UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

MODELAGEM ANALÍTICA DE ESTRUTURAS DO TIPO CABO PARA APLICAÇÕES SUBAQUÁTICAS

por

Elisane Brião Zanela

Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes
Orientador

Prof.ªDrª. Adriana Elisa Ladeira Pereira
Co-orientadora

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Universidade Federal de Rio Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Altamir Dias	(UFSC)
Prof. Dr..Mário Rocha Retamoso	(FURG)
Prof. Dr. Paulo Roberto de F. Teixeira.	(FURG)
Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes	(FURG, Orientador)

RIO GRANDE, 2013

*Este trabalho é dedicado aos meus pais e às minhas filhas **Angeline** e **Camile**.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado condições para concluir este trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes pelo excelente trabalho. Ele foi um orientador extremamente dedicado, amigo, compreensivo e principalmente motivador, com o qual tive um imenso orgulho e satisfação em trabalhar. A ele, digo obrigada.

A minha co-orientadora Profa. Dra. Adriana Elisa Ladeira Pereira por ser uma excelente profissional, pela atenção, amizade, motivação e pela disponibilidade para me ajudar sempre que foi preciso.

Ao programa de PG Eng. Oceânica, por ter me dado a oportunidade de realizar esta dissertação.

À minha família e a todos que de alguma forma contribuíram para que mais este trabalho fosse possível, em especial à secretária Nilsa do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, aos meus irmãos Elisângela e Ângelo, à Márcia Helena dos Santos, a Adriano Zaher, à Daneele Saraçol e à Danusa Espíndola.

Às minhas filhas Angeline e Camile pelo carinho, paciência e incentivo em todas as horas em que dediquei para desenvolver este trabalho.

SUMÀRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_i\ ,\ i=1,\ldots,n$	alturas
C	matriz das constantes de atrito
C_e	sub-matriz da matriz K (em relação à elevação)
C_a	sub-matriz da matriz K (em relação à azimute)
C_t	sub-matriz da matriz K (em relação à torção)
$c_{ij}, i, j=1,\ldots,9$	elementos da matriz das constantes de atrito
c_{1a}, c_{2a}, c_{3a}	constantes de atrito devido aos movimentos de azimute
c_{1e}, c_{2e}, c_{3e}	constantes de atrito devido aos movimentos de elevação
c_{1t}, c_{2t}, c_{3t}	constantes de atrito devido aos movimentos de torção
c_v	coeficiente de arrasto hidrodinâmico
d	diâmetro do cabo
E	Módulo de Young
E_c	energia cinética
E_{c_R}	energia cinética devido ao movimento de rotação
E_{c_T}	energia cinética devido ao movimento de translação
E_p	energia potencial
$\vec{f}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right),\ \vec{F}\left(\vec{X}\right)$	vetor de esforços não lineares (coriolis-centrífugo)
$f_i,\ i=1,\ldots,9$	componentes dovetor coriolis-centrífugo
$\vec{G}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right)$	vetor gravitacional
$G_i\ , i-1, \ldots, n$	componentes do vetor gravitacional
g	aceleração da gravidade
$H_{0_1}\ ,\ H_{0_2}, H_{0_3}\ ,\ \ H_{1_2}, H_{1_3}$	matrizes de transformação homogênea
$h_i\ ,\ i=1,\ldots,n$	Alturas
I	matriz de inércia completa
I_e	sub-matriz dos elementos relativos à elevação
$I_{R_i}\ ,\ i=1,\ldots,n$	momentos de inércia de rotação nas articulações fictícias
$I_{t_i}\ ,\ i=1,\ldots,n$	momentos de inércia de torção nas articulações fictícias
$I\left(\vec{\theta}\right)$	matriz de inércia
$I_{ij}, i, j=1,\ldots,9$	elementos da matriz $I\left(\vec{\theta}\right)$
$\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\vec{k}$	vetores da base ortonormal

K	matriz das constantes elásticas
K_e	sub-matriz de K (relativo à elevação)
K_a	sub-matriz de K (relativo à azimute)
K_t	sub-matriz de K (relativo à torção)
k_{ia} , $i = 1,\ldots,n$	constantes elásticas devido aos ângulos de azimute
k_{ie} , $i = 1,\ldots,n$	constantes elásticas devido aos ângulos de elevação
k_{it} , $i = 1,\ldots,n$	constantes elásticas devido aos ângulos de torção
l	comprimento do elo
L	Lagrangeano do sistema
L_c	Comprimento do cabo
L_i , La_1, $i = 1,\ldots,5$	termos que fazem parte do Lagrangeano
l_i , $i = 1,\ldots,n$	comprimentos dos elos do cabo
m_e	massa específica do cabo
m_i , $i = 1,\ldots,n$	massas dos elos do cabo
m_c	massa da carga
n	número de elos
$N_{e,}$ N_a	sub-matrizes da matriz de inércia completa
O_iX_i, O_iY_i, O_iZ_i	eixos do sistema de coordenadas
$\vec{P}$	Vetor
$\vec{p}_{x_1y_1z_1}$	Vetor
$\hat{p}_{x_1y_1z_1}$	vetor em coordenadas homogêneas
$P_{x_iy_iz_i}$	coordenadas do ponto no sistema de referência $x_iy_iz_i$
p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}	projeções de $\vec{p}$ segundo os eixos ox_1, oy_1 e oz_1
Re	número de Reynolds
R	matriz de rotação
R^{-1}	inversa da matriz R
R^T	transposta da matriz R
$\vec{R}$	vetor ($nx1$) que contém os termos de l_i^2 das componentes de azimute do vetor coriolís-centrífugo.
$R_{x_0,\alpha}$, $R_{y_0,\phi}$ e $R_{z_0,\theta}$	matrizes de rotações básicas elementares
t	Tempo
T	matriz de transformação homogênea
T_t, T_e e T_a	sub-matrizes da matriz de inércia completa

$\vec{T}_i\ , i=1,\ldots,3$	vetor torque no i-ésimo elo do cabo
$\vec{T}_m$	vetor de torques externos
$T_{mi}\ , i=1,\ldots,9$	componentes do vetor $\vec{T}_m$
$T_{\theta ia}, T_{\theta ie}, T_{\theta iT}$	torques externos atuando nas articulações fictícias
$T_{ix}, T_{iy}, T_{iz}, i=1,\ldots,3$	torques no i-ésimo elo
$T_{x_0,\alpha}$, $T_{y_0,\phi}$ e $T_{z_0,\theta}$	matrizes de rotações homogêneas básicas
w	fator de escala
W	Matriz em relação aos ang. e veloc. de azimute e elevação
$X_0Y_0Z_0$	sistema inercial da base
$X_iY_iZ_i$	sistema de referência
X_{i-1} , Y_{i-1} , Z_{i-1}	eixos dos sistemas de referência
$\vec{z}$	componente do vetor coriolis-centrífugo

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right)$	derivada total em relação à *t*
$\dfrac{\partial L}{\partial \theta_{ia}}, \dfrac{\partial L}{\partial \theta_{ie}}, \dfrac{\partial L}{\partial \theta_{iT}}$	derivadas parciais do Lagrangeano
$\sum_{i=1}^{j}, \sum_{j=1}^{n}, \sum_{i=1}^{\ell}, \sum_{i=1}^{\ell-1}$	somatórios
$\vec{\theta}$	vetor de estado
$\dot{\vec{\theta}}$	derivada primeira do vetor $\vec{\theta}$ em relação à *t*
$\ddot{\vec{\theta}}$	derivada segunda do vetor $\vec{\theta}$ em relação à *t*
$\theta_{ia}, i = 1, \ldots, n$	ângulos de azimute
$\theta_{ie}, i = 1, \ldots, n$	ângulos de elevação
$\theta_{iT}, i = 1, \ldots, n$	ângulos de torção
$\dot{\theta}_{ia}, i = 1, \ldots, n$	derivada em relação à *t* da posição em azimute
$\dot{\theta}_{ie}, i = 1, \ldots, n$	derivada em relação à *t* da posição em elevação
$\dot{\theta}_{iT}, i = 1, \ldots, n$	derivada em relação à t da posição em torção
(x_i, y_i, z_i)	coordenadas do centro de massa do i-ésimo elo do cabo
(x_c, y_c, z_c)	coordenadas do centro de massa da carga
$(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1})$	coordenadas na segunda articulação fictícia
$(x_{1_2}, y_{1_2}, z_{1_2})$	coordenadas da terceira articulação fictícia

LISTA DE ABREVIATURAS

ACNF	Absolute Nodal Coordinate Formulation
FEM	Finite Elements Method
NP-FEM	Posição Nodal – Finite Elements Method
ROV	Remotely Operated Vehicle
SPF	Sistemas de Produção Flutuantes

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELA

RESUMO

Neste trabalho considera-se o método do Formalismo Discreto (*Lumped mass aproach*) para a modelagem dinâmica tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo, a partir do formalismo de Euler-Lagrange, cuja ideia principal é supor que o cabo seja formado por pequenas partes rígidas conectadas por articulações fictícias, que permitem três movimentos livres de elevação, azimute e torção. Este formalismo permite a determinação do Lagrangeano do sistema de forma algorítmica. Apesar de ter simples concepção, a proposta apresenta uma séria limitação à sua utilização devido ao tamanho das equações, que cresce muito quando se amplia o número de elos rígidos para aproximar a flexibilidade estrutural contínua. Este fato inviabiliza o desenvolvimento manual das equações do modelo dinâmico para além de quatro elos considerados. Foram então desenvolvidos de forma inédita neste trabalho, algoritmos genéricos que permitem gerar de forma automática os modelos dinâmicos, independentemente do número de elos escolhidos para a estrutura, sendo esta a principal contribuição científica da presente dissertação. Inicialmente foram desenvolvidos manualmente os modelos para dois, três e quatro elos. Um árduo estudo permitiu verificar que há lógicas nos crescimentos dos vetores e matrizes do sistema dinâmico, à medida que se amplia o número de elos considerados. Estas lógicas foram identificadas, fato que permitiu a criação dos algoritmos genéricos para a determinação automática dos modelos dinâmicos. Resultados numéricos oriundos da confrontação dos algoritmos genéricos com um *software* de geração automática de modelos dinâmicos foram obtidos e mostraram que, de fato, os algoritmos podem prever o crescimento do modelo de forma independente do número de elos adotados para a estrutura. O *software* utilizado na validação dos resultados utiliza a manipulação simbólica de variáveis do MATLAB. Finalmente, simulações foram realizadas com modelos dinâmicos considerando-se diversos casos de número de elos e mostraram resultados fisicamente esperados.

Palavras-chave: Modelagem analítica. Formalismo discreto. Algoritmos genéricos. cabos subaquáticos.

ABSTRACT

In this paper we consider the method of Discrete Formalism (Lumped Mass Aproach) for three-dimensional dynamic modeling of flexible structures of cable, from the Euler-Lagrange formalism, whose main idea is to assume that the cable is formed by small rigid parts connected by fictitious joints, allowing three free movements, elevation, azimuth and torsion. This formalism allows determining the Lagrangian of the system algorithmically. Despite simple design, the proposition has a serious limitation to their use because of the size of the equations, due of increasing the number of rigid links to approximate the continuous structural flexibility. This fact hinders the development of the manual dynamic model equations beyond four links considered. It was developed in this work generic algorithms that allow for automatic generation of dynamic models, regardless of the number of links chosen for the structure, which is the main scientific contribution of this dissertation. Initially models were developed manually for two, three and four links. A hard study showed that there is logic in the growth of vectors and matrices of the dynamic system, as it expands the number of links considered. These logics have been identified and this allowed the creation of generic algorithms for automatic determination of dynamic models. Numerical results derived from a comparison of generic algorithms in software automatic generation of dynamic models were obtained and showed that, indeed, the algorithms can predict growth model independently of the number of links adopted to the structure. The software used in the validation of the results using the symbolic manipulation of MATLAB variables. Finally, simulations were performed with dynamic models considering several cases of number of links and show results physically expected.

Keywords: Analytical modeling. Lumped mass approach. Generic algorithms. underwater cable

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Na literatura existe uma grande quantidade de trabalhos sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo e suas aplicações, como por exemplo, Sistemas de Produção Flutuantes (SPF), como mostra a figura (1.1), constituídos por plataformas de produção, navios convertidos para o mesmo fim e subsistemas, tais como, *risers* de produção flexíveis, linhas de ancoragem, entre outros.

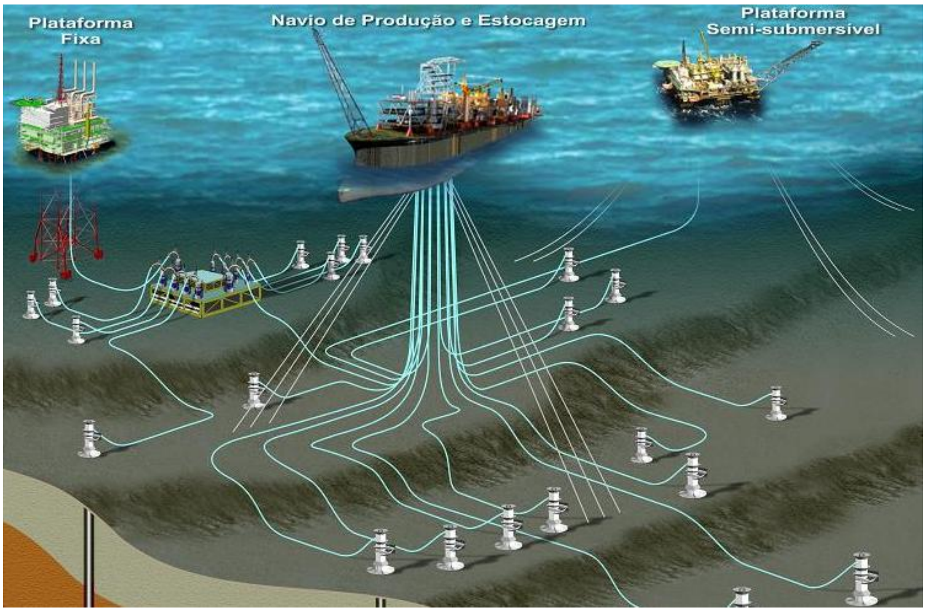

Figura 1.1 Plataformas petrolíferas (Fonte: http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas).

Devido às não linearidades, a flexibilidade no espaço tridimensional, e ainda, à existência de complexas interações com o meio no qual o cabo está inserido, determinar o modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo é um problema complexo. Grande parte dos trabalhos encontrados na literatura aborda a modelagem destas estruturas a partir do Método de Elementos Finitos, que consiste em um método numérico aproximado para análise de fenômenos físicos em meios contínuos.

A presente dissertação propõe a utilização da técnica de modelagem conhecida como *Formalismo Discreto*, na língua inglesa de *Lumped Mass*

Approach, que tem como base o formalismo de Euler-Lagrange. Este formalismo foi desenvolvido por (PEREIRA [26]) para a modelagem dinâmica (matemática) de estruturas flexíveis do tipo cabo, cujo fundamento principal é supor que o cabo é formado por diversas partes rígidas (elos) conectadas por articulações elásticas fictícias, permitindo três movimentos distintos: azimute, elevação e torção, no espaço tridimensional. Esta técnica também foi utilizada por MACHADO *et. al.*, [18] no desenvolvimento de um algoritmo para a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis.

Esta formulação permite determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elementos que se escolha dividir a estrutura flexível. Com a aplicação das equações de Euler-Lagrange a todos os graus de liberdade do sistema torna-se possível a obtenção final do modelo dinâmico. Porém, devido à complexidade e extensão das equações obtidas por este formalismo, torna-se muito difícil desenvolver o modelo manualmente sem erros.

Uma das principais contribuições deste trabalho consiste em desenvolver um algoritmo genérico capaz de gerar o modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo de forma automática para qualquer número de graus de liberdade.

A partir da ideia de que o comportamento da natureza segue uma regra matemática, torna-se interessante uma análise detalhada de como ocorre o crescimento das matrizes e vetores gerados na modelagem do cabo. Para isso os casos em que o cabo é divido em dois, três e quatro elos serão melhor explicitados nos próximos capítulos.

Após o estudo do crescimento das matrizes e vetores associados à modelagem será possível obter equações gerais que permitam desenvolver algoritmos para a determinação automática do modelo dinâmico da estrutura para qualquer número de elos escolhidos para representar a flexibilidade contínua.

O formalismo discreto constitui-se na mais simples das técnicas em termos matemáticos, uma vez que não há a necessidade de se trabalhar com equações diferenciais parciais, nem com as condições de contorno. Porém, as equações obtidas são extensas. Com a determinação das equações gerais torna-se possível desenvolver um algoritmo genérico capaz de evitar problemas relacionados com o desempenho do sistema, tanto em processamento quanto em uso de memória, sem se preocupar com o número de elos que se deseja dividir a estrutura.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção apresenta um resumo de trabalhos consultados durante a elaboração desta dissertação, que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento da mesma.

F. A. Rochinha e P. Tallec (1990)

O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais

Este artigo apresenta um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que experimentem grandes deslocamentos e grandes rotações. O modelo mecânico resulta num sistema não-linear, que é resolvido por um método de decomposição-coordenação via Lagrangeano Aumentado, possibilitando a descrição do acoplamento existente entre flexão e torção em cabos submetidos à grandes deslocamentos.

A. K. Banerjee e V. N. Do (1995)

Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to a Underwater Vehicle

Este artigo descreve o desenvolvimento de um modelo de dinâmica de cabo subaquático e um sistema de controle realista, de regulamentação e de recuperação de um veículo subaquático não tripulado amarrado a um navio. O cabo foi modelado como uma cadeia de hastes rígidas ligadas uma à outra por articulações, com dois graus de liberdade, que podem descrever a flexão do cabo em dois planos; utilizaram um algoritmo de ordem *n* para a dinâmica do sistema com *n* hastes em movimento.

P. Warnitchai; Y. Fugino e T. Susumpow (1995)

A Non-linear Dynamic Model for Cables and its Application a Cable-struture System

Estudaram um conjunto de equações governantes para a dinâmica dos movimentos transversais de um cabo com pequena flexão. Consideraram que os movimentos do cabo são separados em duas partes, ou seja, os movimentos quase estáticos, que são os deslocamentos do cabo que se move como um tendão elástico, devido aos movimentos de apoio e os movimentos modais, que são expressos como uma combinação linear dos modos não amortecidos do cabo com extremidades fixas. As equações governantes dos movimentos não-lineares do cabo foram obtidas a partir das equações de Lagrange.

P.H. Wang; R.F. Fung e M.J. Lee (1998)

*Finite Element Analysis of a Three-dimensional Underwater Cable with Time-dependent Length***.**

Neste artigo, os autores utilizaram o método de elementos finito e investigaram as vibrações de um cabo subaquático geometricamente não linear com um peso na extremidade inferior.

A. E. L. Pereira (1999)

Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis.

Nesta dissertação foi desenvolvida e validada a técnica do formalismo discreto. Trata-se de um estudo da modelagem dinâmica de uma estrutura flexível no plano, sendo esta estrutura articulada em uma extremidade e livre na outra. Neste formalismo a estrutura foi dividida em duas, três e quatro partes rígidas conectadas por articulações elásticas, permitindo apenas o movimento de elevação no espaço bidimensional.

M. A. Vaz e M. H. Patel (2000)

Three-dimensional Behaviour of Elastic Marine Cables in Sheared Currents

Neste artigo temos uma formulação que descreve a geometria elástica de um cabo em termos de dois ângulos, azimute e elevação, que estão relacionados com as coordenadas cartesianas pela compatibilidade das relações geométricas. Combinaram estas relações com as equações de equilíbrio do cabo para obter um sistema de equações diferenciais não-lineares, sendo este integrado numericamente pelos métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e quinta ordens. Apresentam os resultados para tensão, ângulos, geometria e alongamento no cabo, para três exemplos: a instalação de um cabo de fibra óptica marinha, a análise estática de uma linha de amarração em águas profundas e a resposta de um cabo de telecomunicações para um perfil de corrente multi-direcional.

P. D. Gosling e F. A. Korbam (2001)

A Bendable Finite Element for the Analysis of Flexible Cable Structures

Descreveram em seu artigo uma formulação por Elementos Finitos para a análise estrutural de cabos considerando a flexibilidade finita e contínua. Os esforços de tração, compressão e flexão foram descritos em um contexto Lagrangeano Total. Através do acoplamento com o algoritmo Newton-Rhapson eles demonstraram a eficácia do elemento.

Y.M. Desai e S. Punde (2001)

Simple Model for Dynamic Analysis of Cable Supported Structures

Este artigo propõe um modelo simples para descrever as vibrações de um cabo inclinado com nove graus de liberdade utilizando uma abordagem de técnicas de elementos finitos. O modelo foi validado comparando os resultados com soluções analíticas. Alguns exemplos ilustrativos são considerados para demonstrar a aplicabilidade do modelo de análise de vibrações de cabos.

C. C. Machado; A. E. L. Pereira; S. C. P. Gomes e A. L. De Bortoli (2002)

Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis

Neste artigo foi proposto um novo algoritmo para determinar de forma bastante simples, as equações diferenciais da dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador com um único elo flexível. Desenvolveram-se ainda funções de transferência analíticas para este problema específico, as quais são importantes para a validação do modelo discreto proposto na forma de um algoritmo. O algoritmo foi desenvolvido para qualquer que seja o número de modos flexíveis considerados, além de introduzir modificações, em relação ao formalismo discreto original, que aumentam a precisão do modelo discreto. Apresenta-se, ainda no presente trabalho, um estudo analítico, o qual foi de fundamental importância à validação do modelo discreto estudado.

P. A. Oliveira; R. D. Machado e M. B. Hecke (2002)

Análise Estática Não-linear de Cabos Utilizando o Método dos Elementos Finitos

Neste artigo é feita uma análise comparativa entre dois elementos de cabos presentes na literatura. É apresentado um elemento finito isoparamétrico de cabo com dois nós, desenvolvido a partir de uma formulação variacional empregada comumente no Método dos Elementos Finitos. Também é apresentado o elemento de catenária desenvolvido a partir de expressões exatas oriundas da equação da catenária elástica. Verifica-se o comportamento estático desses elementos quando submetidos a algumas condições de carregamento. A análise é não linear e o processo iterativo é determinado através do Método de Newton-Raphson. Finalmente, é feita uma comparação dos resultados obtidos verificando algumas vantagens na utilização desses elementos em situações práticas.

R. M. Souza (2003)

O Método dos Elementos Finitos Aplicados ao Problema da Condução de Calor

Esta apostila na seção 1.1 define a ideia principal do Método dos Elementos Finitos e na seção 1.2 menciona alguns campos de aplicações deste método. Na seção 1.3 define o conceito de grau de liberdade (*degree of freedom*).

P. T. R. Mendonça (2004)

Análise Dinâmica pelo Método de Elementos Finitos

Este artigo trata do estudo que relaciona forças que atuam sobre um corpo com o movimento deste, tanto do corpo como um todo quanto de suas partes relativamente umas às outras. As equações que representam este movimento em velocidades não relativísticas são as leis do movimento de Newton. Um tipo particular de comportamento dinâmico é o 'movimento vibratório' ou simplesmente a 'vibração', onde o sistema oscila em torno de uma certa posição de equilíbrio. Este texto lida com a simulação numérica por elementos finitos de vibrações em corpos sólidos.

H. Varum e R. J. S. Cardoso (2005)

A Geometrical Non-linear Model for Cable Systems Analysis

Compararam os resultados da análise não-linear por elementos finitos e os resultados das equações analíticas para duas categorias de cabos, a partir de um exemplo, e verificaram que a solução não-linear do programa obtido a partir do método de elementos finitos foi bastante diferente daquela obtida com equações analíticas. Concluíram que as análises não-lineares geométricas tornam-se necessárias no estudo de cabos, especialmente para níveis de tensão alto/médio.

V. Johansen; S. Ersdal; A.J. Sorensen e B. Leira (2006)

Modelling of Inextensible Cable Dynamics with Experiments

Os autores desenvolveram um modelo e fizeram comparações entre experiências e simulações numéricas para a dinâmica de um cabo inextensível, com flexão, cisalhamento e rigidez de torção, desprezíveis. Utilizaram a regra do ponto médio para a integração espacial, pois em contraste com a maioria dos outros métodos alternativos para a integração numérica, a regra do ponto médio não exige que os valores da função sejam conhecidos nas fronteiras do domínio espacial.

S. Goyal; C.L. Lee e N.C. Perkins (2007)

Writhing Dynamics of Cables with Self-contact

Goyal, Lee e Perkins analisam uma teoria da haste e um algoritmo numérico que pode ser utilizado para estudar a dinâmica não linear de cabos altamente contorcidos. A teoria resultante é discretizada usando o método generalizado-α para diferenciação finita no espaço e no tempo. O principal objetivo foi o de modelar a dinâmica de cabos marinhos que conduzem a formação de laçadas e emaranhados no fundo do mar.

D. C. S. Cordovés (2008)

Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais

Esta dissertação propõe um modelo para avaliar a confiabilidade estrutural do cabo umbilical, levando em consideração os mecanismos de falha por escoamento e por fadiga mecânica. Esta análise é focada na avaliação estrutural das armaduras metálicas, dado que estes elementos suportam quase toda a carga à tração e limitam as deformações axiais da estrutura sem prejudicar significativamente a flexibilidade; desconsidera-se, portanto, o efeito estrutural do núcleo electro-óptico e das camadas polimérica interna e externa. Através da formulação de um modelo de cabo umbilical feito pelo Método dos Elementos Finitos determinou-se uma previsão de tensões atuantes na estrutura, foram estimadas as funções de densidade de probabilidade da tensão estática e da tensão alternada corrigida para um curto e longo prazo, as quais caracterizam o carregamento atuante provocado pelas ondas do mar.

J.W. Yoon; T.W. Park e H.J. Yim (2008)

Fatigue Life Prediction of a Cable Harness in an Industrial Robot Using Dynamic Simulation

Neste artigo foi verificado que o cabo que transfere os sinais e alimentação de um robô industrial tem um problema de fratura por desgaste dos componentes de aço. Como o cabo é muito flexível em comparação com os outros componentes do sistema, é difícil estimar seu movimento numericamente. Eles fizeram alguns estudos sobre o problema de grande deformação, especialmente em um cabo, e algumas tentativas foram feitas para aplicar a formulação ACNF (*Absolute Nodal Coordinate Formulation*), que pode simular uma grande deformação. Eles fizeram pesquisas sobre o desgaste na duração de cabos estruturais e estudos comparativos de simulações do FEM (*Finite Elements Method*) e ACNF. Apresentaram um método para simular o comportamento do cabo utilizando ANCF, que prevê o desgaste na duração, enquanto calcula a evolução temporal da tensão no ponto de interesse. Aplicaram a dinâmica de corpo rígido para o sistema do robô e usaram ANCF para o cabo. Desenvolveram um modelo simplificado e, com estes dados, simularam o comportamento do cabo e fizeram uma previsão do desgaste na durabilidade do mesmo.

K. Zhu; H. Zhu; Y. Zhang e J. Gao (2008)

A Multi-body Space-coupled Motion Simulation for a Deep-sea Tethered Remotely Operated Vehicle

Neste artigo foi desenvolvido um modelo de acoplamento dinâmico de vários corpos para simular o movimento de um veículo amarrado operado remotamente (*Trov – Tethered Remotely Operated Vehicle*). Foi discutido o forte acoplamento entre o movimento não-linear do cabo umbilical preso no ROV. O movimento do ROV foi considerado com seis graus de liberdade. Aplicaram o modelo da massa concentrada (*lumped mass model*) e incluíram uma técnica do vetor tangencial médio nas equações da dinâmica tridimensional transiente acoplado de um sistema complexo com vários corpos, em condições típicas de manobra de um navio. Os autores afirmam que esta técnica pode ser utilizada em qualquer problema de reboque ou em problemas em veículos amarrados debaixo da água. Observaram que os resultados da simulação reproduzem bem os experimentos.

V. H. A. Carreiro (2009)

Análise Dinâmica de Sólidos Elásticos pelo Método dos Elementos Finitos

Essa dissertação trata do desenvolvimento de um programa de elementos finitos, em linguagem Fortran, que permita analisar problemas dinâmicos no plano com deformação infinitesimal, envolvendo sólidos elásticos lineares, e em que a integração das equações da dinâmica possa ser efetuada por métodos explícitos ou implícitos. Um dos exemplos (sólido) é utilizado para validar os programas desenvolvidos, comparando os resultados obtidos nesse exemplo com os resultados obtidos com o programa comercial Abaqus.

