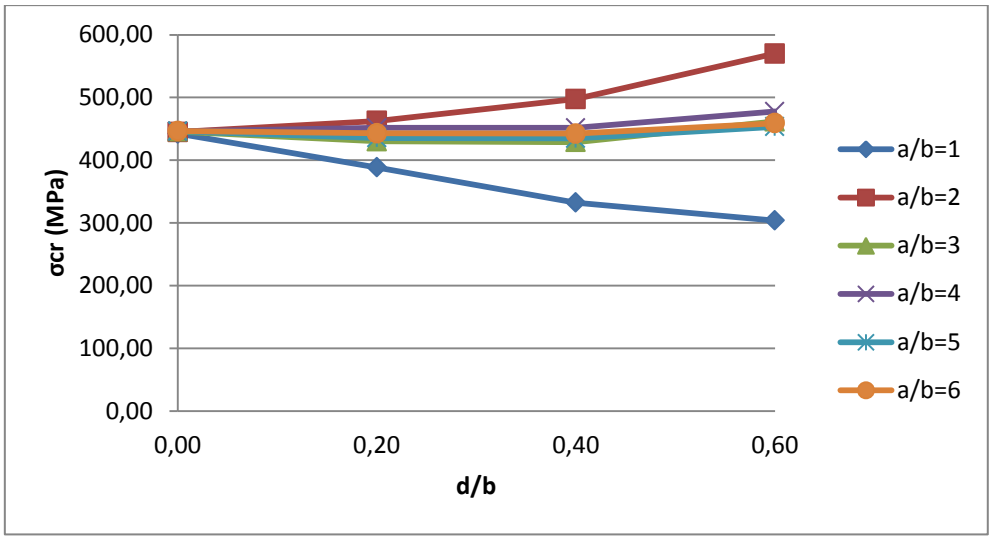

Figura 4.3 – Influência do furo circular na placa quando *t*=22mm.

B. Furo quadrado

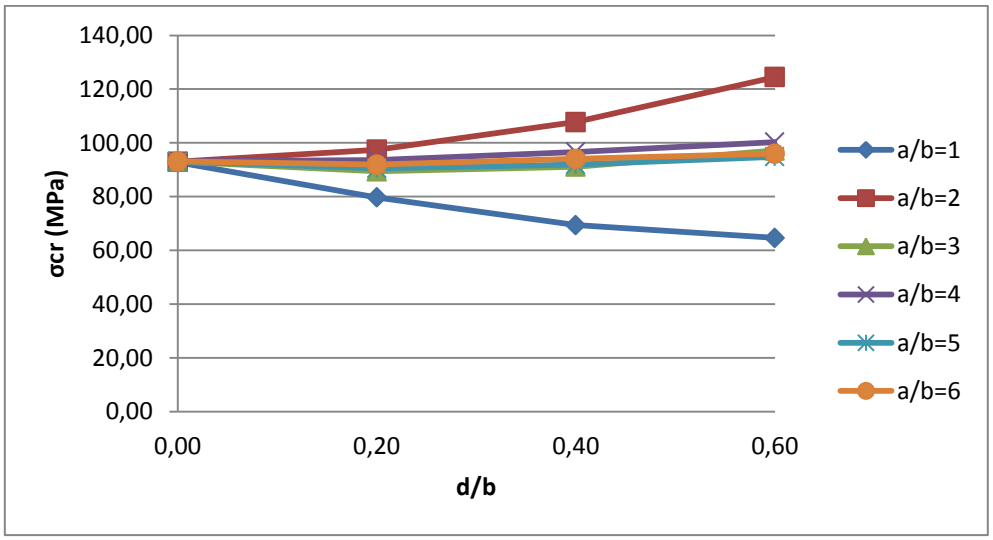

Figura 4.4 – Influência do furo quadrado na placa quando *t*=10mm.

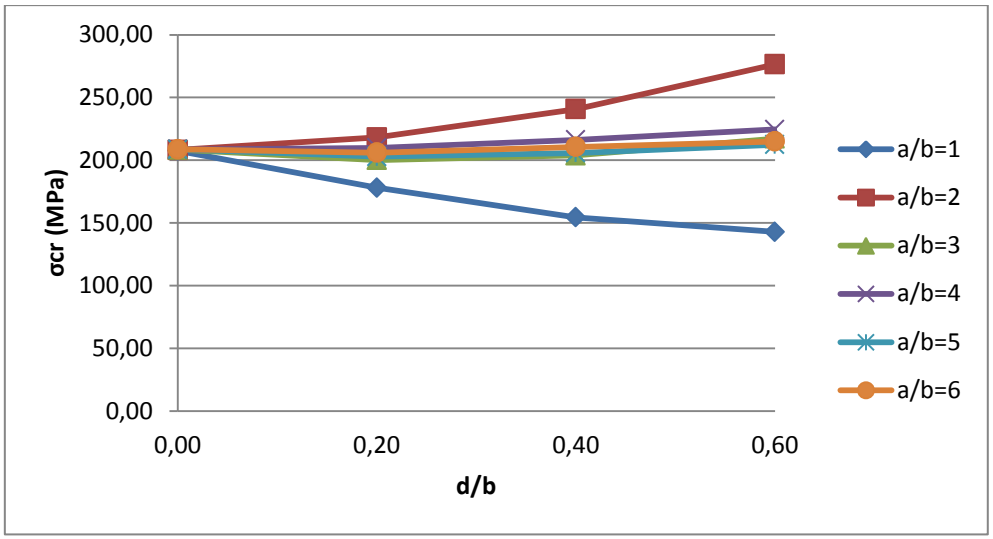

Figura 4.5 – Influência do furo quadrado na placa quando *t*=15mm.

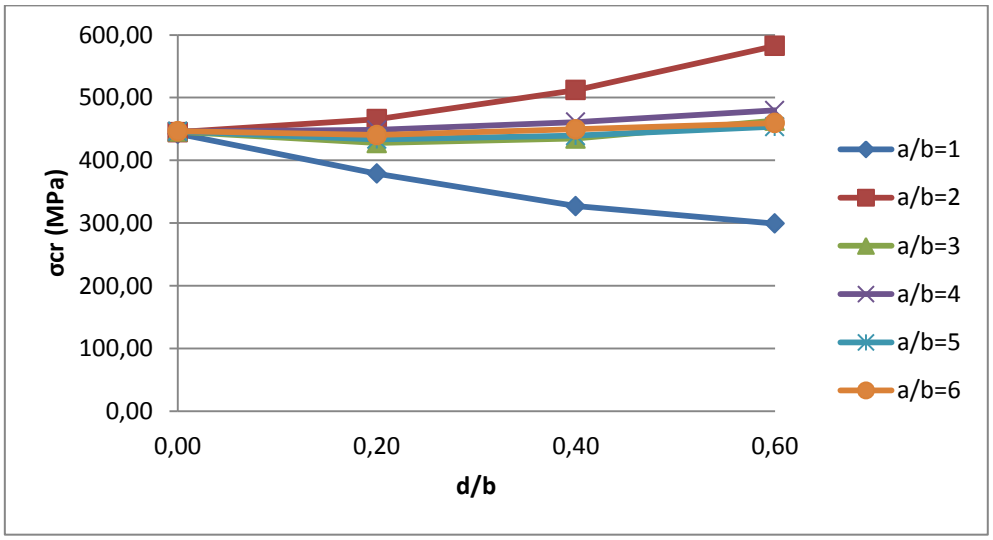

Figura 4.6 – Influência do furo quadrado na placa quando *t*=22mm.

c. Furo losangular

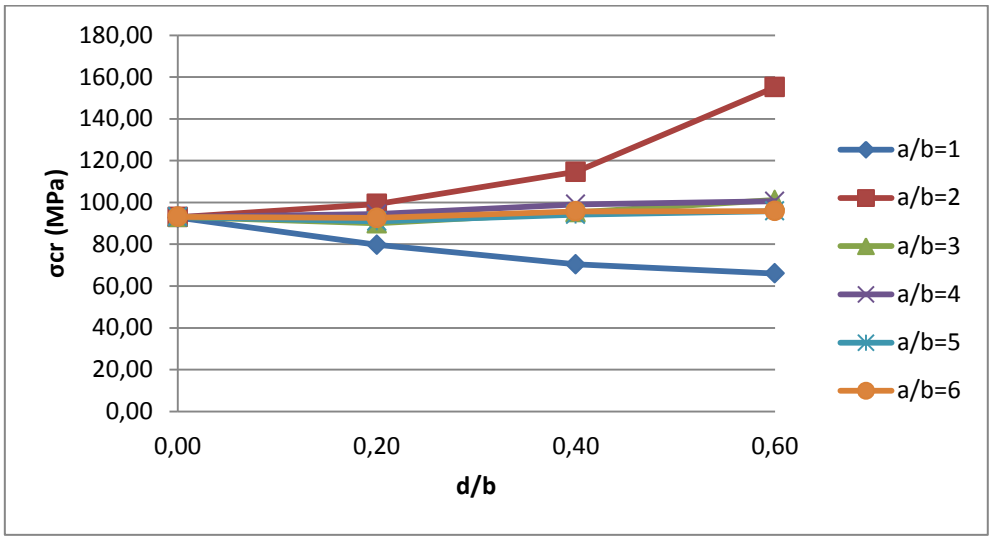

Figura 4.7 – Influência do furo losangular na placa quando *t*=10mm.

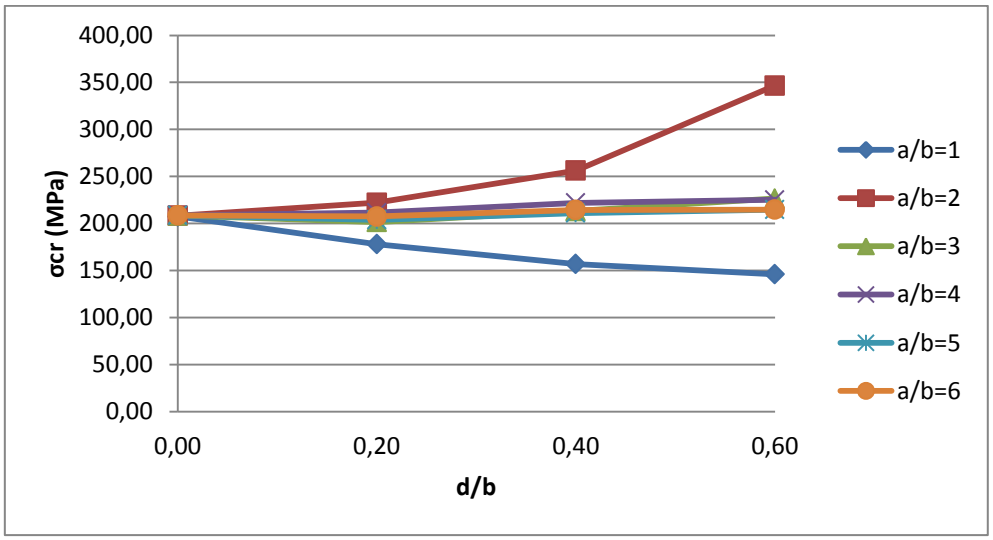

Figura 4.8 – Influência do furo losangular na placa quando *t*=15mm.

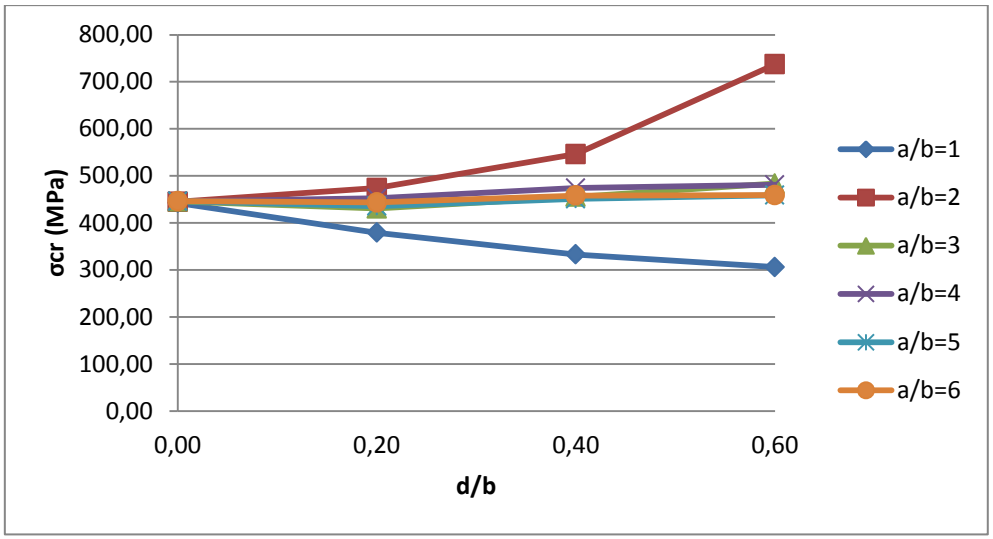

Figura 4.9 – Influência do furo losangular na placa quando *t*=22mm.

Observa-se nas Figuras 4.1 a 4.9 que o comportamento mecânico não depende da espessura da placa e, sim das características geométricas, tanto da placa como do furo. Nota-se também que, para a relação $^{a}/_{b}$=1, quanto maior for o furo, independentemente da geometria, menor é a carga crítica da placa quanto à flambagem elástica. Tal comportamento não se verifica para as outras relações *a/b*.

Conforme Real e Isoldi (2011), na Figura 4.10 é apresentado o modo de flambagem de placas quadradas, ou seja, a relação $^{a}/_{b}$=1, que possuem perfurações circulares centradas. Para qualquer tamanho do furo, a imagem indica a formação de uma única meia onda. Portanto, como o centro da placa coincide com o centro do meio comprimento de onda, quando o furo nesta região aumenta, a rigidez da placa diminui, resultando numa diminuição da carga crítica.

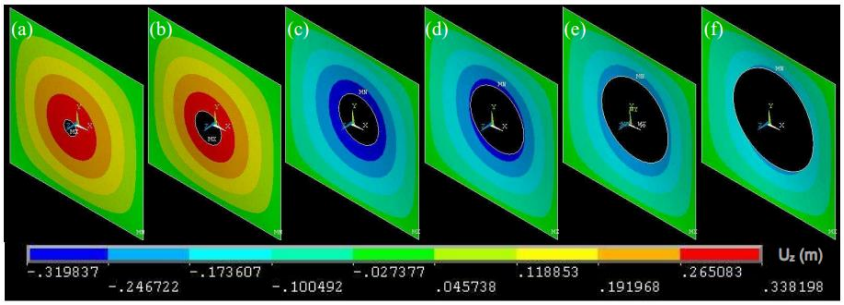

Figura 4.10 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação *a/b*=1 e *d/b*: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011).

Já as placas perfuradas que possuem relação $^{a}/_{b}$=2 , o comportamento mecânico melhora, de acordo com os resultados apresentados nas Figuras 4.1 a 4.9. O estudo aponta uma carga crítica maior a medida que o tamanho do furo aumenta. Esta tendência pode ser explicada quando se considera o modo de flambagem da placa, isto é, a resistência à deformação aumenta devido a uma redistribuição de tensões em direção às bordas laterais de apoio da placa.

Quando a relação *d/b* aumenta, o modo de flambagem passa de duas meias ondas para três, explicando o aumento da carga crítica. Em uma análise de flambagem de valor próprio, apenas a carga crítica pode ser determinada com precisão. O modo de flambagem também pode ser avaliado através dos autovetores associados a cada autovalor, mas apenas a forma da superfície de curva pode ser estimada. Como no Método dos Elementos Finitos, a tensão em um ponto é em função do deslocamento, neste ponto, a distribuição de tensões não pode ser avaliada por um autovalor na análise da flambagem. O modo de flambagem de placas em que a relação $^{a}/_{b}$ = 2 é apresentado na Figura 4.11.

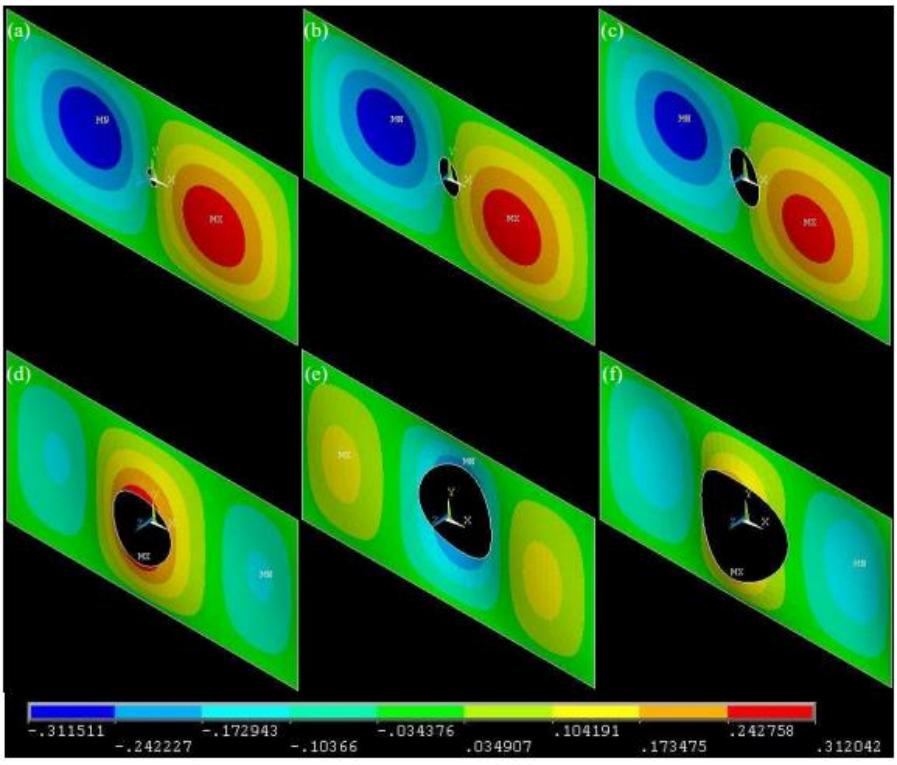

Figura 4.11 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação *a/b*=2 e *d/b*: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011).

No entanto, para um determinado modo de flambagem, pode ser elaborada a hipótese em que a região da placa que apresenta os maiores deslocamentos deve ser submetida às tensões mais elevadas, mesmo que as elas não possam ser determinadas. Este comportamento é observado em placas quadradas com furo circular, tal como é mostrado na Figura 4.10. Esta hipótese será testada mais adiante na análise não–linear, em que é imposta à placa uma imperfeição inicial a fim de se determinar o campo de tensões real.

Para as placas perfuradas em que $^{a}/_{b}$=3 (Figura 4.12), são observados, para os casos em que *d/b* igual a 0,1, 0,2 e 0,3, que o furo coincide com a região em que os deslocamentos são maiores, ou seja, na meia onda interna. Porém, quando *d/b* é 0,4, 0,5 e 0,6, os deslocamentos externos às meias ondas são iguais ou superiores aos da meia onda interna. Isto pode indicar que ocorre uma transferência de forças da parte central para os bordos e que a placa possui grande capacidade de carga. Este comportamento permite o aumento da carga crítica da placa, como se observou nas Figuras 4.1 a 4.9.

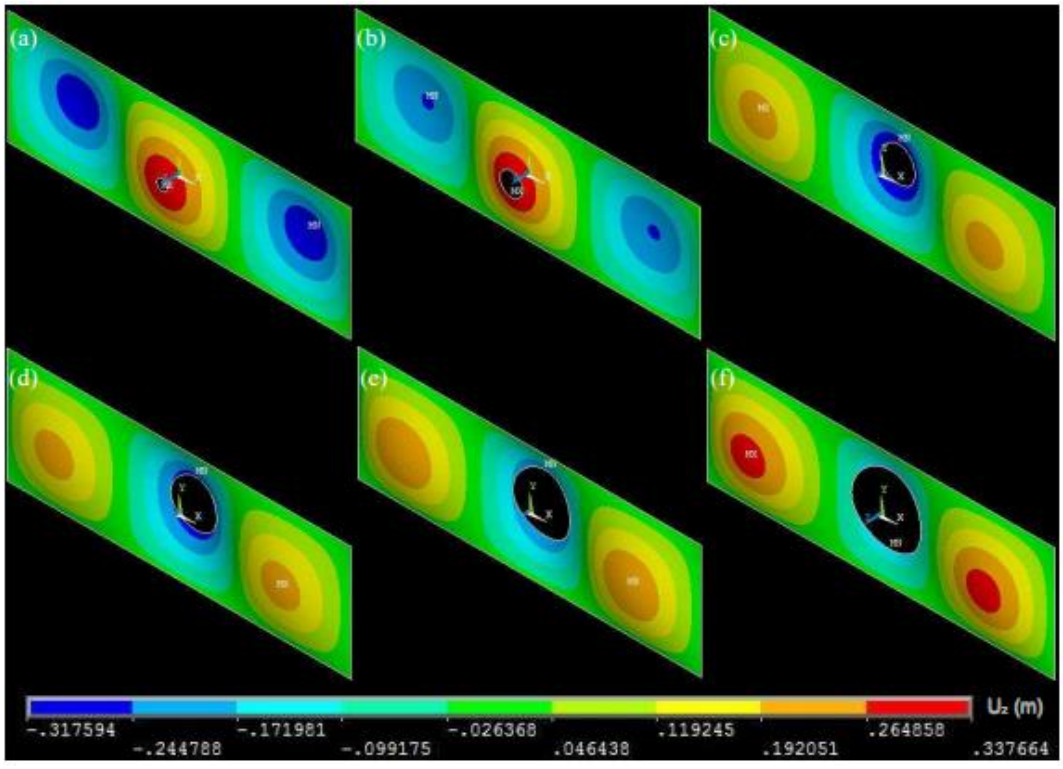

Figura 4.12 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação *a/b*=3 e *d/b*: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011).

Para as placas perfuradas em que $^{a}/_{b} = 4$ (Figura 4.13), quando $^{d}/_{b}$=0,1 a placa com furo tem praticamente a mesma carga crítica que a placa maciça, ou seja, sem furo. Este comportamento se deve ao fato de que o furo é pequeno em relação às dimensões da placa e está localizado em uma região com pequenos deslocamentos. Quando a relação de *d/b* aumenta para 0,2, a inflexão local altera de quatro meias ondas para cinco, e os deslocamentos são maiores na parte central da placa e vai diminuindo em direção aos bordos. Esta mudança de quatro para cinco meias ondas no modo de flambagem explica o aumento na carga crítica da placa, pois reduz a rigidez na parte central. Para os casos em que *d/b* é 0,4, 0,5 e 0,6, os deslocamentos nas meias ondas centrais diminuem, enquanto os deslocamentos nas extremidades aumentam, logo a carga crítica se eleva novamente.

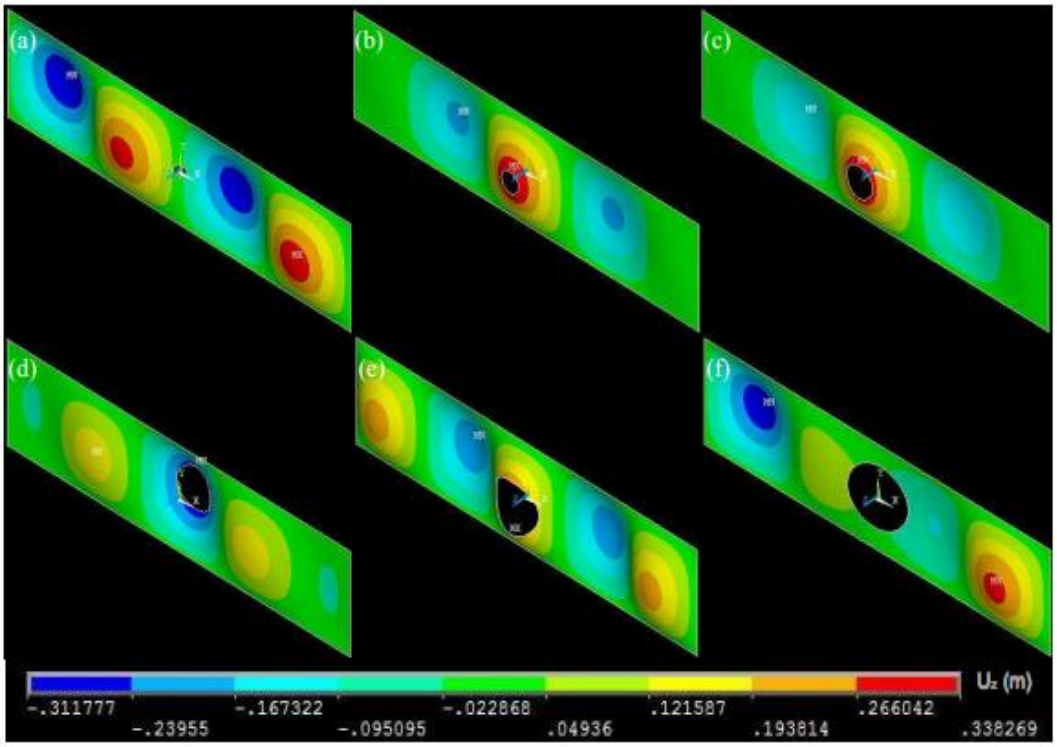

Figura 4.13 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação *a/b*=4 e *d/b*: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011).

O modo de flambagem, para as placas perfuradas em que $^{a}/_{b} = 5$ (Figura 4.14), é formado por cinco meias ondas. Quando *d/b* é igual a 0,1, 0,2 e 0,3, os deslocamentos são maiores na região central da placa e vai diminuindo em direção aos bordos. Para os casos em que *d/b* vale 0,4, 0,5 e 0,6, os deslocamentos nas meias ondas centrais diminuem, enquanto os

deslocamentos nas extremidades se elevam. Este comportamento explica a redução da carga crítica em um primeiro momento e depois o seu aumento (Figuras 4.1 a 4.9).

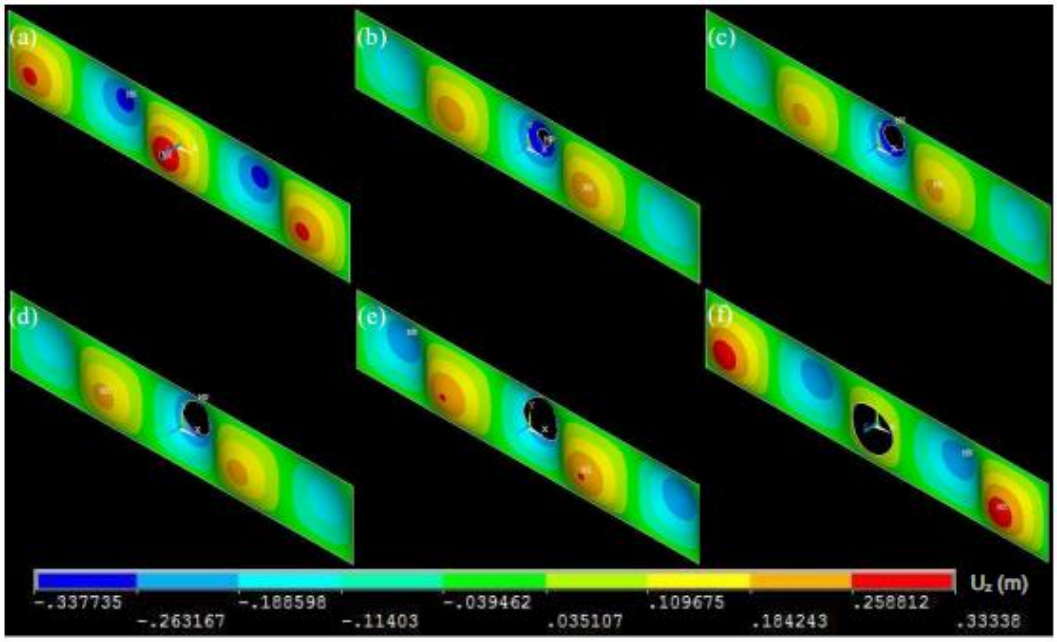

Figura 4.14 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação *a/b*=5 e *d/b*: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011).

As Figuras 4.1 a 4.9 apontaram que a carga crítica, para as placas com relação *a/b* = 6, não varia significativamente à medida que o tamanho do furo aumenta. Este comportamento se deve ao fato de que estas placas possuem modo de flambagem elástico formado por seis meias ondas e o furo central está localizado em uma região de pequenos deslocamentos. Logo, mesmo com o aumento do furo, a capacidade de carga da placa se mantém constante (Figura 4.15).

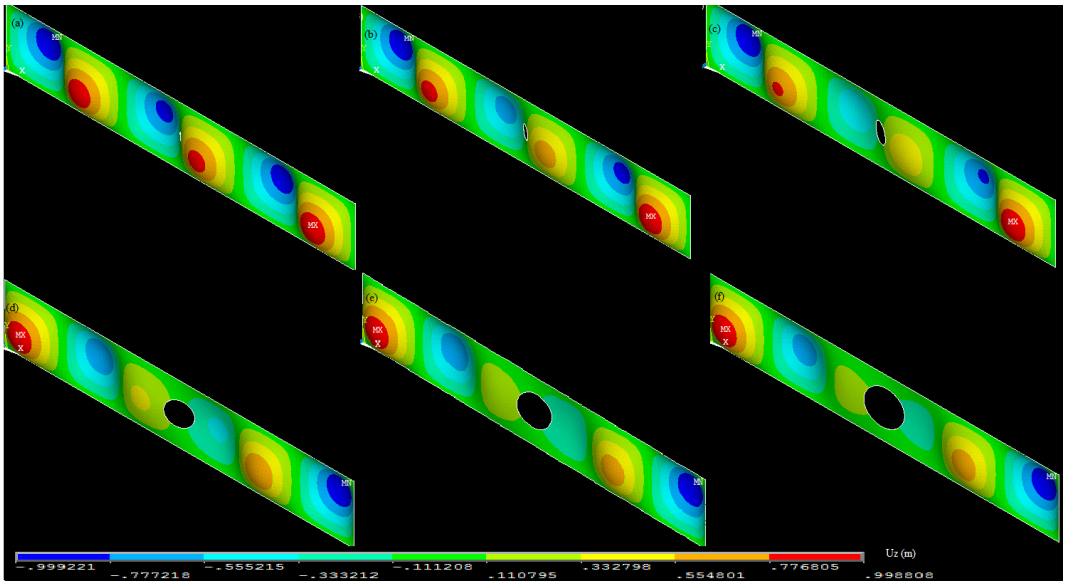

Figura 4.15 – Modo de flambagem de placa com furo circular centrado, em que a relação *a/b*=6 e *d/b*: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60.

Cabe destacar que os resultados obtidos no presente trabalho para a flambagem elástica estão de acordo com os apresentados por El-Sawy e Nasmy (2001) e são equivalentes para os três tipos de furo, o circular, quadrangular e losangular.

4.1.2. Efeito da esbeltez

A carga de ruptura por flambagem de uma placa é muito influenciada pela sua esbeltez. As Figuras 4.16 a 4.33 apresentam os resultados lineares considerando a relação entre a razão da tensão crítica e da tensão de escoamento do material com o tamanho do furo.

a. Furo circular

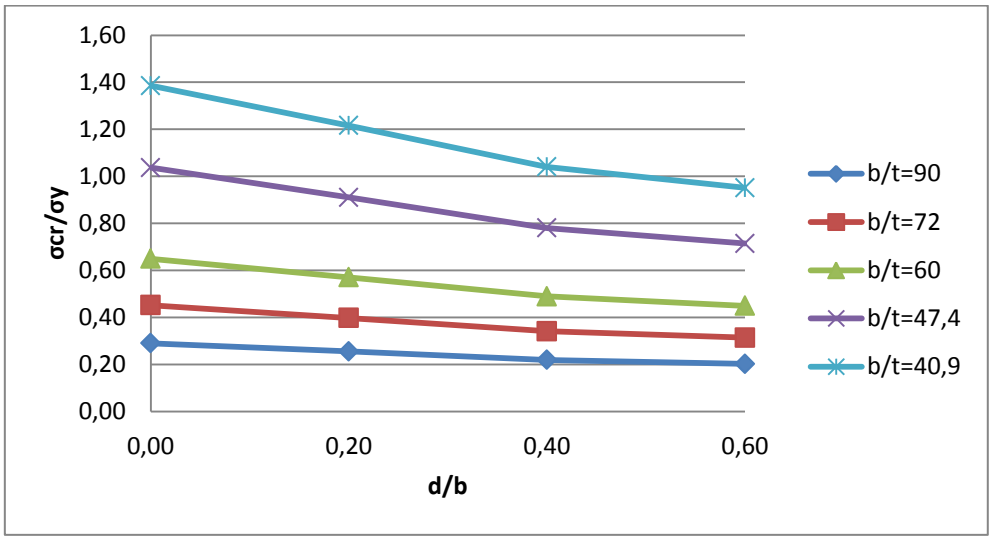

Figura 4.16 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=1.

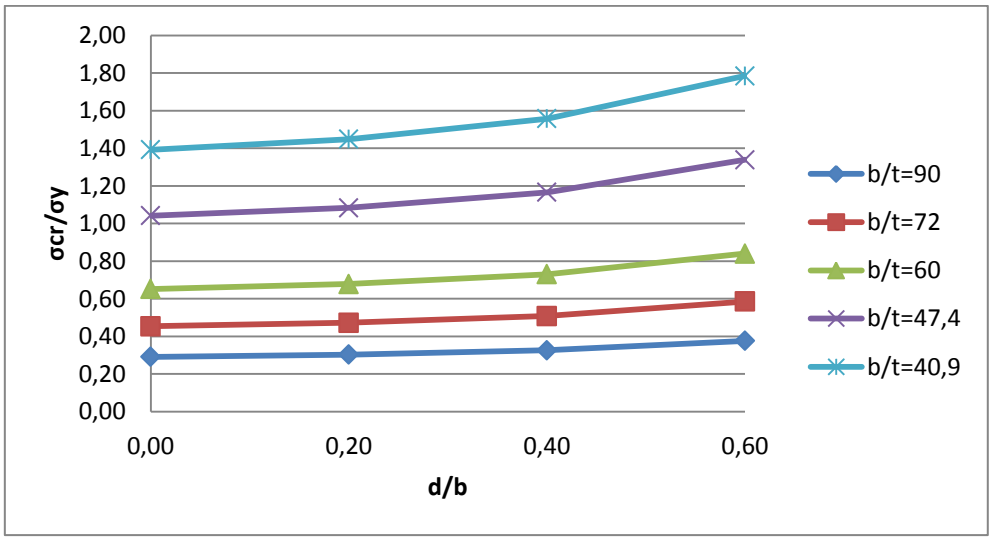

Figura 4.17 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=2.

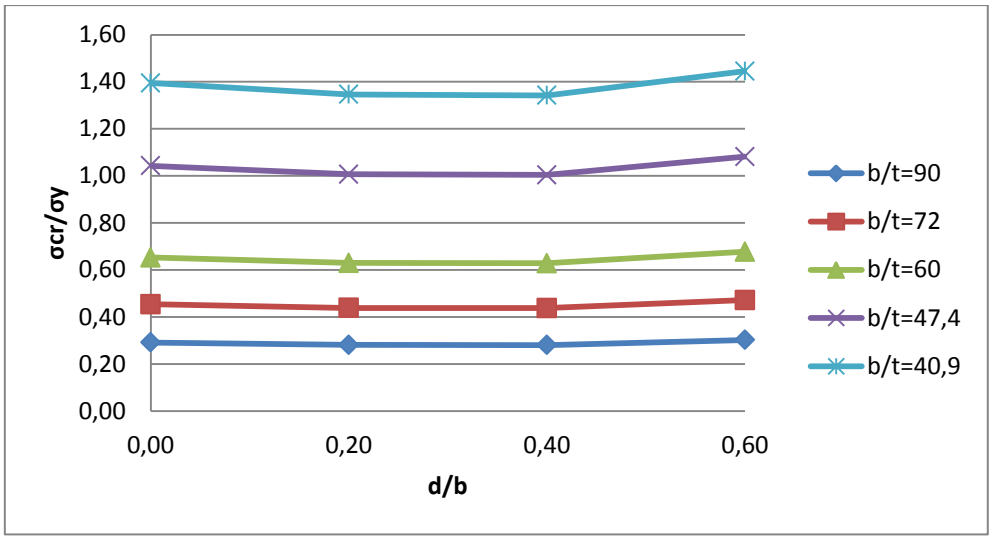

Figura 4.18 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=3.

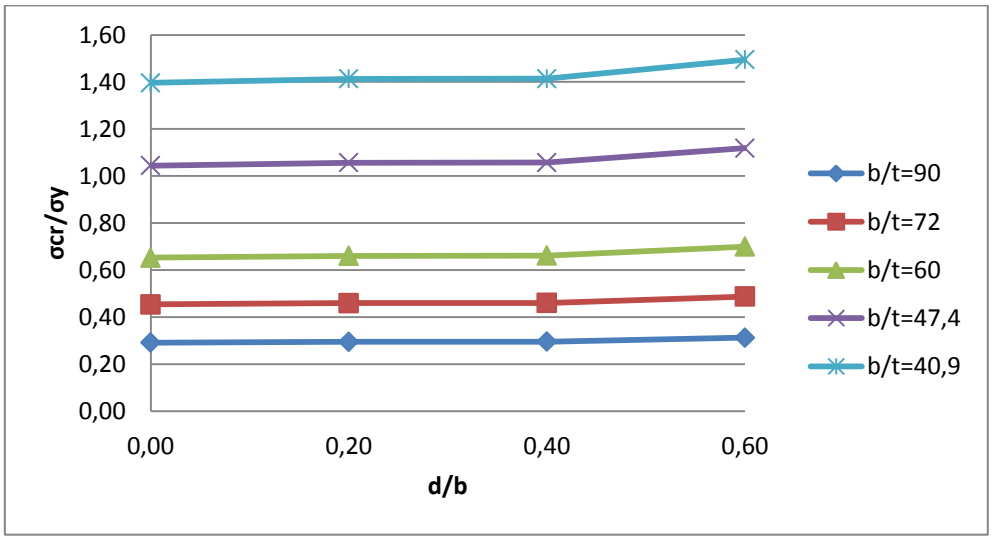

Figura 4.19 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=4.

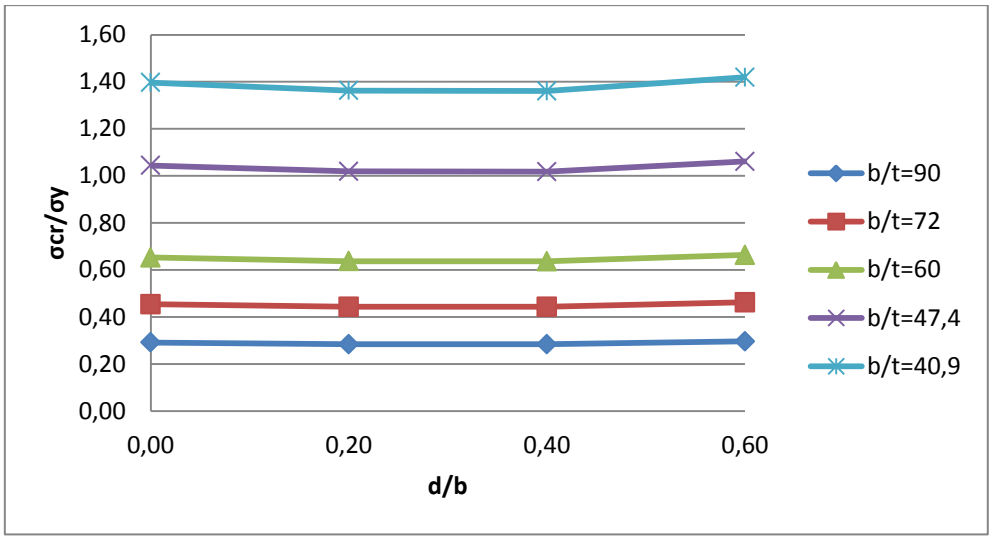

Figura 4.20 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=5.

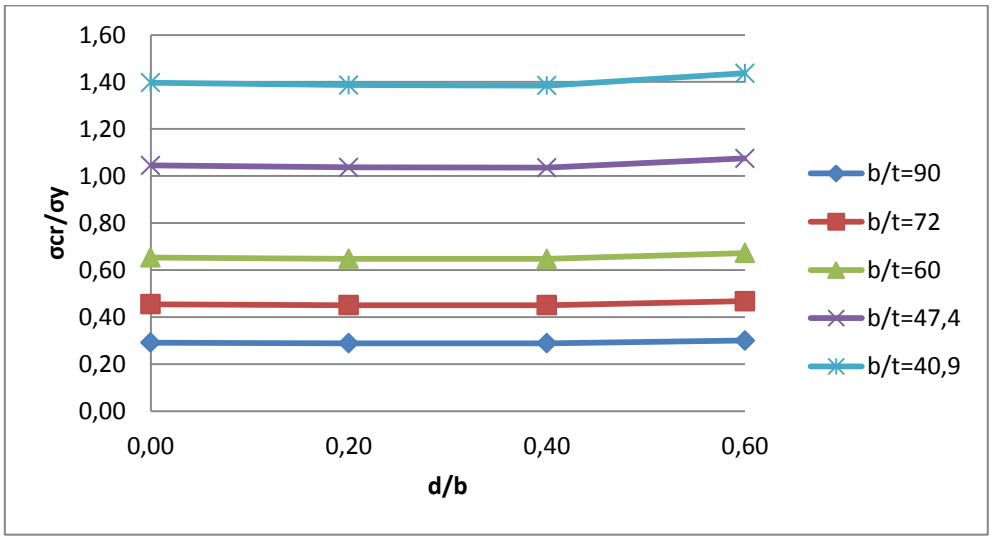

Figura 4.21 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=6.

B. Furo quadrado

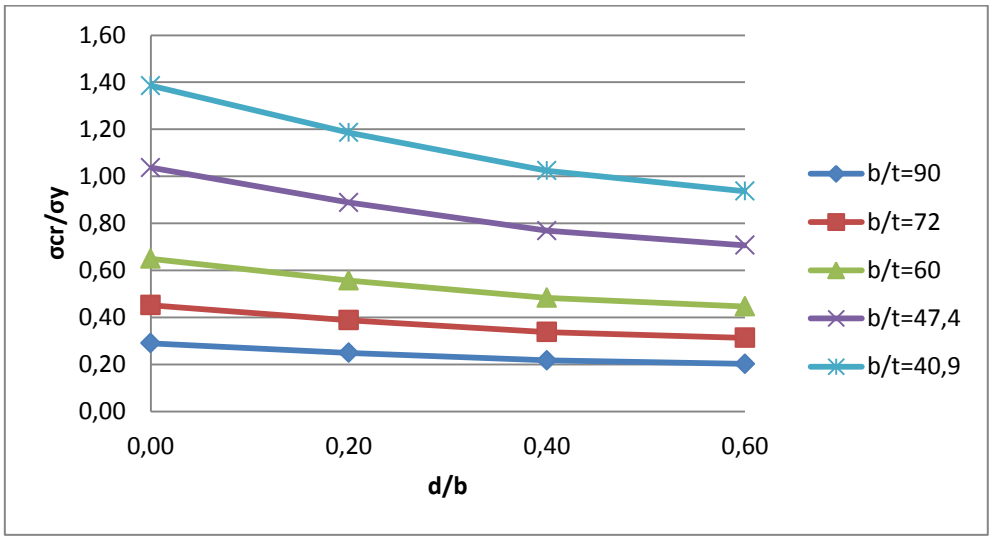

Figura 4.22 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=1.

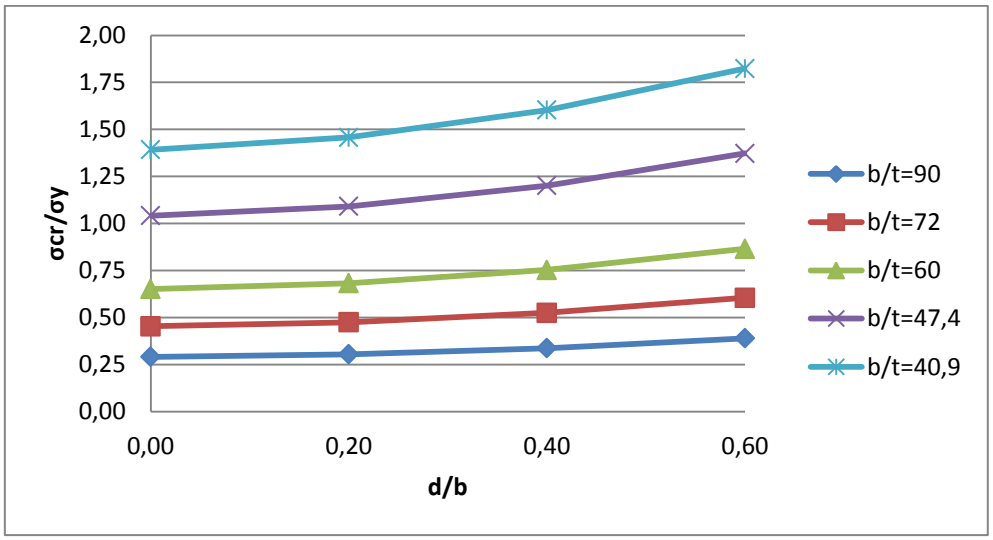

Figura 4.23 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=2.

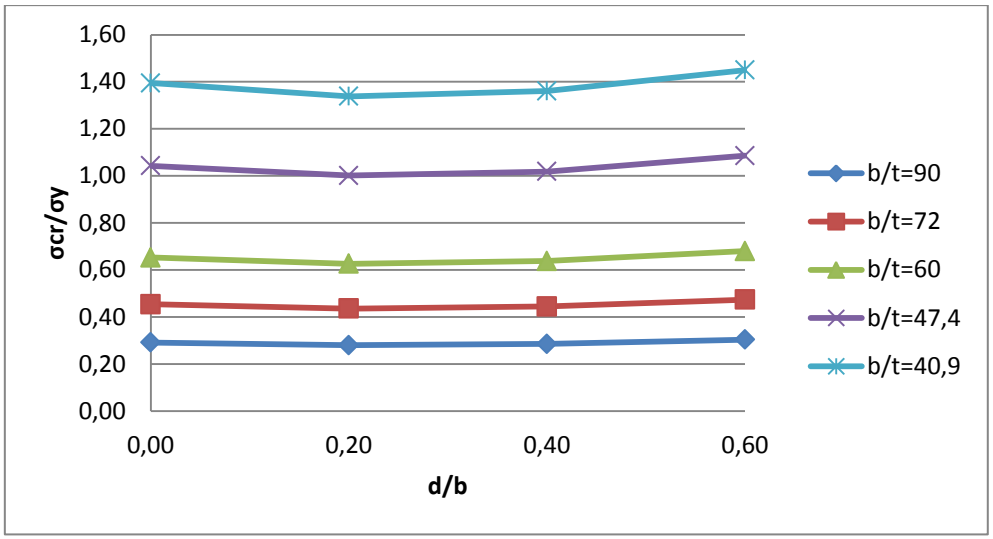

Figura 4.24 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=3.

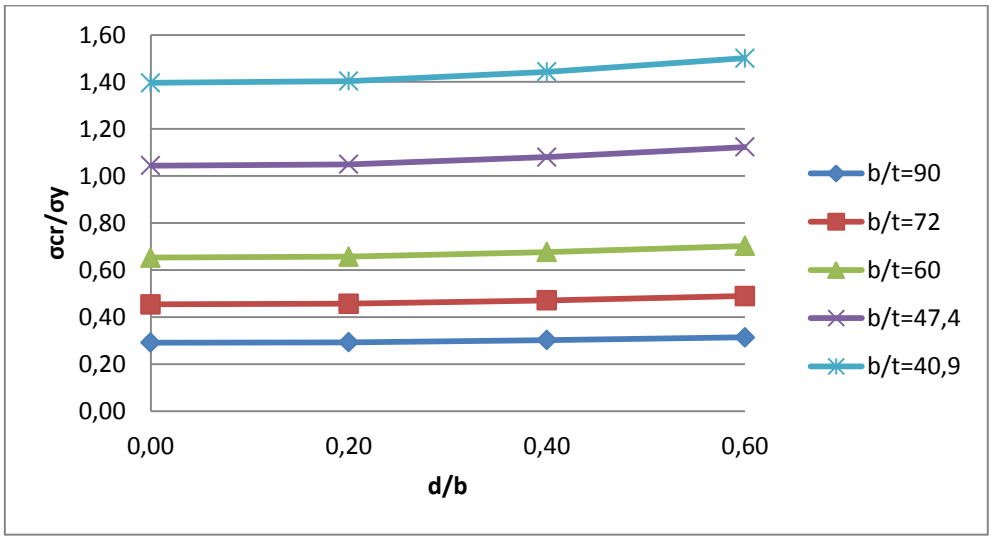

Figura 4.25 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=4.

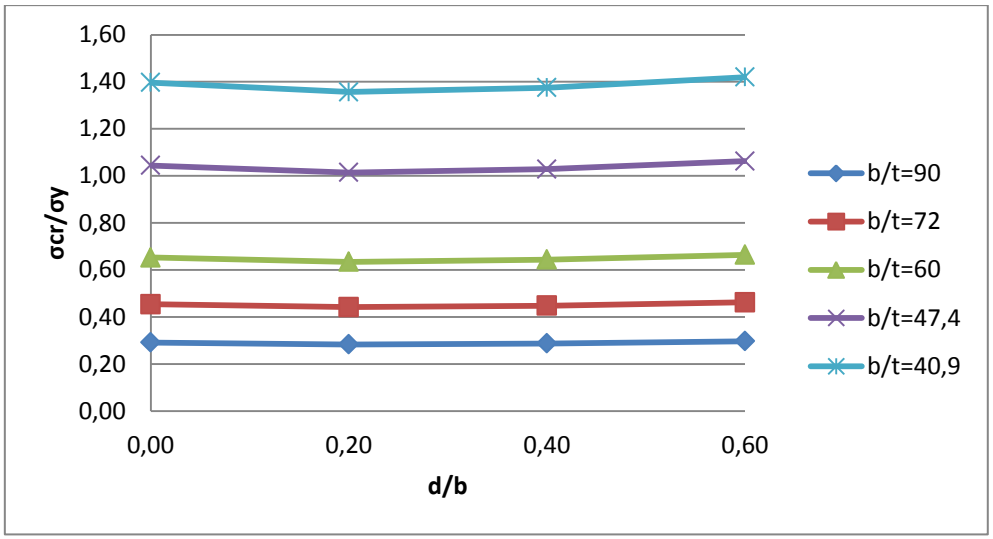

Figura 4.26 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=5.

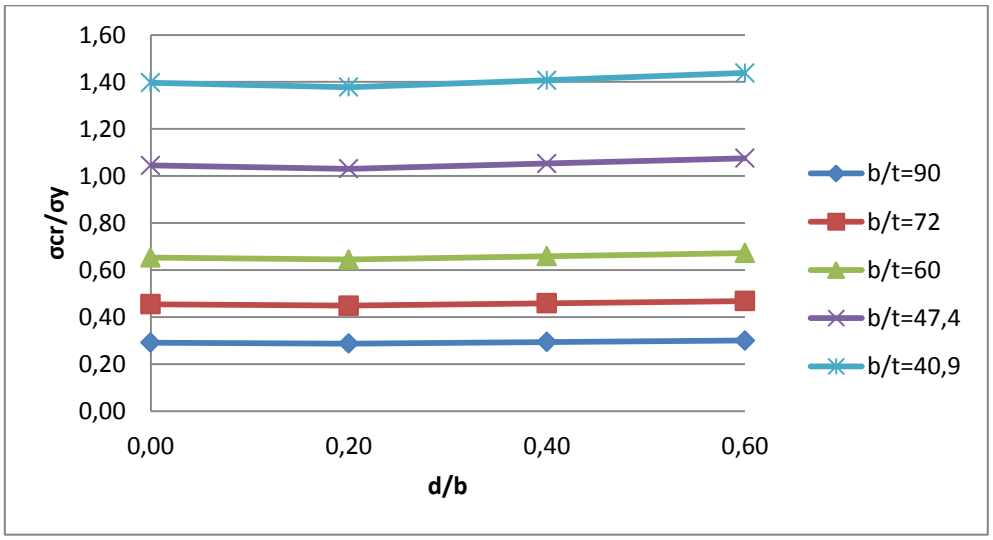

Figura 4.27 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=6.

c. Furo losangular

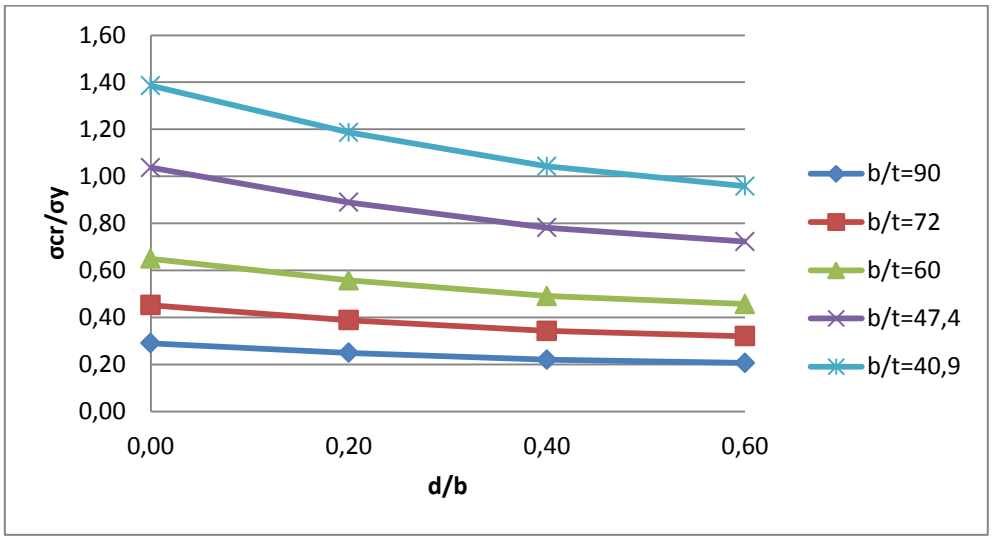

Figura 4.28 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=1.