A. C. Vieira e I. Faber (2010)

Gerador Automático de Modelos Dinâmicos de Cabos Umbilicais Subaquáticos Utilizando Formulação Discreta

Este trabalho de conclusão de curso trata do desenvolvimento de um sistema computacional para a geração automática de modelos dinâmicos de cabos umbilicais. O software se baseia no formalismo de modelagem dinâmica desenvolvido a partir do formalismo de Euler-Lagrange.

A. E. L. Pereira (2010)

O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-estrutura de um Cabo

Nesta tese investiga-se a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, a partir do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Para a dinâmica do cabo foi criado um novo formalismo para a obtenção das equações de movimento de cabos umbilicais, chamada Formulação Discreta, que tem como base o formalismo de Euler-Lagrange. A base desse novo formalismo é considerar o cabo dividido em *n* partes rígidas conectadas por articulações elásticas, permitindo movimentos no espaço tridimensional, com a extremidade superior na origem do sistema de referência e uma massa presa na extremidade inferior do cabo. Para o movimento do fluido foi proposto o escoamento sobre um cilindro circular, onde as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes são resolvidas utilizando-se o Método da Decomposição de Adomian.

N. A. S. Rizzo (2010)

Análise da Instabilidade das Armaduras de Dutos Flexíveis pelo Método de Elementos Finitos

Neste trabalho, uma análise de elementos finitos foi realizada para prever a resposta mecânica de risers sob torção, compressão e tração. Além disso, a carga crítica de flambagem, para qualquer tipo de forma (lateral ou radial), também pode ser estimada. O modelo de elementos finitos desenvolvido é uma combinação complexa de elementos de vigas e molas que simula uma análise axissimétrica. Além disso, apenas um arame de cada armadura de tração é simulado, levando a um menor custo computacional, sem influenciar na resposta final. Comparações com modelos analíticos e experimentais foram realizadas para a resposta mecânica do riser sob carregamento axissimétrico para validar o modelo, e bons resultados foram obtidos. Infelizmente, existe pouca informação na literatura sobre as propriedades de dutos flexíveis associadas com este mecanismo de falha, então nenhuma comparação com este fenômeno pode ser feita diretamente. Entretanto, a carga crítica de flambagem encontrada através do modelo de elementos finitos é consistente com a carga gerada nas terminações do riser durante sua instalação em águas profundas.

Z. H. Zhu (2010)

Dynamic Modeling of Cable System Using a New Nodal Position Finite Element Method

Este artigo apresenta um método de elementos finitos alternativo para modelar a dinâmica de sistema de cabo de arrasto. É formulado em termos da posição nodal do elemento em vez de deslocamento nodal usado em FEM, existentes para lidar com grande rotação de corpo rígido de cabo com precisão. O NP-FEM (*Posição Nodal – Finite Elements Method*) elimina a necessidade de dissociar a rotação de corpo rígido de deformação elástica e a limitação de pequena rotação em cada intervalo de tempo. Os resultados das simulações mostram que este novo método derivado é preciso e robusto conforme visto em comparações com referência numérica de teste, experimento de laboratório e ensaios no mar.

C. A. M. Nascimento (2011)

Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica

Este trabalho de graduação apresenta a modelagem por elementos finitos de um cabo de transmissão de energia. Utilizando o software ANSYS para realizar as simulações, o modelo busca retratar os cabos utilizados na bancada de ensaios de cabos do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia da Universidade de Brasília. A metodologia consiste em realizar simulações para os casos de um cabo ou uma viga bi apoiada, sobre a ação de uma força externa em diferentes pontos e o caso de um cabo sob tensão para encontrar as respostas dinâmicas do sistema e suas frequências naturais.

I. Adamiec-Wójcik; L. Brzozowska e S. Wojciech (2012)

Modification of the Rigid Finite Element Method in Modeling Dynamics of Lines and Risers

Este trabalho apresenta uma aplicação do método dos elementos finito rígido modificado para análise da dinâmica de estruturas esbeltas. As equações do movimento são formuladas para um sistema discretizado por meio do método e a discussão é limitada a sistemas planares e de grandes deformações. Elementos finos podem ser encontrados em engenharia *offshore*, como linhas, cabos e risers. Nestes casos, a influência hidrostática de correntes de água do mar tem de ser considerada. A influência dos coeficientes hidrodinâmicos e a velocidade do fluxo interno do fluido de deslocamentos e as forças são apresentadas.

M. Colnago (2012)

Estudo da Estabilidade do Método das Linhas Usando a Dinâmica de um Cabo Flexível

Neste trabalho o autor apresentou o modelo matemático planar do movimento de um cabo flexível, não submetido à forças externas, e estudaram a estabilidade do método das linhas para a resolução numérica desse modelo.

M. Yang; B. Teng; D. Ninge e Z. Shi (2012)

Coupled Dynamic Analysis for Wave Interaction with a Truss Spar and its Mooring Line/riser System in Time Domain

A análise dinâmica de um sistema de amarração foi realizada no domínio do tempo, usando ou um Método dos Elementos Finitos (FEM) ou o método *Lumped-mass*. Para a análise dinâmica de ancoragem, um programa FEM foi desenvolvido com base num sistema de coordenadas globais e da teoria de haste, o qual se espera que seja mais eficiente do que a FEM convencional, em que as várias transformações de coordenadas envolvendo funções trigonométricas não são necessárias.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral da presente dissertação é desenvolver um algoritmo genérico, a partir da determinação de equações gerais, que permita gerar automaticamente o modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo de acordo com o número de elos que se deseja dividir a mesma.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Primeiramente realizar pesquisas na literatura sobre trabalhos que abordem diferentes técnicas de modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo como o Método de Elementos Finitos e o Método da Formulação Discreta.

Realizar uma analise do comportamento de crescimento das matrizes e vetores do modelo, para os casos onde a estrutura é dividida em dois, três e quatro elos, a fim de obter equações gerais que permitam desenvolver algoritmos genéricos capazes de gerar automaticamente o modelo dinâmico do cabo para *n* elos.

Validar o modelo a partir de comparações entre os algoritmos genéricos, os modelos obtidos de forma analítica, e ainda, com os modelos gerados a partir de um *software* que usa manipulação simbólica de variáveis.

1.3 ROTEIRO DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em sete capítulos. O presente Capítulo trata da introdução geral, contendo explicações introdutórias sobre o tema de pesquisa, bibliografia existente na área, contribuições e objetivos a serem alcançados.

No Capítulo 2 apresentam-se os fundamentos teóricos para o desenvolvimento do modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo.

O Capítulo 3 explana o modelo dinâmico para os casos de dois, três e quatro elos.

O Capítulo 4 aborda as equações gerais para a formação dos elementos dos vetores e matrizes do modelo dinâmico, ou seja, neste capítulo são desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com *n* graus de liberdade.

O Capítulo 5 contém as validações via comparações com o *software* de manipulação simbólica de variáveis.

O Capítulo 6 apresenta resultados de simulações utilizando-se o modelo gerado a partir dos algoritmos genéricos.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões e considerações finais. Posteriormente são apresentadas as referências bibliográficas.

O Anexo I aborda as Transformações Homogêneas e nos Apêndices A.1, A.2 e A.3, são apresentadas as equações dos elementos das matrizes e vetores para os casos desenvolvidos no capítulo 3.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2. ABORDAGEM DISCRETA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO

2.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo será apresentada a partir da formulação de Lagrange, a modelagem matemática para a dinâmica de estruturas do tipo cabo, fixa em sua extremidade superior e livre na outra, na qual é colocada uma carga de massa m_c.

As equações da dinâmica serão obtidas a partir da abordagem discreta onde se divide o cabo (estrutura contínua) em partes rígidas (elos) conectadas por elementos flexíveis chamados de articulações elásticas fictícias (PEREIRA [26]).

2.2 FORMALISMO DISCRETO

Considera-se um cabo umbilical conforme ilustrado na Figura 2.1, fixo em sua extremidade superior em uma base que pode ser móvel e na outra é colocada uma massa m_c.

Este tipo de problema pode ser aplicado em diversas situações envolvendo estruturas flexíveis, principalmente em sistemas subaquáticos, como por exemplo, em amarras de plataformas de petróleo ou risers, bastando considerar que a massa m_c seja infinita. Veículos do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*) constituem outra importante aplicação, também no domínio de sistemas subaquáticos.

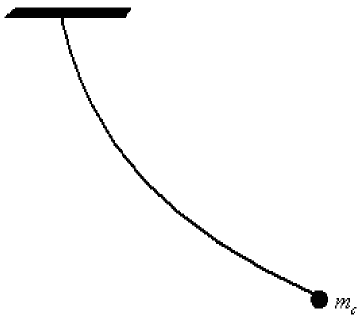

Figura 2.1 Representação esquemática do cabo umbilical

Como os cabos podem realizar movimentos de rotação e translação no espaço, é necessário estabelecer transformações entre os sistemas de coordenadas (ISOLDI [17]). Para um cabo fixo na sua extremidade superior, é imprescindível que a orientação e a posição da extremidade livre deste cabo sejam conhecidas. A orientação da extremidade livre é dada por intermédio das rotações e a posição por translações.

A ideia principal do método de modelagem é dividir o cabo em pequenos elementos (elos), conectados por articulações fictícias flexíveis que permitem três graus de liberdade, denominados aqui de azimute, elevação e torção. Estes movimentos são relativos ao elo anterior da cadeia articulada (PEREIRA [24]). Um quarto movimento livre também poderia ter sido considerado, tratando-se da extensão linear que foi desconsiderado no presente trabalho.

Cada articulação fictícia possui natureza elástica e, portanto, três constantes elásticas com seus respectivos amortecimentos constituem parâmetros que definem a natureza física da articulação.

Para conhecer a posição da extremidade livre do cabo, é necessário um sistema de coordenadas em cada articulação e, a fim de posicionar este sistema de coordenadas nas articulações de forma sistemática, utiliza-se a convenção de Denavit-Hartenberg, que consiste em descrever a posição e orientação relativa entre dois elos consecutivos utilizando transformações homogêneas.

Em resumo, com o formalismo discreto é possível determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elos que se deseja dividir a estrutura.

Na modelagem discreta, um cabo de flexibilidade contínua é dividido em n partes rígidas de comprimento $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \cdot$, que são chamados de *elos*, sendo estes *elos* conectados por articulações fictícias, como mostra a figura 2.2.

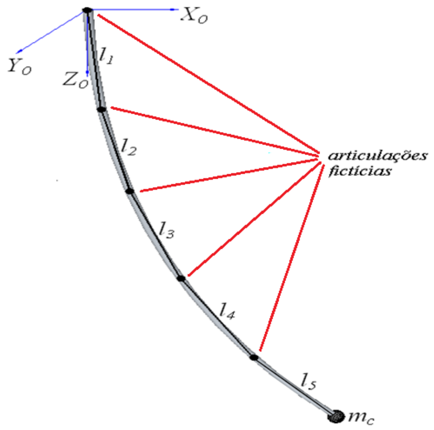

Figura 2.2 Estrutura flexível e sua representação discreta

Os elos têm massas concentradas nos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),..., (x_n, y_n, z_n), que são as coordenadas do centro de massa dos elos que possuem massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, respectivamente, enquanto (x_c, y_c, z_c) são as coordenadas do centro de massa da carga de massa m_c na extremidade final do cabo. Em cada articulação são considerados os ângulos de azimute, elevação e torção do cabo, ou seja, na *i-ésima* articulação, θ_{ia}, θ_{ie} *e* θ_{iT} são respectivamente, o ângulo de azimute, o ângulo de elevação e o ângulo de torção do cabo, conforme a figura 2.3.

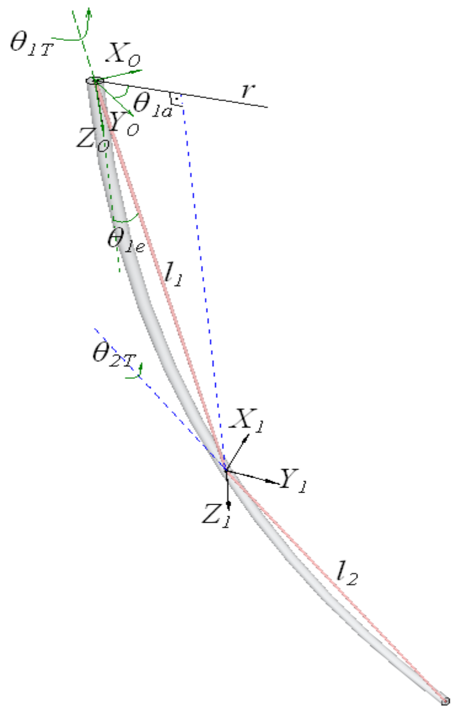

Figura 2.3 Ângulos de azimute, elevação e torção para a articulação da base.

No referencial $X_iY_iZ_i$ tem-se que: o eixo O_iZ_i é paralelo ao eixo OZ_0 do referencial inicial (sempre na direção vertical), o eixo O_iY_i é paralelo à projeção da parte rígida anterior a *i-ésima* articulação (projeção no plano horizontal) e o eixo O_iX_i é ortogonal ao eixo O_iY_i.

Em cada articulação são consideradas três constantes elásticas, ou seja, na *i-ésima* articulação são consideradas as constantes elásticas k_{ia}, k_{ie}, k_{it}, devido aos ângulos de azimute, elevação e torção respectivamente.

A energia cinética é definida por:

$$E_C = E_{C_R} + E_{C_T} \tag{2.1}$$

onde E_{CR} é a energia cinética devida ao movimento de rotação e E_{CT} é a energia cinética devida ao movimento de translação do cabo.

A energia cinética devida ao movimento de rotação do cabo é dada por (PEREIRA [24]):

$$\begin{aligned} E_{C_R} &= \frac{1}{2} I_{R_{1e}} \dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2e}} \dot{\theta}_{2e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3e}} \dot{\theta}_{3e}^2 + \ldots + \frac{1}{2} I_{R_{ne}} \dot{\theta}_{ne}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_{R_{1a}} \dot{\theta}_{1a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2a}} \dot{\theta}_{2a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3a}} \dot{\theta}_{3a}^2 + \ldots + \frac{1}{2} I_{R_{na}} \dot{\theta}_{na}^2 \\ &+ \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{2T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{3T}^2 + \ldots + \frac{1}{2} \left(I_{T_n} + I_{T_c} \right) \dot{\theta}_{nT}^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}, \ldots, \theta_{ne}$ são os ângulos de elevação nas articulações, $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}, \ldots, \theta_{na}$ são os ângulos de azimute, $I_{R_{1e}}, I_{R_{2e}}, I_{R_{3e}}, \ldots, I_{R_{ne}}$ são os momentos de inércia relativos aos movimentos elevação nas articulações, $I_{R_{1a}}, I_{R_{2a}}, I_{R_{3a}}, \ldots, I_{R_{na}}$ são os momentos de inércia relativos aos movimentos de azimute, $I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}, \ldots, I_{T_n}, I_{T_c}$ são os movimentos de inércia relativos aos movimentos de torção e $\theta_{1T}, \theta_{2T}, \theta_{3T}, \ldots, \theta_{nT}$ são ângulos de torção nas articulações. Observa-se que as parcelas de energia cinética rotacional devidas aos movimentos em elevação e azimute poderiam ser negligenciadas. De fato, a energia cinética de translação é muito mais significativa que a de rotação e foi dada ênfase à energia cinética de translação neste formalismo de modelagem. Considerou-se ainda que os momentos de inércia rotacionais devidos aos movimentos de azimute são constantes, por aproximação. Apesar de muito pequenos, considerá-los na dinâmica pode evitar que a matriz de inércia tenha determinante nulo quando todos os ângulos e velocidades também são nulos.

A energia cinética devida ao movimento de translação do cabo é definida por (PEREIRA [24]):

$$\begin{aligned} E_{C_T} &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 \right) + \frac{1}{2} m_3 \left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 \right) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{2} m_n \left(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2 \right) + \frac{1}{2} m_c \left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 \right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \right)$, $\frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 \right)$, $\frac{1}{2} m_3 \left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 \right), \ldots,$

$\frac{1}{2}m_n\left(\dot{x}_n^2+\dot{y}_n^2+\dot{z}_n^2\right)$ e $\frac{1}{2}m_c\left(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\dot{z}_c^2\right)$ são as energias cinéticas relativas ao movimento das massas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ dos elos e da massa m_c da carga, respectivamente.

A energia potencial é definida por (PEREIRA [24]):

$$
\begin{aligned}
E_p = & \frac{1}{2}k_{1e}\theta_{1e}^2 + \frac{1}{2}k_{2e}\left(\theta_{2e}-\theta_{1e}\right)^2 + \frac{1}{2}k_{3e}\left(\theta_{3e}-\theta_{2e}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}k_{ne}\left(\theta_{ne}-\theta_{(n-1)e}\right)^2 + \\
& + \frac{1}{2}k_{1a}\theta_{1a}^2 + \frac{1}{2}k_{2a}\left(\theta_{2a}-\theta_{1a}\right)^2 + \frac{1}{2}k_{3a}\left(\theta_{3a}-\theta_{2a}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}k_{na}\left(\theta_{na}-\theta_{(n-1)a}\right)^2 + \\
& + \frac{1}{2}k_{1T}\theta_{1T}^2 + \frac{1}{2}k_{2T}\left(\theta_{2T}-\theta_{1T}\right)^2 + \frac{1}{2}k_{3T}\left(\theta_{3T}-\theta_{2T}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}k_{nT}\left(\theta_{nT}-\theta_{(n-1)T}\right)^2 \\
& + m_1\,g\,h_1 + m_2\,g\,h_2 + m_3\,g\,h_3 + \ldots + m_n g h_n
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

onde $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}, \ldots, \theta_{ne}$ são os ângulos de elevação nas articulações, $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}, \ldots, \theta_{na}$ são os ângulos de azimute nas articulações, $\theta_{1T}, \theta_{2T}, \theta_{3T}, \ldots, \theta_{nT}$ são os ângulos de torção nas articulações, $k_{1e}, k_{2e}, k_{3e}, \ldots, k_{ne}$, $k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}, \ldots, k_{na}$ $k_{1T}, k_{2T}, k_{3T}, \ldots, k_{nT}$ são as constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de elevação, azimute e torção, respectivamente, e $m_1\,g\,h_1 + m_2\,g\,h_2 + m_3\,g\,h_3 + \ldots + m_n g h_n$ é a energia potencial gravitacional, onde $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$ são as alturas definidas por:

$$
\begin{aligned}
& h_1 = \frac{a_1}{2} \Rightarrow h_1 = \frac{l_1}{2}\left(1-\cos\theta_{1e}\right), \\
& h_2 = a_1 + \frac{a_2}{2} \Rightarrow h_2 = a_1 + \frac{l_2}{2}\left(1-\cos\theta_{2e}\right), \\
& h_3 = a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \Rightarrow h_3 = a_1 + a_2 + \frac{l_3}{2}\left(1-\cos\theta_{3e}\right), \\
& \vdots \\
& h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2} \Rightarrow h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{l_n}{2}\left(1-\cos\theta_{ne}\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

onde,

$$a_0 = 0,\ a_1 = l_1\left(1-\cos\theta_{1e}\right),\ a_2 = l_2\left(1-\cos\theta_{2e}\right),\ \ldots,\ a_n = l_n\left(1-\cos\theta_{ne}\right),$$

conforme definições vistas na Figura 2.4..

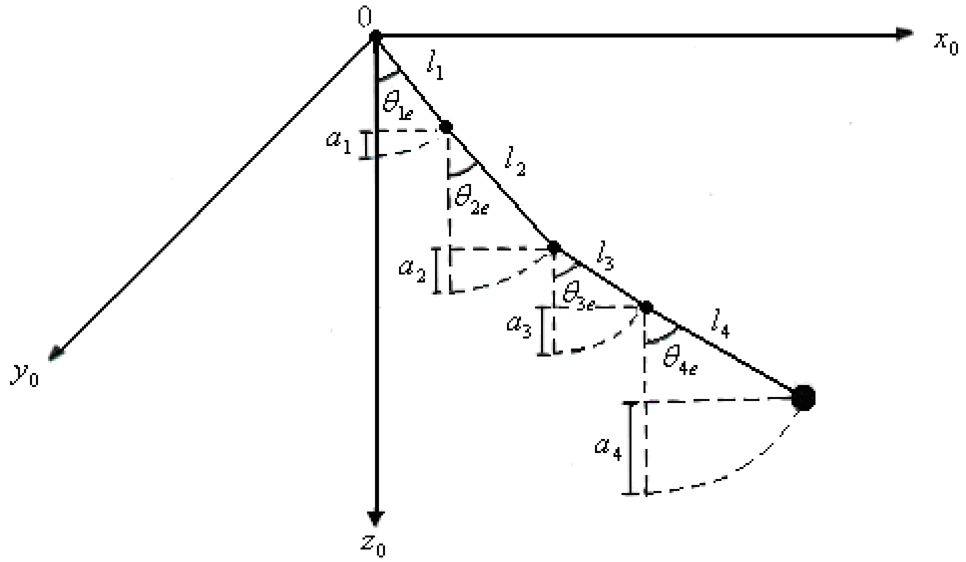

Figura 2.4 Cabo com quatro partes rígidas

O Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = E_c - E_p \tag{2.6}$$

De (2.2), (2.3) e (2.4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
L = {} & \frac{1}{2} I_{R_{1e}} \dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2e}} \dot{\theta}_{2e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3e}} \dot{\theta}_{3e}^2 + \ldots + \frac{1}{2} I_{R_{ne}} \dot{\theta}_{ne}^2 + \\
& + \frac{1}{2} I_{R_{1a}} \dot{\theta}_{1a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2a}} \dot{\theta}_{2a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3a}} \dot{\theta}_{3a}^2 + \ldots + \frac{1}{2} I_{R_{na}} \dot{\theta}_{na}^2 + \\
& + \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{2T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{3T}^2 + \ldots + \frac{1}{2} \left(I_{T_n} + I_{T_c} \right) \dot{\theta}_{nT}^2 + \\
& + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 \right) + \frac{1}{2} m_3 \left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 \right) + \ldots + \\
& + \frac{1}{2} m_n \left(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2 \right) + \frac{1}{2} m_c \left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 \right) + \\
& - \frac{1}{2} k_{1e} \theta_{1e}^2 - \frac{1}{2} k_{2e} \left(\theta_{2e} - \theta_{1e} \right)^2 - \frac{1}{2} k_{3e} \left(\theta_{3e} - \theta_{2e} \right)^2 - \ldots - \frac{1}{2} k_{ne} \left(\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e} \right)^2 + \\
& - \frac{1}{2} k_{1a} \theta_{1a}^2 - \frac{1}{2} k_{2a} \left(\theta_{2a} - \theta_{1a} \right)^2 - \frac{1}{2} k_{3a} \left(\theta_{3a} - \theta_{2a} \right)^2 - \ldots - \frac{1}{2} k_{na} \left(\theta_{na} - \theta_{(n-1)a} \right)^2 + \\
& - \frac{1}{2} k_{1T} \theta_{1T}^2 - \frac{1}{2} k_{2T} \left(\theta_{2T} - \theta_{1T} \right)^2 - \frac{1}{2} k_{3T} \left(\theta_{3T} - \theta_{2T} \right)^2 - \ldots - \frac{1}{2} k_{nT} \left(\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T} \right)^2 \\
& - m_1\, g\, h_1 - m_2\, g\, h_2 - m_3\, g\, h_3 - \ldots - m_n g h_n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Então de (2.7) e considerando-se $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$, tem-se:

$$L = \sum_{b=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} I_{R_{be}} \left(\dot{\theta}_{be}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{R_{ba}} \left(\dot{\theta}_{ba}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 + \frac{1}{2} m_b \left(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2 \right) - \frac{1}{2} K_{be} \left(\theta_{be} - \theta_{(b-1)e}\right)^2 - \frac{1}{2} K_{ba} \left(\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a}\right)^2 + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} K_{bT} \left(\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T}\right)^2 - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} \left(1 - \cos\theta_{be}\right) \right] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2 + \frac{1}{2} m_c \left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 \right) \tag{2.8}$$

As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas. A primeira articulação fictícia é colocada na origem do sistema de referência $X_0Y_0Z_0$ e os ângulos de azimute θ_{1a} e elevação θ_{1e} são considerados de acordo com as figuras 2.4 e 2.5. A partir desta figura conclui-se que as coordenadas da segunda articulação fictícia $\left(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1}\right)$ em relação ao sistema de referência $X_0Y_0Z_0$ são:

$$\begin{cases} x_{0_1} = l_1 \sin\theta_{1e} \sin\theta_{1a} \\ y_{0_1} = l_1 \sin\theta_{1e} \cos\theta_{1a} \\ z_{0_1} = l_1 \cos\theta_{1e} \end{cases} \tag{2.9}$$

e as coordenadas do centro de massa do primeiro elo (l_1) são:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{l_1}{2} \sin\theta_{1e} \sin\theta_{1a} \\ y_1 = \dfrac{l_1}{2} \sin\theta_{1e} \cos\theta_{1a} \\ z_1 = \dfrac{l_1}{2} \cos\theta_{1e} \end{cases} \tag{2.10}$$

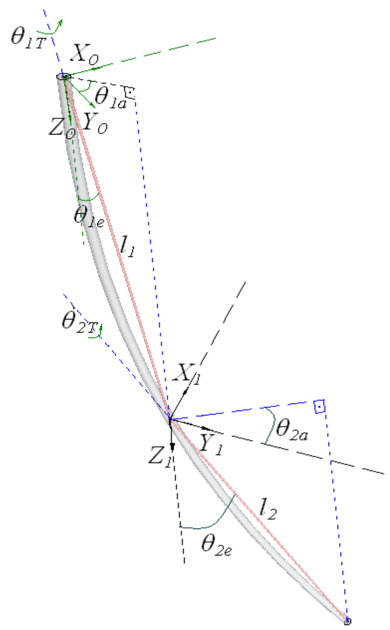

Figura 2.5 Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência

Um novo sistema de referência $X_1Y_1Z_1$ é incorporado na estrutura flexível, centrado na segunda articulação fictícia, conforme ilustra a figura 2.5 e de acordo com a convenção descrita anteriormente.