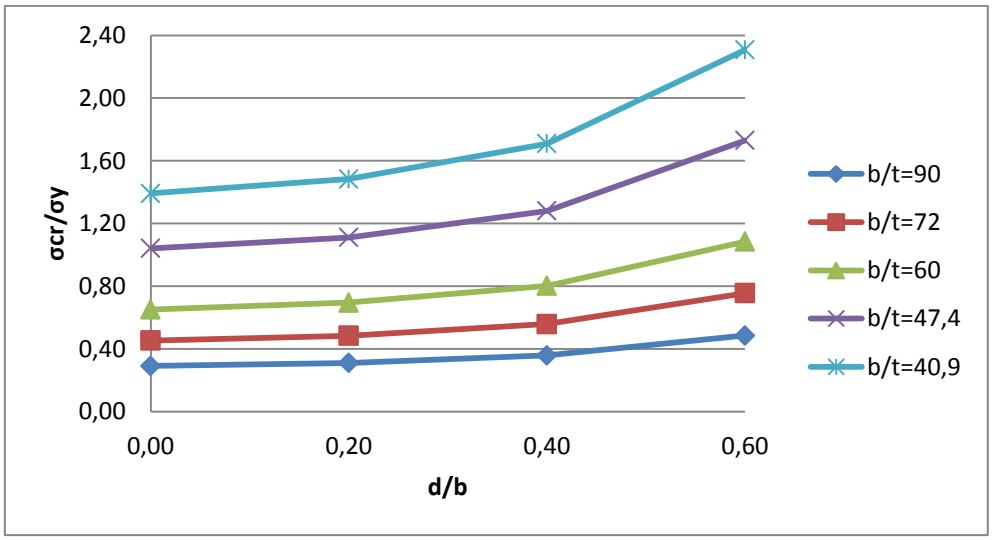

Figura 4.29 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=2.

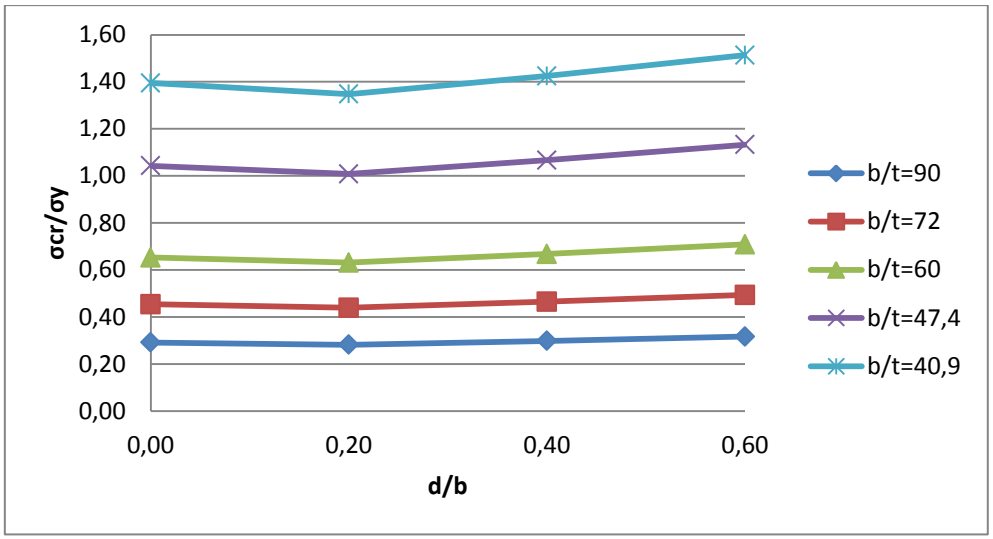

Figura 4.30 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=3.

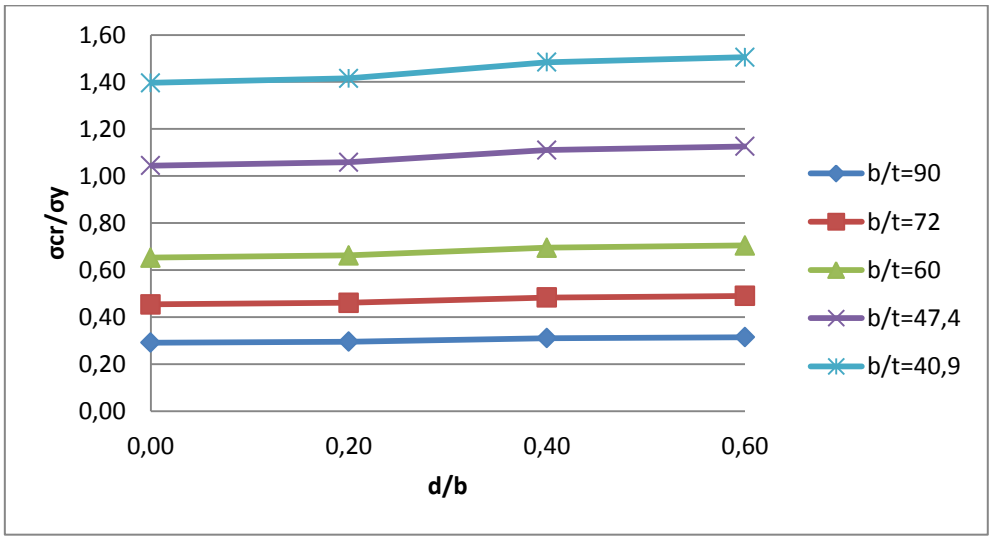

Figura 4.31 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=4.

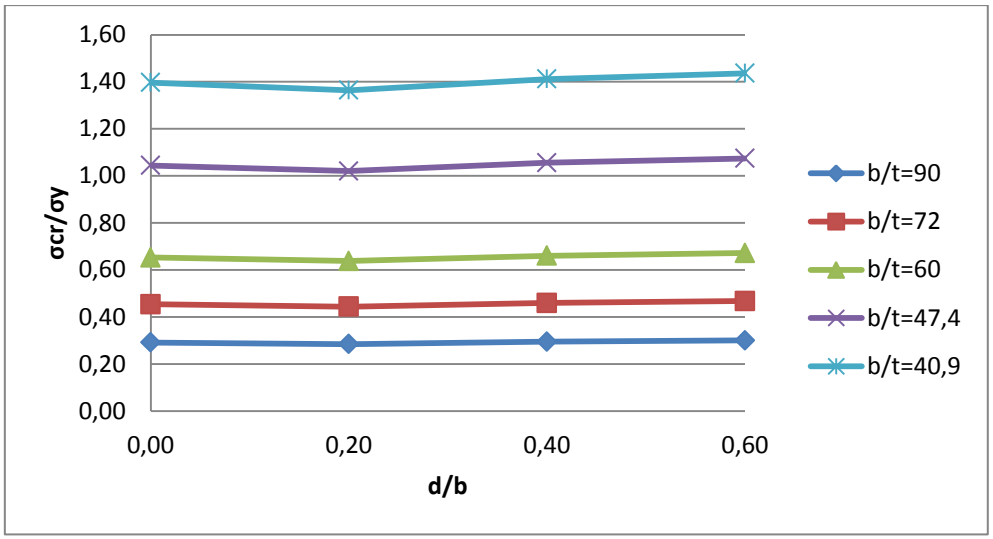

Figura 4.32 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=5.

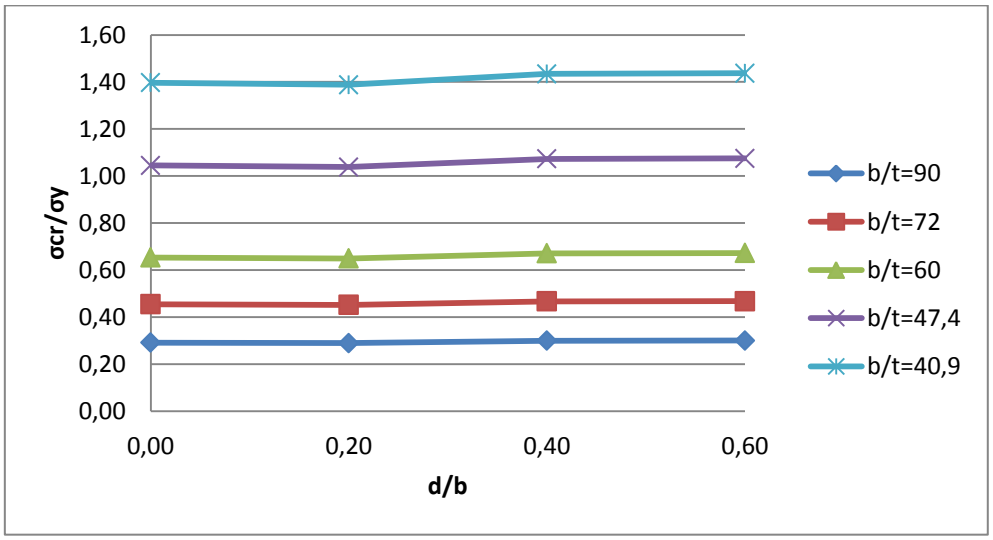

Figura 4.33 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=6.

Verifica–se nas Figuras 4.16 a 4.33 que, independentemente do tipo de furo, quanto menor o índice de esbeltez, ou seja, maior a espessura da placa, maior será a sua carga crítica. Para todos os casos foi observado que a relação *a/b* influencia no modo de flambagem da placa.

Para as placas com relação $^{a}/_{b} = 1$ a relação $^{\sigma_{cr}}/_{\sigma_y}$ diminui à medida que o tamanho do furo aumenta. Já as placas em que $^{a}/_{b} = 2$ tem a sua capacidade de carga elevada ao passo que o furo também aumenta. Quanto às demais relações $^{a}/_{b}$, o furo não influencia significativamente na carga crítica.

4.1.3. Variação na proporção entre os parâmetros *a* e *b*

Nas Figuras 4.34 a 4.48 são apresentados os resultados lineares obtidos dos testes realizados com a variação no parâmetro de proporção *a/b* das placas.

a. Furo circular

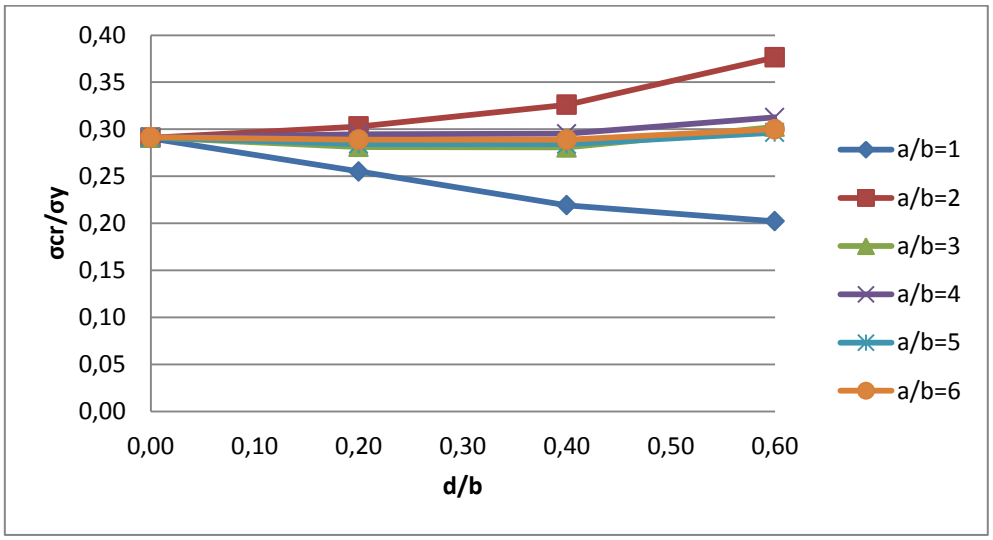

Figura 4.34 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=10mm.

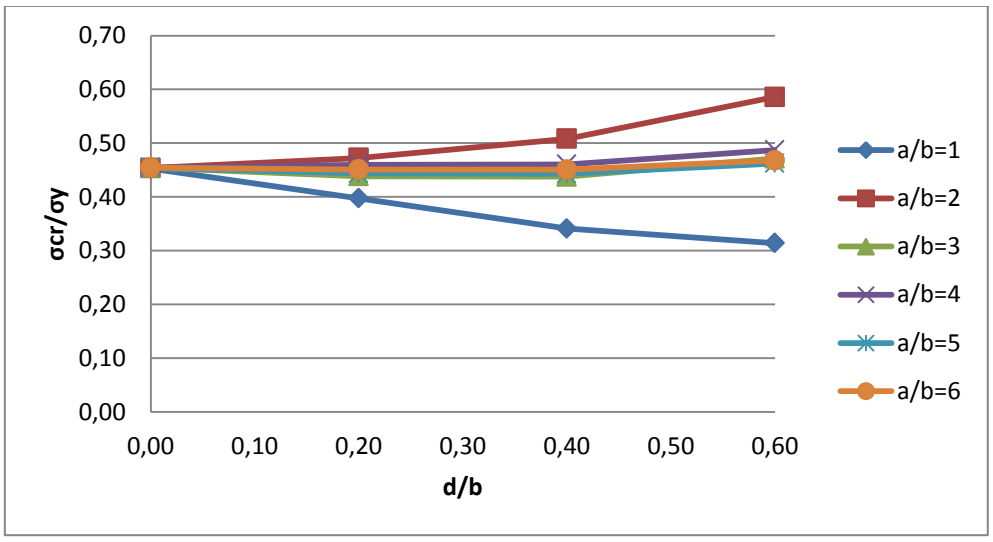

Figura 4.35 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=12,5mm.

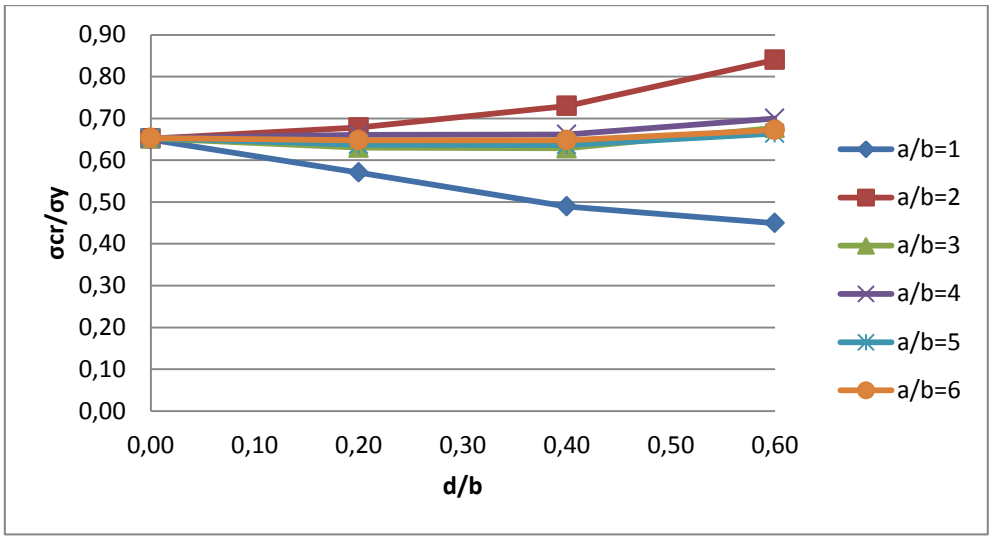

Figura 4.36 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=15mm.

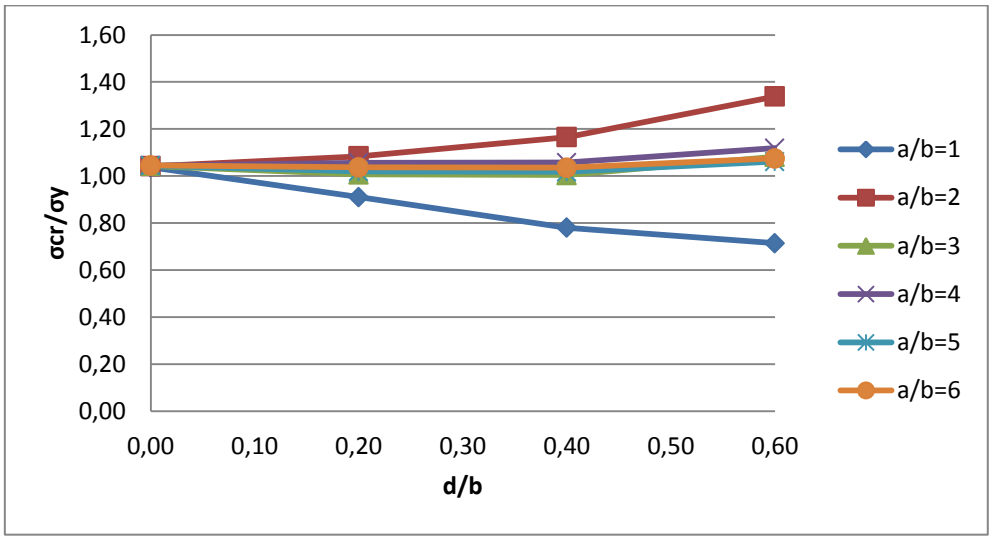

Figura 4.37 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=19mm.

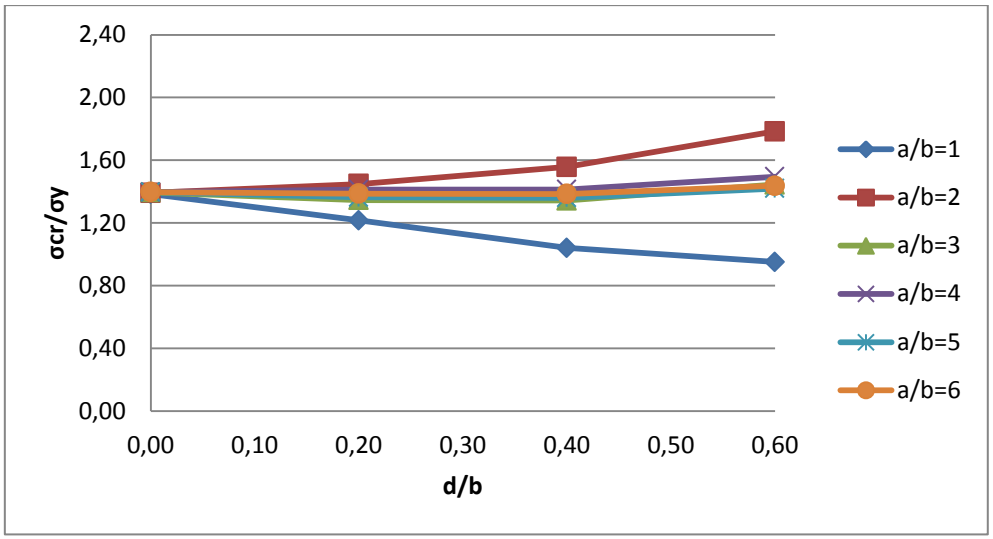

Figura 4.38 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=22mm.

b. Furo quadrado

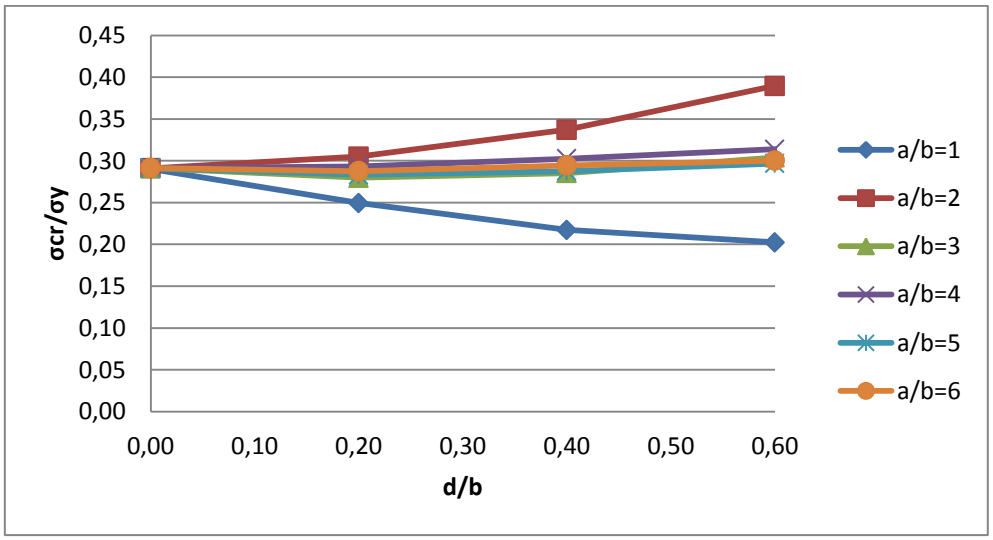

Figura 4.39 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=10mm.

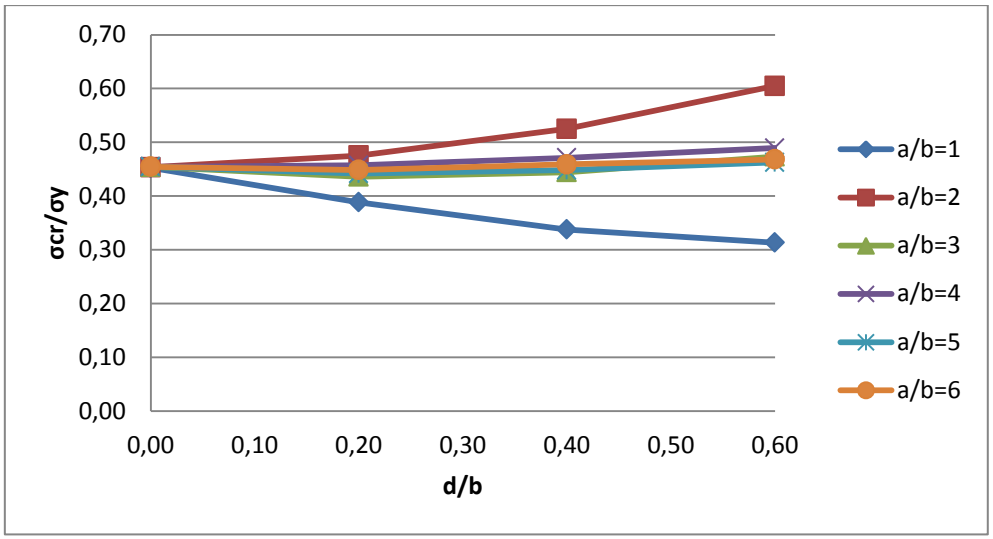

Figura 4.40 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=12,5mm.

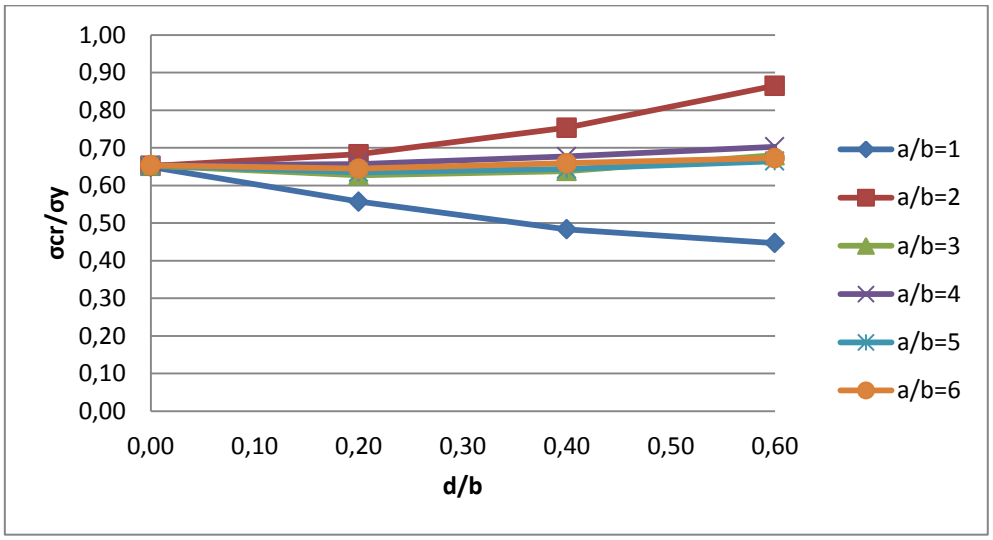

Figura 4.41 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=15mm.

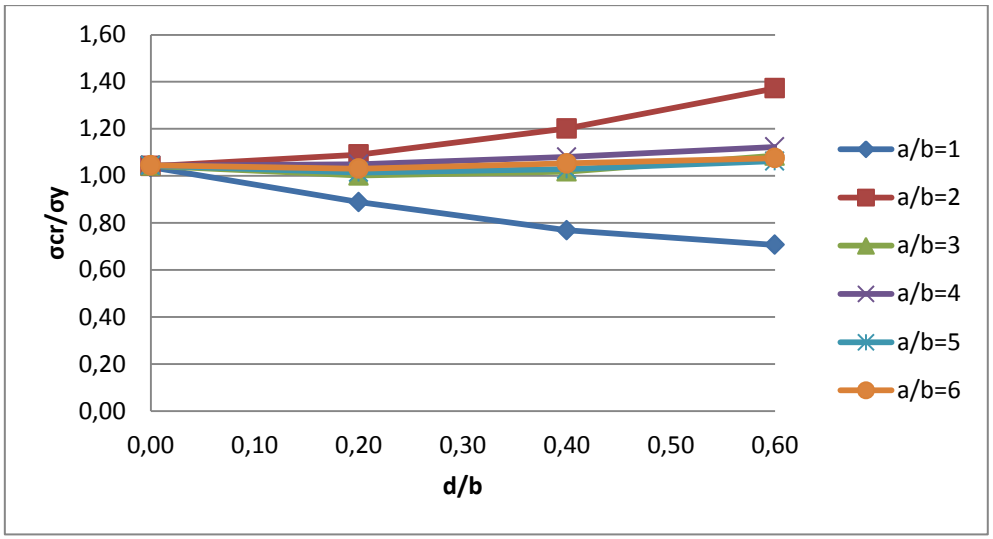

Figura 4.42 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=19mm.

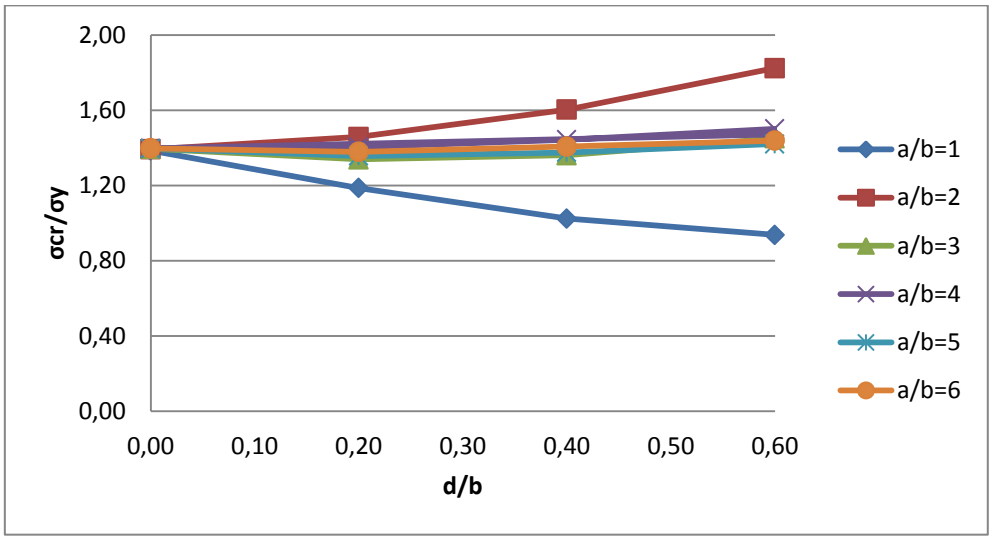

Figura 4.43 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=22mm.