Considerando-se a matriz homogênea de rotação de um ângulo θ_{1a} em torno do eixo OZ_0 em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, como sendo:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} \left[R_{z,\theta_{1a}}\right]_{3\times 3} & \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ y_{0_1} \\ z_{0_1} \end{pmatrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

onde a matriz de rotação de um ângulo θ em torno do eixo OZ é definida por:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

a transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_0Y_0Z_0$ e $X_1Y_1Z_1$ tem a forma:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1a} & \sin\theta_{1a} & 0 & l_1 \sin\theta_{1e} \sin\theta_{1a} \\ -\sin\theta_{1a} & \cos\theta_{1a} & 0 & l_1 \sin\theta_{1e} \cos\theta_{1a} \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \cos\theta_{1e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Considerando-se o próximo elo e colocando-se o sistema de referência $X_2Y_2Z_2$ na terceira articulação fictícia, as coordenadas da terceira articulação fictícia em relação ao referencial $X_1Y_1Z_1$ são:

$$\begin{cases} x_{1_2} = l_2 \sin\theta_{2e} \sin\theta_{2a} \\ y_{1_2} = l_2 \sin\theta_{2e} \cos\theta_{2a} \\ z_{1_2} = l_2 \cos\theta_{2e} \end{cases} \tag{2.14}$$

Então, a matriz homogênea de rotação de um ângulo θ_{2a} em torno do eixo O_1Z_1 em relação ao referencial $X_1Y_1Z_1$ é definida por:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} \left[R_{z,\theta_{2a}}\right]_{3\times3} & \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ y_{1_2} \\ z_{1_2} \end{pmatrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

ou seja, a transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_1Y_1Z_1$ e $X_2Y_2Z_2$ tem a forma:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{2a} & \sin\theta_{2a} & 0 & l_2 \sin\theta_{2e} \sin\theta_{2a} \\ -\sin\theta_{2a} & \cos\theta_{2a} & 0 & l_2 \sin\theta_{2e} \cos\theta_{2a} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos\theta_{2e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

A fim de determinar a posição da terceira articulação fictícia e das coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, efetua-se o produto das matrizes H_{0_1} e H_{1_2}, de onde se obtém $H_{0_2} = H_{0_1} \cdot H_{1_2}$, ou seja:

$$H_{0_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a}+\theta_{2a}) & \sin(\theta_{1a}+\theta_{2a}) & 0 & l_2 \sin\theta_{2e} \sin(\theta_{1a}+\theta_{2a}) + l_1 \sin\theta_{1e} \sin\theta_{1a} \\ -\sin(\theta_{1a}+\theta_{2a}) & \cos(\theta_{1a}+\theta_{2a}) & 0 & l_2 \sin\theta_{2e} \cos(\theta_{1a}+\theta_{2a}) + l_1 \sin\theta_{1e} \cos\theta_{1a} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos\theta_{2e} + l_1 \cos\theta_{1e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida do cabo, em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, são dadas por:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{l_2}{2} \sin\theta_{2e} \sin(\theta_{1a}+\theta_{2a}) + l_1 \sin\theta_{1e} \sin\theta_{1a} \\ y_2 = \dfrac{l_2}{2} \sin\theta_{2e} \cos(\theta_{1a}+\theta_{2a}) + l_1 \sin\theta_{1e} \cos\theta_{1a} \\ z_2 = \dfrac{l_2}{2} \cos\theta_{2e} + l_1 \cos\theta_{1e} \end{cases} \tag{2.17}$$

Adicionando-se mais um elo e procedendo-se analogamente ao modo descrito anteriormente, mostra-se que as coordenadas da quarta articulação fictícia em relação ao referencial $X_2Y_2Z_2$ são:

$$\begin{cases} x_{2_3} = l_3 \sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a} \\ y_{2_3} = l_3 \sin\theta_{3e} \cos\theta_{3a} \\ z_{2_3} = l_3 \cos\theta_{3e} \end{cases} \tag{2.18}$$

Desta forma, a matriz homogênea de rotação de um ângulo θ_{3a} em torno do eixo O_2Z_2 em relação ao referencial $X_2Y_2Z_2$ é definida por:

$$H_{2_3} = \begin{bmatrix} \left[R_{z,\theta_{3a}}\right]_{3\times3} & \begin{pmatrix} x_{2_3} \\ y_{2_3} \\ z_{2_3} \end{pmatrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

ou seja, a transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_2Y_2Z_2$ e $X_3Y_3Z_3$ tem a forma:

$$H_{2_3} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{3a} & \sin\theta_{3a} & 0 & l_3 \sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a} \\ -\sin\theta_{3a} & \cos\theta_{3a} & 0 & l_3 \sin\theta_{3e} \cos\theta_{3a} \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \cos\theta_{3e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

A posição da quarta articulação fictícia e das coordenadas do centro de massa da terceira parte rígida em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$ são determinadas a partir do produto das matrizes H_{0_2} e H_{2_3}, o seja, $H_{0_3} = H_{0_2} \cdot H_{2_3}$, e de modo semelhante ao que foi mostrado anteriormente, obtém-se as seguintes coordenadas do centro de massa da terceira parte rígida:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{l_3}{2}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{1a}+\theta_{2a}+\theta_{3a}) + l_2\sin\theta_{2e}\sin(\theta_{1a}+\theta_{2a}) + l_1\sin\theta_{1e}\sin\theta_{1a} \\ y_3 = \dfrac{l_3}{2}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{1a}+\theta_{2a}+\theta_{3a}) + l_2\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{1a}+\theta_{2a}) + l_1\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1a} \\ z_3 = \dfrac{l_3}{2}\cos\theta_{3e} + l_2\cos\theta_{2e} + l_1\cos\theta_{1e} \end{cases} \tag{2.21}$$

Usando-se um procedimento análogo ao que foi mostrado para as coordenadas dos centros de massa da primeira, segunda e terceira partes rígidas, são obtidas as coordenadas do centro de massa da *k-ésima* parte rígida e as coordenadas da carga terminal, respectivamente, como sendo:

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{l_k}{2}\sin\theta_{ke}\sin\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_{ia}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\left[l_j\sin\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\right] \\ y_k = \dfrac{l_k}{2}\sin\theta_{ke}\cos\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_{ia}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\left[l_j\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\right] \\ z_k = \dfrac{l_k}{2}\cos\theta_{ke} + \sum_{j=1}^{k-1} l_j\cos\theta_{je} \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} x_c = \sum_{j=1}^{n}\left[l_j\sin\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\right] \\ y_c = \sum_{j=1}^{n}\left[l_j\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\right] \\ z_c = \sum_{j=1}^{n} l_j\cos\theta_{je} \end{cases} \tag{2.23}$$

Então, de (2.22) e de (2.23), obtém-se as derivadas destas coordenadas em relação à *t*, que são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{l_k}{2}\left[\sin\theta_{ke}\cos\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{k}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{ke}\sin\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{ke}\right] + \\ \qquad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right] \\ \dot{y}_k = \dfrac{l_k}{2}\left[-\sin\theta_{ke}\sin\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{k}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{ke}\cos\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{ke}\right] + \\ \qquad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[-\sin\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right] \\ \dot{z}_k = -\dfrac{l_k}{2}\sin\theta_{ke}\dot{\theta}_{ke} - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \sin\theta_{je}\dot{\theta}_{je} \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \sum_{j=1}^{n} l_j \left[\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right] \\ \dot{y}_c = \sum_{j=1}^{n} l_j \left[-\sin\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right] \\ \dot{z}_c = -\sum_{j=1}^{n} l_j \sin\theta_{je}\dot{\theta}_{je} \end{cases} \tag{2.25}$$

Portanto de (2.8) obtém-se

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \tag{2.26}$$

onde

$$L_1 = \sum_{b=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}I_{R_{be}}\left(\dot{\theta}_{be}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{R_{ba}}\left(\dot{\theta}_{ba}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{T_b}\dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2}K_{be}\left(\theta_{be} - \theta_{(b-1)e}\right)^2 + \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}K_{ba}\left(\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a}\right)^2 - \frac{1}{2}K_{bT}\left(\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T}\right)^2 - m_b g\left[\sum_{i=1}^{b-1}a_i + \frac{l_b}{2}\left(1 - \cos\theta_{be}\right)\right]\right\}$$

$$L_2 = \sum_{b=1}^{n}\frac{m_b}{2}\left\{\frac{l_b}{2}\left[\sin\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right]\right\}^2$$

$$L_3 = \sum_{b=1}^{n} \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[-\sin\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\sin\theta_{je} \sin\left(\sum_{i=1}^{j} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{j} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je} \cos\left(\sum_{i=1}^{j} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

$$L_4 = \sum_{b=1}^{n} \frac{m_b}{2} \left[-\frac{l_b}{2} \sin\theta_{be} \dot{\theta}_{be} - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin\theta_{je} \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2$$

$$L_5 = \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^{n} l_b \left[\sin\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^{n} l_b \left[-\sin\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left[-\sum_{b=1}^{n} l_b \sin\theta_{be} \dot{\theta}_{be} \right]^2$$

onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

No próximo capítulo apresenta-se a modelagem dinâmica do cabo para os casos de duas, três e quatro partes rígidas.

CAPÍTULO III

MODELOS DINÂMICOS PARA OS CASOS DE DOIS, TRÊS E QUATRO ELOS

3. MODELAGEM DINÂMICA DO CABO PARA OS CASOS DE DOIS, TRÊS E QUATRO ELOS

Este capítulo apresenta a modelagem dinâmica do cabo para os casos em que a estrutura flexível é dividida em dois, três e quatro elos. Considera-se um cabo de comprimento l, articulado na extremidade fixa e dividido em duas, três e quatro partes rígidas de comprimentos l_i sendo $i = 1, 2, 3,4$ e estes elos são conectados por articulações fictícias, conforme figuras 3.1, 3.2 e 3.3.

Segundo MACHADO *et. al.* [18], nas divisões dos elos rígidos proposta para manipuladores robóticos, as articulações são posicionadas na metade de cada elemento rígido. Por exemplo: uma única articulação seria posta na metade do comprimento total do elo, dividindo o mesmo em duas partes rígidas. Uma nova articulação fictícia implicaria em colocar as duas articulações nas metades das duas partes rígidas do caso anterior e assim sucessivamente. Em (PEREIRA [26]), foi proposto o modelo dinâmico dado pela equação (2.26), vista anteriormente, para uma estrutura flexível do tipo cabo, o qual foi dividido em três elos de comprimentos $l_1 = \frac{l}{4}\cdot$, $l_2 = \frac{l}{2}$ e $l_3 = \frac{l}{4}\cdot$.

3.1 CABO COM DUAS ARTICULAÇÕES

Considera-se um cabo de comprimento l, articulado na extremidade fixa e dividido em dois elos de comprimentos l_1 e l_2 conectadas por uma articulação, conforme a figura 3.1.

Da equação (2.26) obtém-se o Lagrangeano do sistema que é dado por:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

onde

$$L_1 = \sum_{b=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}I_{R_{be}}\left(\dot{\theta}_{be}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{R_{ba}}\left(\dot{\theta}_{ba}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{T_b}\dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2}K_{be}\left(\theta_{be} - \theta_{(b-1)e}\right)^2 - \frac{1}{2}K_{ba}\left(\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a}\right)^2 + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}K_{bT}\left(\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T}\right)^2 - m_b g\left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2}\left(1 - \cos\theta_{be}\right)\right]\right\}$$

$$L_2 = \sum_{b=1}^{2} \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[\sin\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\sin\theta_{je} \cos\left(\sum_{i=1}^{j} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{j} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je} \sin\left(\sum_{i=1}^{j} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

$$L_3 = \sum_{b=1}^{2} \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[-\sin\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\sin\theta_{je} \sin\left(\sum_{i=1}^{j} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{j} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je} \cos\left(\sum_{i=1}^{j} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

$$L_4 = \sum_{b=1}^{2} \frac{m_b}{2} \left[-\frac{l_b}{2} \sin\theta_{be} \dot{\theta}_{be} - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin\theta_{je} \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{2T}^2$$

$$L_5 = \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^{2} l_b \left[\sin\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \qquad (3.1)$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^{2} l_b \left[-\sin\theta_{be} \sin\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{b} \dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be} \cos\left(\sum_{i=1}^{b} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left[-\sum_{b=1}^{2} l_b \sin\theta_{be} \dot{\theta}_{be} \right]^2$$

onde $\theta_0 = 0 \; e \; \sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

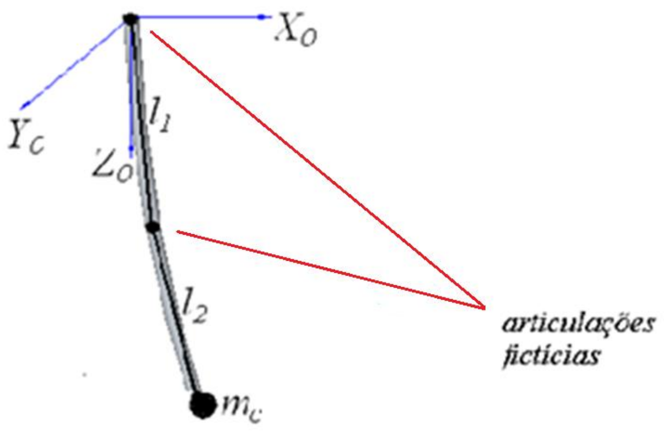

Figura 3.1 Representação geométrica do cabo com duas articulações fictícias

Aplicam-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano do sistema dado a partir de (3.1), ou seja, as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1e}}=T_{\theta 1e}-c_{1e}\dot{\theta}_{1e}-c_{2e}\left(\dot{\theta}_{1e}-\dot{\theta}_{2e}\right)=T_{\theta 1e}-\left(c_{1e}+c_{2e}\right)\dot{\theta}_{1e}+c_{2e}\dot{\theta}_{2e} \qquad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2e}}=T_{\theta 2e}-c_{2e}\left(\dot{\theta}_{2e}-\dot{\theta}_{1e}\right) \qquad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1a}}=T_{\theta 1a}-\left(c_{1a}+c_{2a}\right)\dot{\theta}_{1a}+c_{2a}\dot{\theta}_{2a} \qquad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2a}}=T_{\theta 2a}-c_{2a}\left(\dot{\theta}_{2a}-\dot{\theta}_{1a}\right) \qquad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1T}}=T_{\theta 1T}-\left(c_{1T}+c_{2T}\right)\dot{\theta}_{1T}+c_{2T}\dot{\theta}_{2T} \qquad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2T}}=T_{\theta 2T}+c_{2T}\dot{\theta}_{1T}-c_{2T}\dot{\theta}_{2T} \qquad (3.7)$$

Onde c_{1e} , c_{2e} ; c_{1a} , c_{2a} e c_{1T} , c_{2T} são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação, azimute e torção, respectivamente. Os torques externos atuantes nas articulações fictícias, $T_{\theta ia}$ e $T_{\theta ie}$, i=1, 2, surgem em razão de diversas causas, tais como, força de empuxo, correntes subaquáticas, movimento independente da carga terminal, etc.

Desenvolvendo-se as equações (3.2) a (3.7), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$I\left(\vec{\theta}\right)\ddot{\vec{\theta}}+C\ \dot{\vec{\theta}}+K\,\vec{\theta}+\vec{f}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right)+\vec{G}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right)=\vec{T}_m \qquad (3.8)$$

onde $\vec{\theta} = [\theta_{1e} \quad \theta_{2e}\theta_{1a} \quad \theta_{2a}\theta_{1T} \quad \theta_{2T}]^{\mathrm{T}}$.

Na notação matricial, para o caso em que o cabo é dividido em 2 elos, o modelo dinâmico é dado por:

$$[I_{6x6}]\left[\ddot{\theta}_{6x1}\right] + [C_{6x6}]\left[\dot{\theta}_{6x1}\right] + [K_{6x6}][\theta_{6x1}] + \left[\vec{F}_{6x1}\right] + \left[\vec{G}_{6x1}\right] = \left[\vec{T}_{6x1}\right] \qquad (3.9)$$

onde I é a matriz de Inércia, C é a matriz dos coeficientes de atrito, K é a matriz das constantes elásticas, $\vec{F}$ é o vetor Coriolis-centrífugo *(esforços não-lineares)*, $\vec{G}$ é o vetor gravitacional e $\vec{T}$ é o vetor dos torques externos.

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para os casos de dois, três e quatro elos são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos estão expostas nos apêndices A.1, A.2 e A.3.

Os elementos da matriz de Inércia *I* são os seguintes:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & 0 & 0 & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} & 0 & 0 \\ I_{41} & 0 & I_{43} & I_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{66} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz das constantes de atrito *C* são:

$$\begin{bmatrix} C_{1e} + C_{2e} & -C_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{2e} & C_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1a} + C_{2a} & -C_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{2a} & C_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1T} + C_{2T} & -C_{2T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{2T} & C_{2T} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz das constantes elásticas *K* são:

$$\begin{bmatrix} k_{1e} + k_{2e} & -k_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{2e} & k_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1a} + k_{2a} & -k_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{2a} & k_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1T} + k_{2T} & -k_{2T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{2T} & k_{2T} \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}$ são:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As componentes para o vetor gravitacional $\vec{G}$ são:

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor dos torques externos $\vec{T}$ são:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{\theta_{1e}} \\ T_{\theta_{2e}} \\ T_{\theta_{1a}} \\ T_{\theta_{2a}} \\ T_{\theta_{1t}} \\ T_{\theta_{2t}} \end{bmatrix}$$

3.2 CABO COM TRÊS ARTICULAÇÕES

Considera-se aqui o modelo dinâmico para o caso em que o cabo é dividido em três elementos, ou seja, este é articulado na extremidade onde está fixo e dividido em três partes rígidas, sendo estas partes rígidas conectadas por duas articulações fictícias, como mostra a figura 3.2.

Da equação (2.26) obtém-se o Lagrangeano do sistema que é dado por:

$$L_1 = \sum_{b=1}^{3}\left\{\frac{1}{2}I_{R_{be}}\left(\dot{\theta}_{be}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{R_{ba}}\left(\dot{\theta}_{ba}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{T_b}\dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2}K_{be}\left(\theta_{be} - \theta_{(b-1)e}\right)^2 - \frac{1}{2}K_{ba}\left(\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a}\right)^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2}K_{bT}\left(\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T}\right)^2 - m_b g\left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2}\left(1 - \cos\theta_{be}\right)\right]\right\} \tag{3.10}$$

$$L_2 = \sum_{b=1}^{2}\frac{m_b}{2}\left\{\frac{l_b}{2}\left[\sin\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j\left[\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right]\right\}^2$$

$$L_3 = \sum_{b=1}^{2}\frac{m_b}{2}\left\{\frac{l_b}{2}\left[-\sin\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j\left[-\sin\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right]\right\}^2$$

$$L_4 = \sum_{b=1}^{2} \frac{m_b}{2}\left[-\frac{l_b}{2}\sin\theta_{be}\dot{\theta}_{be} - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin\theta_{je}\dot{\theta}_{je}\right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c}\dot{\theta}_{2T}^2$$

$$L_5 = \frac{1}{2} m_c \left\{\sum_{b=1}^{2} l_b\left[\sin\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right]\right\}^2 +$$
$$+\frac{1}{2} m_c \left\{\sum_{b=1}^{2} l_b\left[-\sin\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right]\right\}^2 +$$
$$+\frac{1}{2} m_c \left[-\sum_{b=1}^{2} l_b \sin\theta_{be}\dot{\theta}_{be}\right]^2$$

onde $\theta_0 = 0 \; e \; \sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

Considera-se o cabo de comprimento l, conforme o caso anterior, mas agora dividido em três partes rígidas de comprimentos $l_1, l_2 \; e \; l_3$.

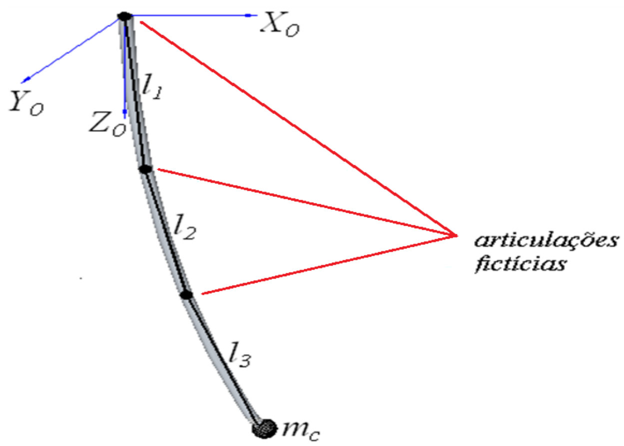

Figura 3.2 Representação geométrica do cabo com três articulações fictícias

Aplica-se a equação de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano, dado a partir da equação (2.26), ou seja, as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1e}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1e}} = T_{\theta 1e} - c_{1e}\dot{\theta}_{1e} - c_{2e}\left(\dot{\theta}_{1e} - \dot{\theta}_{2e}\right) = T_{\theta 1e} - \left(c_{1e} + c_{2e}\right)\dot{\theta}_{1e} + c_{2e}\dot{\theta}_{2e} \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2e}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2e}} = T_{\theta 2e} - c_{2e}\left(\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{1e}\right) - c_{3e}\left(\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{3e}\right) =$$
$$= T_{\theta 2e} + c_{2e}\dot{\theta}_{1e} - \left(c_{2e} + c_{3e}\right)\dot{\theta}_{2e} + c_{3e}\dot{\theta}_{3e} \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3e}}=T_{\theta 3e}-c_{3e}\left(\dot{\theta}_{3e}-\dot{\theta}_{2e}\right)=T_{\theta 3e}-c_{3e}\dot{\theta}_{3e}+c_{3e}\dot{\theta}_{2e} \tag{3.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1a}}=T_{\theta 1a}-c_{1a}\dot{\theta}_{1a}-c_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a}-\dot{\theta}_{2a}\right)=T_{\theta 1a}-\left(c_{1a}+c_{2a}\right)\dot{\theta}_{1a}+c_{2a}\dot{\theta}_{2a} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2a}}&=T_{\theta 2a}-c_{2a}\left(\dot{\theta}_{2a}-\dot{\theta}_{1a}\right)-c_{3a}\left(\dot{\theta}_{2a}-\dot{\theta}_{3a}\right)=\\&=T_{\theta 2a}+c_{2a}\dot{\theta}_{1a}-\left(c_{2a}+c_{3a}\right)\dot{\theta}_{2a}+c_{3a}\dot{\theta}_{3a}\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3a}}=T_{\theta 3a}-c_{3a}\left(\dot{\theta}_{3a}-\dot{\theta}_{2a}\right)=T_{3a}-c_{3a}\dot{\theta}_{3a}+c_{3a}\dot{\theta}_{2a} \tag{3.16}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1T}}=T_{\theta 1T}-c_{1T}\dot{\theta}_{1T}-c_{2T}\left(\dot{\theta}_{1T}-\dot{\theta}_{2T}\right)=T_{\theta 1T}-\left(c_{1T}+c_{2T}\right)\dot{\theta}_{1T}+c_{2T}\dot{\theta}_{2T} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2T}}&=T_{\theta 2T}-c_{2T}\left(\dot{\theta}_{2T}-\dot{\theta}_{1T}\right)-c_{3T}\left(\dot{\theta}_{2T}-\dot{\theta}_{3T}\right)=\\&=T_{\theta 2T}+c_{2T}\dot{\theta}_{1T}-\left(c_{2T}+c_{3T}\right)\dot{\theta}_{2T}+c_{3T}\dot{\theta}_{3T}\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3T}}=T_{\theta 3T}-c_{3T}\left(\dot{\theta}_{3T}-\dot{\theta}_{2T}\right)=T_{\theta 3T}-c_{3T}\dot{\theta}_{3T}+c_{3T}\dot{\theta}_{2T} \tag{3.19}$$

onde c_{1e} , c_{2e} , c_{3e} ; c_{1a} , c_{2a} , c_{3a} e c_{1T} , c_{2T} , c_{3T} são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação, azimute e torção, respectivamente, $T_{\theta ia}, T_{\theta ie}$ e $T_{\theta iT}$, i=1,2,3, são os torques externos atuantes nas articulações fictícias.

Desenvolvendo-se as equações (3.11) a (3.19), obtém-se o sistema de equações diferenciais de segunda ordem conforme a equação (3.8), onde $\vec{\theta}=\begin{bmatrix}\theta_{1e} & \theta_{2e} & \theta_{3e} & \theta_{1a} & \theta_{2a} & \theta_{3a} & \theta_{1T} & \theta_{2T} & \theta_{3T}\end{bmatrix}^T$.

O modelo dinâmico pode ser representado também da seguinte forma:

$$[I_{9x9}]\left[\ddot{\theta}_{9x1}\right]+[C_{9x9}]\left[\dot{\theta}_{9x1}\right]+[K_{9x9}][\theta_{9x1}]+\left[\vec{F}_{9x1}\right]+\left[\vec{G}_{9x1}\right]=\left[\vec{T}_{9x1}\right] \tag{3.20}$$

Os elementos da matriz de Inércia são dados por:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} & I_{15} & I_{16} & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} & I_{25} & I_{26} & 0 & 0 & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} & I_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} & I_{45} & I_{46} & 0 & 0 & 0 \\ I_{51} & I_{52} & I_{53} & I_{54} & I_{55} & I_{56} & 0 & 0 & 0 \\ I_{61} & I_{62} & 0 & I_{64} & I_{65} & I_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{99} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz das constantes de atrito são:

$$\begin{bmatrix} C_{1e}+C_{2e} & -C_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{2e} & C_{2e}+C_{3e} & -C_{3e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{3e} & C_{3e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1a}+C_{2e} & -C_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{2a} & C_{2a}+C_{3a} & -C_{3a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{3a} & C_{3a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1T}+C_{2T} & -C_{2T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{2T} & C_{2T}+C_{3T} & -C_{3T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{3T} & C_{3T} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz das constantes elásticas são:

$$\begin{bmatrix} k_{1e}+k_{2e} & -k_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{2e} & k_{2e}+k_{3e} & -k_{3e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{3e} & k_{3e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1a}+k_{2e} & -k_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{2a} & k_{2a}+k_{3a} & -k_{3a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{3a} & k_{3a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1T}+k_{2T} & -k_{2T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{2T} & k_{2T}+k_{3T} & -k_{3T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{3T} & k_{3T} \end{bmatrix}$$

Os elementos do vetor Coriolis-centrífugo são:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor gravitacional são:

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor dos torques externos são:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{\theta_{1e}} \\ T_{\theta_{2e}} \\ T_{\theta_{3e}} \\ T_{\theta_{1a}} \\ T_{\theta_{2a}} \\ T_{\theta_{3a}} \\ T_{\theta_{1t}} \\ T_{\theta_{2t}} \\ T_{\theta_{3t}} \end{bmatrix}$$

3.3 CABO COM QUATRO ARTICULAÇÕES

Tem-se um cabo de comprimento l, articulado na extremidade fixa e dividido em quatro partes rígidas de comprimento l_1 , l_2 , l_3 e l_4 que são conectadas por três articulações fictícias, conforme mostra a figura 3.3.

Da equação (2.26) obtém-se o Lagrangeano do sistema que é dado por:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

onde

$$L_1 = \sum_{b=1}^{4}\left\{\frac{1}{2}I_{R_{be}}\left(\dot{\theta}_{be}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{R_{ba}}\left(\dot{\theta}_{ba}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{T_b}\dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2}K_{be}\left(\theta_{be} - \theta_{(b-1)e}\right)^2 - \frac{1}{2}K_{ba}\left(\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a}\right)^2 + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}K_{bT}\left(\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T}\right)^2 - m_b g\left[\sum_{i=1}^{b-1}a_i + \frac{l_b}{2}\left(1 - \cos\theta_{be}\right)\right]\right\}$$

(3.21)

$$L_2 = \sum_{b=1}^{4}\frac{m_b}{2}\left\{\frac{l_b}{2}\left[\sin\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{b-1}l_j\left[\sin\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right]\right\}^2$$

$$L_3 = \sum_{b=1}^{4}\frac{m_b}{2}\left\{\frac{l_b}{2}\left[-\sin\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{b-1}l_j\left[-\sin\theta_{je}\sin\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{j}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{je}\cos\left(\sum_{i=1}^{j}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{je}\right]\right\}^2$$

$$L_4 = \sum_{b=1}^{4}\frac{m_b}{2}\left[-\frac{l_b}{2}\sin\theta_{be}\dot{\theta}_{be} - \sum_{j=1}^{b-1}l_j\sin\theta_{je}\dot{\theta}_{je}\right]^2 + \frac{1}{2}I_{T_c}\dot{\theta}_{4T}^2$$

$$L_5 = \frac{1}{2}m_c\left\{\sum_{b=1}^{4}l_b\left[\sin\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right]\right\}^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}m_c\left\{\sum_{b=1}^{4}l_b\left[-\sin\theta_{be}\sin\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\sum_{i=1}^{b}\dot{\theta}_{ia} + \cos\theta_{be}\cos\left(\sum_{i=1}^{b}\theta_{ia}\right)\dot{\theta}_{be}\right]\right\}^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}m_c\left[-\sum_{b=1}^{4}l_b\sin\theta_{be}\dot{\theta}_{be}\right]^2$$

onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1}a_i = 0$, quando $b = 1$.