C. Furo losangular

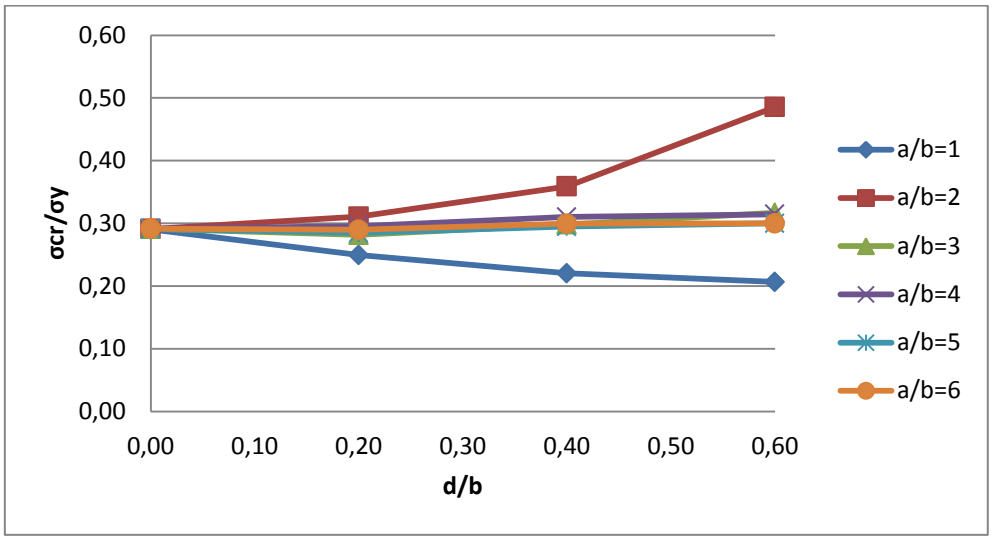

Figura 4.44 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=10mm.

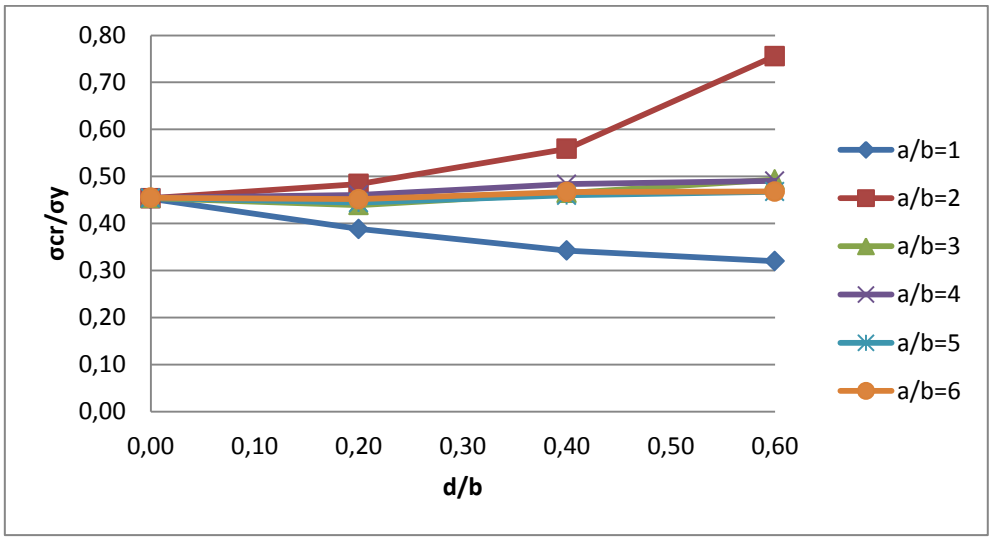

Figura 4.45 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=12,5mm.

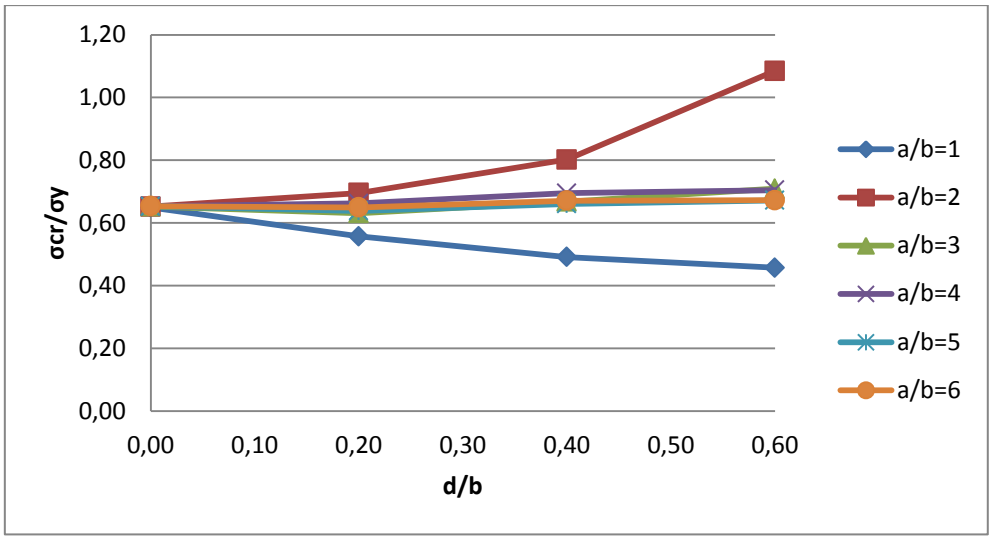

Figura 4.46 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=15mm.

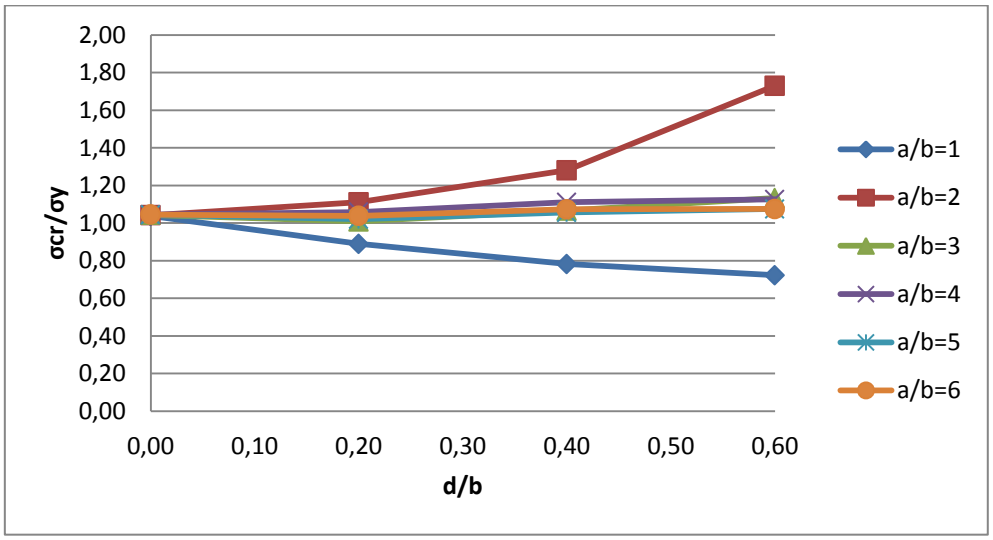

Figura 4.47 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=19mm.

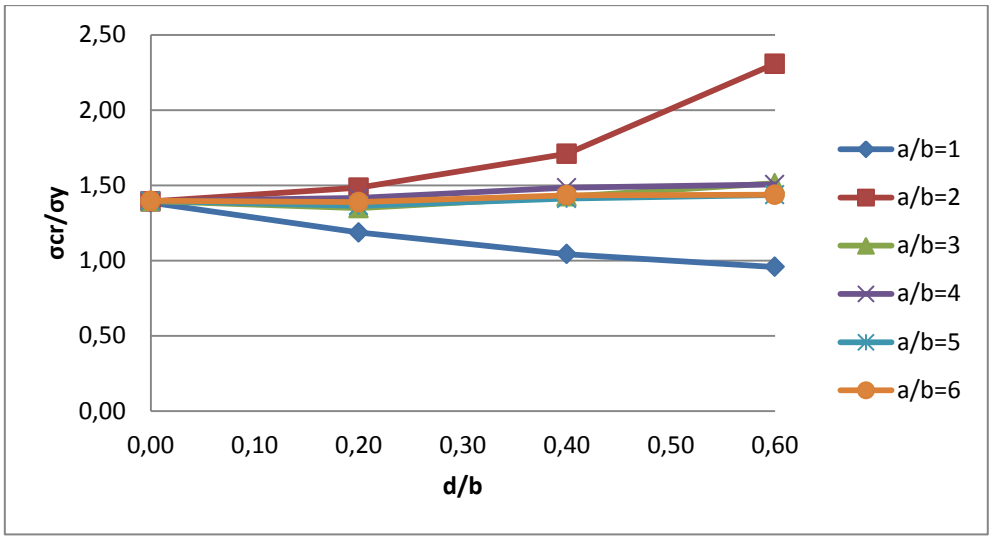

Figura 4.48 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=22mm.

Nota-se nas Figuras 4.34 a 4.48 que, independente do tipo de furo e da espessura da placa, todas as placas apresentam o mesmo comportamento mecânico. As simulações apontaram que, quanto à variação dos parâmetros das placas, quando a relação $^{a}/_{b}$=1, a resistência à flambagem diminui à medida que o furo amplia. Entretanto, quando $^{a}/_{b}$=2 a carga crítica se eleva com o aumento do furo. Quanto às outras relações *a/b*, a variação dos parâmetros da placa não influência na força última de flambagem.

4.2. FLAMBAGEM INELÁSTICA

4.2.1. Influência do furo

As Figuras 4.49 a 4.57 apresentam a relação entre as tensões normais médias σ_x obtidas através da divisão da força última determinada pelo programa ANSYS e a área da seção transversal da placa $b \times t$ e as deformações na direção x (εx), decorrente dos incrementos de deslocamento Ux ao longo da borda carregada em $x = 0$, para três placas com a/b = 1, com um único furo central, o qual varia de tamanho e geometria.

Segundo os índices de esbeltez, as placas são classificadas como finas (β = 2,19), moderadamente espessa (β = 1,46) e espessa (β = 0,99). Deve ser observado que o índice de esbeltez de placas de navios e estruturas offshore é de 1,50 a 3,50 (Paik, Thayamballi e Kim, 2001).

a. Furo circular

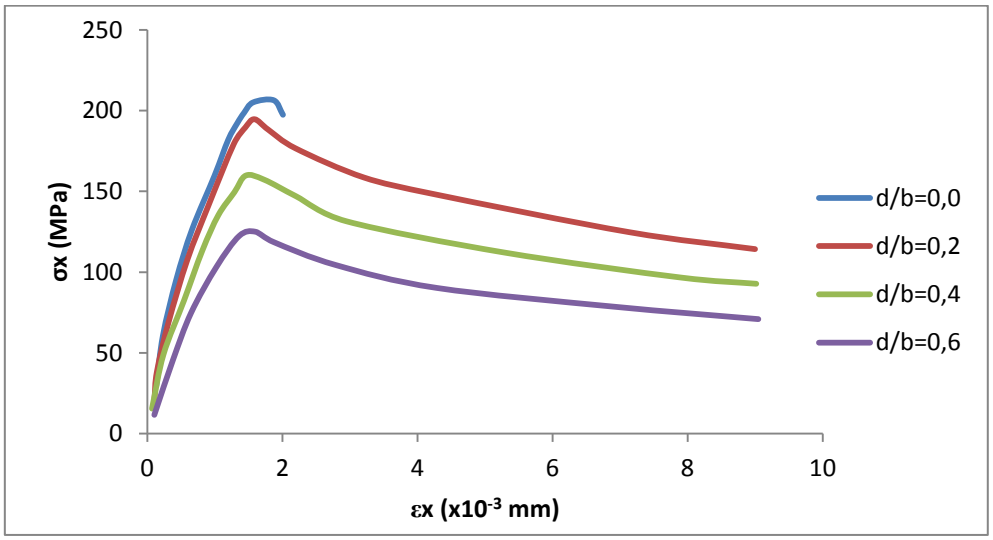

Figura 4.49 – Influência do furo circular em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=10mm.

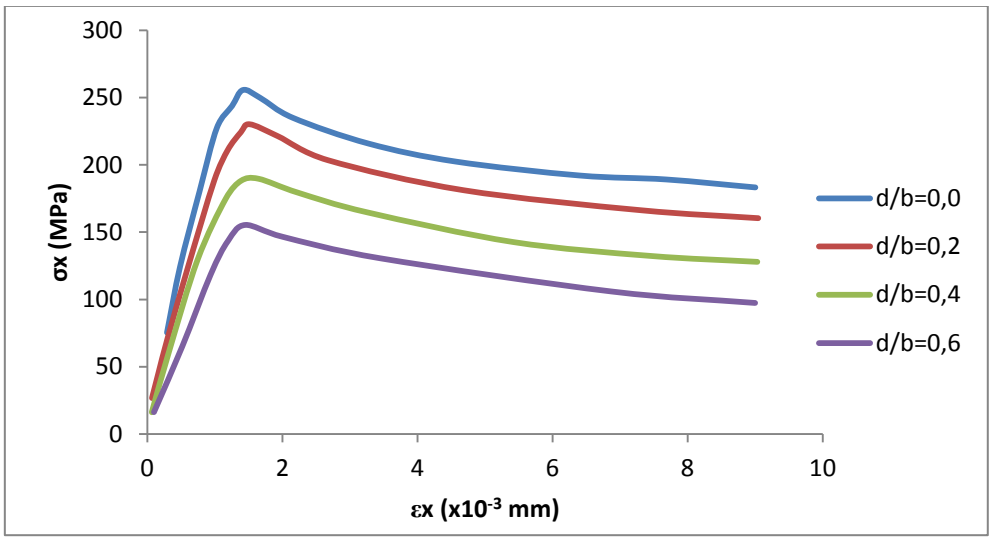

Figura 4.50 – Influência do furo circular em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=15mm.

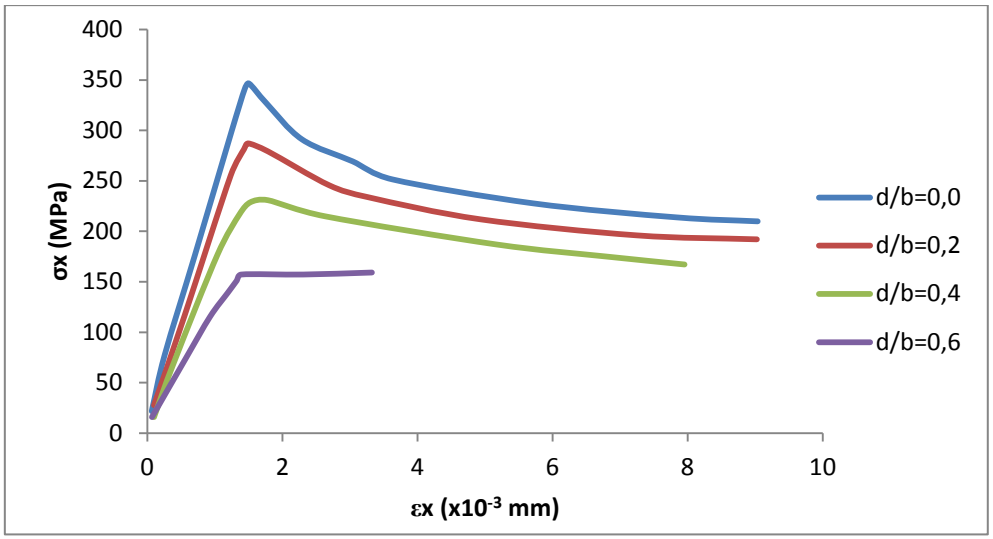

Figura 4.51 – Influência do furo circular em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=22mm.

b. Furo quadrado

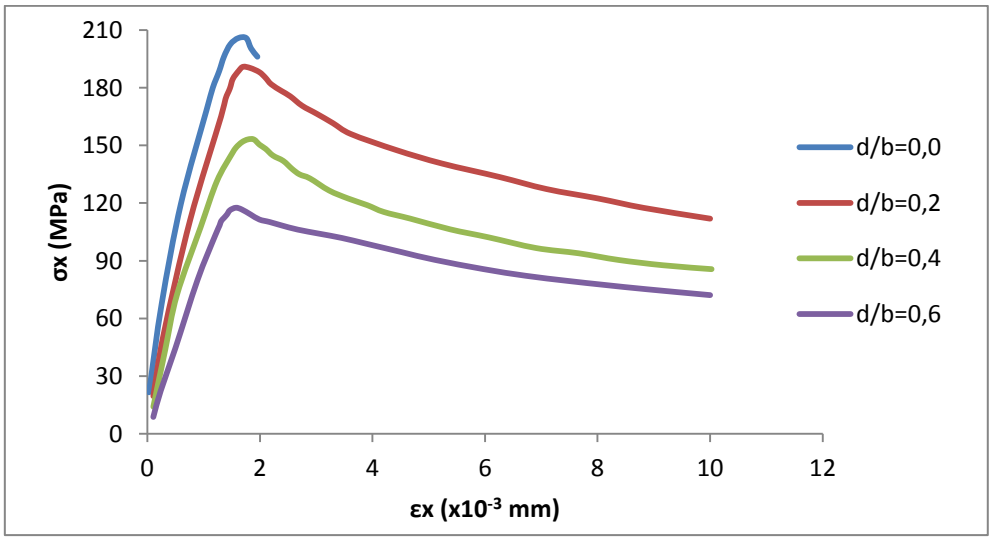

Figura 4.52 – Influência do furo quadrado em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=10mm.

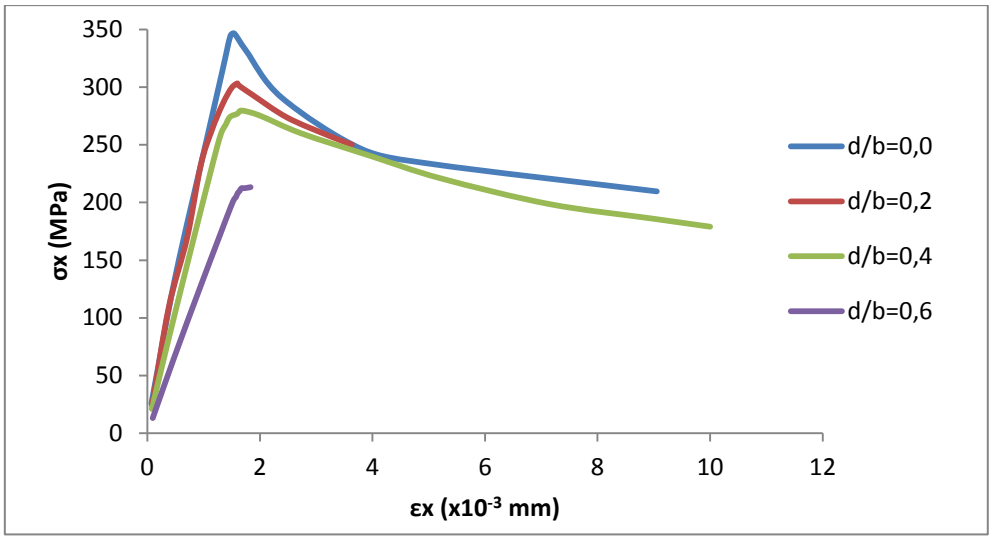

Figura 4.53 – Influência do furo quadrado em placas com relação *a/b*=1 e *t*=15mm.

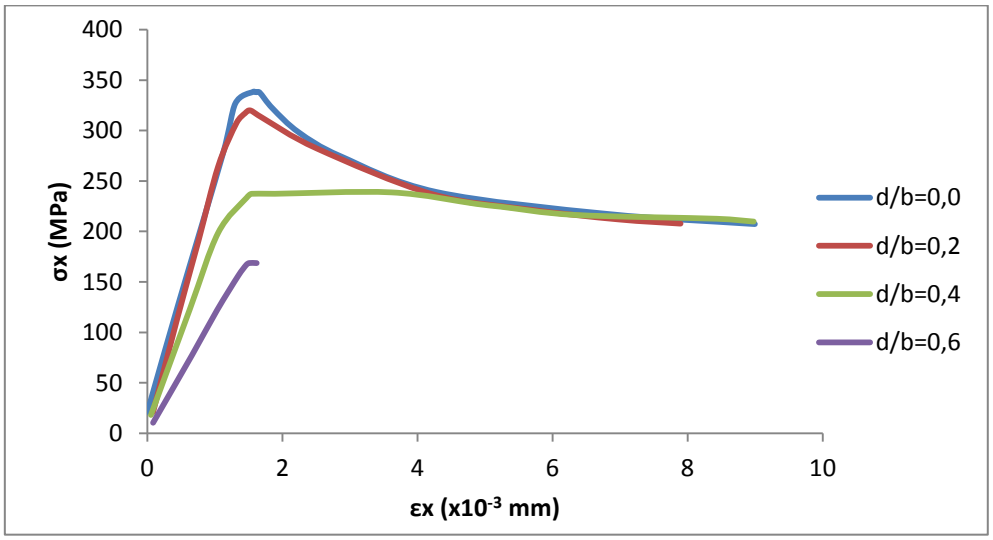

Figura 4.54 – Influência do furo quadrado em placas com relação *a/b*=1 e *t*=22mm.

c. Furo losangular

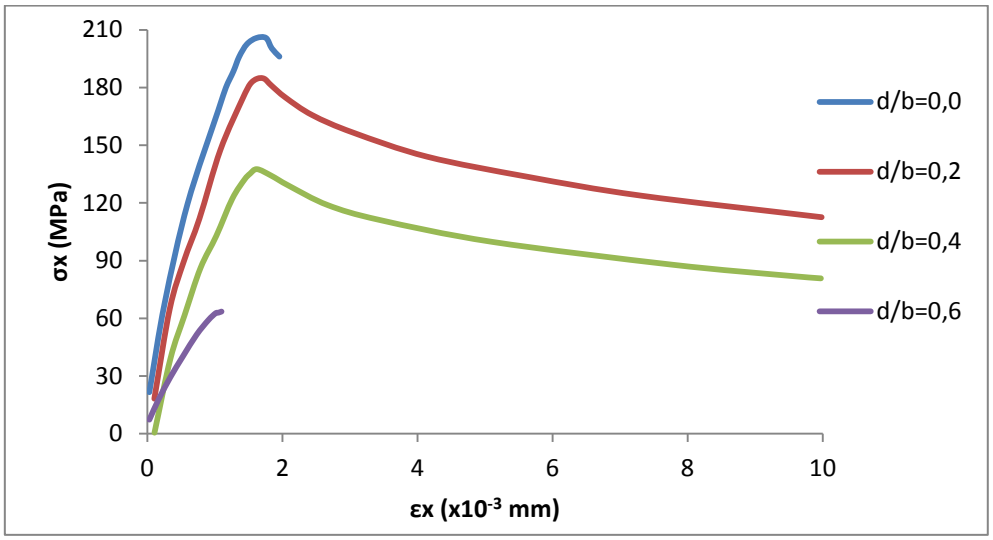

Figura 4.55 – Influência do furo losangular em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=10mm.

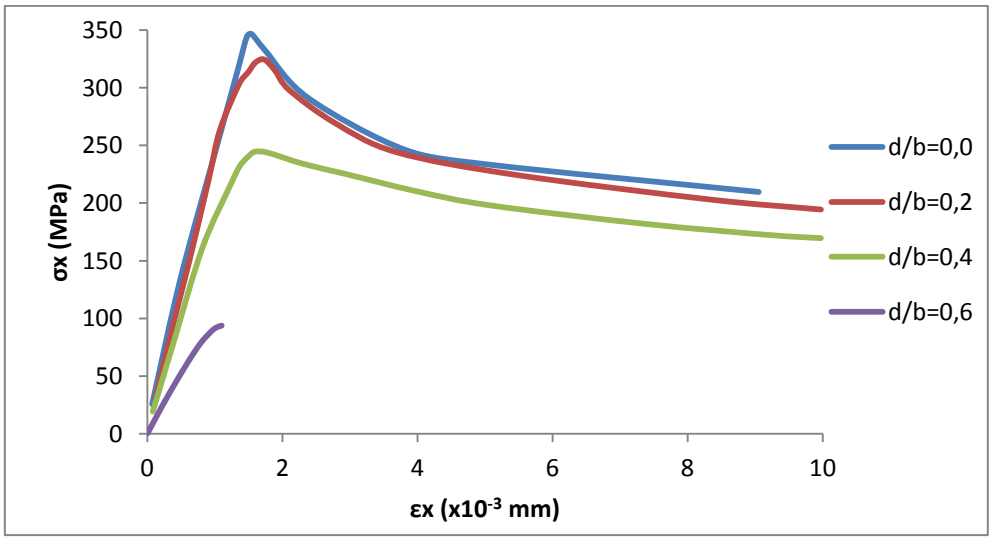

Figura 4.56 – Influência do furo losangular em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=15mm.

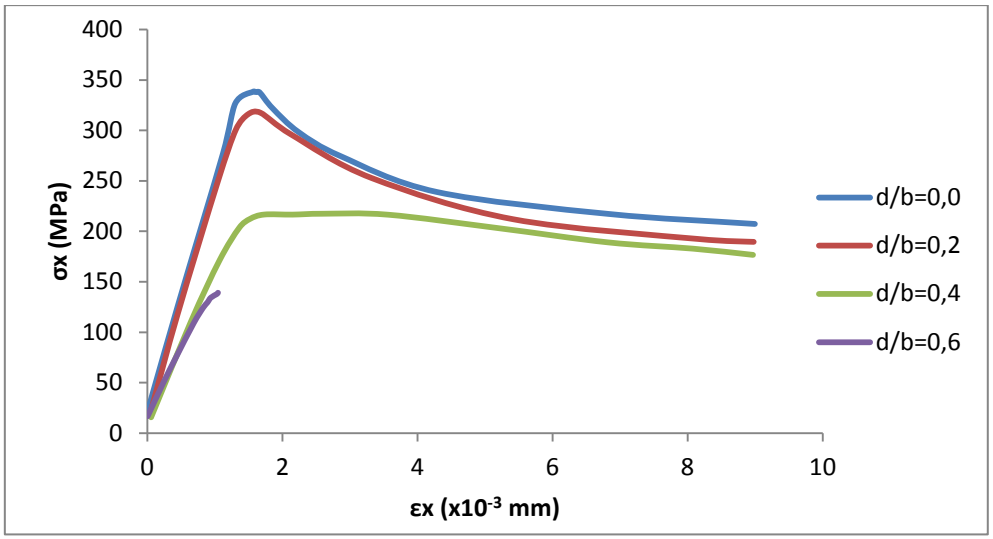

Figura 4.57 – Influência do furo losangular em placas com relação *a*/*b*=1 e *t*=22mm.

Percebe-se nas Figuras 4.49 a 4.57 que a carga ruptura de flambagem diminui à medida que o tamanho do furo aumenta. Entretanto, observa-se que, independentemente da geometria do furo, as placas em que a relação $^{d}/_{b} = 0{,}6$ tem a sua capacidade de deformação normal em *x* reduzida consideravelmente.

4.2.2. Efeito da esbeltez:

A carga de ruptura por flambagem de uma placa é influenciada pela sua esbeltez. Conforme as Figuras 4.58 a 4.75 observa-se que, independentemente da geometria, quanto for menor a relação *b*/*t* e o índice de esbeltez da placa, ou seja, maior a sua espessura, maior será a sua resistência à flambagem.

a. Furo circular

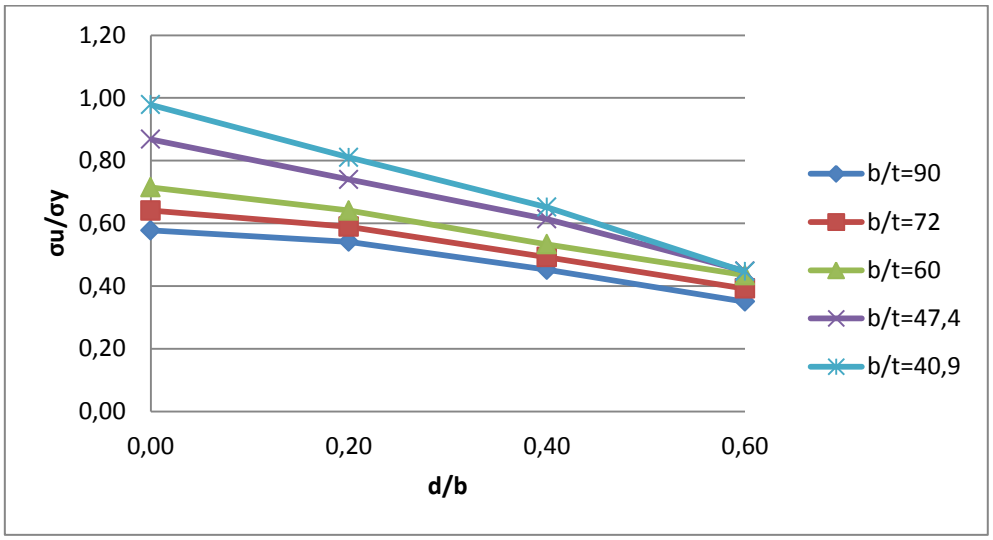

Figura 4.58 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=1.

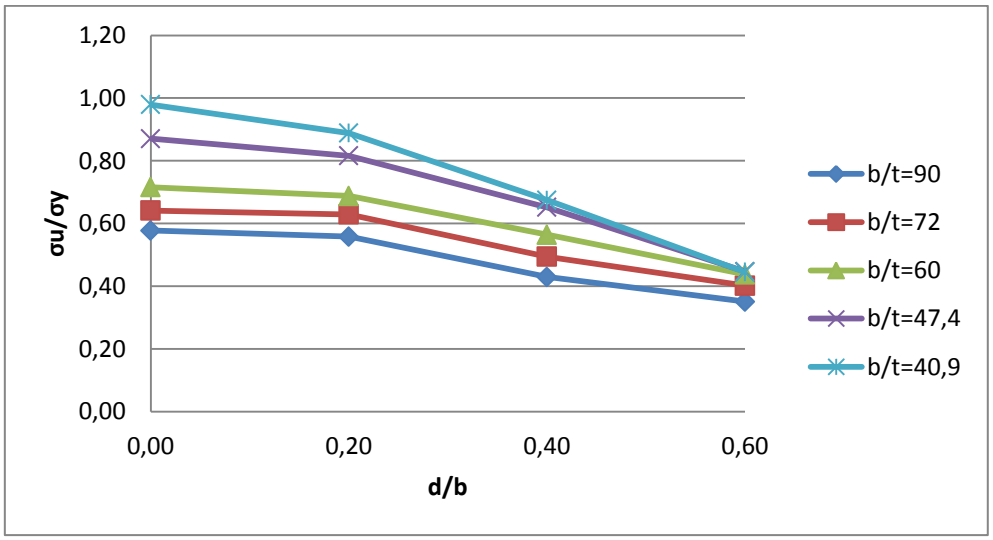

Figura 4.59 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=2.

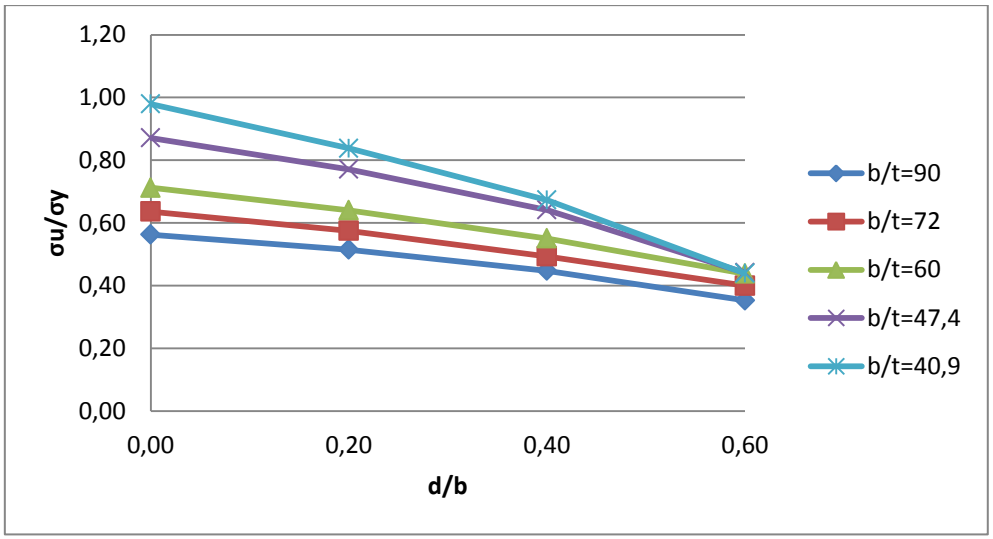

Figura 4.60 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=3.

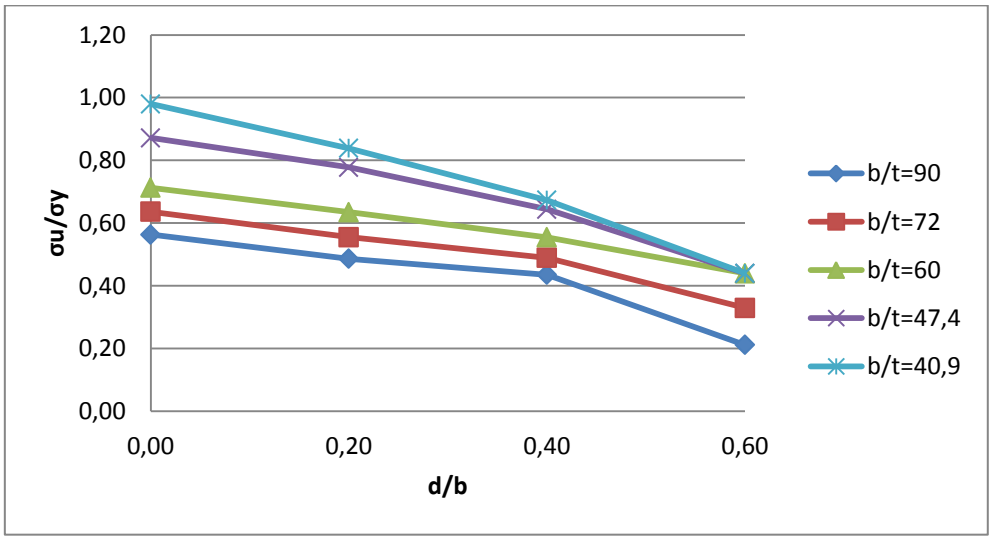

Figura 4.61 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=4.

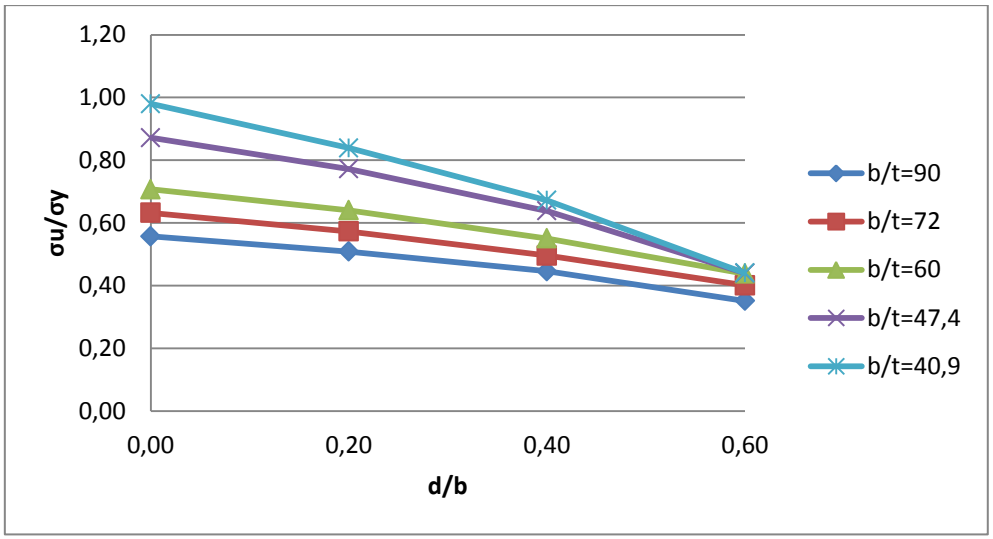

Figura 4.62 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=5.

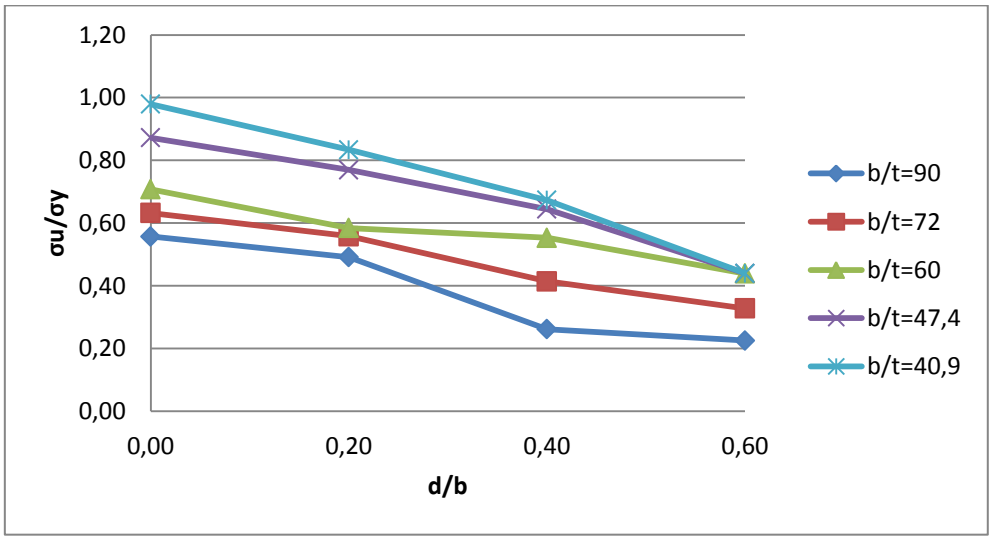

Figura 4.63 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=6.

b. Furo quadrado

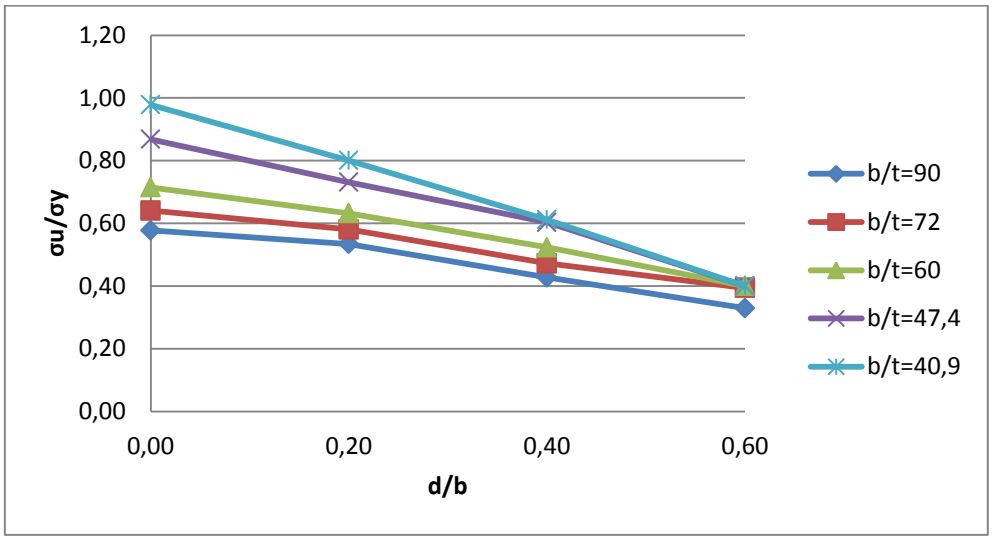

Figura 4.64 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=1.

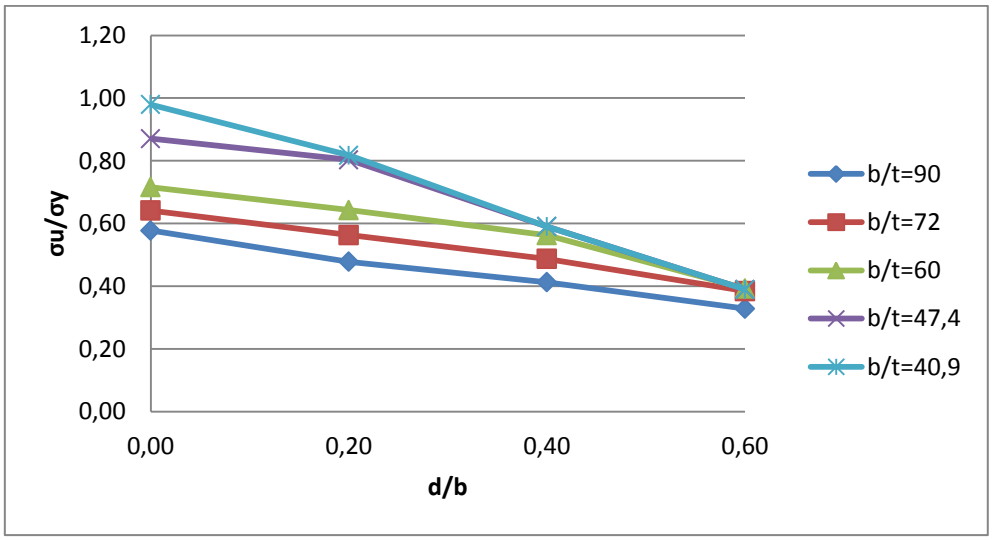

Figura 4.65 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=2.

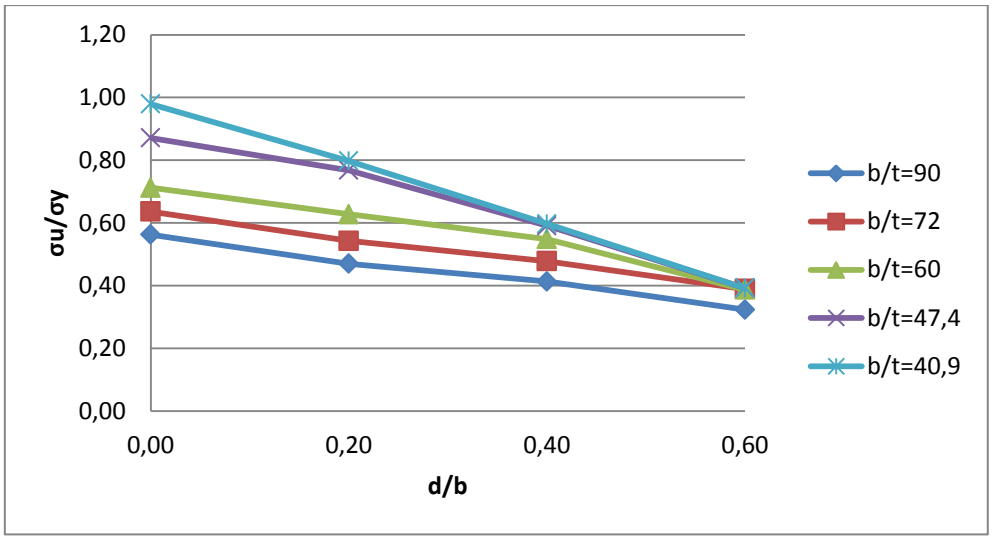

Figura 4.66 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=3.

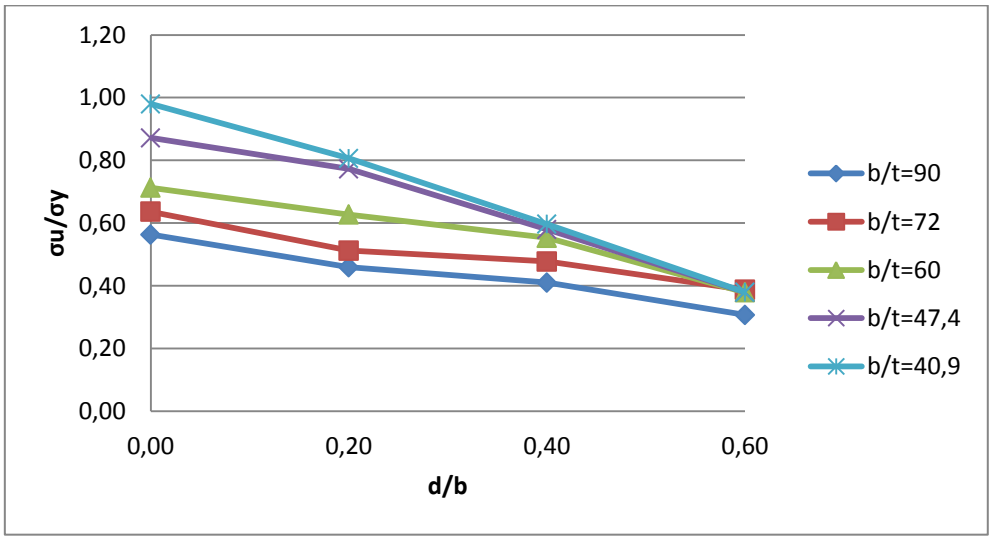

Figura 4.67 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=4.

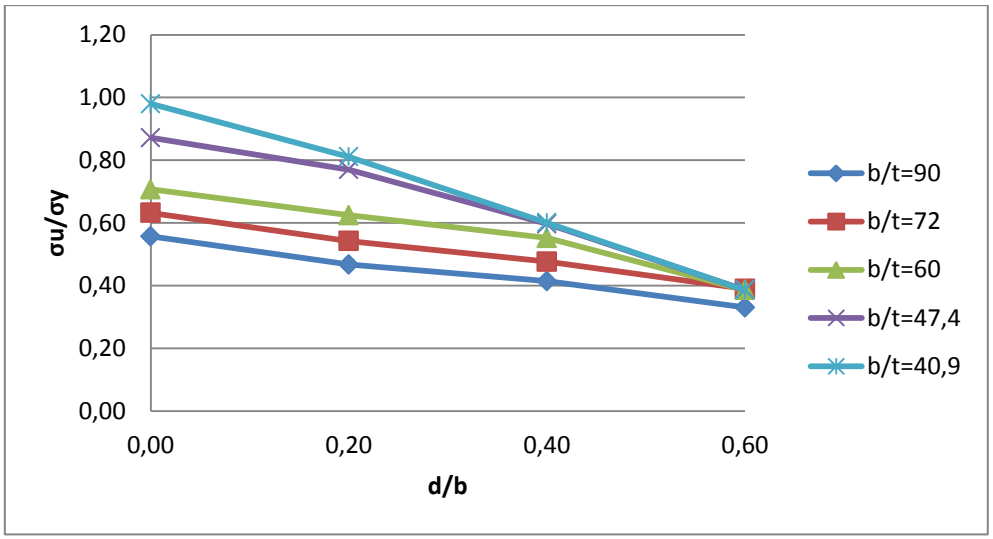

Figura 4.68 – Efeito da esbeltez quando a relação a/b=5.

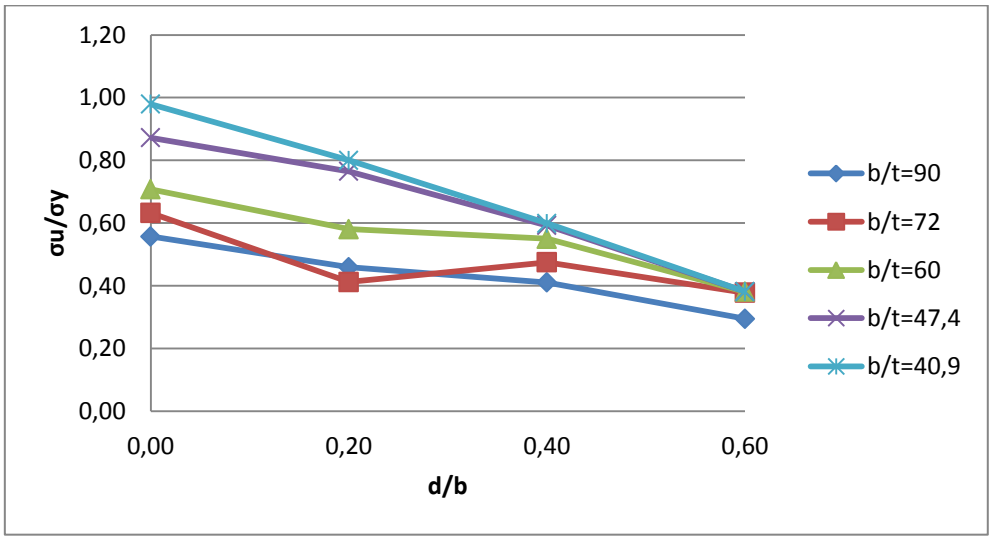

Figura 4.69 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=6.

c. Furo losangular

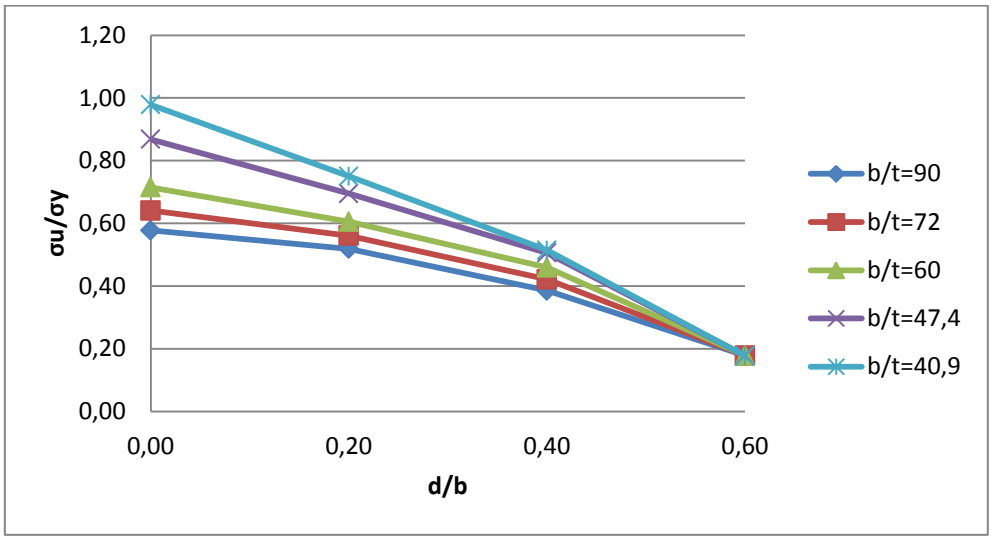

Figura 4.70 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=1.

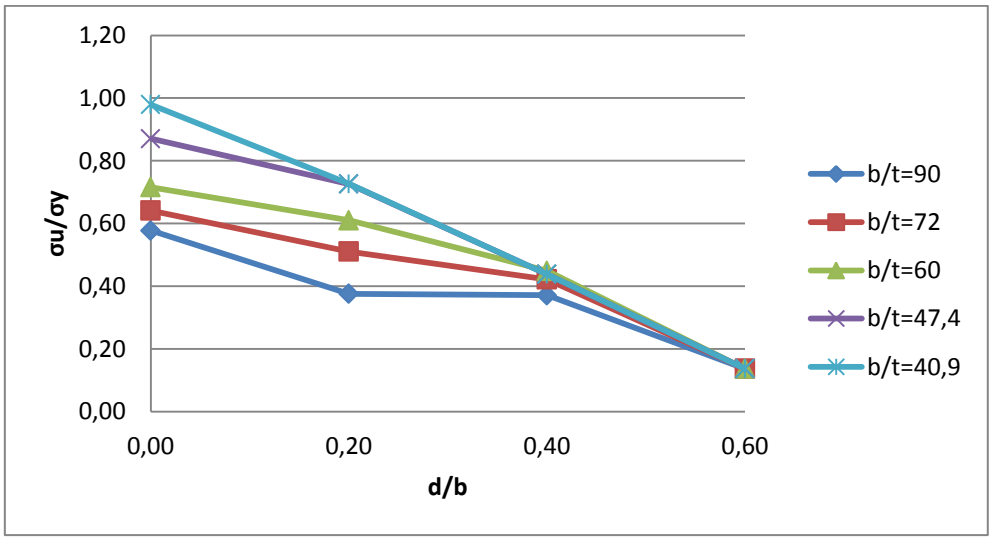

Figura 4.71 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=2.

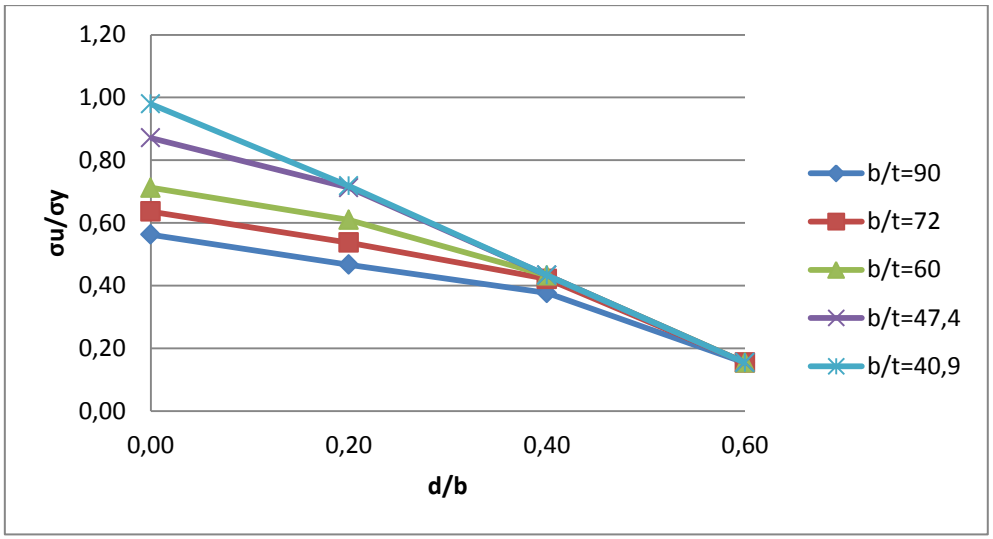

Figura 4.72 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=3.