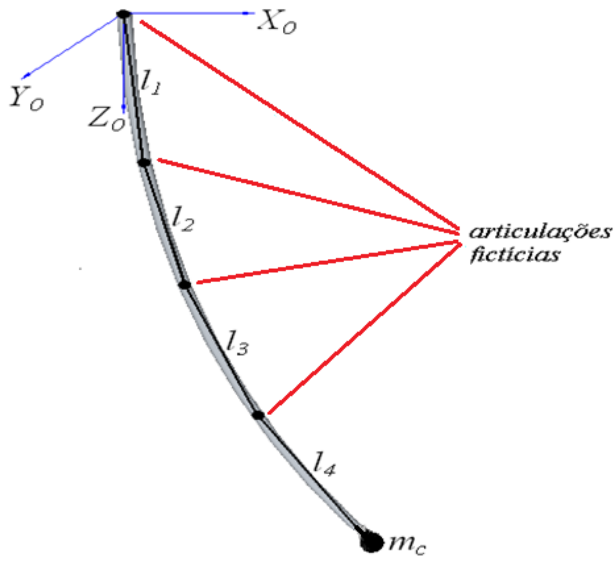

Figura 3.3 Representação geométrica do cabo com quatro articulações fictícias

Ao aplicar a equação de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano, dado a partir da equação (2.26), ou seja, as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1e}}=T_{\theta 1e}-(c_{1e}+c_{2e})\dot{\theta}_{1e}+c_{2e}\dot{\theta}_{2e} \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2e}}=T_{\theta 2e}+c_{2e}\dot{\theta}_{1e}-(c_{2e}+c_{3e})\dot{\theta}_{2e}+c_{3e}\dot{\theta}_{3e} \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3e}}=T_{\theta 3e}-c_{3e}\dot{\theta}_{3e}+c_{3e}\dot{\theta}_{2e}+c_{4e}\dot{\theta}_{3e}-c_{4e}\dot{\theta}_{4e} \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{4e}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{4e}}=T_{\theta 4e}-c_{4e}\dot{\theta}_{3e}+c_{4e}\dot{\theta}_{4e} \tag{3.25}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1a}}=T_{\theta 1a}-(c_{1a}+c_{2a})\dot{\theta}_{1a}+c_{2a}\dot{\theta}_{2a} \tag{3.26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2a}}=T_{\theta 2a}+c_{2a}\dot{\theta}_{1a}-(c_{2a}+c_{3a})\dot{\theta}_{2a}+c_{3a}\dot{\theta}_{3a} \tag{3.27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3a}}=T_{3a}-c_{3a}\dot{\theta}_{3a}+c_{3a}\dot{\theta}_{2a}-c_{4a}\dot{\theta}_{3a}+c_{4a}\dot{\theta}_{4a} \tag{3.28}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{4a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{4a}}=T_{4a}-c_{4a}\dot{\theta}_{4a}+c_{4a}\dot{\theta}_{3a} \tag{3.29}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{1T}}=T_{\theta 1T}-(c_{1T}+c_{2T})\dot{\theta}_{1T}+c_{2T}\dot{\theta}_{2T} \tag{3.30}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{2T}}=T_{\theta 2T}+c_{2T}\dot{\theta}_{1T}-(c_{2T}+c_{3T})\dot{\theta}_{2T}+c_{3T}\dot{\theta}_{3T} \tag{3.31}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3T}}=T_{3T}-c_{3T}\dot{\theta}_{3T}+c_{3T}\dot{\theta}_{2T}-c_{4T}\dot{\theta}_{3T}+c_{4T}\dot{\theta}_{4T} \tag{3.32}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{4T}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_{3T}}=T_{4T}-c_{4T}\dot{\theta}_{4T}+c_{4T}\dot{\theta}_{3T} \tag{3.33}$$

onde c_{1e} , c_{2e} , c_{3e}, c_{4e} ; c_{1a} , c_{2a} , c_{3a}, c_{4a} e c_{1T} , c_{2T} , c_{3T}, c_{4T} são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação, azimute e torção, respectivamente. Os torques externos atuantes nas articulações fictícias, $T_{\theta ia}, T_{\theta ie}$ e $T_{\theta iT}$, *i*=1,2,3,4.

Desenvolvendo-se as equações (3.22) a (3.33), obtém-se o sistema de equações diferenciais de segunda ordem dadas pela equação (3.8), onde $\vec{\theta} = [\theta_{1e} \quad \theta_{2e} \quad \theta_{3e}\theta_{4e} \quad \theta_{1a} \quad \theta_{2a}\theta_{3a} \quad \theta_{4a} \quad \theta_{1T}\theta_{2T} \quad \theta_{3T} \quad \theta_{4T}]^{T}$

O modelo dinâmico para quatro elos pode ser representado também matricialmente da seguinte forma:

$$[I_{12x12}][\ddot{\theta}_{12x1}] + [C_{12x12}][\dot{\theta}_{12x1}] + [K_{12x12}][\theta_{12x1}] + [\vec{F}_{12x1}] + [\vec{G}_{12x1}] = [\vec{T}_{12x1}] \tag{3.34}$$

Os elementos da Matriz de Inércia para 4 elos são dados por:

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} & I_{15} & I_{16} & I_{17} & I_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} & I_{25} & I_{26} & I_{27} & I_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} & I_{35} & I_{36} & I_{37} & I_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} & I_{45} & I_{46} & I_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{51} & I_{52} & I_{53} & I_{54} & I_{55} & I_{56} & I_{57} & I_{58} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{61} & I_{62} & I_{63} & I_{64} & I_{65} & I_{66} & I_{67} & I_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{71} & I_{72} & I_{73} & I_{74} & I_{75} & I_{76} & I_{77} & I_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{81} & I_{82} & I_{83} & 0 & I_{85} & I_{86} & I_{87} & I_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{99} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{10,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{11,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{12,12} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz das constantes de atrito são dados por:

$$\begin{bmatrix} C_{1e}+C_{2e} & -C_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{2e} & C_{2e}+C_{3e} & -C_{3e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{3e} & C_{3e}+C_{4e} & -C_{4e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{4e} & C_{4e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1a}+C_{2a} & -C_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{2a} & C_{2a}+C_{3a} & -C_{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{3a} & C_{3a}+C_{4a} & -C_{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{4a} & C_{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1T}+C_{2T} & -C_{2T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{2T} & C_{2T}+C_{3T} & -C_{3T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{3T} & C_{3T}+C_{4T} & -C_{4T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{4T} & C_{4T} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz das constantes elásticas são dados por:

$$\begin{bmatrix} k_{1e}+k_{2e} & -k_{2e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{2e} & k_{2e}+k_{3e} & -k_{3e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{3e} & k_{3e}+k_{4e} & -k_{4e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{4e} & k_{4e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1a}+k_{2a} & -k_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{2a} & k_{2a}+k_{3a} & -k_{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{3a} & k_{3a}+k_{4a} & -k_{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{4a} & k_{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1T}+k_{2T} & -k_{2T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{2T} & k_{2T}+k_{3T} & -k_{3T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{3T} & k_{3T}+k_{4T} & -k_{4T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{4T} & k_{4T} \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor coriolis-centrífugo são dados por:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor gravitacional são dadas por:

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor dos torques são dadas por:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{\theta_{1e}} \\ T_{\theta_{2e}} \\ T_{\theta_{3e}} \\ T_{\theta_{4e}} \\ T_{\theta_{1a}} \\ T_{\theta_{2a}} \\ T_{\theta_{3a}} \\ T_{\theta_{4a}} \\ T_{\theta_{1t}} \\ T_{\theta_{2t}} \\ T_{\theta_{3t}} \\ T_{\theta_{4t}} \end{bmatrix}$$

No capítulo IV é apresentada a formulação das equações gerais para a formação dos elementos dos vetores e matrizes do modelo dinâmico do cabo, a partir da criação de algoritmos genéricos que podem prever o crescimento dos vetores e matrizes do modelo dinâmico, para um número qualquer de elos considerados para a dinâmica estrutural.

CAPÍTULO IV

EQUAÇÕES GERAIS PARA A FORMAÇÃO DOS ELEMENTOS DOS VETORES E MATRIZES DO MODELO DINÂMICO

4.1 Equações gerais dos elementos da matriz de inércia

No presente capítulo são desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico do cabo para um número qualquer de elos considerados para a estrutura e, conforme será visto a seguir, utiliza-se uma linguagem formal de descrição de algoritmos. Essa forma de descrever algoritmos facilita suas implementações em linguagens computacionais. Estes algoritmos foram implementados no Matlab, sendo que os resultados na forma de simulações são apresentados no capítulo VI. Uma vez que não se dispõe de um aparato físico para uma comprovação experimental, estas simulações permitem apenas uma análise qualitativa dos modelos dinâmicos.

As equações analíticas dos modelos para 2, 3 e 4 elos, desenvolvidas no capítulo anterior, possibilitaram a identificação de um padrão de crescimento genérico para a matriz de inércia, no caso de se considerar um número *n* de elos. A matriz de inércia completa é representada na forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Os índices *e*, *a* e *t* indicam elevação, azimute e torção, respectivamente. *I*, *N* e *T* são submatrizes quadradas de ordem *n*, onde *n* é o número de elos rígidos considerados para representar de forma discreta a flexibilidade contínua. Como a matriz de inércia é simétrica, tem-se que:

$$I_a = N_e^T;\ I_t = T_e^T;\ \ N_t = T_a^T \tag{4.2}$$

Portanto, será dada ênfase à obtenção das submatrizes I_e, N_e, N_a, T_t, T_e e T_a, sendo que, conforme será visto posteriormente, estas duas últimas são nula.

4.1.1 Elementos da submatriz I_e

Os elementos da submatriz *I* relativa à elevação poderão ser obtidos a partir do seguinte algoritmo:

$para\ i = 1{:}\,n,$
$\quad para\ j = i + 1{:}\,n,$

$$I_e(i,j) = l_i l_j \left(\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\left[\cos\theta_{ie}\cos\theta_{je}\cos\left(\sum_{k=i+1}^{j}\theta_{ka}\right) + sin\,\theta_{ie}\,sin\,\theta_{je}\right]; \tag{4.3}$$

$\quad fim\ para,$

$$I_e(i,i) = l_i^2\left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n}(m_k)\right];$$

$fim\ para,$

Os elementos da diagonal principal da submatriz I_e coincidem com os elementos da diagonal principal da matriz completa *I*, ou seja, $I_e(i,i) = I(i,i)$ para *i*=1, ..., *n*. Observa-se ainda que a submatriz I_e é simétrica, sendo por esta razão que a variação *i*, *j* da equação (4.3) descreve apenas os elementos da sua diagonal principal e os que estão acima desta.

No caso de considerar-se a parcela de energia cinética rotacional do movimento de elevação, aos elementos da diagonal principal da submatriz I_e serão acrescidos os momentos de inércia rotacionais sobre os eixos transversais aos elos e passando pelos seus respectivos centros de massa, na forma:

$$I_e(i,i) = I_e(i,i) + I_{Rei} \tag{4.4}$$

onde I_{Rei} é o momento de inércia rotacional de elevação relativo ao elo i.

4.1.2 Elementos da submatriz N_e

Observando-se a matriz completa de inércia *I*, verificou-se que:

$$I(2,4) = 0 \quad (2\ elos)$$
$$I(3,6) = 0 \quad (3\ elos)$$
$$I(4,8) = 0 \quad (4\ elos)$$

.
.
.

$$I(n,2n) = 0 \quad (n\ elos)$$

Percebeu-se ainda que a submatriz N_e apresenta uma duplicação de termos obedecendo à seguinte forma (para uma dada linha, os elementos em vermelho são iguais):

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

Figura 4.1 Representação dos elementos da matriz N_e para o caso de se considerar seis elos.

Os índices na Fig.4.1 se referem à submatriz N_e, para o caso de se considerar seis elos, sendo que o elemento em verde é nulo. Considerando-se esta particularidade da duplicação de alguns termos, a geração dos elementos da submatriz de inércia N_e é feita a partir do seguinte algoritmo:

$para\ i = 1{:}n,$
$\quad para\ j = 1{:}n,$
$\quad\quad se\ i \neq j,$
$\quad\quad\quad S = 0;$
$\quad\quad\quad para\ k = j{:}n,$
$\quad\quad\quad\quad se\ k \neq i,$
$\quad\quad\quad\quad\quad se\ i > k,\ \gamma = 1;\ \ senão\ \ \gamma = -1;\ \ fim\ se,$
$\quad\quad\quad\quad\quad v = [i\ k];$

$$S = S + \gamma l_k \left[\frac{m_k}{2} + m_c + \sum_{g=\max(v)+1}^{n} m_g \right] cos(\theta_{ie}) sin(\theta_{ke}) sin\left(\sum_{g=\min(v)+1}^{\max(v)} \theta_{ga} \right); \tag{4.5}$$

$\quad\quad\quad\quad fim\ se,$
$\quad\quad\quad fim\ para,$
$\quad\quad\quad N_e(i,j) = l_i S;$
$\quad\quad fim\ se,$
$\quad fim\ para,$
$fim\ para,$
$para\ i = 1{:}n-1,$
$\quad N_e(i,i) = Ne(i,i+1);$
$fim\ para,$
$N_e(n,n) = 0;$

Ressalta-se que o elemento $N_e(n,n) = I(n,2n) = 0$.

4.1.3 Elementos da submatriz N_a

A diagonal principal da submatriz N_a faz parte da diagonal principal da matriz I e, portanto, a submatriz N_a é simétrica. Na formação dos seus elementos, existe um parâmetro que pode assumir os valores 1 ou 2, dependendo de outros parâmetros envolvidos no algoritmo. Este parâmetro possui um algoritmo próprio para a sua determinação e é representado pelo símbolo β.

Os elementos da submatriz N_a podem ser obtidos a partir do seguinte algoritmo:

$$
\begin{aligned}
&para\ i = 1\!:\!n,\\
&\quad para\ j = i\!:\!n,\\
&\qquad S1 = 0;\\
&\qquad para\ k = j\!:\!n,\\
&\qquad\quad S1 = S1 + l_k^2\left[\frac{m_k}{4} + m_c + \sum_{h=k+1}^{n} m_h\right] sin^2(\theta_{ke});\\
&\qquad fim\ para,\\
&\qquad S2 = 0;\\
&\qquad v = [i\ j];\\
&\qquad para\ k = \min(v)\!:\!n-1,\\
&\qquad\quad S3 = 0;\\
&\qquad\quad para\ g = j\!:\!n,\\
&\qquad\qquad se\ g > k,\\
&\qquad\qquad\quad \beta = calcbeta(i,j,k);\\
&\qquad\qquad\quad S3 = S3 + \beta l_g\left[\frac{m_g}{2} + m_c + \sum_{h=g+1}^{n} m_h\right] sin(\theta_{ke}) sin(\theta_{ge}) cos\left(\sum_{h=k+1}^{g} \theta_{ha}\right);\\
&\qquad\qquad fim\ se,\\
&\qquad\quad fim\ para,\\
&\qquad\quad S2 = S2 + l_k S3;\\
&\qquad fim\ para,\\
&\qquad se\ (i = n)\ and\ (j = n),\\
&\qquad\quad S2 = 0;\\
&\qquad fim\ se,\\
&\qquad N_a(i,j) = S1 + S2;\\
&\qquad N_a(j,i) = N_a(i,j);\\
&\quad fim\ para,\\
&fim\ para,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Observa-se, portanto, que, em razão da simetria, o i varia de 1 até n e o j varia de i até n, de forma que se calcula apenas os elementos da diagonal principal e os acima desta. Os elementos abaixo da diagonal principal são determinados imediatamente antes do final da malha de repetição em j, a partir da declaração $N_a(j,i) = N_a(i,j)$.

A função que permite a determinação do parâmetro β possui a seguinte estrutura:

$função\ \beta = calcbeta(i,j,k)$
$se\ (i = 1)\ e\ (j = 1)\ ou\ k \geq j,$
$\quad \beta = 2;$
$\quad senão$
$\quad \beta = 1;$
$fim\ se,$

No caso de considerar-se a parcela de energia cinética rotacional do movimento de azimute, aos elementos da diagonal principal da submatriz N_a serão acrescidos os momentos de inércia rotacionais de azimute, considerados constantes no formalismo proposto:

$$N_a(i,i) = N_a(i,i) + I_{Rai} \tag{4.7}$$

4.1.4 Elementos das submatrizes *T*

No formalismo de modelagem proposto (PEREIRA, [24]), consideram-se os movimentos de torção desacoplados com relação aos movimentos de azimute e elevação. Desta forma, as submatrizes T_e e T_a (e consequentemente I_t e N_t) são nulas, enquanto que a submatriz T_t é diagonal. Portanto, tem-se que:

$$T_t(i,i) = J_{ti} \tag{4.8}$$

onde J_{ti} é o momento de inércia de torção sobre o eixo longitudinal do elo *i*, com *i*=1, ..., *n*. Ainda tem-se que:

$$T_t(n,n) = J_{tn} + J_{tc} \tag{4.9}$$

com J_{tc} equivalente ao momento de inércia sobre o eixo longitudinal de torção da carga terminal conectada à extremidade livre do cabo.

4.2 Equações Gerais para os Elementos do Vetor Coriolis-centrífugo

O vetor de esforços do tipo Coriolis-centrifugo tem 3*n* componentes, onde *n* é o número de elos. Porém, as *n* últimas componentes são nulas, relativas aos movimentos de torção. Dar-se-á ênfase, portanto, à determinação das primeiras *n* componentes (relativas aos movimentos de elevação) e das *n* intermediárias componentes (movimentos de azimute).

4.2.1 Componentes de Elevação

As equações analíticas dos modelos para 2, 3 e 4 elos também possibilitaram a identificação de um padrão de crescimento genérico para o vetor Coriolis-centrífugo, para um número *n* de elos. Inicialmente o vetor de esforços Coriolis-centrífugo é escrito na seguinte forma:

$$\vec{F}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right) = [f_1 \;\; f_2 \;\; \cdots \;\; f_n \;\; f_{n+1} \;\; f_{n+2} \;\; \cdots \;\; f_{2n} \;\; f_{2n+1} \;\; f_{2n+2} \;\; \cdots \;\; f_{3n}]^T \quad (4.10)$$

Nesta subseção será dada ênfase à determinação das componentes $[f_1 \;\; f_2 \;\; \cdots \;\; f_n]^T$, correspondentes aos movimentos de elevação. Cada componente f_i (i=1,...,n) é escrita como composta por dois termos, na forma:

$$f_i = v_1 + v_2 \quad (4.11)$$

A seguinte equação descreve a obtenção do termo v_1:

$$v_1 = \alpha l_i^2 \left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{g=i+1}^{n} m_g\right] sin(\theta_{ie})cos(\theta_{ie}) \left\{\left(\sum_{g=1}^{i-1} \dot{\theta}_{ga} \sum_{h=g+1}^{i} \dot{\theta}_{ha}\right) + \frac{1}{|\alpha|}\left(\sum_{g=1}^{i} \dot{\theta}_{ga}^2\right)\right\} \quad (4.12)$$

O parâmetro α depende do índice i=1,...,n , na forma:

$$\alpha = \begin{cases} -1 & para\; i = 1; \\ -2 & para\; i \neq 1; \end{cases} \quad (4.13)$$

O termo v_2 possui produtos $l_i l_j$, para $j \neq i$. Este termo pode ser determinado a partir da seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
&v_2 \\
&= l_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left\{ \beta l_j \left(\frac{m_{\max\,(i,j)}}{2} + m_c \right.\right. \\
&\left.+ \sum_{g=\max(i,j)+1}^{n} m_g \right) \left[cos(\theta_{ie}) \left[cos(\theta_{je}) sin \left(\sum_{g=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)} \theta_{ga} \right) \dot{\theta}_{je} \left(\sum_{g=1}^{j} \dot{\theta}_{ga} \right) \right.\right. \\
&- sign(\beta) \left(sin(\theta_{je}) cos \left(\sum_{g=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)} \theta_{ga} \right) \left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{ga} \sum_{h=g+1}^{j} \dot{\theta}_{ha} + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_{je}^2 \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\left.\left. + \sum_{g=1}^{j} \dot{\theta}_{ga}^2 \right)\right)\right)\right] + \frac{1}{\beta} sin(\theta_{ie}) cos(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je}^2 \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

O parâmetro β depende dos índices *i* e *j*, na forma:

$$
\beta = \begin{cases} 2 \ \ para \ \ i > j, \\ -2 \ \ para \ \ i \leq j \end{cases} \tag{4.15}
$$

Torna-se importante lembrar que, para a equação (14), têm-se as seguintes variações: *i*=1,..., *n*; *j*=1,...,*n*; para $j \neq i$.

4.2.2 Componentes em Azimute

As componentes em azimute do vetor Coriolis-centrífugo possuem um maior nível de complexidade nas suas equações genéricas e, portanto, estas equações serão apresentadas de forma modular, conforme será exposto a seguir.

Inicialmente promove-se uma mudança de variável, de forma a facilitar a indexação das equações. Define-se:

$$
z_i = f_{n+i} \tag{4.16}
$$

com *i*=1,...,*n*. Desta forma, os elementos do vetor Coriolis-centrífugo em azimute $[f_{n+1} \ \ f_{n+2} \ \ ... \ \ f_{2n}]^T$ serão equivalentes aos elementos do vetor $[z_1 \ \ z_2 \ \ ... \ \ z_n]^T$. Define-se o vetor $\vec{z} = [z_1 \ \ z_2 \ \ ... \ \ z_n]^T$ a partir da seguinte equação:

$$\vec{z} = \vec{R} + W\vec{P} \tag{4.17}$$

$\vec{R}$ é um vetor nx1 que contém termos funções dos l_i^2, W é uma matriz $n$xq cujos elementos são funções dos ângulos e das velocidades angulares de azimute e elevação e $\vec{P}$ é um vetor qx1 que contém produtos do tipo $l_i l_j$, para $j > i$. Conforme já definido anteriormente, n é o número de elos e q é obtido em função do n de acordo com o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned}
&q = 0;\\
&para\ i = 1{:}\,n,\\
&\quad para\ j = i + 1{:}\,n,\\
&\qquad q = q + 1;\\
&\quad fim\ para,\\
&fim\ para,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Cada elemento R_i do vetor $\vec{R}$ é definido na forma (i=1,...,n):

$$R_i = 2\sum_{k=1}^{n}\left\{l_k^2\left(\frac{m_k}{4} + m_c + \sum_{g=k+1}^{n} m_g\right) sin(\theta_{ke})cos(\theta_{ke})\left(\sum_{g=1}^{k}\dot{\theta}_{ga}\right)\dot{\theta}_{ke}\right\} \tag{4.19}$$

Os elementos P_u do vetor $\vec{P}$ possuem a seguinte definição, para $u = 1, \dots, q$:

$$\begin{aligned}
&u = 0;\\
&para\ i = 1{:}\,n,\\
&\quad para\ j = i + 1{:}\,n,\\
&\qquad u = u + 1;\\
&\qquad\quad P_u = 2l_i l_j\left[\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{g=j+1}^{n} m_g\right];\\
&\quad fim\ para,\\
&fim\ para,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A matriz W possui a forma:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nq} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Cada elemento da matriz W é formado a partir da soma de três outros elementos:

$$w_{k,u} = a_{k,u} + b_{k,u} + c_{k,u} \tag{4.22}$$

Os elementos $a_{k,u}$, $b_{k,u}$ e $c_{k,u}$ podem ser determinados a partir do seguinte algoritmo:

$$
\begin{array}{l}
para\ k = 1{:}n,\\
\quad u = 0;\\
\quad para\ i = 1{:}n-1,\\
\quad\quad para\ j = i+1{:}n,\\
\quad\quad\quad u = u+1;\\
\quad\quad\quad se\ j \geq k,\\
\quad\quad\quad\quad se\ i < k,\\
\quad\quad\quad\quad\quad c_{k,u} = sin(\theta_{ie})sin(\theta_{je})sin\left(\sum_{g=i+1}^{j} \theta_{ga}\right)\vartheta_1\left(\dot{\vec{\theta}}_e, \dot{\vec{\theta}}_a, i, j\right);\\
\quad\quad\quad\quad senão\\
\quad\quad\quad\quad\quad c_{k,u} = sin(\theta_{ie})sin(\theta_{je})sin\left(\sum_{g=i+1}^{j} \theta_{ga}\right)\vartheta_2\left(\dot{\vec{\theta}}_e, \dot{\vec{\theta}}_a, i, j\right);\\
\quad\quad\quad\quad fim\ se,\\
\quad\quad\quad senão\\
\quad\quad\quad\quad c_{k,u} = 0;\\
\quad\quad\quad fim\ se,\\
\quad\quad\quad se\ (k = 1)\ ou\ (k \geq 2)\ e\ (k < n)\ e\ (i \geq k),\\
\quad\quad\quad\quad b_{k,u} = sin(\theta_{ie})cos(\theta_{je})cos\left(\sum_{g=i+1}^{j} \theta_{ga}\right)\left[\left(\sum_{g=1}^{j} \dot{\theta}_{ga}\right)\dot{\theta}_{je}\right];\\
\quad\quad\quad senão\\
\quad\quad\quad\quad b_{k,u} = 0;\\
\quad\quad\quad fim\ se,\\
\quad\quad\quad se\ j > k,\\
\quad\quad\quad\quad a_{k,u} = cos(\theta_{ie})sin(\theta_{je})cos\left(\sum_{g=i+1}^{j} \theta_{ga}\right)\left[\left(\sum_{g=1}^{i} \dot{\theta}_{ga}\right)\dot{\theta}_{ie}\right];\\
\quad\quad\quad senão\\
\quad\quad\quad\quad a_{k,u} = 0;\\
\quad\quad\quad fim\ se,\\
\quad\quad\quad w_{k,u} = a_{k,u} + b_{k,u} + c_{k,u};\\
\quad\quad fim\ para,\\
\quad fim\ para,\\
fim\ para,
\end{array}
\tag{4.23}
$$

Existem duas diferentes formas para os elementos $c_{k,u}$, dependentes das funções $\vartheta_1\left(\dot{\vec{\theta}}_e, \dot{\vec{\theta}}_a, i, j\right)$ e $\vartheta_2\left(\dot{\vec{\theta}}_e, \dot{\vec{\theta}}_a, i, j\right)$, especificadas a seguir.

$$\vartheta_1 = -\left\{\left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{ga}\right)\left(\sum_{h=g+1}^{j} \dot{\theta}_{ha}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{g=i+1}^{j} \dot{\theta}_{ga}^2\right) + \dot{\theta}_{je}^2 - \dot{\theta}_{ie}^2\right]\right\} \qquad (4.24)$$

$$\vartheta_2 = -\left\{\left(\sum_{g=1}^{i-1} \dot{\theta}_{ga}\right)\left(\sum_{h=g+1}^{i} \dot{\theta}_{ha}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{g=1}^{i} \dot{\theta}_{ga}^2\right) + \dot{\theta}_{ie}^2\right]\right\} \qquad (4.25)$$

4.3 Equações gerais para os elementos do vetor gravitacional

O vetor gravitacional só tem componentes relativas ao deslocamento em elevação, de forma que sua estrutura é tal que apenas as primeiras *n* componentes apresentam valores diferentes de zero:

$$\vec{G}(\vec{\theta}) = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_n \quad g_{n+1} = 0 \quad \ldots \quad g_{2n} = 0 \quad g_{2n+1} = 0 \quad \cdots \quad g_{3n} = 0]^T \qquad (4.26)$$

Quando apenas dois elos são considerados para representar a estrutura contínua, as componentes de 1 a *n* (*n*=2) do vetor gravitacional possuem a forma:

$$g_1 = l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g sin(\theta_{1e}) \qquad (4.27)$$

$$g_2 = l_2\left(\frac{m_2}{2}\right) g sin(\theta_{2e}) \qquad (4.28)$$

Quando três elos são considerados, as primeiras *n* componentes possuem a forma:

$$g_1 = l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) g sin(\theta_{1e}) \qquad (4.29)$$

$$g_2 = l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g sin(\theta_{2e}) \qquad (4.30)$$

$$g_3 = l_3\left(\frac{m_3}{2}\right) g sin(\theta_{3e}) \qquad (4.31)$$

Para quatro elos tem-se:

$$g_1 = l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4\right) g sin(\theta_{1e}) \qquad (4.32)$$

$$g_2 = l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4\right) g sin(\theta_{2e}) \qquad (4.33)$$

$$g_3 = l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4\right) g sin(\theta_{3e}) \qquad (4.34)$$

$$g_4 = l_4\left(\frac{m_4}{2}\right) g sin(\theta_{4e}) \qquad (4.35)$$

Observando-se as equações para os casos 2, 3 e 4 elos, percebe-se que a geração dos primeiros n elementos do vetor gravitacional obedece à seguinte regra:

$$g_i = l_i \left(\frac{m_i}{2} \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) g \sin \theta_{ie} \qquad 4.36$$

para i=1,...,n.