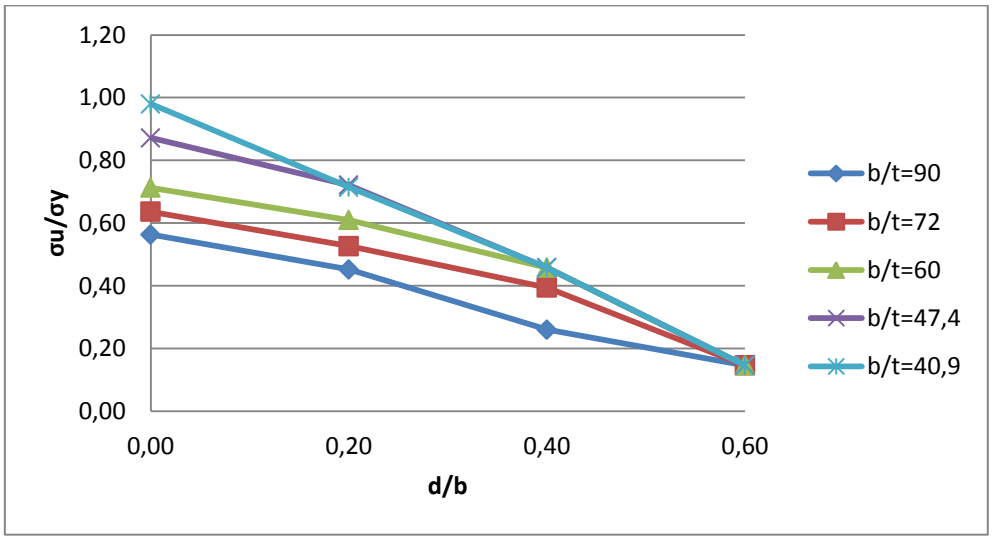

Figura 4.73 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=4.

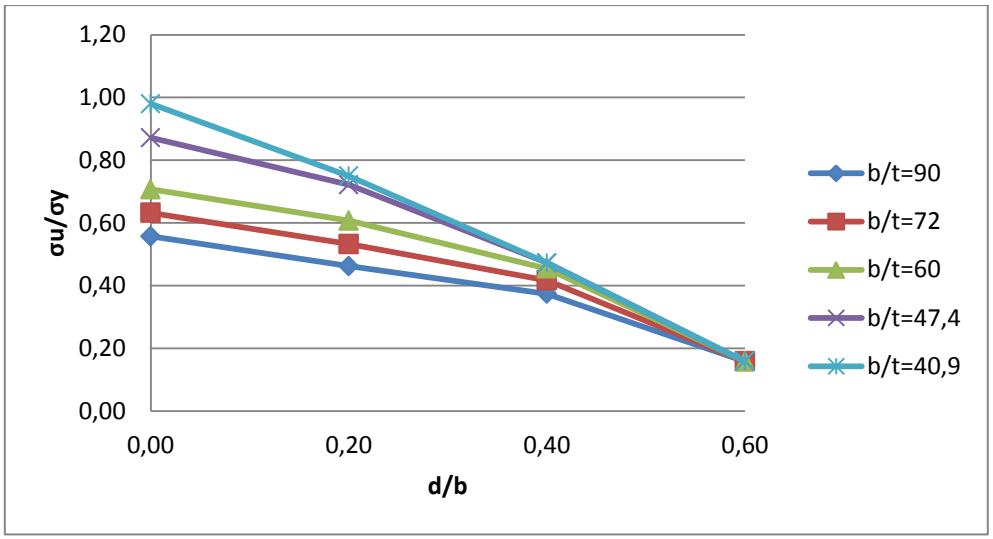

Figura 4.74 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=5.

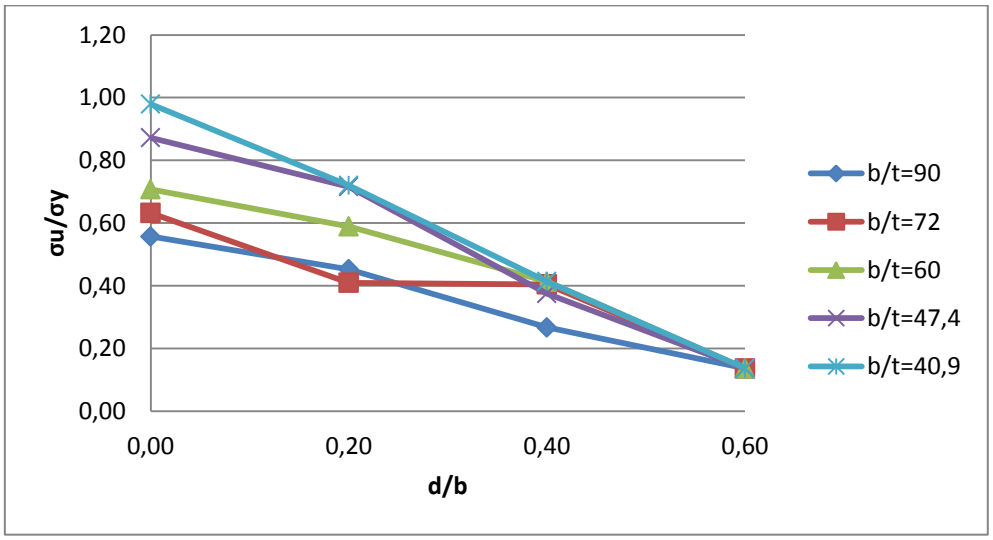

Figura 4.75 – Efeito da esbeltez quando a relação *a/b*=6.

Verifica-se nas Figuras 4.58 a 4.75 que, independentemente da geometria do furo central e da espessura da placa, ao passo que o furo aumenta, as tensões normais médias convergem. Isso se deve ao fato, de que a carga última limitar-se à tensão normal de escoamento do material.

A tensão normal última, em casos de compressão simples e para placas sem furos, é determinada através da expressão:

$$\sigma_u = \frac{(F_x)_{ult}}{bt} \tag{4.1}$$

Onde *(Fx)ult* é força última total, somatório das ações nodais na direção x na borda carregada da placa em $x = 0$ e $b \times t$ a área da seção transversal da placa.

Porém, como a placa possui uma flexão inicial w_0, a situação do carregamento é de flexo–compressão normal. Logo, as tensões normais na seção transversal da placa não são mais uniformes (Figura 4.76) e a tensão máxima de compressão irá ocorrer no bordo superior.

Figura 4.76 – Flexo – compressão normal (Hibbler, 2010)

Nesta situação, a tensão máxima pode ser maior que a tensão média e o escoamento acontecer nos bordos da placa, mesmo quando a tensão média for menor que a tensão de escoamento do material. Para os casos das placas perfuradas, que possuem a área da seção transversal do bordo ($x = 0$) maior do que para $x = a/2$, as tensões na seção central da placa são superiores à tensão média do apoio. Com base nesse fato, na ruptura, as tensões no centro da placa são iguais ou maiores à σy do material. Entretanto, como a tensão de referência adotada é a tensão média no bordo, em $x = 0$, σu possui valor inferior a σy.

4.2.3. Variação na proporção entre os parâmetros *a* e *b*

Nas Figuras 4.77 a 4.91 são apresentados os resultados obtidos dos testes realizados com a variação no parâmetro de proporção $^{a}/_{b}$ das placas.

a. Furo circular

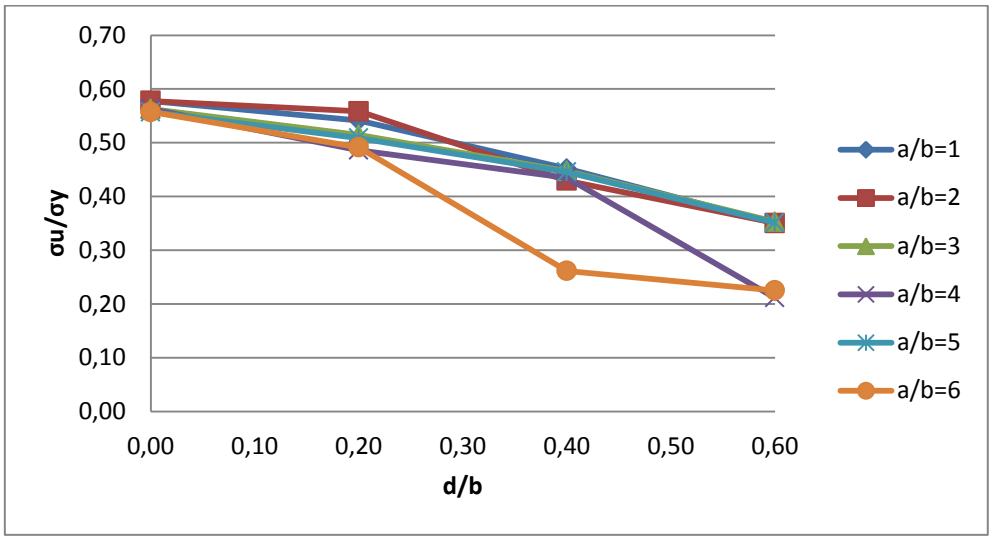

Figura 4.77 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=10mm.

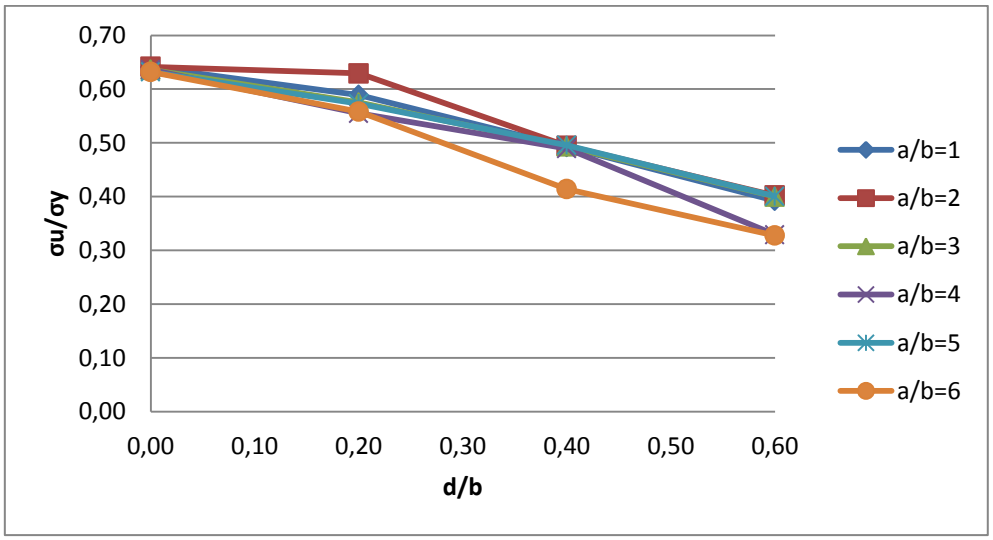

Figura 4.78 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=12,5mm.

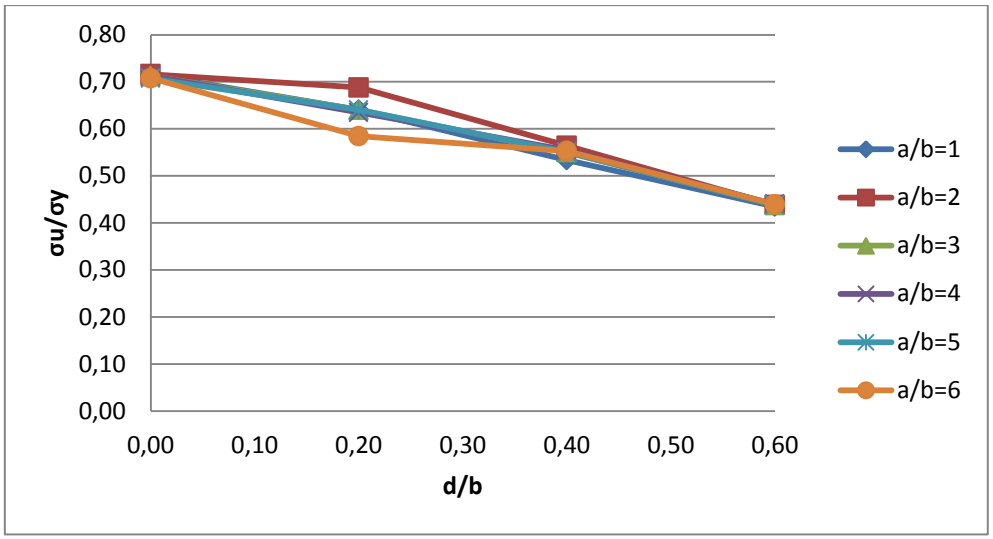

Figura 4.79 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=15mm.

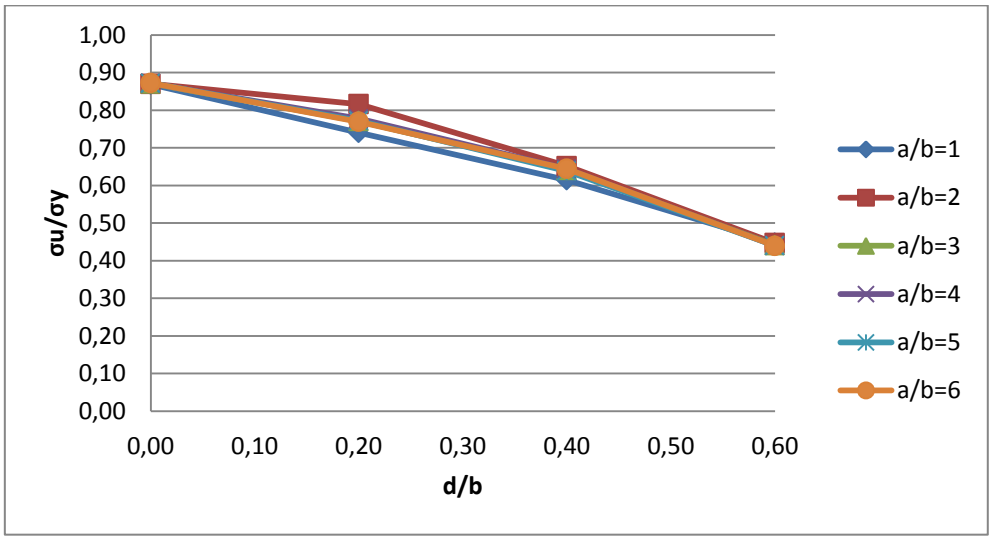

Figura 4.80 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=19mm.

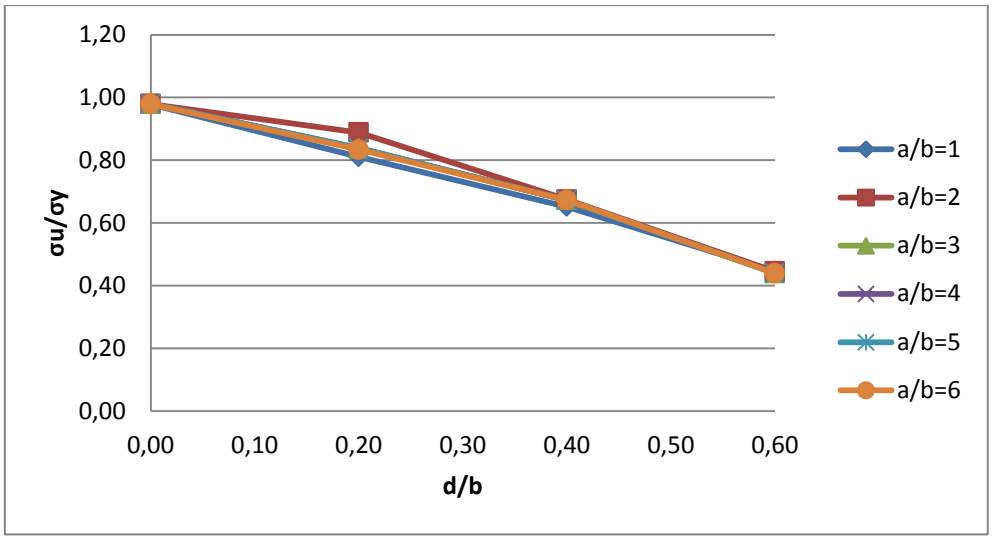

Figura 4.81 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=22mm.

b. Furo quadrado

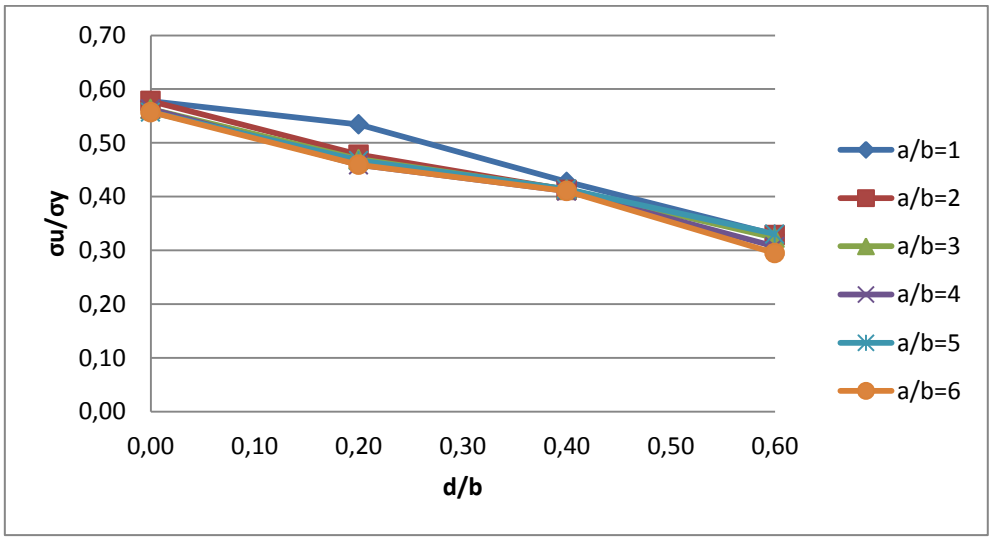

Figura 4.82 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=10mm.

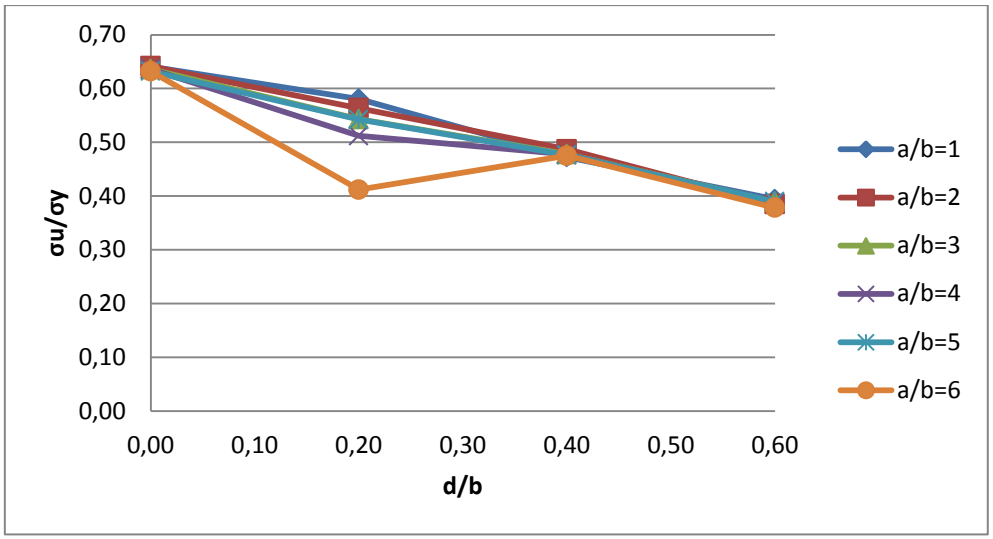

Figura 4.83 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=12,5mm.

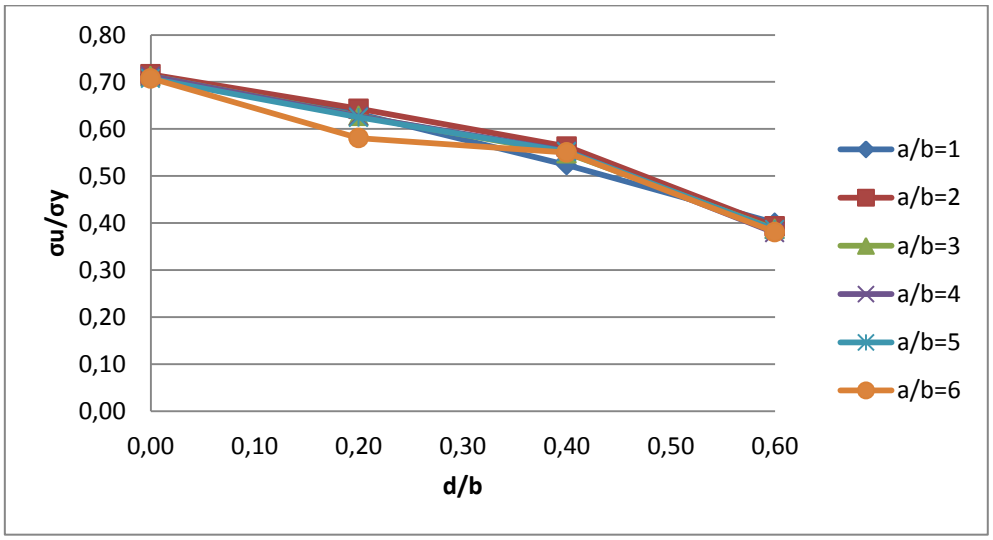

Figura 4.84 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=15mm.

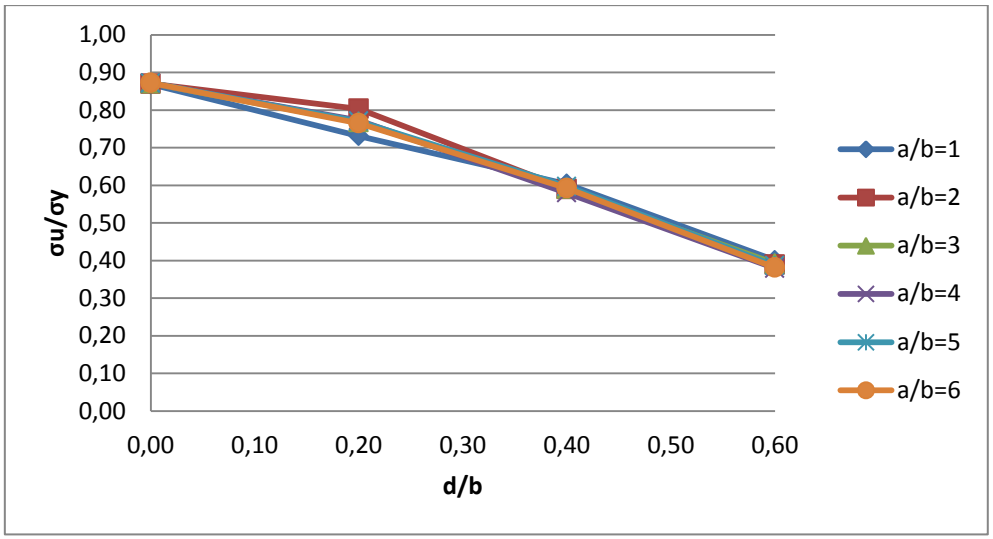

Figura 4.83 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=19mm.

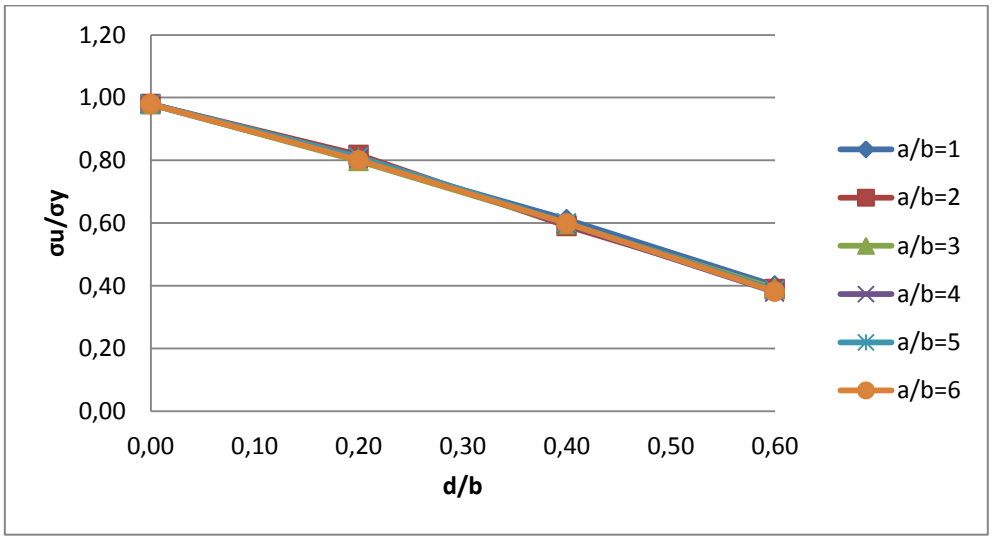

Figura 4.84 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=22mm.

c. Furo losangular

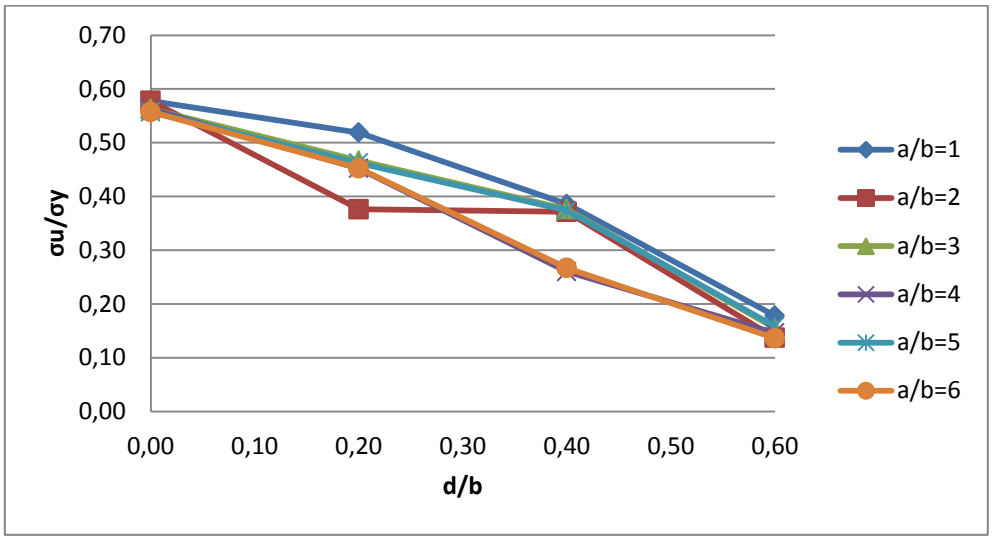

Figura 4.85 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=10mm.