4.4 Formação das matrizes de constantes elásticas e de atrito

As matrizes de coeficientes de atrito e de constantes elásticas obedecem às mesmas regras de geração. Essas matrizes são diagonais por blocos, sendo que, em cada bloco há uma sub-matriz nxn, onde n é o número de elos. O primeiro bloco possui a sub-matriz relativa aos movimentos de elevação, o segundo aos elementos de azimute e o terceiro aos elementos de torção. Portanto, essas matrizes podem ser postas na seguinte forma geral:

$$K = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & C_a & 0 \\ 0 & 0 & C_t \end{bmatrix} \qquad (4.37)$$

As sub-matrizes possuem a mesma estrutura. Tomando-se como exemplo o caso de se considerar 2 elos, elas possuem as seguintes formas:

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} \\ -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} \qquad (4.38)$$

$$K_a = \begin{bmatrix} k_{a1} + k_{a2} & -k_{a2} \\ -k_{a2} & k_{a2} \end{bmatrix} \qquad (4.39)$$

$$K_t = \begin{bmatrix} k_{t1} + k_{t2} & -k_{t2} \\ -k_{t2} & k_{t2} \end{bmatrix} \qquad (4.40)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} c_{e1} + c_{e2} & -c_{e2} \\ -c_{e2} & c_{e2} \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} c_{a1} + c_{a2} & -c_{a2} \\ -c_{a2} & c_{a2} \end{bmatrix} \qquad (4.42)$$

$$C_t = \begin{bmatrix} c_{t1} + c_{t2} & -c_{t2} \\ -c_{t2} & c_{t2} \end{bmatrix} \qquad (4.43)$$

Quando se considera 3 elos, a sub-matriz relativa ao movimento de elevação possui a forma:

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} & 0 \\ -k_{e2} & k_{e2} + k_{e3} & -k_{e3} \\ 0 & -k_{e3} & k_{e3} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Para 4 elos esta sub-matriz assume a forma:

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} & 0 & 0 \\ -k_{e2} & k_{e2} + k_{e3} & -k_{e3} & 0 \\ 0 & -k_{e3} & k_{e3} + k_{e4} & -k_{e4} \\ 0 & 0 & -k_{e4} & k_{e4} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

O algoritmo seguinte permite gerar de forma genérica a sub-matriz K_e:

$$\begin{array}{l}
para\ i = 1:n, \\
\quad para\ j = 1:n, \\
\qquad K_e(i,j) = 0; \\
\qquad se\ \ (i = j)\ e\ \ (i < n), \\
\qquad\quad K_e(i,j) = k_{ei} + k_{ei+1}; \\
\qquad fim\ se, \\
\qquad se\ \ (i = j)\ e\ \ (i = n), \\
\qquad\quad K_e(i,j) = k_{ei}; \\
\qquad fim\ se, \\
\qquad se\ j = i + 1, \\
\qquad\quad K_e(i,j) = k_{ej}; \\
\qquad fim\ se, \\
\qquad K_e(i,j) = K_e(j,i); \\
\quad fim\ para, \\
fim\ para,
\end{array} \tag{4.46}$$

O algoritmo (46) se aplica à geração de todas as sub-matrizes, tanto de coeficientes de atrito quanto de constantes elásticas, já que estas têm a mesma estrutura.

4.5 Aproximação plana para o modelo

Algumas aplicações subaquáticas podem permitir uma aproximação plana para o movimento da estrutura flexível do tipo cabo. Este pode ser o caso, por exemplo, de algumas estruturas que aparecem na figura 4.2, presas a Terra em uma extremidade e a grandes inércias quase imóveis em outra extremidade. Este fato motivou o desenvolvimento de algoritmos genéricos para modelos dinâmicos de sistemas flexíveis com movimento planar. Para tanto, basta que se considere todas as posições e velocidades angulares de azimute nulas, nas equações dos algoritmos genéricos desenvolvidas neste capítulo anteriormente.

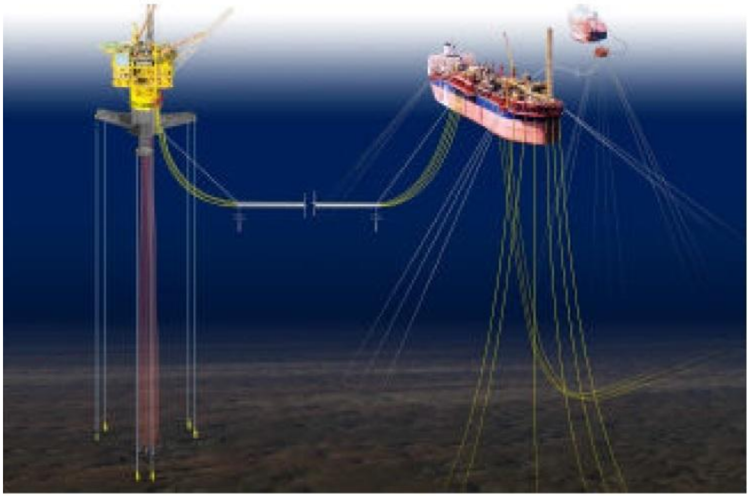

Figura 4.2 Estruturas flexíveis usadas em plataforma de petróleo (Pereira, 2010).

No caso de se considerar o movimento plano, os modelos dinâmicos perdem os graus de liberdade relativos aos movimentos de azimute, ou seja, apenas torção e elevação são considerados. A matriz de inércia possui a seguinte forma:

$$M_{zw} = \begin{bmatrix} I_e & T_e \\ I_t & T_t \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Onde

$$I_t = T_e^T = 0 \tag{6.2}$$

O algoritmo que permite a obtenção genérica dos elementos da matriz I_e possui a forma:

$para\ i = 1\!:\!n,$

$\quad para\ j = i + 1\!:\!n,$

$$I_e(i,j) = l_i l_j \left(\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n} m_k \right) [cos(\theta_{ie} - \theta_{je})];$$

$\quad fim\ para,$

$$I_e(i,i) = l_i^2 \left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n} (m_k) \right] + I_{rei} \tag{6.3}$$

$fim\ para,$

Conforme já definido anteriormente, I_{rei} são os momentos de inércia rotacionais de elevação. Todas as variáveis e parâmetros das equações do presente capítulo já foram previamente definidos anteriormente.

O vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos possui a forma:

$$\vec{F}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right) = [f_1 f_2 \dots f_n \;\; f_{n+1} f_{n+2} \dots f_{2n}]^T \tag{6.4}$$

onde

$$f_i = l_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left\{ \beta l_j \left(\frac{m_{\max(i,j)}}{2} + m_c + \sum_{g=\max(i,j)+1}^{n} m_g \right) \left[-\frac{1}{2} sign(\beta) cos(\theta_{ie}) sin\left(\theta_{je}\right) + \frac{1}{\beta} sin(\theta_{ie}) cos\left(\theta_{je}\right) \right] \dot{\theta}_{je}^2 \right\} \tag{6.5}$$

com $i = 1, \dots, n$. Ressalta-se que as componentes $f_{n+1} f_{n+2} \dots f_{2n}$ são nulas, pois são correlatas aos movimentos de torção. O parâmetro β é obtido a partir da seguinte regra simples:

$$\beta = \begin{cases} 2 & para \quad i > j, \\ -2 & para \quad i \leq j \end{cases} \tag{6.6}$$

As matrizes de constantes elásticas e de atrito passam a ter as seguintes formas:

$$K = \begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & K_t \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} C_e & 0 \\ 0 & C_t \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

sendo que K_e, K_t, C_e e C_t continuam com as mesmas regras de criação definidas nas seções anteriores. O vetor de torques gravitacionais só depende dos ângulos de elevação e, portanto, possui também as mesmas regras de criação.

No capítulo a seguir é realizada uma validação de resultados, comparando-se os modelos gerados com os algoritmos genéricos com os obtidos a partir do *software* de geração automática de modelos.

CAPÍTULO V

VALIDAÇÃO DE RESULTADOS

5.1 O *Software* SIMMODELCAB

Conforme visto no Capítulo III, foram desenvolvidos analiticamente os modelos dinâmicos para os casos 2, 3 e 4 elos. À medida que se aumenta o número de elos, o Lagrangeano do sistema cresce muito, assim como o número de operações matemáticas na aplicação das equações de Euler-Lagrange. Os algoritmos genéricos desenvolvidos no capítulo anterior tiveram como base estas equações dos modelos desenvolvidas manualmente de forma analítica no Capítulo III. Restava, porém, uma questão importante: como garantir que as equações dos modelos de 2, 3 e 4 elos estão corretas, bem como os algoritmos genéricos, se, considerando-se o tamanho das equações, ampliam-se as possibilidades de se cometer erros? Esta questão foi esclarecida a contento fazendo-se uso de um *software* desenvolvido para gerar de forma automática os elementos das matrizes e dos vetores do modelo dinâmico.

Os alunos Adriano Coelho Vieira e Ingrid Faber, do curso de Engenharia de Computação da FURG, desenvolveram um *software* que gera de forma automática o modelo dinâmico de cabos, o qual fazia parte do trabalho de final de curso de graduação dos alunos (Vieira e Fabber, 2011). Para o desenvolvimento do *software* eles se basearam na tese de doutorado desenvolvida por Pereira (2010). Este *software* recebeu o nome de SIMMODELCAB e foi desenvolvido no MATLAB, utilizando-se sua *toolbox* de manipulação simbólica de variáveis. A figura 5.1 mostra a tela principal do SIMMODELCAB, tratando-se da sua interface com o usuário. Inicialmente o usuário escolhe o número de elos e imediatamente são abertos espaços na interface para que sejam digitados os valores numéricos dos parâmetros físicos do modelo. A figura 5.1 mostra um exemplo para o caso em que três elos foram considerados.

O procedimento adotado para testar o desenvolvimento analítico dos modelos, bem como os algoritmos genéricos de geração dos modelos, foi baseado na confrontação numérica com resultados oriundos do SIMMODELCAB. Foram adotados parâmetros físicos para os modelos dinâmicos com 2, 3, 4, 5 e 6 elos, assim como valores numéricos para as variáveis de estado (posições e velocidades angulares de elevação, azimute e torção). Os valores numéricos dos elementos das matrizes e vetores dos modelos foram obtidos nos casos: utilizando-se o *software* **SIMODELCAB**; a partir das **equações analíticas** desenvolvidas manualmente no Capítulo III; utilizando-se os **algoritmos genéricos** formulados no Capítulo IV. Conforme visto no Capítulo III, os modelos com as equações analíticas foram desenvolvidos para 2, 3 e 4 elos, de forma que não há resultados com desenvolvimento analítico para além de 4 elos. O objetivo dos testes foi primeiro comparar os resultados entre equações analíticas e algoritmos genéricos até 4 elos, a fim de verificar se os algoritmos genéricos poderiam reproduzir as equações analíticas fielmente. Posteriormente viria o teste de comparar ambos com os resultados oriundos do *software* SIMMODELCAB. Finalmente seria feito o teste mais importante, para avaliar a capacidade dos algoritmos genéricos em prever como seria o modelo nos casos de 5 e 6 elos, ou seja, comparando-se os resultados entre os algoritmos genéricos e o SIMMODELCAB. Torna-se importante ressaltar que os algoritmos genéricos foram implementados utilizando o *software* MATLAB.

Figura 5.1 Tela principal do software SIMMODELCAB, mostrando a interface com o usuário.

5.2 Validação de Resultados

A Tabela V.1 mostra os resultados para 2, 3 e 4 elos, obtidos com as equações analíticas e com os algoritmos genéricos, especificamente para o caso da matriz de inércia. Mostra-se a maior diferença em módulo, isso para todos os elementos da matriz de inércia, calculada sob a forma:

$$Mdif_{max} = max\left(abs\left(Mea_{i,j} - Mag_{i,j}\right)\right) \quad (5.1)$$

onde Mea é a matriz de inércia obtida com as equações analíticas, enquanto Mag corresponde à matriz de inércia obtida com os algoritmos genéricos (i e j percorrem todos os elementos da matriz e variam conforme definido na Capítulo IV).

Tabela V.1 Comparações entre as equações analíticas e os algoritmos genéricos, considerando-se os elementos das matrizes de inércia para 2, 3 e 4 elos.

Número de elos	Diferença máxima ($Mdif_{max}$)
2	0
3	2.2204e-016
4	1.7764e-015

A próxima comparação refere-se aos elementos do vetor Coriolis-centrífugo. Mostram-se, na Tabela V.2, as máximas diferenças entre os vetores obtidos via equações analíticas e algoritmos genéricos, na forma:

$$Fdif_{max} = max\big(abs(Fea_i - Fag_i)\big) \tag{5.2}$$

onde $i = 1, \dots, 3n$, Fea é o vetor Coriolis-centrífugo obtido com as equações analíticas, enquanto Fag corresponde ao vetor obtido com os algoritmos genéricos.

Tabela V.2 Comparações entre as equações analíticas e os algoritmos genéricos, considerando-se os elementos dos vetores Coriolis-centrífugos para 2, 3 e 4 elos.

Número de elos	($Fdif_{max}$)
2	< e-16
3	< e-16
4	< e-16

Analisando-se as Tabelas V.1 e V.2, percebe-se que praticamente não há diferenças entre os valores numéricos, ou seja, os algoritmos genéricos são capazes de gerar fielmente os modelos dinâmicos nos casos 2, 3 e 4 elos, conforme já era esperado.

As próximas comparações são realizadas entre os algoritmos genéricos e o *software* SIMMODELCAB.

A comparação com o SIMMODELCAB justifica-se por que este *software* ao utilizar a manipulação simbólica para as derivadas parciais o faz sem cometer erros. Entretanto, introduz erros ao efetuar as derivadas no tempo na aplicação das equações de Euler-Lagrange. Porém estes erros são pequenos, de forma que, pelo menos até a quinta casa decimal, os elementos dos vetores e matrizes obtidos com os algoritmos genéricos devem coincidir com os obtidos com o SIMMODELCAB.

A exemplo da equação (5.1), são mostradas, na Tabela V.3, as máximas diferenças entre os elementos da matriz de inércia, agora obtidos na forma:

$$Mdif_{max} = max\left(abs\left(Mscab_{i,j} - Mag_{i,j}\right)\right) \tag{5.3}$$

onde $Mscab$ é a matriz de inércia obtida com o SIMMODELCAB, enquanto Mag corresponde à matriz de inércia obtida com os algoritmos genéricos (i e j percorrem todos os elementos da matriz e variam conforme definido no Capítulo IV). Entre parêntesis, ao lado dos valores numéricos encontram-se as diferenças relativas, obtidas com a equação:

$$Mdif_{max} = \frac{max\left(abs\left(Mscab_{i,j} - Mag_{i,j}\right)\right)}{max\left(abs\left(Mscab_{i,j}\right)\right)} \tag{5.4}$$

Tabela V.3 Comparações entre o SIMMODELCAB e os algoritmos genéricos, considerando-se os elementos das matrizes de inércia para 2 a 6 elos.

Número de elos	Diferença máxima ($Mdif_{max}$)
2	1.2919e-4 (2.4109e-6)
3	1.5523e-4 (6.2244e-6)
4	4.1988e-5 (2.9273e-6)
5	6.2928e-5 (6.7657e-6)
6	7.8471e-4 (1.2044e-4)

A Tabela V.4 mostra comparações relativas aos vetores Coriolis-centrífugos, efetuadas entre o SIMMODELCAB e os algoritmos genéricos, para os casos 2 a 6 elos. Mostram-se os erros máximos obtidos a partir da expressão:

$$Fdif_{max} = max\left(abs\left(Fscab_i - Fag_i\right)\right) \tag{5.5}$$

onde $i = 1, \ldots, 3n$, $Fscab$ é o vetor Coriolis-centrífugo obtido com o SIMMODELCAB, enquanto Fag corresponde ao vetor obtido com os algoritmos genéricos.

Tabela V.4 Comparações entre o SIMMODELCAB e os algoritmos genéricos, considerando-se os elementos do vetor Coriolis-centrífugo para 2 a 6 elos.

Número de elos	Diferença máxima ($Fdif_{max}$)
2	6.1695e-008
3	4.1790e-007
4	1.0241e-007
5	2.6698e-007
6	1.3169e-005

As tabelas a seguir mostram os valores numéricos dos elementos do vetor Coriolis-centrífugo, para os casos de 2 a 6 elos. São mostrados apenas os $2n$ primeiros elementos, relativos aos movimentos de elevação e azimute, já que os últimos n

elementos são nulos (relativos ao movimento de torção).

Tabela V.5 Elementos do vetor Coriolis-centrifugo para o caso de se considerar 2 elos.

SIMODELCAB	Equações Analíticas	Algoritmos Genéricos
-0.047453541619934	-0.047453603314999	-0.047453603314999
-0.017130449113871	-0.017130457157967	-0.017130457157967
0.028435438561416	0.028435472898158	0.028435472898158
0.013906572046179	0.013906582867144	0.013906582867144

Tabela V.6. Elementos do vetor Coriolis-centrifugo para o caso de se considerar 3 elos.

SIMODELCAB	Equações Analíticas	Algoritmos Genéricos
-0.066987992274178	-0.066987574370265	-0.066987574370265
-0.042034673566447	-0.042034411225216	-0.042034411225216
-0.016206400228770	-0.016206298984023	-0.016206298984023
0.036555633970736	0.036555405907925	0.036555405907925
0.024727393685976	0.024727239365917	0.024727239365917
0.012161629301066	0.012161553358098	0.012161553358098

Tabela V.7. Elementos do vetor Coriolis-centrifugo para o caso de se considerar 4 elos.

SIMODELCAB	Equações Analíticas	Algoritmos Genéricos
-0.083568931341871	-0.083569033754543	-0.083569033754543
-0.062807787358613	-0.062807853505069	-0.062807853505069
-0.039860636566989	-0.039860667436744	-0.039860667436744
-0.016200788002162	-0.016200791705383	-0.016200791705383
0.043388938925433	0.043388991798346	0.043388991798346
0.033792223528367	0.033792259503893	0.033792259503893
0.022863751685256	0.022863770706232	0.022863770706232
0.011309498729053	0.011309504179825	0.011309504179825

Tabela V.8. Elementos do vetor Coriolis-centrifugo para o caso de se considerar 5 elos.

SIMODELCAB	Equações Analíticas	Algoritmos Genéricos
-0.097016326522346	Não disponíveis	-0.097016593506253
-0.080348163515653		-0.080348361082283
-0.060626453296984		-0.060626577666976
-0.038923375610019		-0.038923432471201
-0.016510716097158		-0.016510723140341
0.048662203028694		0.048662337660294
0.041248296123442		0.041248398843573
0.032114848343591		0.032114916324892
0.021764368999681		0.021764403969325
0.010819367093961		0.010819376901983

Tabela V.9. Elementos do vetor Coriolis-centrifugo para o caso de se considerar 6 elos.

SIMODELCAB	Equações Analíticas	Algoritmos Genéricos
-0.106917165468577		-0.106930334292799
-0.094510777948326		-0.094522434339830
-0.078413890854582		-0.078423578242472
-0.059433694913586		-0.059441053408613
-0.038562123569682		-0.038566911982190
-0.016939545442041	Não disponíveis	-0.016941658923562
0.052139164092733		0.052145584737724
0.046968061200721		0.046973852680504
0.039802682714292		0.039807598609159
0.031008768094989		0.031012605692556
0.021058343823327		0.021060956745708
0.010512332238041		0.010513640979984

5.3 Conclusões Sobre a Validação de Resultados

As tabelas apresentadas neste capítulo permitem concluir que:

i) Os algoritmos genéricos reproduzem fielmente as equações analíticas.

ii) As diferenças entre os resultados obtidos com o SIMMODELCAB e os algoritmos genéricos tendem a aumentar à medida que se aumenta o número de elos. Este fato deve-se aos erros de truncamento em razão da grande quantidade de operações com a manipulação simbólica de variáveis que o SIMMODELCAB efetua e, principalmente, à derivação numérica de primeira ordem (método de Euler) que o SIMODELCAB efetua, por ocasião da derivação no tempo para a obtenção do modelo a partir das equações de Euler-Lagrange.

iii) A conclusão anterior induz a concluir que os algoritmos genéricos são capazes de gerar os modelos de forma mais precisa do que o *software* SIMODELCAB.

iv) Apesar de baseados nos modelos (equações analíticas) para 2, 3 e 4 elos, os algoritmos genéricos conseguiram gerar de forma correta os modelos para os casos 5 e 6 elos, provando assim que de fato são genéricos e com poder de previsibilidade de forma independente do número escolhido de elos para representar a dinâmica flexível.

Finalmente, é importante ressaltar que o SIMMODELCAB travou o processamento para sete ou mais elos, muito provavelmente em razão do crescimento das equações, gerando assim conflitos de memória. Acontece que o Lagrangeano genérico é derivado primeiro parcialmente com relação às posições e às velocidades e depois, estas últimas derivadas parciais são novamente derivadas com relação ao tempo. A manipulação simbólica de variáveis do MATLAB não simplifica bem as equações, de forma que o crescimento enorme das mesmas é inevitável.

No próximo capítulo serão apresentadas simulações com os algoritmos genéricos.

CAPÍTULO VI
SIMULAÇÕES

6.1 Simulações com o Modelo Completo

Neste capítulo serão mostradas algumas simulações realizadas com os algoritmos genéricos. O objetivo é verificar se os modelos dinâmicos permitem reproduzir em simulação resultados fisicamente esperados.

Os parâmetros físicos adotados para os modelos estão na tabela 6.1.

Tabela 6.1 Parâmetros físicos adotados para os modelos dinâmicos com até 12 elos.

Parâmetro	Valor Numérico	Significado físico
L_c	$24(m)$	Comprimento do cabo
N	6, 8, 12 e 16	Número de elos
r_i	$0.01(m)$	Raio de cada elo (constante)
m_e	$7850\ (kg/m^3)$	Massa específica do cabo
m_c	$16(kg)$	Massa da carga terminal
l_i	$\frac{L_c}{n}\ (m)$	Comprimento de cada elo
m_i	$\pi r_i^2 l_i m_e\ \ (kg)$	Massa de cada elo
I_e	$\frac{m_i}{12} l_i^2 (kgm^2)$	Momento de inércia rotacional de elevação
I_a	$0.2 I_e (kgm^2)$	Momento de inércia rotacional de azimute
I_t	$\frac{m_i}{2} r_i^2 (kgm^2)$	Momento de inércia rotacional de torção
k_e	$\frac{5}{6}\frac{nEI}{L_c}\left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de elevação
E	$8e10\ \ (Nm^2)$	Módulo de Young
I	$\frac{1}{4}\pi r_i^4\ \ (m^4)$	Inércia da seção reta
k_a	Zero	Constante elástica de azimute
k_t	$25K_e\left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de torção
c_e	$33n\left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito estrutural de elevação
c_a	$33n\ \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito estrutural de azimute
c_t	$0.83n\ \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito estrutural de torção
c_v	$200\left(\frac{Ns^2}{m^2}\right)$	Coeficiente de arrasto hidrodinâmico
E_{ct}	$0.95 m_{ct} g\ (N)$	Empuxo da carga terminal

As simulações foram efetuadas aplicando-se um torque de elevação equivalente a 40 Nm, outro de azimute equivalente a 20Nm (após os primeiros 2 s) e um outro de torção, igual a 20 Nm. Os torques foram aplicados na última articulação. Para todas as simulações desta seção, o movimento é plano nos primeiros dois segundos. Após este tempo, o torque de azimute é aplicado e o movimento do cabo passa a ser no espaço. Este tipo de simulação foi adotado por ser semelhante ao caso de um veículo subaquático do tipo ROV conectado ao último elo, atuando como carga terminal e aplicando torques na última articulação.

As figuras 6.1 a 6.6 mostram os resultados de uma simulação considerando-se a estrutura dividida em seis elos. As figuras 6.7 a 6.12 mostram resultados para oito elos, da 6.13 à 6.18 para doze elos e da 6.19 à 6.24 para dezesseis elos. Observa-se que, em todos os casos, os últimos elos são os que alcançam maior amplitude de deslocamento.

Este comportamento já era esperado em razão dos torques serem aplicados diretamente sobre o último elo. A movimentação dos demais elos acontece em razão do acoplamento dinâmico.

As figuras 6.25 a 6.29 mostram uma simulação com oito elos e condições idênticas às utilizadas anteriormente, mas anulando-se todos os torques após 16*s*. Percebe-se que os movimentos em azimute tendem a se estabilizar nas posições angulares do instante em que os torques foram desligados, devendo-se este fato às constantes elásticas consideradas nulas em azimute. Os ângulos de elevação tendem a voltar para os valores nulos, de forma amortecida e este amortecimento será tão maior quanto maiores forem coeficientes de arrasto hidrodinâmico considerados.

É importante ressaltar que o tempo de simulação cresce muito na solução numérica do modelo dinâmico para dezesseis ou mais elos: Foram 4 horas de processamento para 16*s* de simulação, trabalhando-se em um PC, Pentium® CPU G2030 3GHz, 2Gb(RAM) . Verificou-se que, à medida que se adota um número maior de elos para um mesmo comprimento de cabo, o determinante da matriz de inércia se aproxima cada vez mais de zero e, como esta matriz precisa ser invertida na solução numérica das equações diferenciais do modelo dinâmico, isto acarreta maior dificuldade para a integração numérica. Utilizou-se a função ODE45 do MATLAB, cujo integrador é um Runge-Kutta de quarta ordem com ajuste automático do passo de integração feito em função da estimativa do erro local de truncamento em cada passo. Um determinante muito pequeno acarreta uma diminuição excessiva do tamanho do passo de integração no ajuste automático, sendo esta a principal razão do acréscimo significativo do tempo total de simulação. Quando se aumenta o comprimento do cabo, por exemplo, o determinante da matriz de inércia volta acrescer e a integração numérica é realizada com maior facilidade.

Deve ser ressaltado ainda que foram realizadas simulações com o *software* gerador automático de modelos (SIMMODELCAB), com os mesmos parâmetros das realizadas nesta seção e que os resultados são muito semelhantes. Porém, o

SIMMODELCAB não consegue gerar o modelo dinâmico para além de seis elos. Conforme já explicado anteriormente, este *software*, desenvolvido no MATLAB, usa a *toolbox* de manipulação simbólica e esta não simplifica muito bem as equações, que crescem muito com o aumento do número de elos, fato que pode acarretar o travamento do processamento em razão de problemas de memória do computador.

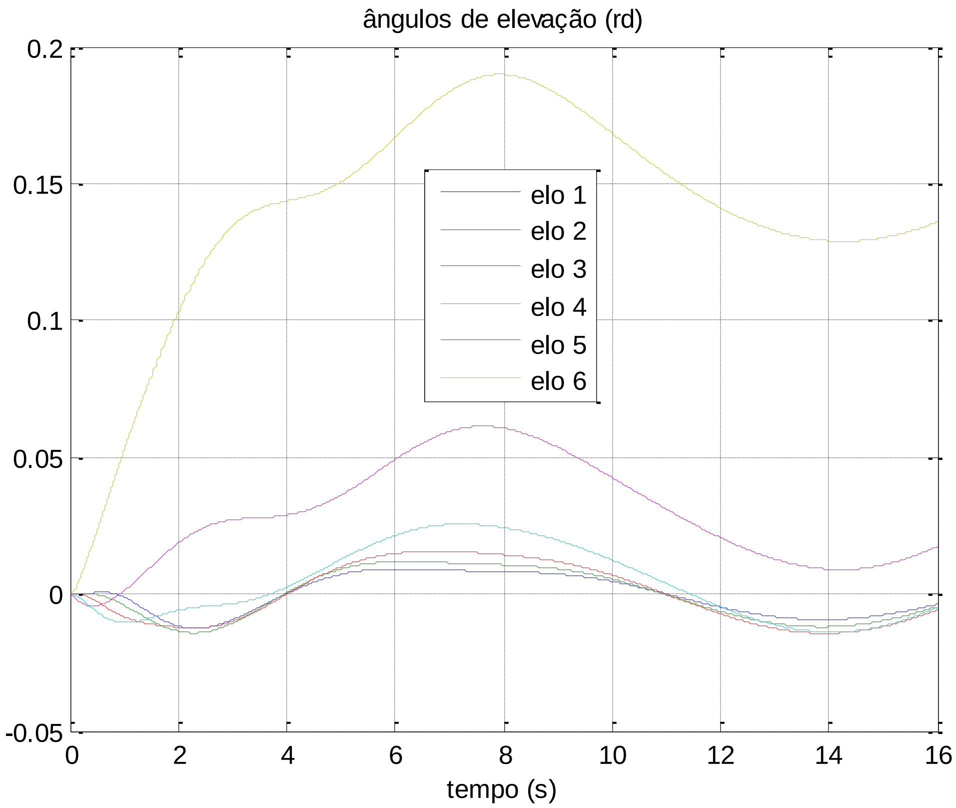

Figura 6.1 Ângulos de elevação em simulação com seis elos.

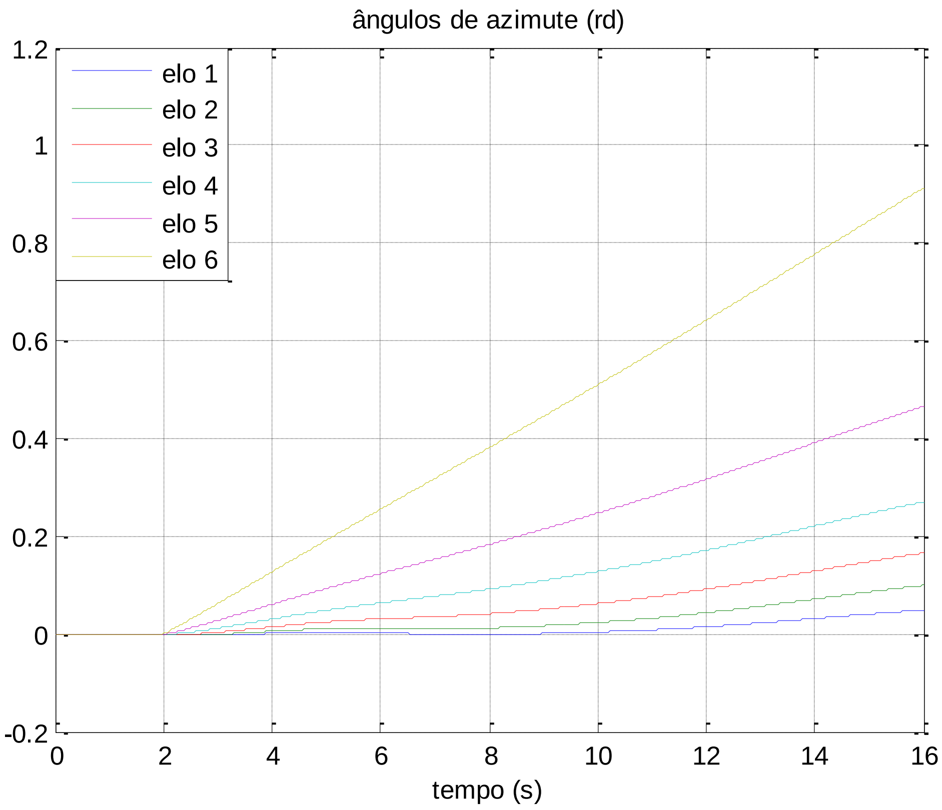

Figura 6.2 Ângulos de azimute em simulação com seis elos.

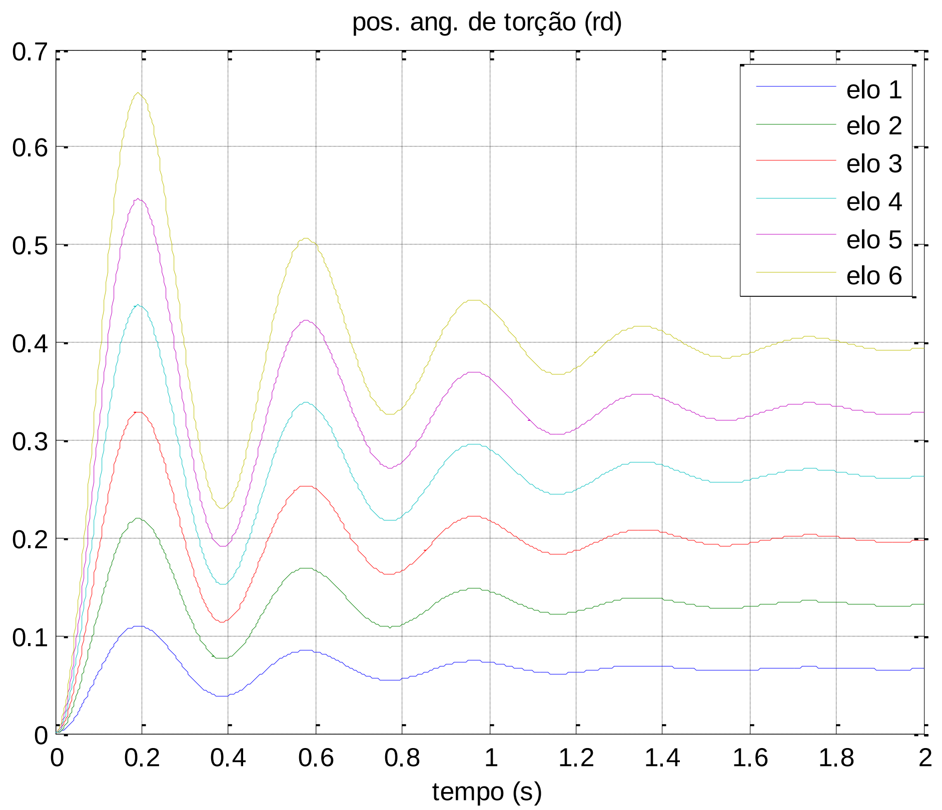

Figura 6.3 Ângulos de torção em simulação com seis elos.

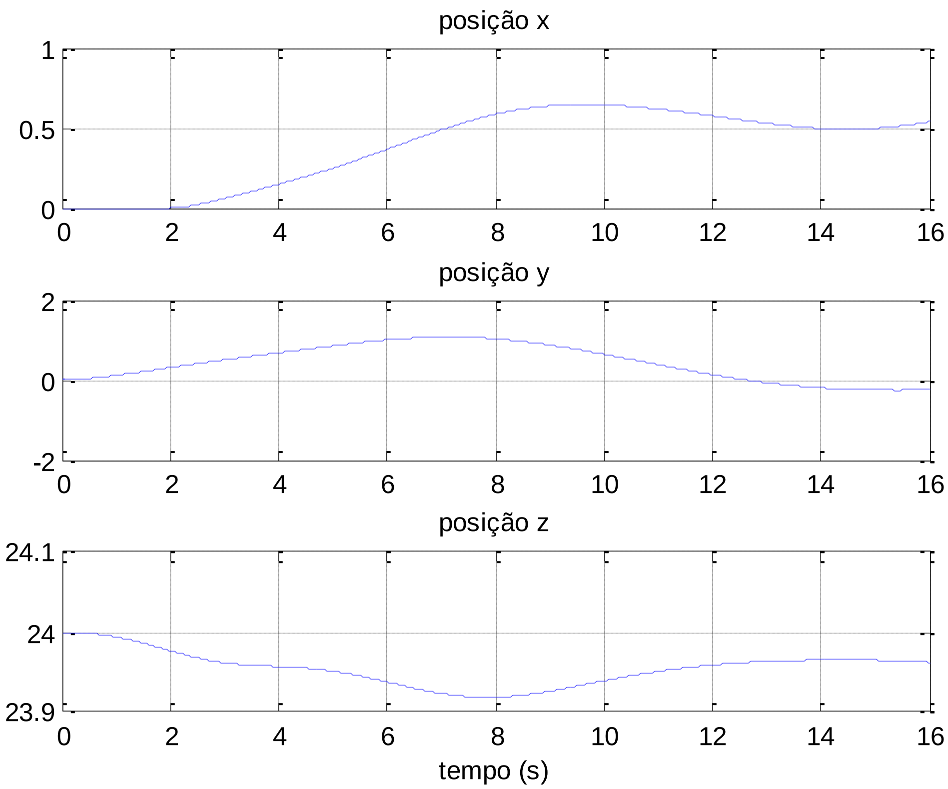

Figura 6.4 Posições *x*, *y* e *z* da carga terminal, em simulação com seis elos.

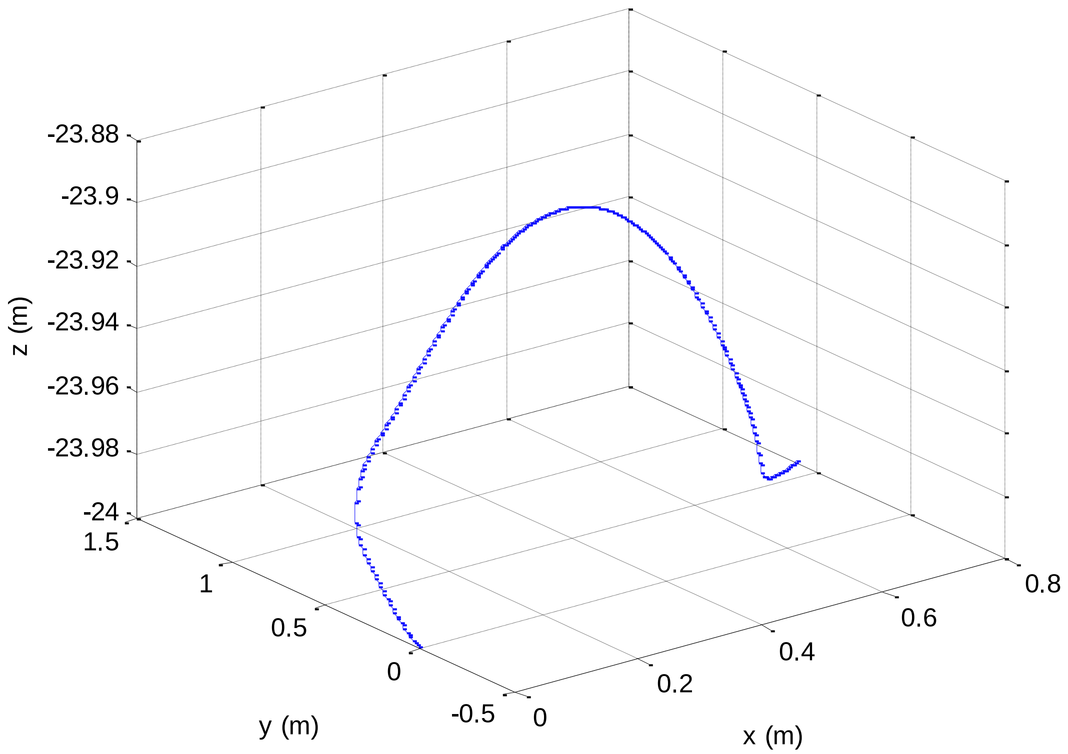

Figura 6.5 Trajetória espacial da carga terminal, em simulação com seis elos.

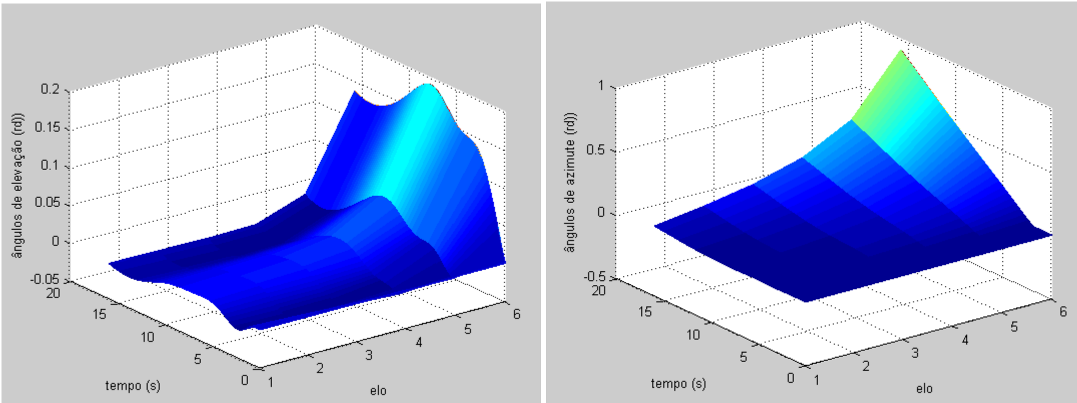

Figura 6.6 Superfícies com os ângulos de elevação e azimute, para seis elos.

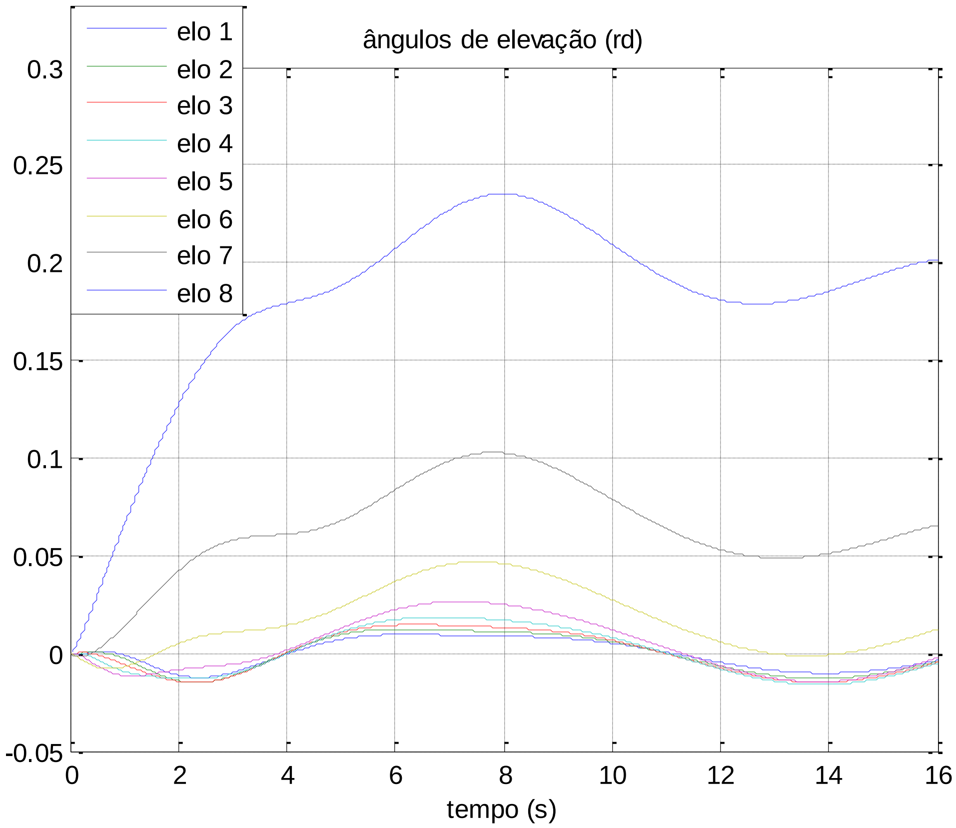

Figura 6.7 Ângulos de elevação em simulação com oito elos.

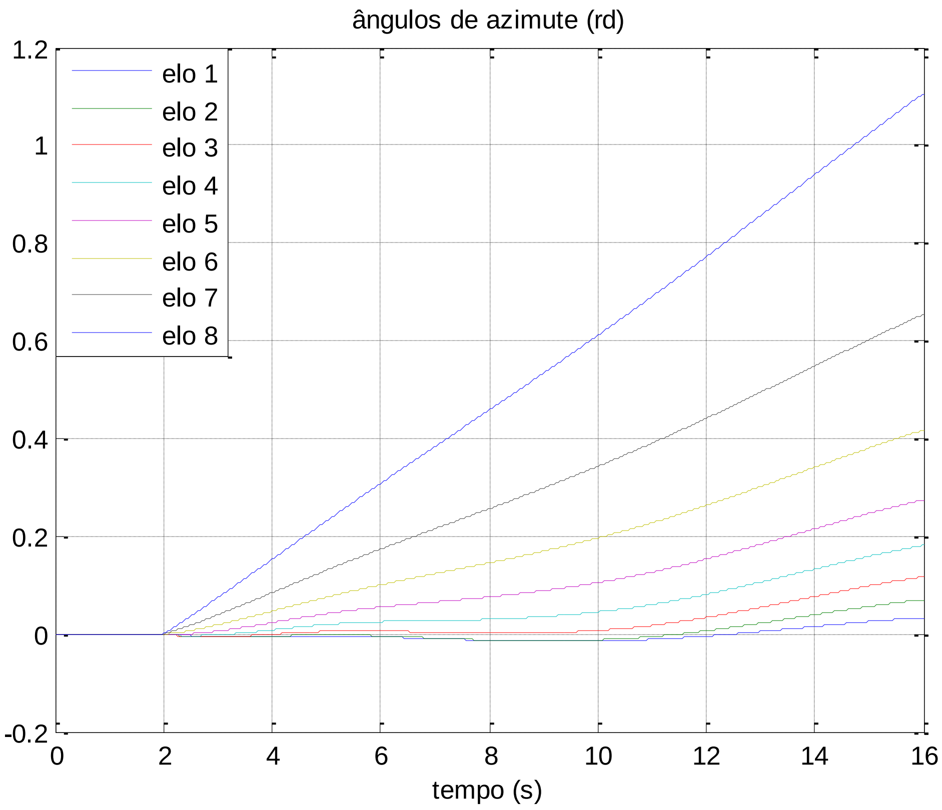

Figura 6.8 Ângulos de azimute em simulação com oito elos.

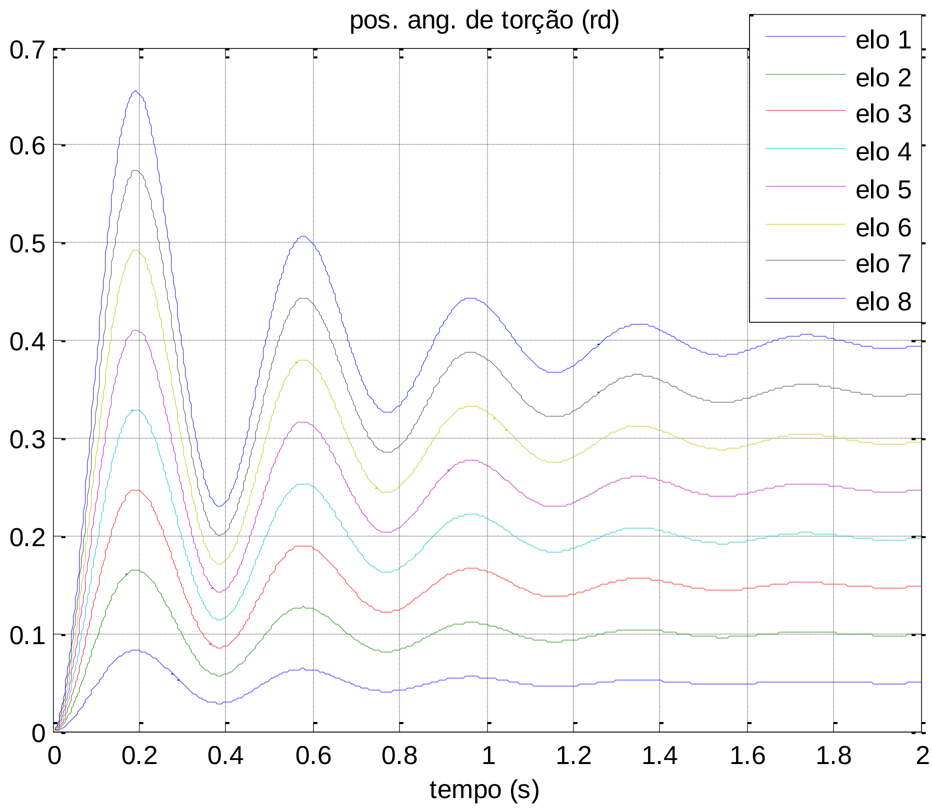

Figura 6.9 Ângulos de torção em simulação com oito elos.

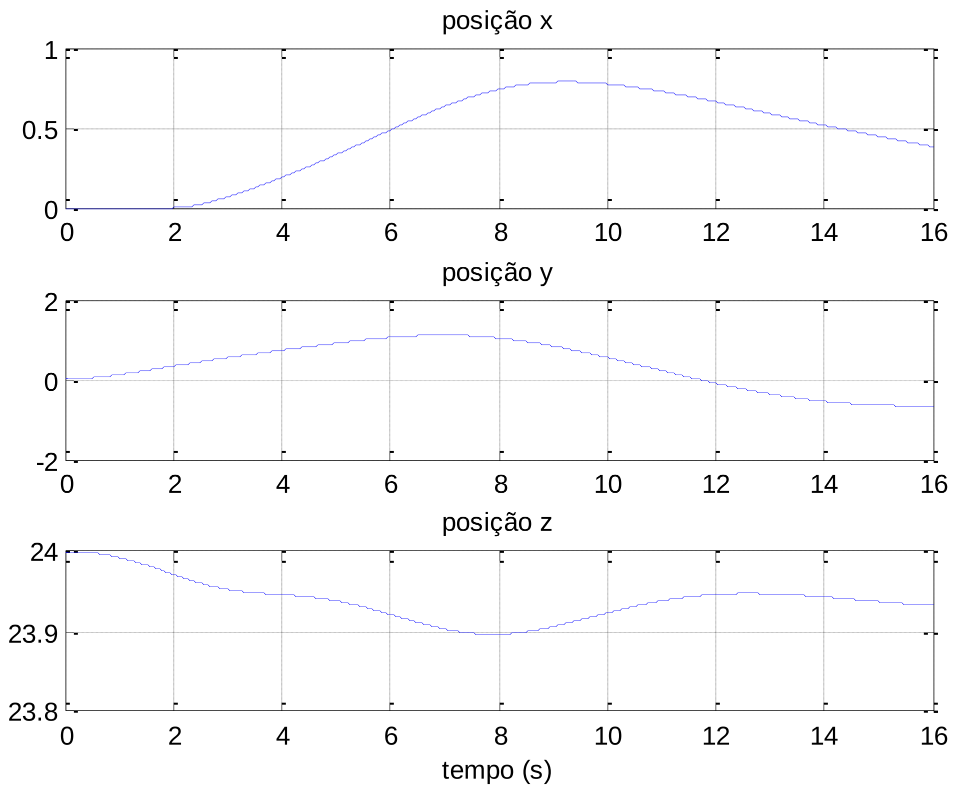

Figura 6.10 Posições *x*, *y* e *z* da carga terminal, em simulação com oito elos.

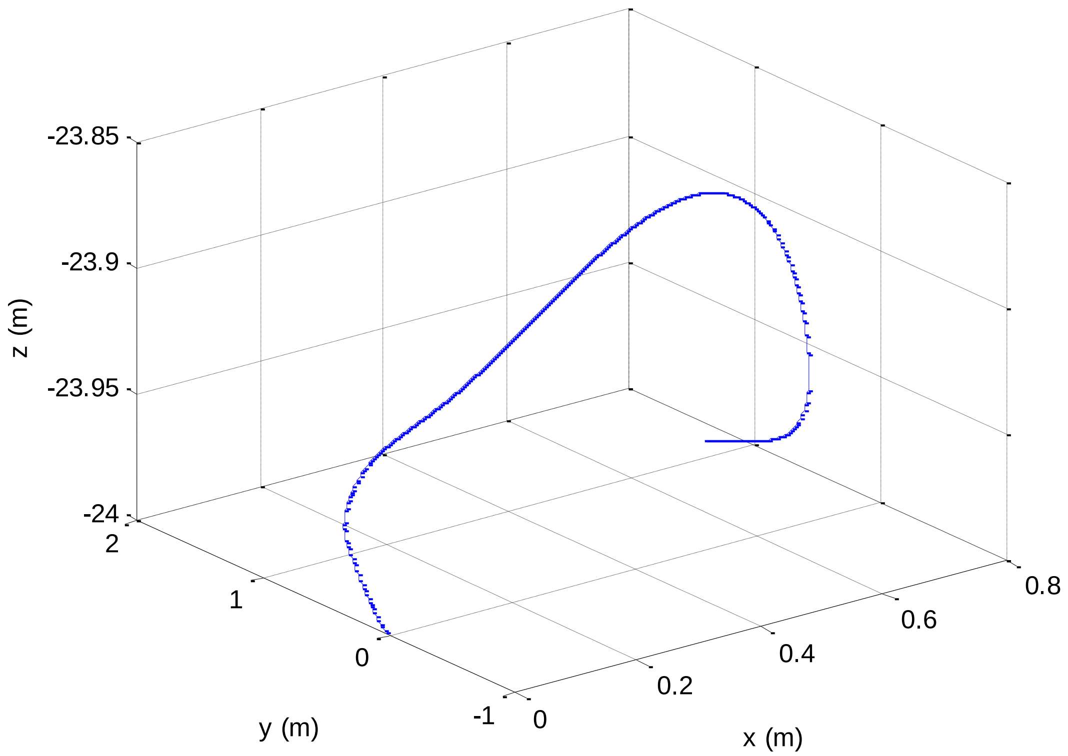

Figura 6.11 Trajetória espacial da carga terminal, em simulação com oito elos.

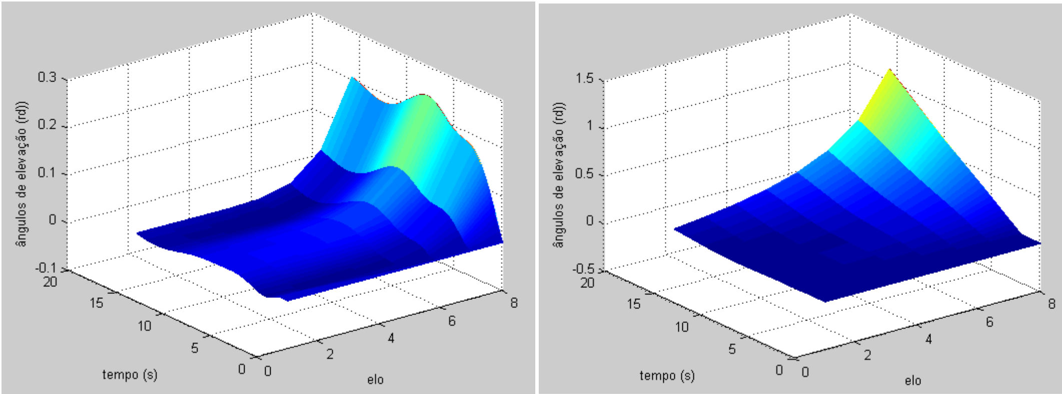

Figura 6.12 Superfícies com os ângulos de elevação e azimute, para oito elos.

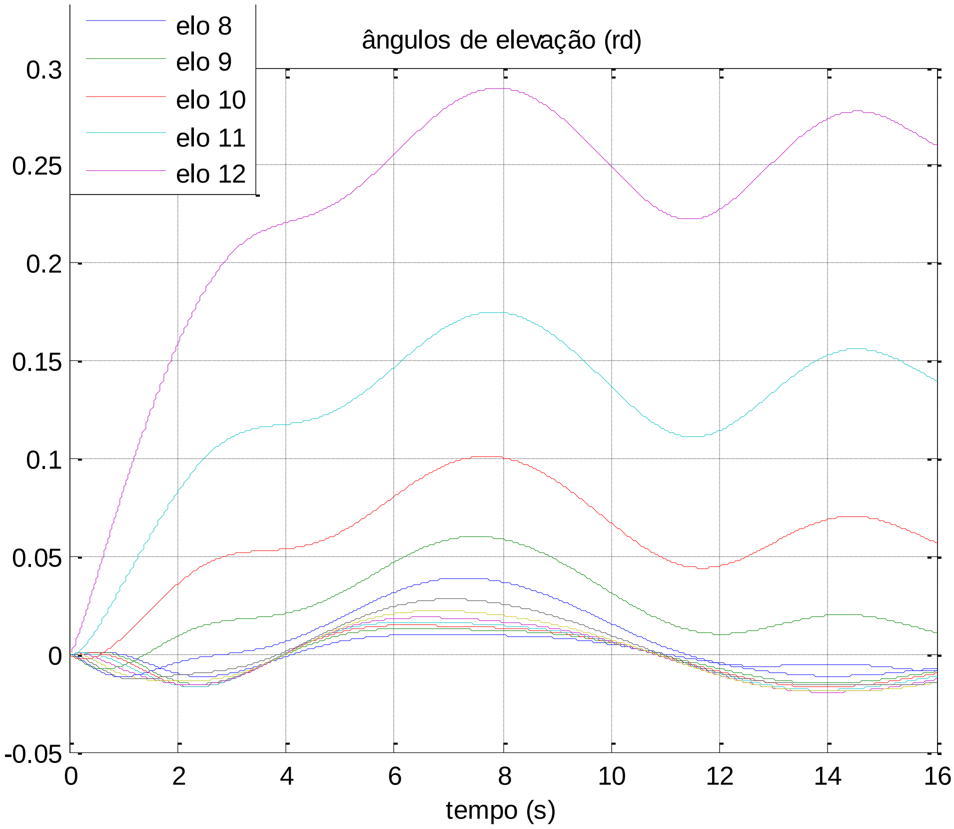

Figura 6.13 Ângulos de elevação em simulação com doze elos.