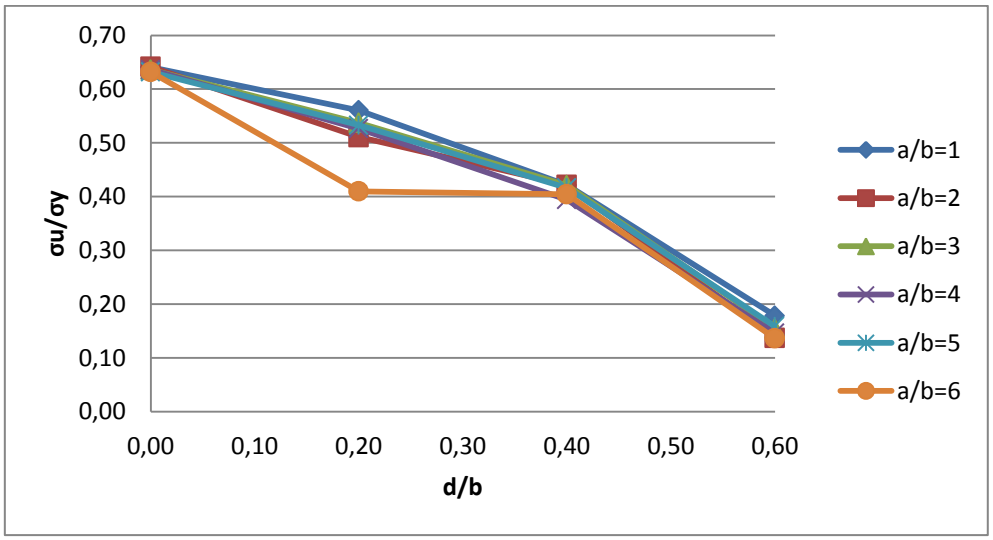

Figura 4.86 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=12,5mm.

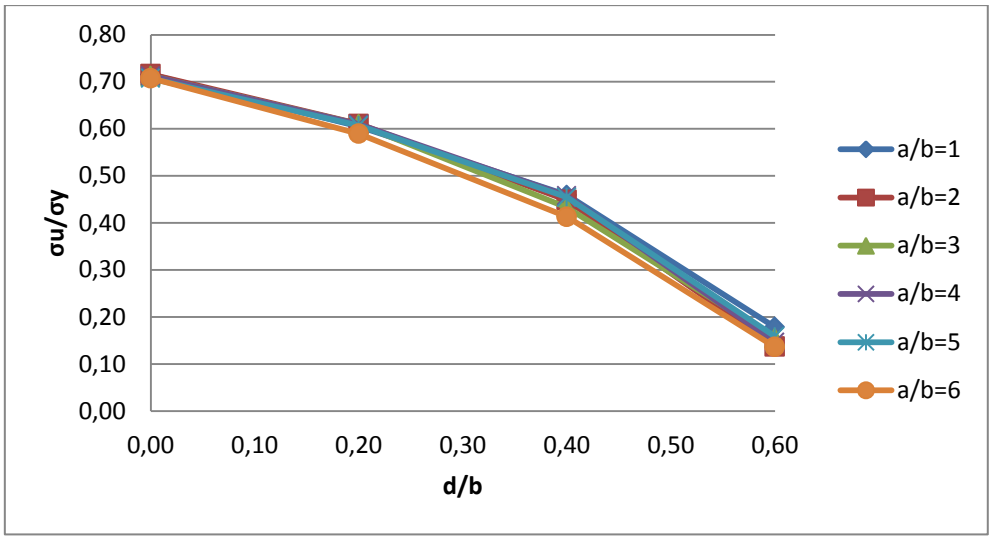

Figura 4.89 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=15mm.

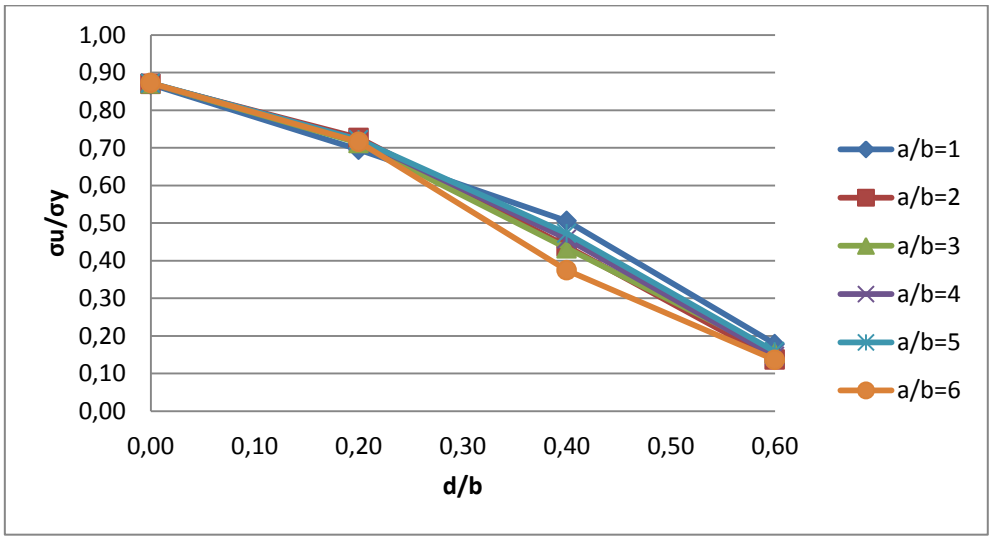

Figura 4.90 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=19mm.

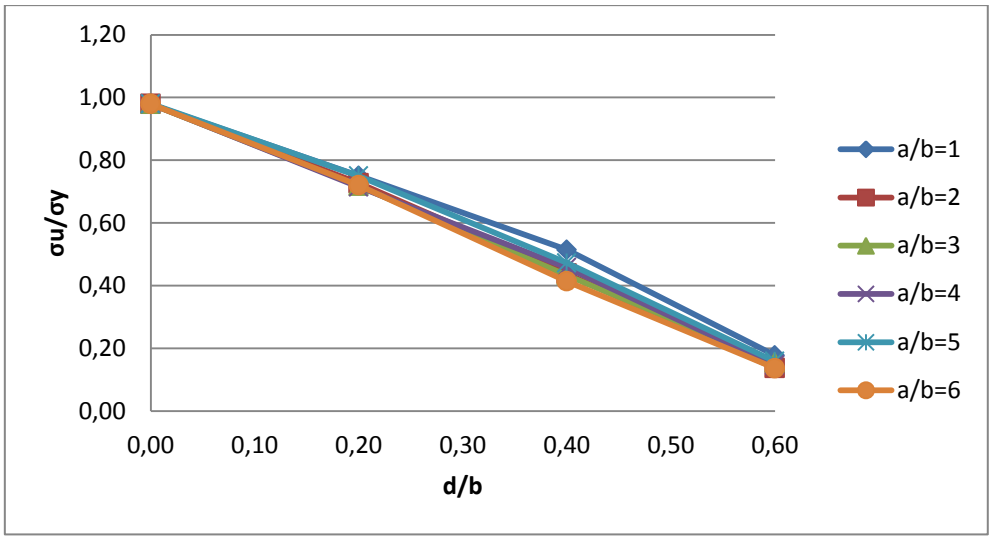

Figura 4.91 – Variação no parâmetro de proporção quando *t*=22mm.

Observa-se nas Figuras 4.77 a 4.91 que a resistência última da placa não sofre influência significativa pela variação do parâmetro *a*. Conclui-se que, quanto maior a espessura da placa, menor serão as variações na resistência última.

5. CONCLUSÕES

A verificação da capacidade de carga 300 placas foi realizada a partir de análises do tipo flambagem elástica e inelástica. Ao longo do trabalho foram estudados a influência do tamanho do furo, o efeito da esbeltez e a relação *a/b* na capacidade de resistência à flambagem das placas. As placas, perfuradas ou não, estavam sujeitas à compressão uniaxial uniforme.

5.1 FLAMBAGEM ELÁSTICA

Para a flambagem elástica, a análise abordou o problema de autovalores. Foram estudados problemas com placas sem furos ou com perfurações centrais de geometria circular, quadrada ou losangular.

As placas sem furo apresentaram, na maior parte dos casos avaliados, carga crítica superior às perfuradas. Essa redução de resistência se deve ao fato de que, o furo gerou uma redistribuição de tensões ao longo da superfície da placa.

Observando as Figuras 4.1 a 4.9 foi possível perceber que a presença do furo, com exceção do caso para a placa com $a/b = 1$, sempre causou uma melhoria na carga crítica. No entanto, a geometria do furo não influenciou significativamente no modo de flambagem, isto é, o estudo não encontrou perdas de resistência significativas entre um tipo de furo e outro.

Notou-se nas Figuras 4.1 a 4.9 que o comportamento mecânico da placa se mostrou sensível à variação do comprimento *a*. Placas cuja relação $a/b = 1$, independentemente da geometria, teve a sua a carga crítica reduzida ao passo que o furo aumentou. Nas placas quadradas, ocorreu a formação de uma única meia onda. Como o centro da placa coincidiu com o centro do meio comprimento de onda, quando o furo nesta região aumentou, a rigidez da placa diminuiu, resultando em uma redução da carga crítica.

Já as placas retangulares com relação $a/b = 2$ teve melhora no comportamento mecânico. O estudo apontou que quanto maior for o furo, maior a carga crítica da placa. Esta tendência pôde ser explicada quando se considerou o modo de flambagem da placa, isto é, a resistência

à deformação aumentou devido à redistribuição de tensões em direção às bordas laterais de apoio da placa. Quando a relação d/b aumentou, o modo de flambagem passou de duas meias ondas para três, explicando o aumento da carga crítica.

Para as placas perfuradas em que $a/b = 3$ foram observados, para os casos em que a relação d/b igual a 0,1, 0,2 e 0,3, que o furo coincidiu com a região em que os deslocamentos são maiores. Porém, quando a razão d/b foi igual a 0,4, 0,5 e 0,6, esses deslocamentos diminuíram. Isto indicou que ocorreu uma transferência de forças da parte central para bordos e que a placa possuiu grande capacidade de carga. Este comportamento permitiu o aumento da carga crítica da placa, embora não de magnitude tão significativa quanto às placas com relação $a/b = 2$.

Enquanto as placas com relações a/b iguais a 4 e 5, apresentaram deslocamentos maiores na região central e menores em direção aos bordos. A carga crítica para estes casos apresentou uma leve redução para as relações d/b entre 0,1 e 0,3 e um acréscimo para as demais.

Por fim, as placas em que a razão $a/b = 6$ não apresentaram variação significativa nos valores para a carga crítica. Isso se deve ao fato do furo estar localizado em uma região de pequenos deslocamentos. Quanto à espessura, placas com índice de esbeltez menor apresentaram maior capacidade de carga quanto à flambagem.

5.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR

A tensão última das placas, determinada pelo software ANSYS, foi menor quando comparada à tensão de escoamento do material em todos os casos. Isto se deve ao fato de que o programa definiu a tensão média na seção transversal da placa considerando apenas compressão simples.

Como a imperfeição inicial nas placas eram iguais a w_0 e elas estavam submetidas a esforços de flexo-compressão normal, as tensões na seção transversal não eram uniformes. A tensão máxima foi muito maior que a tensão média e por isso o escoamento ocorreu nos bordos da placa, mesmo que a tensão média fosse menor que a tensão de escoamento do material. Logo, a tensão máxima de compressão ocorreu no bordo superior.

Quanto à influência do furo na resistência última de placas, foi verificado que quanto maior fosse a perfuração, menor a carga de ruptura de flambagem. Entretanto, observou-se

que, independentemente da geometria do furo, as placas em que a relação $^{d}/_{b} = 0{,}6$ tiveram a sua capacidade de deformação normal em *x* reduzida consideravelmente.

A carga de ruptura por flambagem de uma placa foi influenciada pela sua esbeltez. O estudo apontou que, independentemente da geometria, quanto for menor a relação *b/t* e o índice de esbeltez da placa, maior foi a sua resistência à flambagem.

Verificou–se também que, independente do furo central e da espessura da placa, ao passo que o furo aumentou, as tensões normais médias convergiam. Isso se deve ao fato, de que a carga última limitou–se à tensão normal de escoamento do material.

Observou–se que a resistência última da placa não sofreu influência significativa pela variação da relação *a/b*.

5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como possíveis trabalhos futuros podem ser apontados os seguintes assuntos:

- Analisar a influência de outras condições de vinculação para a placa na flambagem elástica e inelástica;
- Empregar uma metodologia que permita a comparação quantitativa na capacidade de carga entre os diferentes tipos de furos;
- Avaliar a capacidade de carga de placas com perfurações de outros formatos, como o furo oblongo, por exemplo;
- Estudar a influência de enrijecedores na flambagem elástica e inelástica de placas e;
- Pesquisar a influência da posição do furo na flambagem elástica e inelástica de placas.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKESSON, B. Plate Buckling in Bridges and Other Structures. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2007.

AMANTE, D. D. A. M. Imperfeições de Fabricação na Construção Naval e Offshore. Rio de Janeiro: UFRJ, 2006.

BAPTISTA, L. G. Simulação numérica não-linear do comportamento pós–flambagem de placas finas de aço sob compressão uniaxial em estruturas navais e offshore. 2014. 98f. Tese (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós – Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande, RS. 2014.

BLEICH, F. Theorie und berechnung der eisernen brücken. [S.l.]: Julius Springer, 1924.

BRYAN, G. H. On the stability of a plane under thrusts in its own plane with applications to the buckling of the sides of a ship. [S.l.]: Proceedings of the London Mathematical Society, v. 22, 1891.

CHAJES, A. Principles of Estructural Stability Theory. [S.l.]: Prentice-Hall, 1974.

CORREIA, A. L. G. Simulação numérica e constructal design aplicados à análise do comportamento mecânico de placas de aço submetidas à flambagem elástica usadas em estruturas oceânicas. 2013. 123f. Tese (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós – Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande, RS. 2013.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S.; MARTINI, M. I. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. Thin-Walled Structures, v. 42, p. 1083-1101, 2004.

HELBIG, D.; REAL, M.; ISOLDI, L. SANTOS, E. Análise numérica do comportamento mecânico sob flexão de placas finas de material compósito laminado reforçado por fibras. Revista Vetor FURG, v. 23, 2013.

HELBIG, D.; REAL, M.; ISOLDI, L.; CORREIA, A.; SANTOS, E. Constructal Design of Perforated Steel Plates Subject to Linear Elastic and Nonlinear Elasto-Plastic Buckling, XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Pirenópolis, GO, Brazil, November 10-13, 2013.

HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais.7ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

JUNIOR, P. R. D. C. Efeito das Distorções no Comportamento Estrutural de Navio Suezmax. Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.

KUMAR, M. S. Ultimate Strength of Square Plate With Rectangular Opening Under Axial Compression. Journal of Naval Architecture and Marine Engineering, Junho 2007.

MADENCI, E.; GUVEN, I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®. [S.l.]: Springer, 2006.

NARAYANAN, R.; CHOW, F. Y. Ultimate Capacity of Uniaxially Compressed Perforated. [S.l.]. 1984.

PAIK, J. K. Ultimate strength of steel plates with a single circular hole under axial compressive loading along short edges. Ships and Offshore Structures, p. 355-360, 2007.

PAIK, J. K.; THAYAMBALLI, A. K.; KIM, B. J. Advanced Ultimate Strength Formulations for Ship Plating under Combined Biaxial Compression/Tension, Edge Shear, and Lateral Pressure Loads. Marine Technology, v. 38, p. 9-25, 2001.

REAL, M., ISOLDI, L. Effect of Circular Holes Dimension and Location on the Elastic Buckling Load of Rectangular Plates,21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering, p. 24-28, 2011.

PINTO, S. Elementos Estruturais de Navios, Rio de Janeiro, 2011.

ROBERTS, T. M.; AZIZIAN, Z. G. Strength of Perforated Plates Subjected to In-Plane Loading. Thin-Walled Structures, v. II, p. 153-164, 1984.

ROORDA, J. Buckling of elastic structures. Canada: Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, 1980.

SAINT-VENANT, A. J. C. B. D. Théorie de l'elasticité des corps solides. Paris: Clebsch, 1883.

SCHUMAN, L.; BACK, G. Strength of retangular plates under edge compression. EUA: NASA Technical Report, TR, R-40, 1959.

SHANMUGAM, N. E. Openings in Thin-Walled Steel Structures.Thin-Walled Structures, v. 28, p. 355-372, 1997.

SHANMUGAM, N. E.; THEVENDRAN, V.; TAN, Y. H. Design Formula for Axially Compressed Perforated Plates. Thin-Walled Structures, v. 34, p. 1-20, 1999.

SILVA, A. L. R. D. C. E. Análise Numérica Não-Linear da Flambagem Local de Perfis de Aço Estrutural Submetidos à Compressão Uniaxial. Belo Horizonte: UFMG, 2006.

SZILARD, R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods.[S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. P. Einige stabilitätsprobleme der elastizitätstheorie. [S.l.]: Zeitschrift für Mathematik und Physik, v. 58, 1910.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of Plates and Shells.2ª edição. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, v. 10, 1959.

TRAHAIR, N. S.; BRADFORD, M. A. The behavior and design of steel structures. 2ª Edição. ed. [S.l.]: Chapman & Hall, 1988.

YETTRAM, A. L.; BROWN, C. J. The Elastic Stability of Square Perforated Plates. Computers and Structures, v. 21, p. 1267-1272, 1985.

APÊNDICES

A. RESULTADO DOS MODELOS NUMÉRICOS LINEARES

As soluções lineares obtidas através da simulação numérica auxiliada pelo software ANSYS para 300 modelos de placas.

PLACA SEM FURO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
1	900	900	10	0	0,45	450	450	927,49
2	900	900	12,5	0	0,45	450	450	1806,38
3	900	900	15	0	0,45	450	450	3112,3
4	900	900	19	0	0,45	450	450	6294,7
5	900	900	22	0	0,45	450	450	9735,4
6	1800	900	10	0	0,45	900	450	929,74
7	1800	900	12,5	0	0,45	900	450	1811,8
8	1800	900	15	0	0,45	900	450	3123,6
9	1800	900	19	0	0,45	900	450	6323,4
10	1800	900	22	0	0,45	900	450	9786,6
11	2700	900	10	0	0,45	1350	450	930,49
12	2700	900	12,5	0	0,45	1350	450	1813,7
13	2700	900	15	0	0,45	1350	450	3127,4
14	2700	900	19	0	0,45	1350	450	6333
15	2700	900	22	0	0,45	1350	450	9803,7
16	3600	900	10	0	0,45	1800	450	930,87
17	3600	900	12,5	0	0,45	1800	450	1814,6
18	3600	900	15	0	0,45	1800	450	3129,2
19	3600	900	19	0	0,45	1800	450	6337,8
20	3600	900	22	0	0,45	1800	450	9812,2
21	4500	900	10	0	0,45	2250	450	931,09
22	4500	900	12,5	0	0,45	2250	450	1815,1
23	4500	900	15	0	0,45	2250	450	3130,4
24	4500	900	19	0	0,45	2250	450	6340,7
25	4500	900	22	0	0,45	2250	450	9817,3
26	5400	900	10	0	0,45	2700	450	931,24
27	5400	900	12,5	0	0,45	2700	450	1815,5
28	5400	900	15	0	0,45	2700	450	3131,1
29	5400	900	19	0	0,45	2700	450	6342,6
30	5400	900	22	0	0,45	2700	450	9820,7

PLACA FURO CIRCULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
31	900	900	10	180	0,45	450	360	815,03
32	900	900	10	360	0,45	450	270	700,2
33	900	900	10	540	0,45	450	180	646,15
34	900	900	12,5	180	0,45	450	360	1586,9
35	900	900	12,5	360	0,45	450	270	1362,2
36	900	900	12,5	540	0,45	450	180	1254,3
37	900	900	15	180	0,45	450	360	2733,5
38	900	900	15	360	0,45	450	270	2344,5
39	900	900	15	540	0,45	450	180	2154,5
40	900	900	19	180	0,45	450	360	5527,2
41	900	900	19	360	0,45	450	270	4734,3
42	900	900	19	540	0,45	450	180	4336,4
43	900	900	22	180	0,45	450	360	8547,1
44	900	900	22	360	0,45	450	270	7313,6
45	900	900	22	540	0,45	450	180	6682,7
46	1800	900	10	180	0,45	900	360	968
47	1800	900	10	360	0,45	900	270	1041,7
48	1800	900	10	540	0,45	900	180	1202,9
49	1800	900	12,5	180	0,45	900	360	1886
50	1800	900	12,5	360	0,45	900	270	2029,4
51	1800	900	12,5	540	0,45	900	180	2339,7
52	1800	900	15	180	0,45	900	360	3250,7
53	1800	900	15	360	0,45	900	270	3497,4
54	1800	900	15	540	0,45	900	180	4025,8
55	1800	900	19	180	0,45	900	360	6578,5
56	1800	900	19	360	0,45	900	270	7075,7
57	1800	900	19	540	0,45	900	180	8123,4
58	1800	900	22	180	0,45	900	360	10178
59	1800	900	22	360	0,45	900	270	10945
60	1800	900	22	540	0,45	900	180	12540
61	2700	900	10	180	0,45	1350	360	898,32
62	2700	900	10	360	0,45	1350	270	896,86
63	2700	900	10	540	0,45	1350	180	966,81
64	2700	900	12,5	180	0,45	1350	360	1750,9
65	2700	900	12,5	360	0,45	1350	270	1747,6
66	2700	900	12,5	540	0,45	1350	180	1883,3
67	2700	900	15	180	0,45	1350	360	3018,5
68	2700	900	15	360	0,45	1350	270	3012,3
69	2700	900	15	540	0,45	1350	180	3245,5
70	2700	900	19	180	0,45	1350	360	6113
71	2700	900	19	360	0,45	1350	270	6095,5

PLACA FURO CIRCULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
72	2700	900	19	540	0,45	1350	360	6566
73	2700	900	22	180	0,45	1350	360	9463,7
74	2700	900	22	360	0,45	1350	270	9436,3
75	2700	900	22	540	0,45	1350	180	10157
76	3600	900	10	180	0,45	1800	360	941,42
77	3600	900	10	360	0,45	1800	270	943,44
78	3600	900	10	540	0,45	1800	180	998,88
79	3600	900	12,5	180	0,45	1800	360	1835,5
80	3600	900	12,5	360	0,45	1800	270	1838,8
81	3600	900	12,5	540	0,45	1800	180	1946,4
82	3600	900	15	180	0,45	1800	360	3166
83	3600	900	15	360	0,45	1800	270	3170,5
84	3600	900	15	540	0,45	1800	180	3355,2
85	3600	900	19	180	0,45	1800	360	6414,2
86	3600	900	19	360	0,45	1800	270	6419,6
87	3600	900	19	540	0,45	1800	180	6791,2
88	3600	900	22	180	0,45	1800	360	9932,7
89	3600	900	22	360	0,45	1800	270	9936,6
90	3600	900	22	540	0,45	1800	180	10509
91	4500	900	10	180	0,45	2250	360	908,26
92	4500	900	10	360	0,45	2250	270	907,72
93	4500	900	10	540	0,45	2250	180	947,15
94	4500	900	12,5	180	0,45	2250	360	1770,7
95	4500	900	12,5	360	0,45	2250	270	1769,3
96	4500	900	12,5	540	0,45	2250	180	1846
97	4500	900	15	180	0,45	2250	360	3054
98	4500	900	15	360	0,45	2250	270	3050,8
99	4500	900	15	540	0,45	2250	180	3182,7
100	4500	900	19	180	0,45	2250	360	6186,7
101	4500	900	19	360	0,45	2250	270	6177,8
102	4500	900	19	540	0,45	2250	180	6444,1
103	4500	900	22	180	0,45	2250	360	9579,7
104	4500	900	22	360	0,45	2250	270	9563,4
105	4500	900	22	540	0,45	2250	180	9974,4
106	5400	900	10	180	0,45	2700	360	923,29
107	5400	900	10	360	0,45	2700	270	923,49
108	5400	900	10	540	0,45	2700	180	958,77
109	5400	900	12,5	180	0,45	2700	360	1800,3
110	5400	900	12,5	360	0,45	2700	270	1800,1
111	5400	900	12,5	540	0,45	2700	180	1868,7
112	5400	900	15	180	0,45	2700	360	3105,4

PLACA FURO CIRCULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
113	5400	900	15	360	0,45	2700	270	3104,2
114	5400	900	15	540	0,45	2700	180	3222,2
115	5400	900	19	180	0,45	2700	360	6292,3
116	5400	900	19	360	0,45	2700	270	6286,6
117	5400	900	19	540	0,45	2700	180	6524,7
118	5400	900	22	180	0,45	2700	360	9744,7
119	5400	900	22	360	0,45	2700	270	9732,4
120	5400	900	22	540	0,45	2700	180	10100

PLACA FURO QUADRADO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
121	900	900	10	180	0,45	360	360	796,98
122	900	900	10	360	0,45	270	270	694,17
123	900	900	10	540	0,45	180	180	646,43
124	900	900	12,5	180	0,45	360	360	1550,9
125	900	900	12,5	360	0,45	270	270	1348,4
126	900	900	12,5	540	0,45	180	180	1251,1
127	900	900	15	180	0,45	360	360	2670,1
128	900	900	15	360	0,45	270	270	2317,1
129	900	900	15	540	0,45	180	180	2142
130	900	900	19	180	0,45	360	360	5393,8
131	900	900	19	360	0,45	270	270	4667,1
132	900	900	19	540	0,45	180	180	4289
133	900	900	22	180	0,45	360	360	8335,1
134	900	900	22	360	0,45	270	270	7196,1
135	900	900	22	540	0,45	180	180	6583,7
136	1800	900	10	180	0,45	360	360	974,38
137	1800	900	10	360	0,45	270	270	1077,5
138	1800	900	10	540	0,45	180	180	1244,9
139	1800	900	12,5	180	0,45	360	360	1898,3
140	1800	900	12,5	360	0,45	270	270	2097
141	1800	900	12,5	540	0,45	180	180	2415,7
142	1800	900	15	180	0,45	360	360	3271,8
143	1800	900	15	360	0,45	270	270	3610,5
144	1800	900	15	540	0,45	180	180	4146,2
145	1800	900	19	180	0,45	360	360	6620,6
146	1800	900	19	360	0,45	270	270	7292,7
147	1800	900	19	540	0,45	180	180	8330,3
148	1800	900	22	180	0,45	360	360	10243
149	1800	900	22	360	0,45	270	270	11267

PLACA FURO QUADRADO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
150	1800	900	22	540	0,45	180	180	12815
151	2700	900	10	180	0,45	360	360	893,79
152	2700	900	10	360	0,45	270	270	911,2
153	2700	900	10	540	0,45	180	180	971,38
154	2700	900	12,5	180	0,45	360	360	1741,7
155	2700	900	12,5	360	0,45	270	270	1774,7
156	2700	900	12,5	540	0,45	180	180	1891,8
157	2700	900	15	180	0,45	360	360	3002,6
158	2700	900	15	360	0,45	270	270	3057,7
159	2700	900	15	540	0,45	180	180	3259,5
160	2700	900	19	180	0,45	360	360	6078,3
161	2700	900	19	360	0,45	270	270	6184,2
162	2700	900	19	540	0,45	180	180	6591,9
163	2700	900	22	180	0,45	360	360	9407,2
164	2700	900	22	360	0,45	270	270	9564,5
165	2700	900	22	540	0,45	180	180	10194
166	3600	900	10	180	0,45	360	360	936,66
167	3600	900	10	360	0,45	270	270	966,4
168	3600	900	10	540	0,45	180	180	1002,9
169	3600	900	12,5	180	0,45	360	360	1825,6
170	3600	900	12,5	360	0,45	270	270	1882,3
171	3600	900	12,5	540	0,45	180	180	1954,2
172	3600	900	15	180	0,45	360	360	3147,9
173	3600	900	15	360	0,45	270	270	3243,4
174	3600	900	15	540	0,45	180	180	3368,7
175	3600	900	19	180	0,45	360	360	6374,3
176	3600	900	19	360	0,45	270	270	6559,9
177	3600	900	19	540	0,45	180	180	6818,3
178	3600	900	22	180	0,45	360	360	9867,3
179	3600	900	22	360	0,45	270	270	10145
180	3600	900	22	540	0,45	180	180	10551
181	4500	900	10	180	0,45	360	360	904,93
182	4500	900	10	360	0,45	270	270	918,87
183	4500	900	10	540	0,45	180	180	948,13
184	4500	900	12,5	180	0,45	360	360	1763,8
185	4500	900	12,5	360	0,45	270	270	1790,4
186	4500	900	12,5	540	0,45	180	180	1847,7
187	4500	900	15	180	0,45	360	360	3041,4