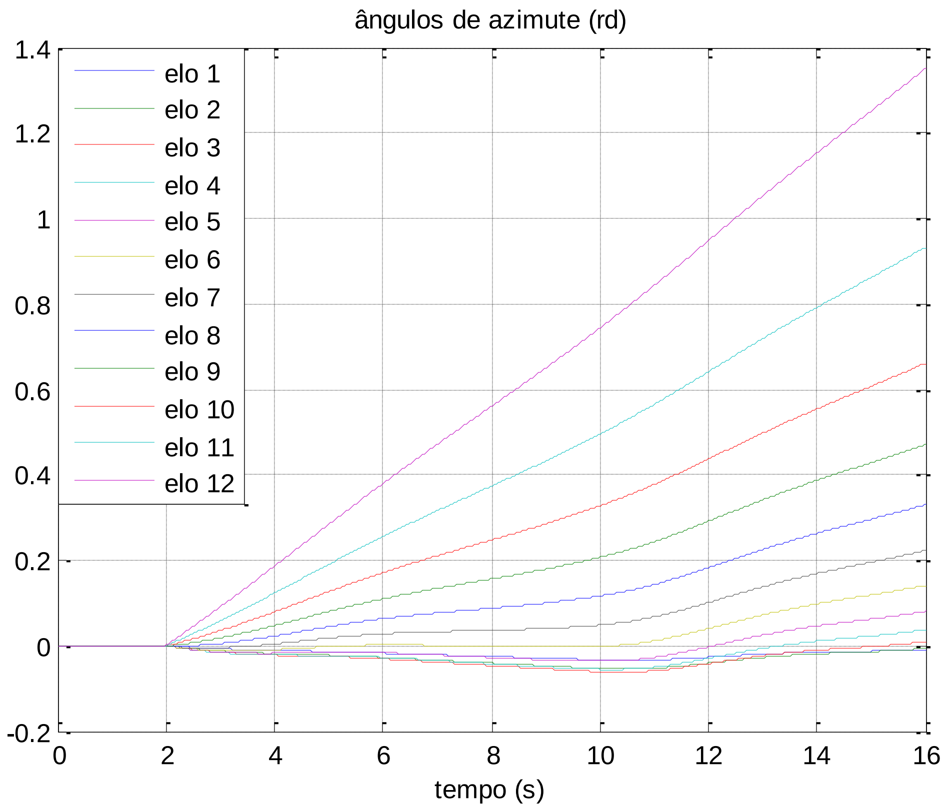

Figura 6.14 Ângulos de azimute em simulação com dez elos.

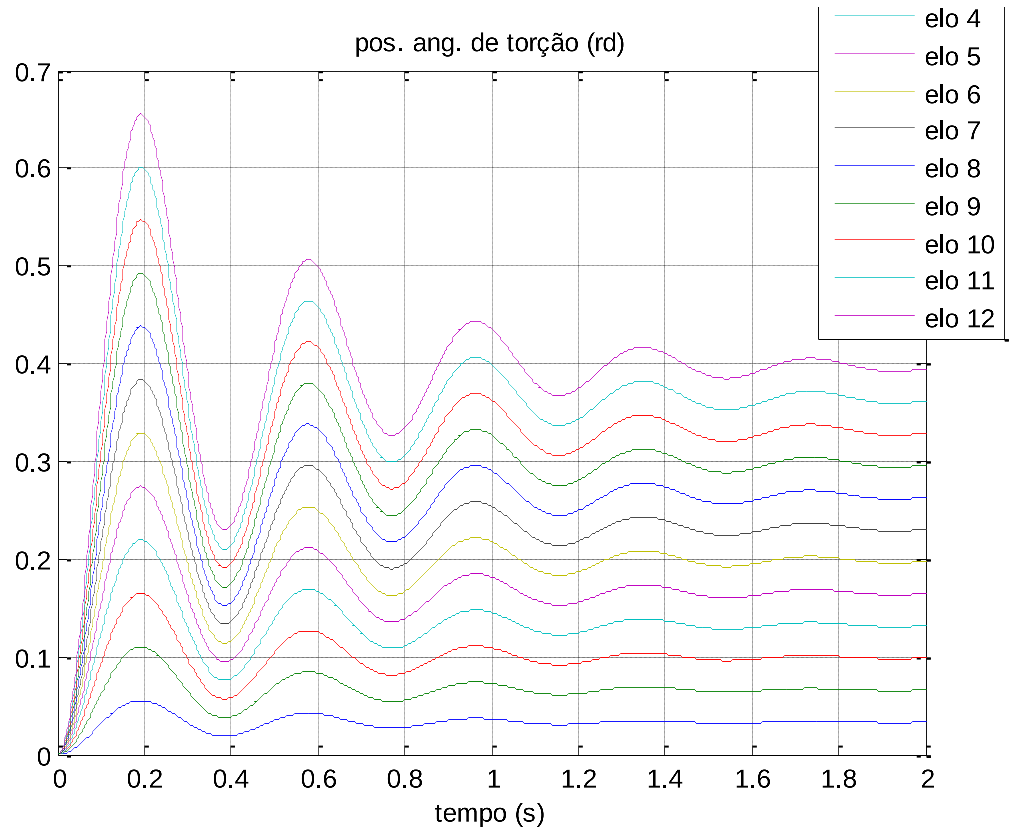

Figura 6.15 Ângulos de torção em simulação com doze elos.

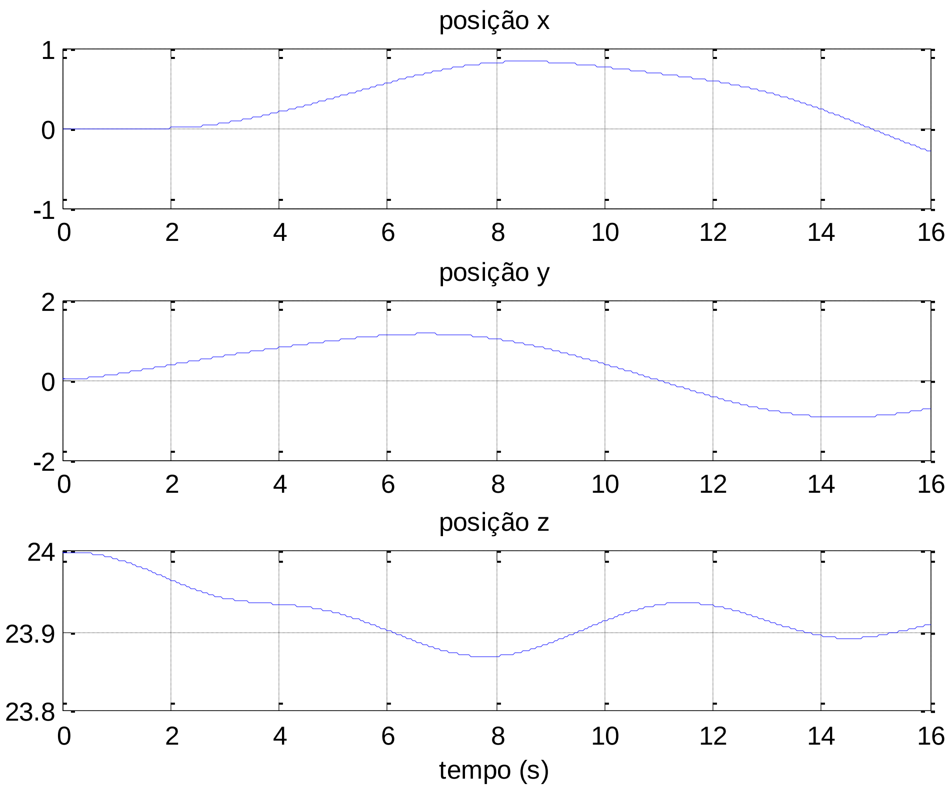

Figura 6.16 Posições *x*, *y* e *z* da carga terminal, em simulação com doze elos.

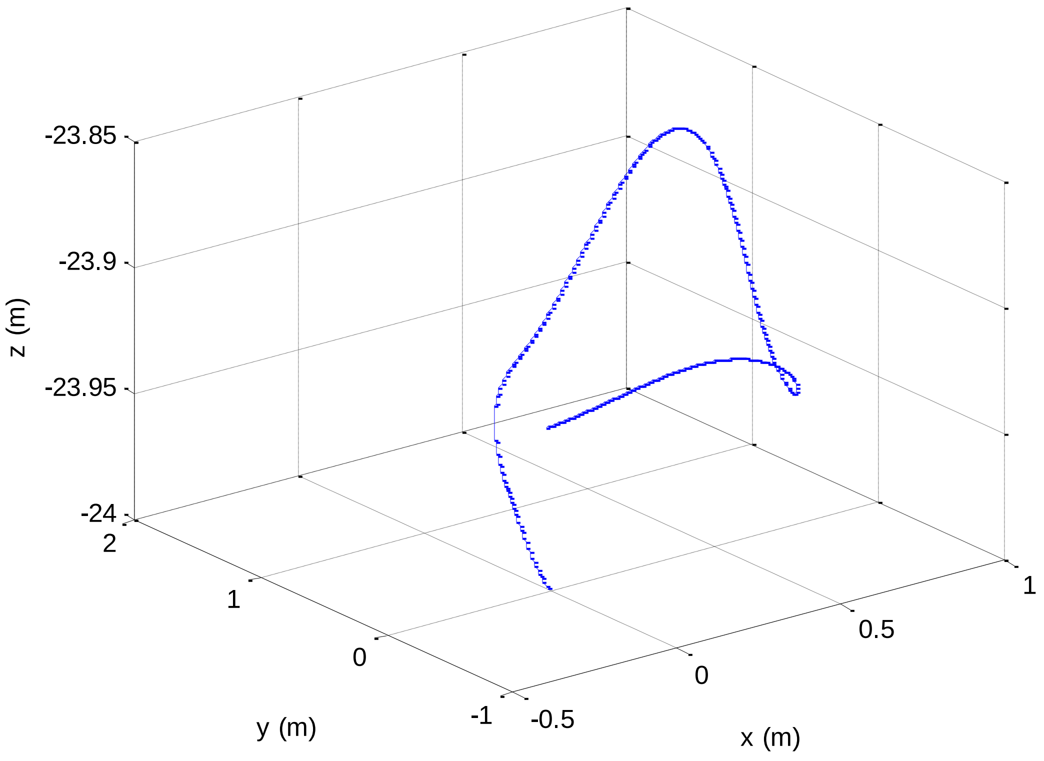

Figura 6.17 Trajetória espacial da carga terminal, em simulação com doze elos.

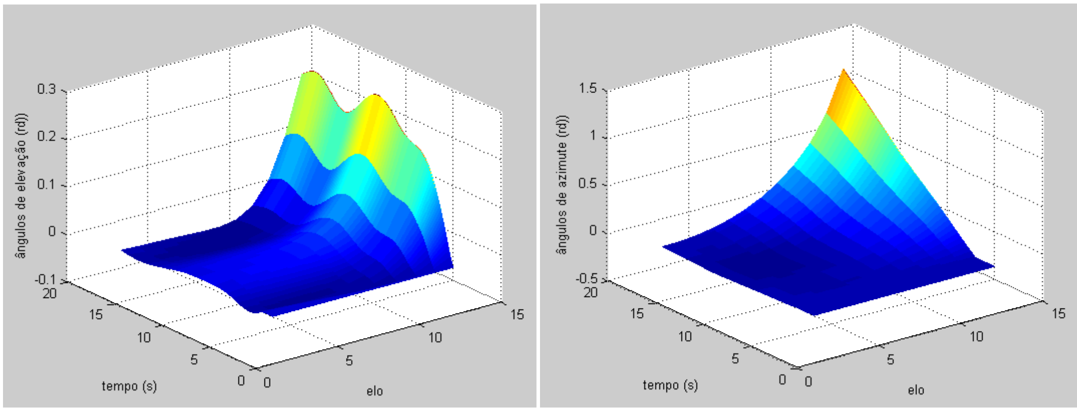

Figura 6.18 Superfícies com os ângulos de elevação e azimute, para doze elos.

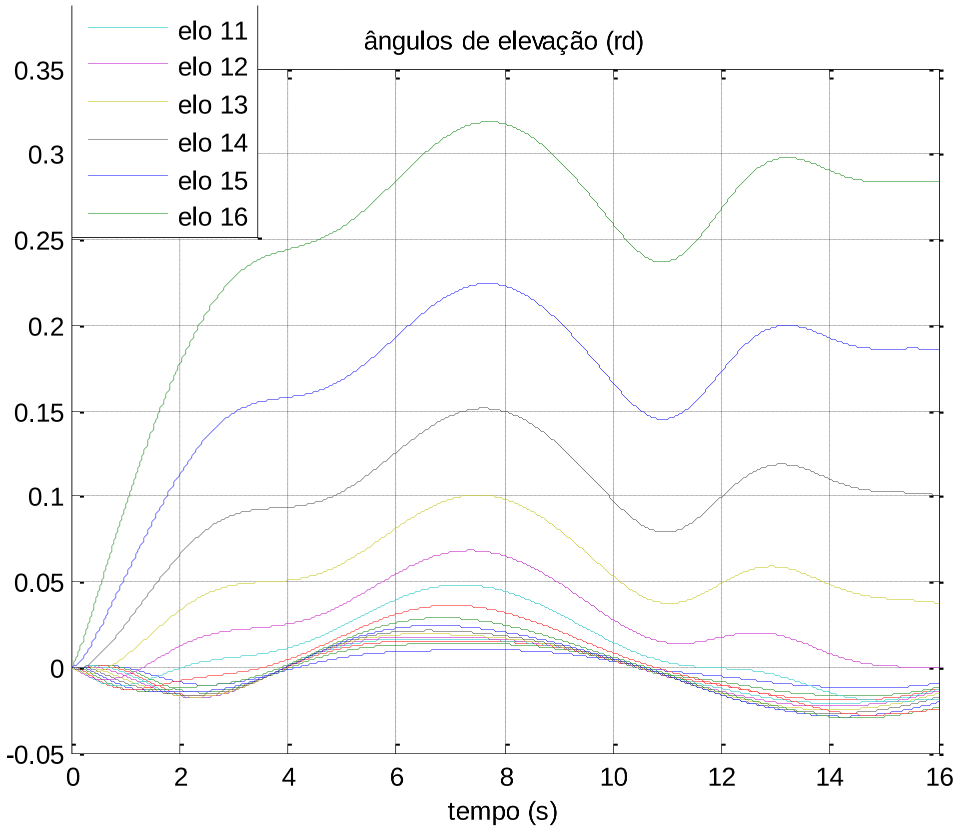

Figura 6.19 Ângulos de elevação em simulação com dezesseis elos.

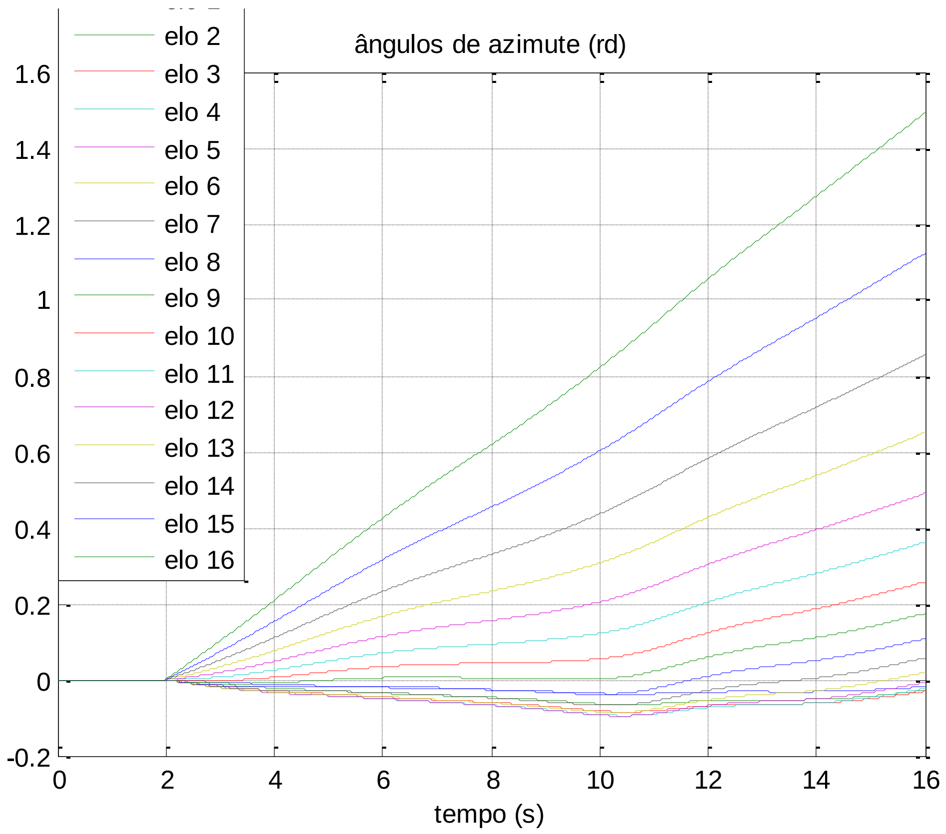

Figura 6.20 Ângulos de azimute em simulação com dezesseis elos.

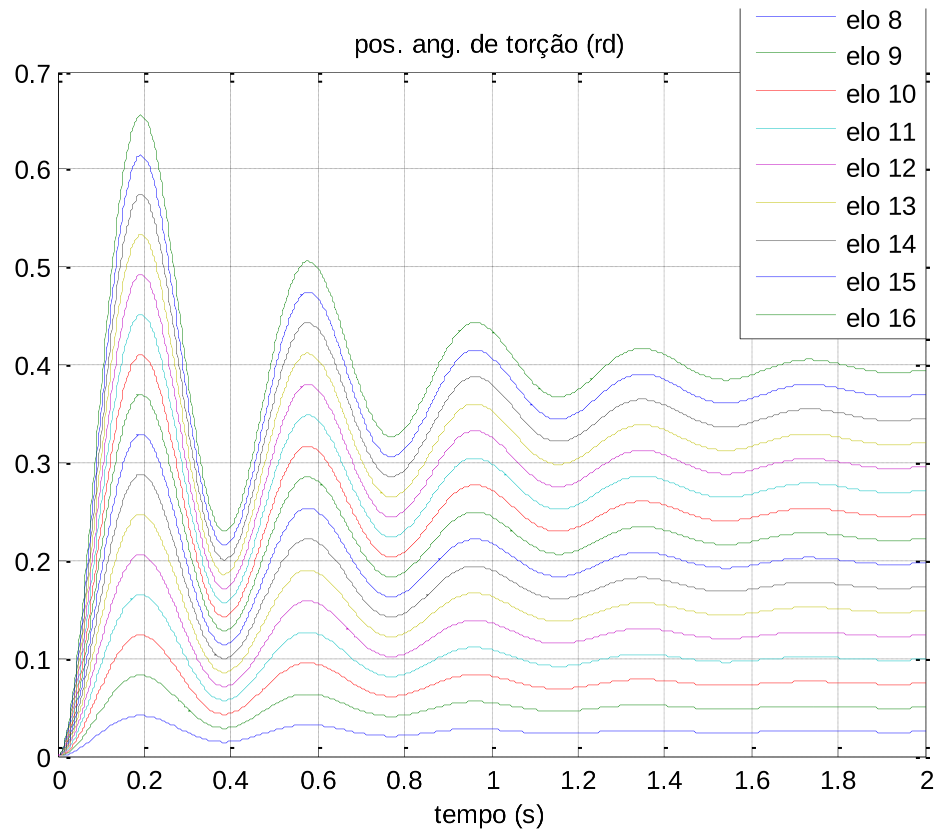

Figura 6.21 Ângulos de torção em simulação com dezesseis elos.

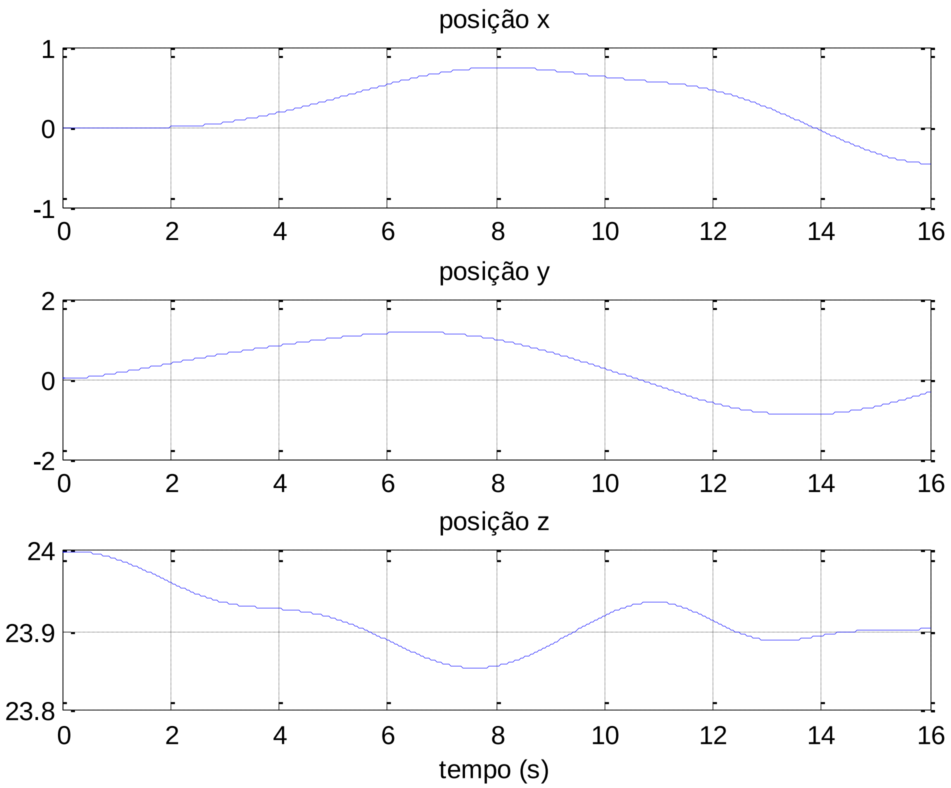

Figura 6.22 Posições *x*, *y* e *z* da carga terminal, em simulação com dezesseis elos.

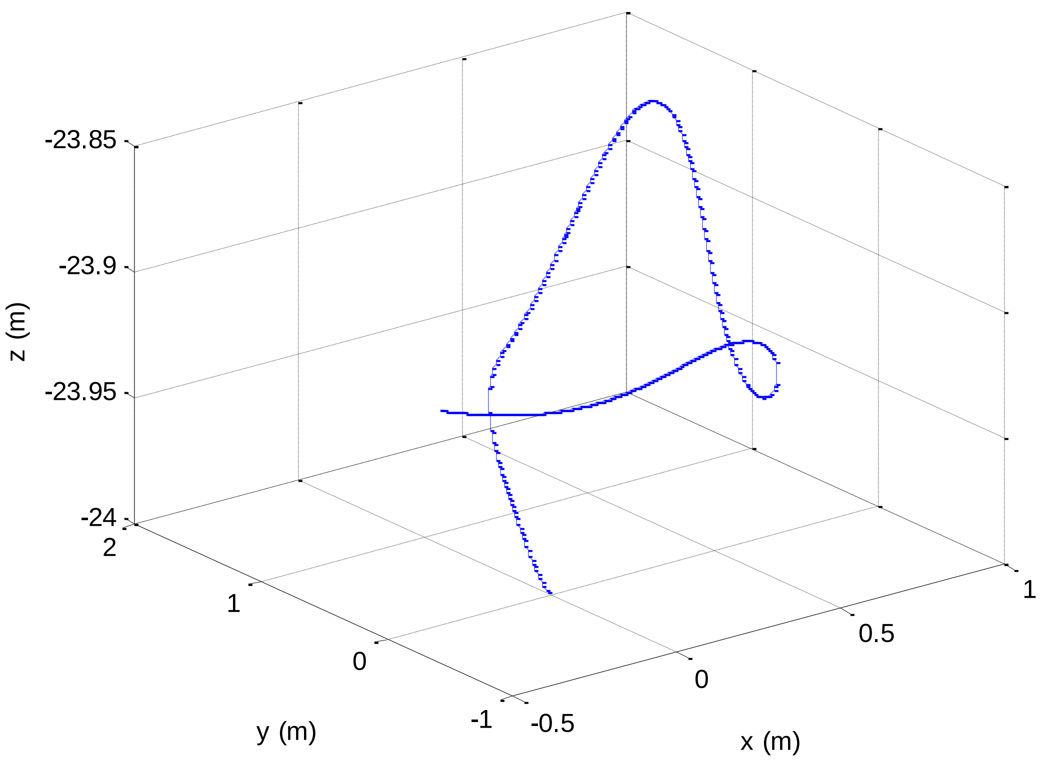

Figura 6.23 Trajetória espacial da carga terminal, em simulação com dezesseis elos.

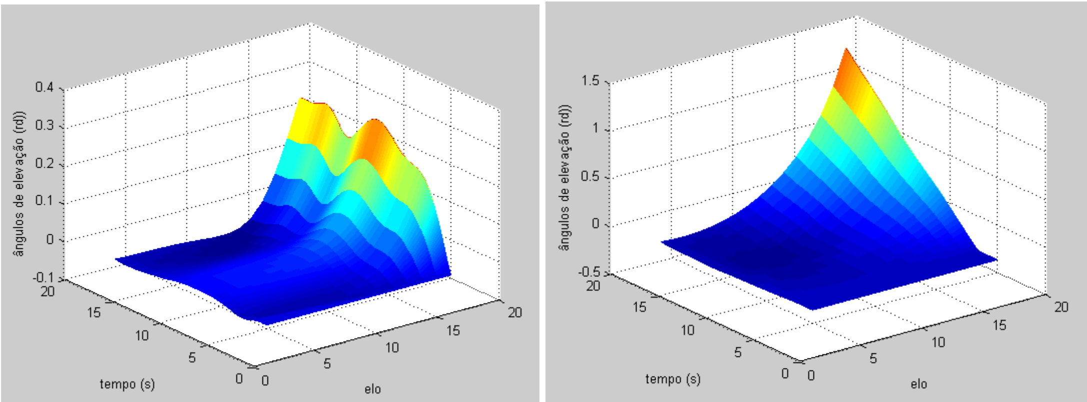

Figura 6.24 Superfícies com os ângulos de elevação e azimute, para dezesseis elos.