PLACA FURO QUADRADO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
188	4500	900	15	360	0,45	270	270	3086,1
189	4500	900	15	540	0,45	180	180	3185,6
190	4500	900	19	180	0,45	360	360	6159,2
191	4500	900	19	360	0,45	270	270	6245,9
192	4500	900	19	540	0,45	180	180	6449,2
193	4500	900	22	180	0,45	360	360	9534,9
194	4500	900	22	360	0,45	270	270	9664,7
195	4500	900	22	540	0,45	180	180	9981,3
196	5400	900	10	180	0,45	360	360	919,07
197	5400	900	10	360	0,45	270	270	940,62
198	5400	900	10	540	0,45	180	180	959,42
199	5400	900	12,5	180	0,45	360	360	1791,5
200	5400	900	12,5	360	0,45	270	270	1832,6
201	5400	900	12,5	540	0,45	180	180	1870,1
202	5400	900	15	180	0,45	360	360	3089,4
203	5400	900	15	360	0,45	270	270	3158,6
204	5400	900	15	540	0,45	180	180	3224,6
205	5400	900	19	180	0,45	360	360	6256,9
206	5400	900	19	360	0,45	270	270	6391,6
207	5400	900	19	540	0,45	180	180	6529,7
208	5400	900	22	180	0,45	360	360	9686,8
209	5400	900	22	360	0,45	270	270	9888,8
210	5400	900	22	540	0,45	180	180	10108

PLACA FURO LOSANGULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN)
211	900	900	10	180	0,45	450	322,721	797,06
212	900	900	10	360	0,45	450	195,442	703,71
213	900	900	10	540	0,45	450	68,162	660,14
214	900	900	12,5	180	0,45	450	322,721	1551,2
215	900	900	12,5	360	0,45	450	195,442	1368,1
216	900	900	12,5	540	0,45	450	68,162	1278,5
217	900	900	15	180	0,45	450	322,721	2670,9
218	900	900	15	360	0,45	450	195,442	2353,2
219	900	900	15	540	0,45	450	68,162	2190,2
220	900	900	19	180	0,45	450	322,721	5396,5
221	900	900	19	360	0,45	450	195,442	4746,4
222	900	900	19	540	0,45	450	68,162	4386,7
223	900	900	22	180	0,45	450	322,721	8340,4
224	900	900	22	360	0,45	450	195,442	7325,9
225	900	900	22	540	0,45	450	68,162	6731,4
226	1800	900	10	180	0,45	900	322,721	992,49
227	1800	900	10	360	0,45	900	195,442	1146,4
228	1800	900	10	540	0,45	900	68,162	1551,5
229	1800	900	12,5	180	0,45	900	322,721	1933,5
230	1800	900	12,5	360	0,45	900	195,442	2232,3
231	1800	900	12,5	540	0,45	900	68,162	3019,7
232	1800	900	15	180	0,45	900	322,721	3332,2
233	1800	900	15	360	0,45	900	195,442	3845,2
234	1800	900	15	540	0,45	900	68,162	5198,8
235	1800	900	19	180	0,45	900	322,721	6742
236	1800	900	19	360	0,45	900	195,442	7772,8
237	1800	900	19	540	0,45	900	68,162	10500
238	1800	900	22	180	0,45	900	322,721	10430
239	1800	900	22	360	0,45	900	195,442	12015
240	1800	900	22	540	0,45	900	68,162	16218
241	2700	900	10	180	0,45	1350	322,721	899,95
242	2700	900	10	360	0,45	1350	195,442	952,82
243	2700	900	10	540	0,45	1350	68,162	1011,9
244	2700	900	12,5	180	0,45	1350	322,721	1753,8
245	2700	900	12,5	360	0,45	1350	195,442	1856,3
246	2700	900	12,5	540	0,45	1350	68,162	1971,5
247	2700	900	15	180	0,45	1350	322,721	3023,5
248	2700	900	15	360	0,45	1350	195,442	3199,5
249	2700	900	15	540	0,45	1350	68,162	3398
250	2700	900	19	180	0,45	1350	322,721	6120,9
251	2700	900	19	360	0,45	1350	195,442	6474,3

PLACA FURO LOSANGULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN/m)
252	2700	900	19	540	0,45	1350	68,162	6876
253	2700	900	22	180	0,45	1350	322,721	9473,6
254	2700	900	22	360	0,45	1350	195,442	10017
255	2700	900	22	540	0,45	1350	68,162	10638
256	3600	900	10	180	0,45	1800	322,721	944,28
257	3600	900	10	360	0,45	1800	195,442	991,25
258	3600	900	10	540	0,45	1800	68,162	1005,2
259	3600	900	12,5	180	0,45	1800	322,721	1840,5
260	3600	900	12,5	360	0,45	1800	195,442	1931,6
261	3600	900	12,5	540	0,45	1800	68,162	1958,8
262	3600	900	15	180	0,45	1800	322,721	3173,7
263	3600	900	15	360	0,45	1800	195,442	3329,9
264	3600	900	15	540	0,45	1800	68,162	3376,8
265	3600	900	19	180	0,45	1800	322,721	6427
266	3600	900	19	360	0,45	1800	195,442	6740,3
267	3600	900	19	540	0,45	1800	68,162	6835,5
268	3600	900	22	180	0,45	1800	322,721	9949,1
269	3600	900	22	360	0,45	1800	195,442	10431
270	3600	900	22	540	0,45	1800	68,162	10578
271	4500	900	10	180	0,45	2250	322,721	909,86
272	4500	900	10	360	0,45	2250	195,442	942,13
273	4500	900	10	540	0,45	2250	68,162	958,53
274	4500	900	12,5	180	0,45	2250	322,721	1773,5
275	4500	900	12,5	360	0,45	2250	195,442	1836,2
276	4500	900	12,5	540	0,45	2250	68,162	1868,2
277	4500	900	15	180	0,45	2250	322,721	3058,2
278	4500	900	15	360	0,45	2250	195,442	3166
279	4500	900	15	540	0,45	2250	68,162	3221,3
280	4500	900	19	180	0,45	2250	322,721	6193,4
281	4500	900	19	360	0,45	2250	195,442	6410,6
282	4500	900	19	540	0,45	2250	68,162	6522,7
283	4500	900	22	180	0,45	2250	322,721	9588,2
284	4500	900	22	360	0,45	2250	195,442	9923
285	4500	900	22	540	0,45	2250	68,162	10097
286	5400	900	10	180	0,45	2700	322,721	925,58
287	5400	900	10	360	0,45	2700	195,442	956,99
288	5400	900	10	540	0,45	2700	68,162	958,69
289	5400	900	12,5	180	0,45	2700	322,721	1804,3
290	5400	900	12,5	360	0,45	2700	195,442	1865,3
291	5400	900	12,5	540	0,45	2700	68,162	1868,7
292	5400	900	15	180	0,45	2700	322,721	3111,6

PLACA FURO LOSANGULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pcr (kN/m)
293	5400	900	15	360	0,45	2700	195,442	3216,3
294	5400	900	15	540	0,45	2700	68,162	3222,2
295	5400	900	19	180	0,45	2700	322,721	6302,3
296	5400	900	19	360	0,45	2700	195,442	6512,9
297	5400	900	19	540	0,45	2700	68,162	6525,2
298	5400	900	22	180	0,45	2700	322,721	9757,6
299	5400	900	22	360	0,45	2700	195,442	10082
300	5400	900	22	540	0,45	2700	68,162	10101

B. RESULTADO DOS MODELOS NUMÉRICOS NÃO-LINEARES

As soluções não lineares obtidas através da simulação numérica auxiliada pelo software ANSYS para 300 modelos de placas.

PLACA SEM FURO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
1	900	900	10	0	0,45	450	450	1844,99
2	900	900	12,5	0	0,45	450	450	2559,7
3	900	900	15	0	0,45	450	450	3426,45
4	900	900	19	0	0,45	450	450	5270,35
5	900	900	22	0	0,45	450	450	6874,6
6	1800	900	10	0	0,45	900	450	1845,76
7	1800	900	12,5	0	0,45	900	450	2561,71
8	1800	900	15	0	0,45	900	450	3431,71
9	1800	900	19	0	0,45	900	450	5282,9
10	1800	900	22	0	0,45	900	450	6881,28
11	2700	900	10	0	0,45	1350	450	1798,32
12	2700	900	12,5	0	0,45	1350	450	2540,52
13	2700	900	15	0	0,45	1350	450	3414,4
14	2700	900	19	0	0,45	1350	450	5287,13
15	2700	900	22	0	0,45	1350	450	6884,19
16	3600	900	10	0	0,45	1800	450	1798,64
17	3600	900	12,5	0	0,45	1800	450	2540,46
18	3600	900	15	0	0,45	1800	450	3414,86
19	3600	900	19	0	0,45	1800	450	5289,15
20	3600	900	22	0	0,45	1800	450	6885,73
21	4500	900	10	0	0,45	2250	450	1779,96
22	4500	900	12,5	0	0,45	2250	450	2523,72
23	4500	900	15	0	0,45	2250	450	3389,85
24	4500	900	19	0	0,45	2250	450	5291,47
25	4500	900	22	0	0,45	2250	450	6885,96
26	5400	900	10	0	0,45	2700	450	1780,19
27	5400	900	12,5	0	0,45	2700	450	2524,03
28	5400	900	15	0	0,45	2700	450	3390,48
29	5400	900	19	0	0,45	2700	450	5293,45
30	5400	900	22	0	0,45	2700	450	6883,3

PLACA FURO CIRCULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
31	900	900	10	180	0,45	450	360	1729,98
32	900	900	10	360	0,45	450	270	1443,41
33	900	900	10	540	0,45	450	180	1119,22
34	900	900	12,5	180	0,45	450	360	2353,02
35	900	900	12,5	360	0,45	450	270	1966,29
36	900	900	12,5	540	0,45	450	180	1566,55
37	900	900	15	180	0,45	450	360	3069,77
38	900	900	15	360	0,45	450	270	2555,93
39	900	900	15	540	0,45	450	180	2083,39
40	900	900	19	180	0,45	450	360	4492,15
41	900	900	19	360	0,45	450	270	3726,44
42	900	900	19	540	0,45	450	180	2717,61
43	900	900	22	180	0,45	450	360	5696,12
44	900	900	22	360	0,45	450	270	4581,05
45	900	900	22	540	0,45	450	180	3136,76
46	1800	900	10	180	0,45	900	360	1783,76
47	1800	900	10	360	0,45	900	270	1372,5
48	1800	900	10	540	0,45	900	180	1120,14
49	1800	900	12,5	180	0,45	900	360	2512,75
50	1800	900	12,5	360	0,45	900	270	1974,33
51	1800	900	12,5	540	0,45	900	180	1605,46
52	1800	900	15	180	0,45	900	360	3296,86
53	1800	900	15	360	0,45	900	270	2703,77
54	1800	900	15	540	0,45	900	180	2098,42
55	1800	900	19	180	0,45	900	360	4953,04
56	1800	900	19	360	0,45	900	270	3954,1
57	1800	900	19	540	0,45	900	180	2712,77
58	1800	900	22	180	0,45	900	360	6244,76
59	1800	900	22	360	0,45	900	270	4740,86
60	1800	900	22	540	0,45	900	180	3130,74
61	2700	900	10	180	0,45	1350	360	1644,22
62	2700	900	10	360	0,45	1350	270	1429,08
63	2700	900	10	540	0,45	1350	180	1127,29
64	2700	900	12,5	180	0,45	1350	360	2296,34
65	2700	900	12,5	360	0,45	1350	270	1969,21
66	2700	900	12,5	540	0,45	1350	180	1597,32
67	2700	900	15	180	0,45	1350	360	3067,77
68	2700	900	15	360	0,45	1350	270	2636,77
69	2700	900	15	540	0,45	1350	180	2099,58
70	2700	900	19	180	0,45	1350	360	4681,16
71	2700	900	19	360	0,45	1350	270	3892,12

PLACA FURO CIRCULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
72	2700	900	19	540	0,45	1350	180	2677,9
73	2700	900	22	180	0,45	1350	360	5890,79
74	2700	900	22	360	0,45	1350	270	4729,35
75	2700	900	22	540	0,45	1350	180	3087,75
76	3600	900	10	180	0,45	1800	360	1552,69
77	3600	900	10	360	0,45	1800	270	1389,21
78	3600	900	10	540	0,45	1800	180	675,93
79	3600	900	12,5	180	0,45	1800	360	2216,26
80	3600	900	12,5	360	0,45	1800	270	1954,55
81	3600	900	12,5	540	0,45	1800	180	1314,98
82	3600	900	15	180	0,45	1800	360	3042,74
83	3600	900	15	360	0,45	1800	270	2658,25
84	3600	900	15	540	0,45	1800	180	2107,31
85	3600	900	19	180	0,45	1800	360	4719,2
86	3600	900	19	360	0,45	1800	270	3907,4
87	3600	900	19	540	0,45	1800	180	2670,19
88	3600	900	22	180	0,45	1800	360	5893,3
89	3600	900	22	360	0,45	1800	270	4731,78
90	3600	900	22	540	0,45	1800	180	3088,99
91	4500	900	10	180	0,45	2250	360	1625,66
92	4500	900	10	360	0,45	2250	270	1423,8
93	4500	900	10	540	0,45	2250	180	1122,35
94	4500	900	12,5	180	0,45	2250	360	2288,1
95	4500	900	12,5	360	0,45	2250	270	1979,6
96	4500	900	12,5	540	0,45	2250	180	1600,44
97	4500	900	15	180	0,45	2250	360	3067,71
98	4500	900	15	360	0,45	2250	270	2638,25
99	4500	900	15	540	0,45	2250	180	2099,98
100	4500	900	19	180	0,45	2250	360	4686,04
101	4500	900	19	360	0,45	2250	270	3875,49
102	4500	900	19	540	0,45	2250	180	2670,39
103	4500	900	22	180	0,45	2250	360	5896,47
104	4500	900	22	360	0,45	2250	270	4723,96
105	4500	900	22	540	0,45	2250	180	3092,16
106	5400	900	10	180	0,45	2700	360	1570,13
107	5400	900	10	360	0,45	2700	270	835,89
108	5400	900	10	540	0,45	2700	180	719,85
109	5400	900	12,5	180	0,45	2700	360	2228,75
110	5400	900	12,5	360	0,45	2700	270	1653,52
111	5400	900	12,5	540	0,45	2700	180	1308,93
112	5400	900	15	180	0,45	2700	360	2800,08

PLACA FURO CIRCULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
113	5400	900	15	360	0,45	2700	270	2649,73
114	5400	900	15	540	0,45	2700	180	2105,54
115	5400	900	19	180	0,45	2700	360	4670,29
116	5400	900	19	360	0,45	2700	270	3910,29
117	5400	900	19	540	0,45	2700	180	2667,64
118	5400	900	22	180	0,45	2700	360	5858,72
119	5400	900	22	360	0,45	2700	270	4729,08
120	5400	900	22	540	0,45	2700	180	3088,92

PLACA FURO QUADRADO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
121	900	900	10	180	0,45	360	360	1706,8
122	900	900	10	360	0,45	270	270	1365,97
123	900	900	10	540	0,45	180	180	1051,69
124	900	900	12,5	180	0,45	360	360	2318,88
125	900	900	12,5	360	0,45	270	270	1886,68
126	900	900	12,5	540	0,45	180	180	1574,24
127	900	900	15	180	0,45	360	360	3030,06
128	900	900	15	360	0,45	270	270	2507,76
129	900	900	15	540	0,45	180	180	1918,62
130	900	900	19	180	0,45	360	360	4436,84
131	900	900	19	360	0,45	270	270	3661,36
132	900	900	19	540	0,45	180	180	2430,98
133	900	900	22	180	0,45	360	360	5628,35
134	900	900	22	360	0,45	270	270	4297,79
135	900	900	22	540	0,45	180	180	2815,03
136	1800	900	10	180	0,45	360	360	1526,99
137	1800	900	10	360	0,45	270	270	1317,83
138	1800	900	10	540	0,45	180	180	1048,58
139	1800	900	12,5	180	0,45	360	360	2250,14
140	1800	900	12,5	360	0,45	270	270	1944,5
141	1800	900	12,5	540	0,45	180	180	1536,39
142	1800	900	15	180	0,45	360	360	3080,58
143	1800	900	15	360	0,45	270	270	2696,57
144	1800	900	15	540	0,45	180	180	1882,16
145	1800	900	19	180	0,45	360	360	4875,66
146	1800	900	19	360	0,45	270	270	3582,56
147	1800	900	19	540	0,45	180	180	2363,72
148	1800	900	22	180	0,45	360	360	5746,8
149	1800	900	22	360	0,45	270	270	4150,24

PLACA FURO QUADRADO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
150	1800	900	22	540	0,45	180	180	2737,16
151	2700	900	10	180	0,45	360	360	1500,77
152	2700	900	10	360	0,45	270	270	1319,64
153	2700	900	10	540	0,45	180	180	1033,28
154	2700	900	12,5	180	0,45	360	360	2167,99
155	2700	900	12,5	360	0,45	270	270	1909,48
156	2700	900	12,5	540	0,45	180	180	1553,11
157	2700	900	15	180	0,45	360	360	3007,47
158	2700	900	15	360	0,45	270	270	2628,14
159	2700	900	15	540	0,45	180	180	1855,66
160	2700	900	19	180	0,45	360	360	4660,51
161	2700	900	19	360	0,45	270	270	3586,08
162	2700	900	19	540	0,45	180	180	2379,29
163	2700	900	22	180	0,45	360	360	5606,16
164	2700	900	22	360	0,45	270	270	4194,04
165	2700	900	22	540	0,45	180	180	2755,13
166	3600	900	10	180	0,45	360	360	1466,8
167	3600	900	10	360	0,45	270	270	1310,3
168	3600	900	10	540	0,45	180	180	981,17
169	3600	900	12,5	180	0,45	360	360	2044,83
170	3600	900	12,5	360	0,45	270	270	1907,21
171	3600	900	12,5	540	0,45	180	180	1546,7
172	3600	900	15	180	0,45	360	360	3004,78
173	3600	900	15	360	0,45	270	270	2650,14
174	3600	900	15	540	0,45	180	180	1817,02
175	3600	900	19	180	0,45	360	360	4687,96
176	3600	900	19	360	0,45	270	270	3517,64
177	3600	900	19	540	0,45	180	180	2302,4
178	3600	900	22	180	0,45	360	360	5666,38
179	3600	900	22	360	0,45	270	270	4191,87
180	3600	900	22	540	0,45	180	180	2666,11
181	4500	900	10	180	0,45	360	360	1493,08
182	4500	900	10	360	0,45	270	270	1322,93
183	4500	900	10	540	0,45	180	180	1054,91
184	4500	900	12,5	180	0,45	360	360	2166,11
185	4500	900	12,5	360	0,45	270	270	1901,67
186	4500	900	12,5	540	0,45	180	180	1556,02
187	4500	900	15	180	0,45	360	360	2993,37
188	4500	900	15	360	0,45	270	270	2644,74
189	4500	900	15	540	0,45	180	180	1849,34
190	4500	900	19	180	0,45	360	360	4673,51

PLACA FURO QUADRADO								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
191	4500	900	19	360	0,45	270	270	3623,99
192	4500	900	19	540	0,45	180	180	2344,33
193	4500	900	22	180	0,45	360	360	5699,87
194	4500	900	22	360	0,45	270	270	4220,86
195	4500	900	22	540	0,45	180	180	2714,81
196	5400	900	10	180	0,45	360	360	1467,23
197	5400	900	10	360	0,45	270	270	1310,9
198	5400	900	10	540	0,45	180	180	941,73
199	5400	900	12,5	180	0,45	360	360	1645,07
200	5400	900	12,5	360	0,45	270	270	1896,78
201	5400	900	12,5	540	0,45	180	180	1510,07
202	5400	900	15	180	0,45	360	360	2783,17
203	5400	900	15	360	0,45	270	270	2636,44
204	5400	900	15	540	0,45	180	180	1826,07
205	5400	900	19	180	0,45	360	360	4643,78
206	5400	900	19	360	0,45	270	270	3594,87
207	5400	900	19	540	0,45	180	180	2314,25
208	5400	900	22	180	0,45	360	360	5625,36
209	5400	900	22	360	0,45	270	270	4210,04
210	5400	900	22	540	0,45	180	180	2679,89

PLACA FURO LOSANGULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
211	900	900	10	180	0,45	450	322,721	1657,36
212	900	900	10	360	0,45	450	195,442	1232,15
213	900	900	10	540	0,45	450	68,162	569,6
214	900	900	12,5	180	0,45	450	322,721	2238,01
215	900	900	12,5	360	0,45	450	195,442	1683,34
216	900	900	12,5	540	0,45	450	68,162	712,48
217	900	900	15	180	0,45	450	322,721	2900,24
218	900	900	15	360	0,45	450	195,442	2199,91
219	900	900	15	540	0,45	450	68,162	855,14
220	900	900	19	180	0,45	450	322,721	4217,83
221	900	900	19	360	0,45	450	195,442	3068,09
222	900	900	19	540	0,45	450	68,162	1083,22
223	900	900	22	180	0,45	450	322,721	5273,24
224	900	900	22	360	0,45	450	195,442	3615,36
225	900	900	22	540	0,45	450	68,162	1244,32
226	1800	900	10	180	0,45	900	322,721	1201,39
227	1800	900	10	360	0,45	900	195,442	1186,9

PLACA FURO LOSANGULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
228	1800	900	10	540	0,45	900	68,162	438,1
229	1800	900	12,5	180	0,45	900	322,721	2039,87
230	1800	900	12,5	360	0,45	900	195,442	1684,41
231	1800	900	12,5	540	0,45	900	68,162	547,67
232	1800	900	15	180	0,45	900	322,721	2925,16
233	1800	900	15	360	0,45	900	195,442	2150,35
234	1800	900	15	540	0,45	900	68,162	657,23
235	1800	900	19	180	0,45	900	322,721	4407,56
236	1800	900	19	360	0,45	900	195,442	2658,22
237	1800	900	19	540	0,45	900	68,162	832,51
238	1800	900	22	180	0,45	900	322,721	5106,89
239	1800	900	22	360	0,45	900	195,442	3078,25
240	1800	900	22	540	0,45	900	68,162	963,98
241	2700	900	10	180	0,45	1350	322,721	1490,71
242	2700	900	10	360	0,45	1350	195,442	1203,08
243	2700	900	10	540	0,45	1350	68,162	493,7
244	2700	900	12,5	180	0,45	1350	322,721	2145,29
245	2700	900	12,5	360	0,45	1350	195,442	1682,36
246	2700	900	12,5	540	0,45	1350	68,162	617,22
247	2700	900	15	180	0,45	1350	322,721	2921,42
248	2700	900	15	360	0,45	1350	195,442	2073
249	2700	900	15	540	0,45	1350	68,162	740,71
250	2700	900	19	180	0,45	1350	322,721	4325,01
251	2700	900	19	360	0,45	1350	195,442	2627,39
252	2700	900	19	540	0,45	1350	68,162	938,06
253	2700	900	22	180	0,45	1350	322,721	5047,43
254	2700	900	22	360	0,45	1350	195,442	3042,4
255	2700	900	22	540	0,45	1350	68,162	1086,19
256	3600	900	10	180	0,45	1800	322,721	1444,14
257	3600	900	10	360	0,45	1800	195,442	830,63
258	3600	900	10	540	0,45	1800	68,162	466,37
259	3600	900	12,5	180	0,45	1800	322,721	2102,34
260	3600	900	12,5	360	0,45	1800	195,442	1574,36
261	3600	900	12,5	540	0,45	1800	68,162	583,25
262	3600	900	15	180	0,45	1800	322,721	2921,9
263	3600	900	15	360	0,45	1800	195,442	2192,13
264	3600	900	15	540	0,45	1800	68,162	699,99
265	3600	900	19	180	0,45	1800	322,721	4377,46
266	3600	900	19	360	0,45	1800	195,442	2777,77
267	3600	900	19	540	0,45	1800	68,162	886,74
268	3600	900	22	180	0,45	1800	322,721	5021,64

PLACA FURO LOSANGULAR								
PLACA	a (mm)	b (mm)	t (mm)	d (mm)	w0pl	nó X (mm)	nó Y (mm)	Pult (kN)
269	3600	900	22	360	0,45	1800	195,442	3216,49
270	3600	900	22	540	0,45	1800	68,162	1026,79
271	4500	900	10	180	0,45	2250	322,721	1477,17
272	4500	900	10	360	0,45	2250	195,442	1194,52
273	4500	900	10	540	0,45	2250	68,162	505,78
274	4500	900	12,5	180	0,45	2250	322,721	2127,82
275	4500	900	12,5	360	0,45	2250	195,442	1663,08
276	4500	900	12,5	540	0,45	2250	68,162	632,55
277	4500	900	15	180	0,45	2250	322,721	2909,17
278	4500	900	15	360	0,45	2250	195,442	2177,93
279	4500	900	15	540	0,45	2250	68,162	759,15
280	4500	900	19	180	0,45	2250	322,721	4379,69
281	4500	900	19	360	0,45	2250	195,442	2867,02
282	4500	900	19	540	0,45	2250	68,162	961,64
283	4500	900	22	180	0,45	2250	322,721	5266,92
284	4500	900	22	360	0,45	2250	195,442	3321,52
285	4500	900	22	540	0,45	2250	68,162	1113,51
286	5400	900	10	180	0,45	2700	322,721	1445,7
287	5400	900	10	360	0,45	2700	195,442	852,65
288	5400	900	10	540	0,45	2700	68,162	435,48
289	5400	900	12,5	180	0,45	2700	322,721	1636,34
290	5400	900	12,5	360	0,45	2700	195,442	1614,76
291	5400	900	12,5	540	0,45	2700	68,162	544,58
292	5400	900	15	180	0,45	2700	322,721	2824,56
293	5400	900	15	360	0,45	2700	195,442	1979,25
294	5400	900	15	540	0,45	2700	68,162	653,58
295	5400	900	19	180	0,45	2700	322,721	4343,89
296	5400	900	19	360	0,45	2700	195,442	2273,9
297	5400	900	19	540	0,45	2700	68,162	827,94
298	5400	900	22	180	0,45	2700	322,721	5059,77
299	5400	900	22	360	0,45	2700	195,442	2905,82
300	5400	900	22	540	0,45	2700	68,162	958,69