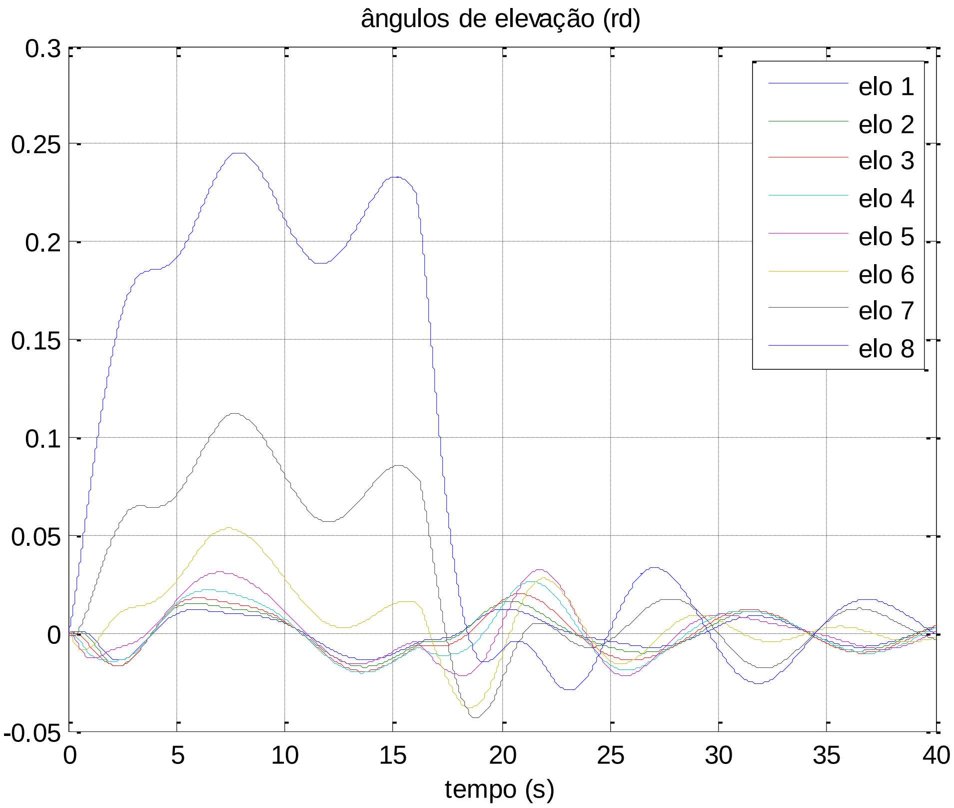

Figura 6.25 Ângulos de elevação com torques desligados a partir dos 16 *s*.

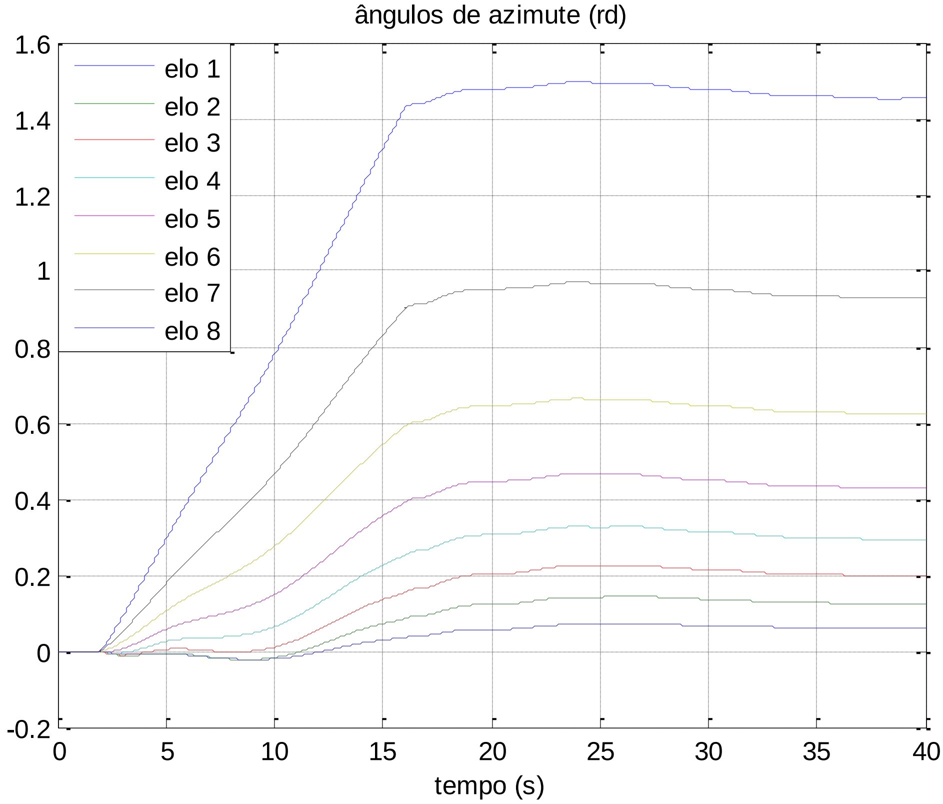

Figura 6.26 Ângulos de azimute com torques desligados a partir dos 16 *s*.

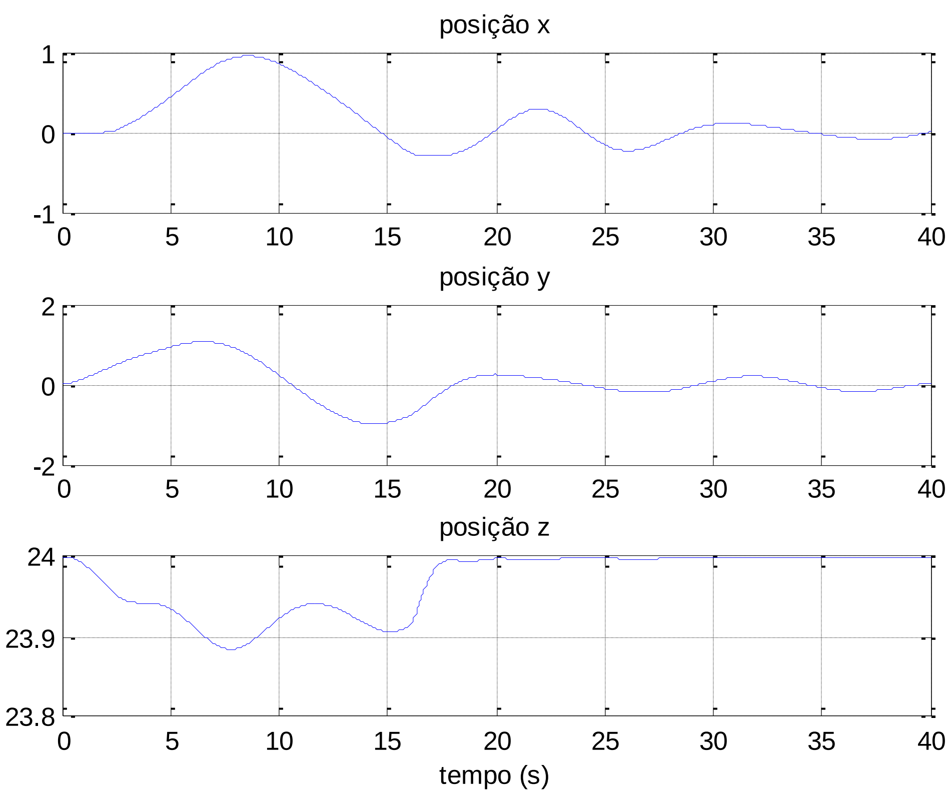

Figura 6.27 Posição do centro de massa da carga terminal, com torques desligados a partir dos 16 *s*.

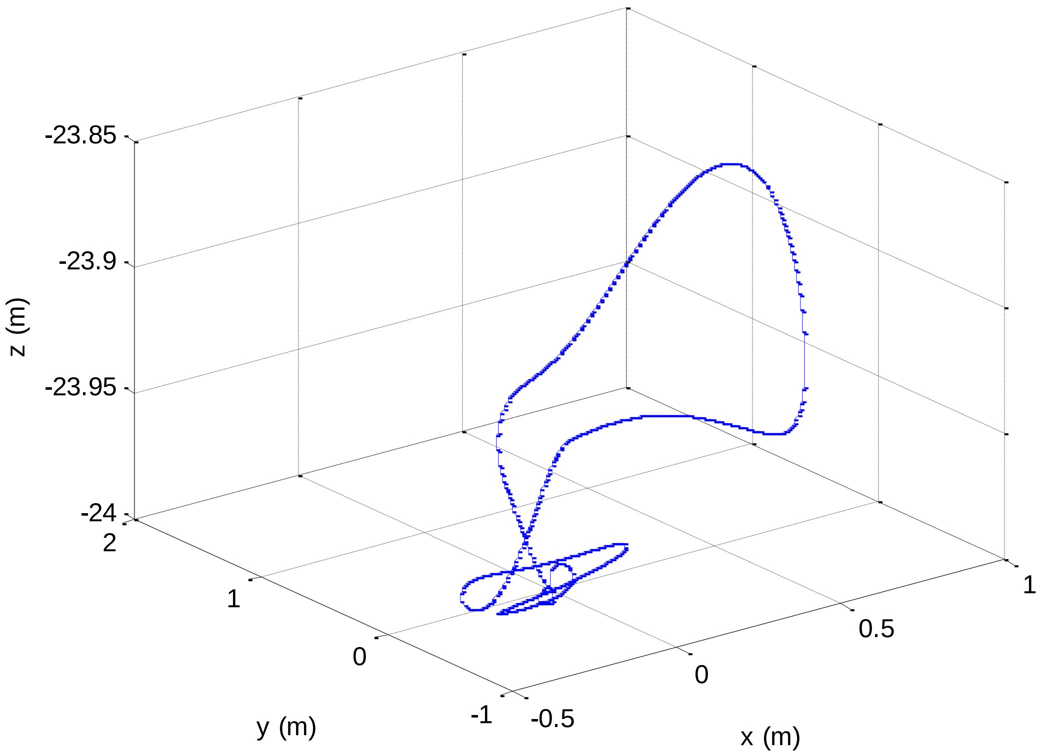

Figura 6.28 Trajetória espacial do centro de massa da carga terminal, com torques desligados a partir dos 16 *s*.

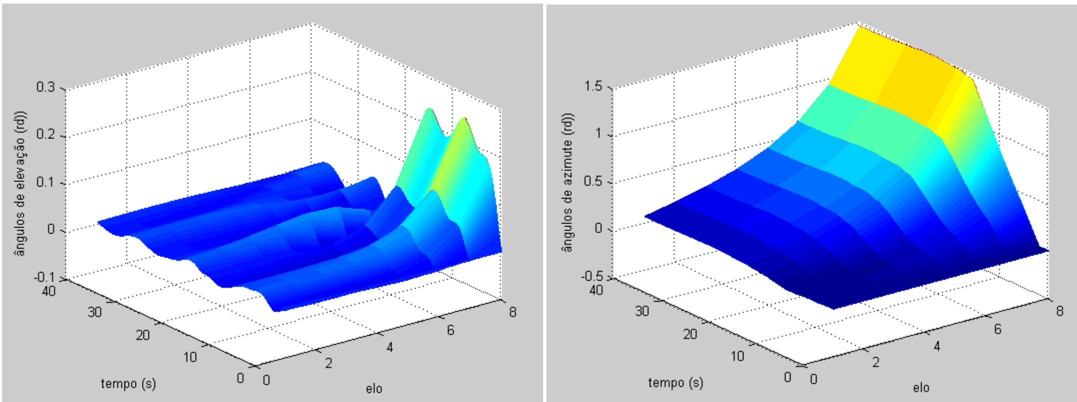

Figura 6.29 Superfícies com os ângulos de elevação e azimute, para torques nulos a partir de 16 *s*.

6.2 Simulações com a Aproximação Plana para o Modelo

A simulação apresentada a seguir foi realizada considerando-se dezesseis elos, aplicando-se um torque de elevação de 40 *Nm* e um de torção de 20 *Nm*, ambos na última articulação. As figuras 6.30 e 6.31 mostram os ângulos de elevação, sendo que no caso da figure 6.31 as curvas estão juntas formando uma superfície 3D. Percebe-se que o último elo, de número 16, é o que de fato tem a maior amplitude de deslocamento, conforme já esperado, pois é nele que incidem os torques diretamente. A figura 6.32 mostra as trajetórias do centro de massa da carga terminal, na qual se percebe que só há movimento em *Y* e em *Z*. A trajetória do centro de massa no espaço pode ser vista na figura 6.33, na qual se pode verificar que, conforme já esperado, o movimento ocorre no plano YZ. A figura 6.34 mostra os ângulos de torção e percebe-se que a maior amplitude de deslocamento ocorreu no último elo. Uma vantagem da aproximação plana para o modelo é a possibilidade de se dividir a estrutura flexível em um número maior de elos, sem gerar instabilidade numérica na solução das equações diferenciais da dinâmica.

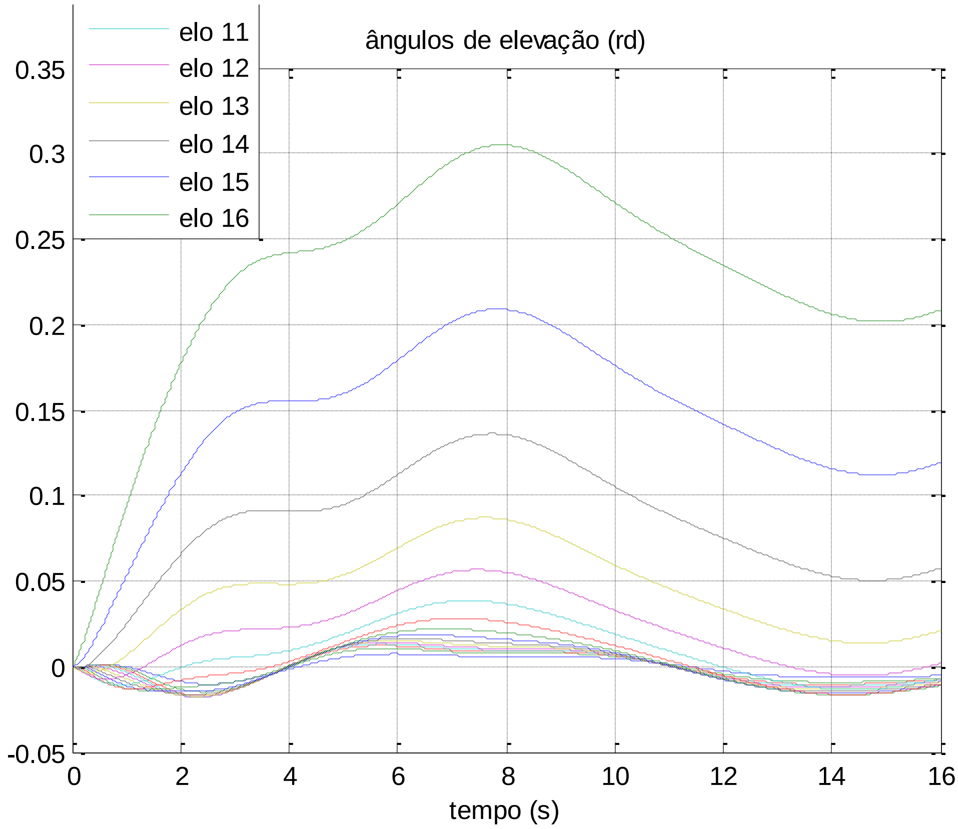

Figura 6.30 Ângulos de elevação, considerando-se uma aproximação plana para a dinâmica com 16 elos.

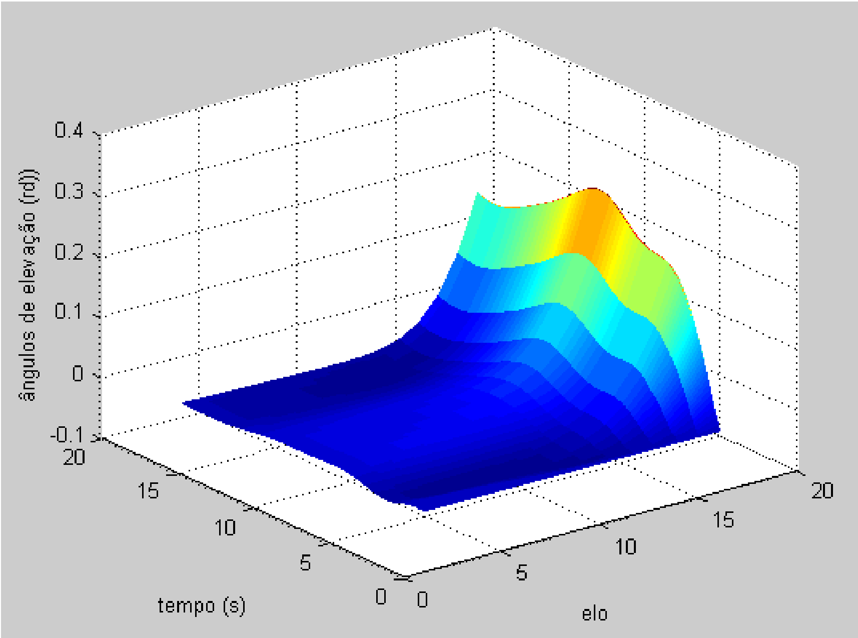

Figura 6.31 Aspecto 3D unindo os deslocamentos em elevação de todos os elos.

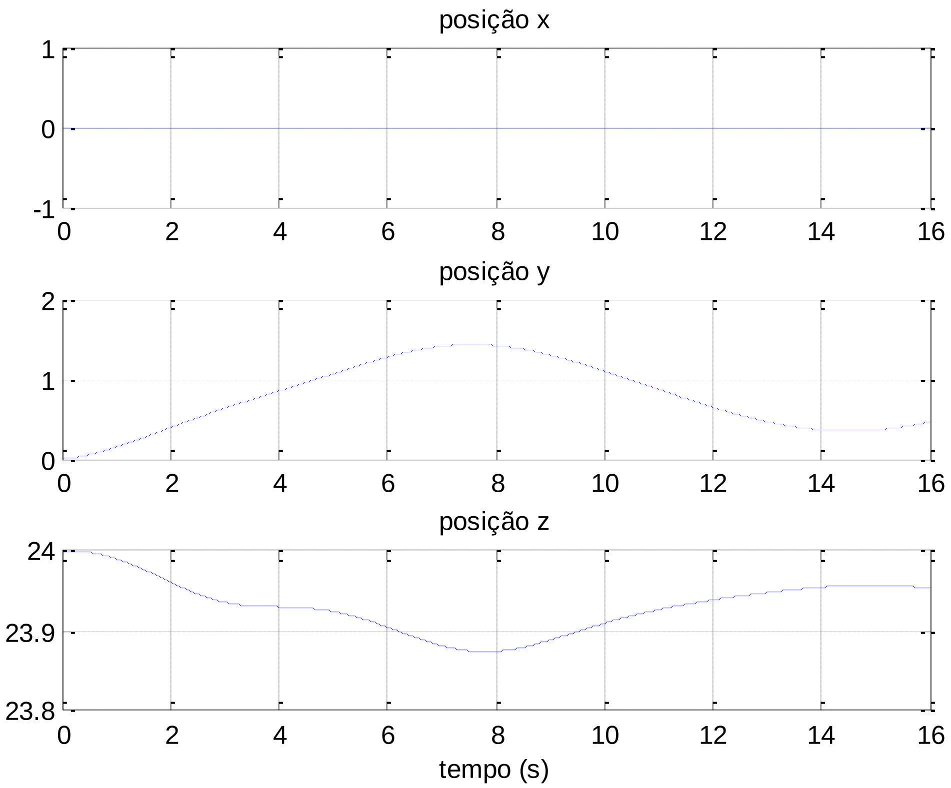

Figura 6.32 Posições *x*, *y* e *z* da carga terminal, em simulação com 16 elos e aproximação plana para a dinâmica.

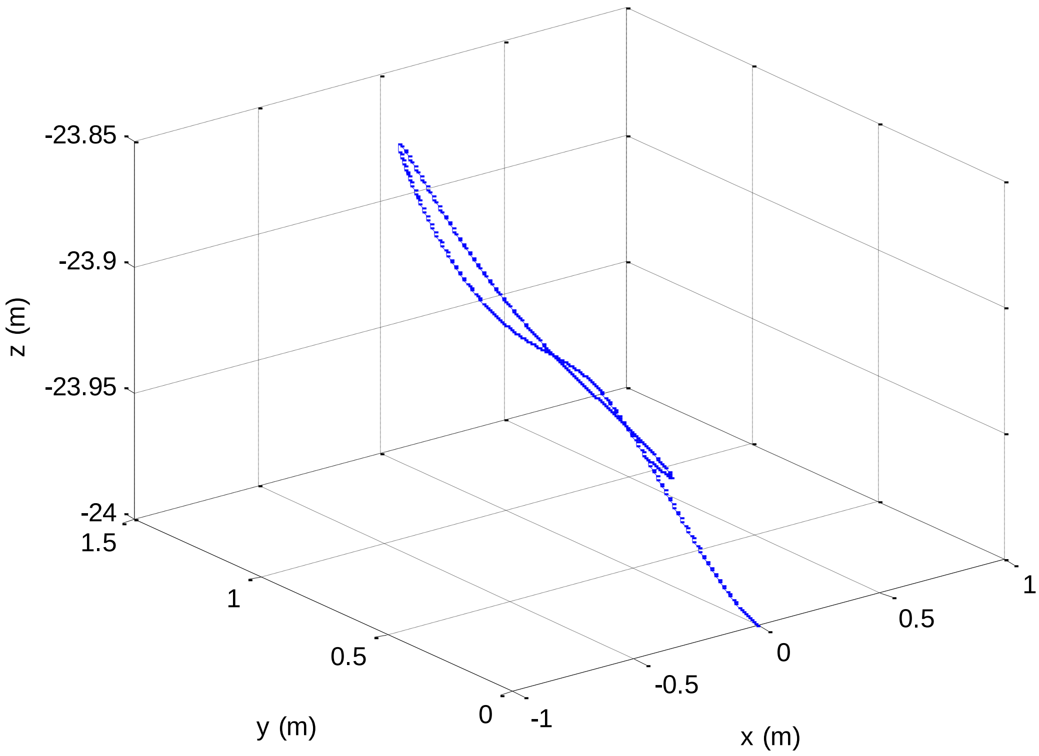

Figura 6.33 Trajetória espacial da carga terminal, em simulação com 16 elos e aproximação plana para a dinâmica.

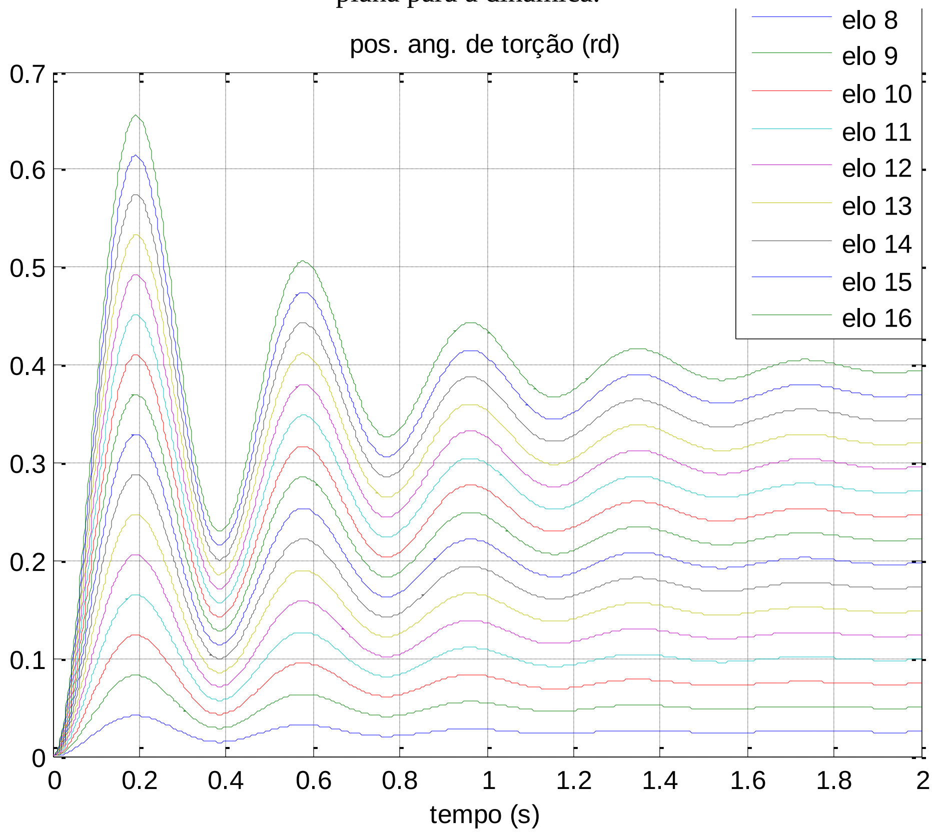

Figura 6.34 Ângulos de torção, considerando-se uma aproximação plana para a dinâmica com 16 elos.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

7. Conclusões

Neste capítulo apresentam-se as conclusões gerais obtidas nesta dissertação e ainda se indicam sugestões para trabalhos futuros. É importante mencionar que todos os desenvolvimentos matemáticos contidos neste trabalho relativos à modelagem dinâmica do cabo para os casos de 2, 3 e 4 elos foram feitos manualmente, ou seja, sem o auxílio de *softwares* de manipulação simbólica. O motivo para isto é que, o *software* testado (SIMODELCAB), não se mostrou muito eficiente com relação às simplificações para a devolução do resultado final. Considerando-se o tamanho das equações obtidas no capítulo 3 foi necessário utilizar *softwares* apenas para garantir que estas equações estavam corretas.

Conforme já comentado no capítulo de introdução, não se encontrou, entre os trabalhos consultados, muitos trabalhos semelhantes a este. A grande maioria dos artigos aborda técnicas baseadas em elementos finitos ou diferenças finitas, sem dar ênfase à modelagem dinâmica, principalmente em três dimensões.

Neste sentido, a presente dissertação pretende ser uma contribuição para futuros usuários que necessitem desenvolver trabalhos relacionados com a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, tanto no plano quanto no espaço, a partir de técnicas que fazem uso do formalismo discreto, com o auxílio de algoritmos genéricos, sem se preocupar com o número de elementos que se desejar dividir a estrutura.

Diversas conclusões sobre as teorias desenvolvidas na presente dissertação já foram apresentadas ao longo dos capítulos. Apresentam-se, entretanto, resumos sobre as principais conclusões extraídas de todo o trabalho realizado, acrescidas de comentários com o objetivo de esclarecer melhor a interpretação dos resultados.

No capítulo II, apresenta-se o desenvolvimento teórico do formalismo discreto (*Lumped Mass Approach*), onde o cabo é dividido em partes rígidas, que são chamadas de elos, conectados por articulações fictícias, permitindo três movimentos livres de azimute, elevação e torção no espaço tridimensional. As coordenadas do centro de massa e das articulações fictícias para cada elo são determinadas por transformações homogêneas. Assim, desenvolve-se uma única equação capaz de montar o Lagrangeano do sistema de forma simples, independentemente do número de elos que se deseje dividir a estrutura.

No capítulo III foi desenvolvida a modelagem dinâmica do cabo para os casos em que a estrutura é dividida em dois, três e quatro elos e, a partir das equações de Euler-Lagrange, determinaram-se os sistemas de equações diferenciais ordinárias para os três modelos. Considera-se um cabo de comprimento l, articulado em uma extremidade e livre na outra. Cada elo tem comprimentos l_i, sendo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e estes elos são conectados por articulações fictícias. As equações dos modelos foram desenvolvidas manualmente de forma analítica e à medida que se aumenta o número de elos, o Lagrangeano do sistema cresce muito, assim como o número de operações matemáticas na aplicação das equações de Euler-Lagrange.

O capítulo IV apresenta a formulação de algoritmos genéricos a partir das equações gerais desenvolvidas no mesmo capítulo. Foram feitas análises sobre como acontece o crescimento das matrizes e vetores dos modelos dinâmicos, para os casos de se considerar 2, 3 e 4 elos e estas análises permitiram a criação dos algoritmos genéricos. Estes algoritmos permitem gerar de forma automática os elementos que formam as matrizes e os vetores do modelo dinâmico, para o caso geral de um número *n* de elos, sendo esta a principal contribuição inédita da presente dissertação.

No capítulo V são apresentadas as validações dos resultados obtidos pelos algoritmos genéricos. Estes algoritmos foram gerados tendo-se como base as equações analíticas dos modelos, desenvolvidas no Capítulo III. A questão inicial era saber se os algoritmos reproduziam fielmente as equações analíticas, o que de fato ficou comprovado. Posteriormente viria o teste mais importante, tratando-se da confrontação entre os resultados advindos dos algoritmos genéricos e do *software* SIMMODELCAB. A análise das comparações permitiu comprovar que os algoritmos genéricos propostos permitem gerar de forma automática modelos para qualquer que seja o número de graus de liberdade escolhido para o modelo dinâmico do cabo.

É importante lembrar que o SIMMODELCAB travou o processamento para sete ou mais elos, muito provavelmente em razão do crescimento das equações, gerando assim conflitos de memória. A manipulação simbólica de variáveis do MATLAB não simplifica bem as equações, de forma que o crescimento enorme das mesmas é inevitável.

No Capítulo VI são apresentadas algumas simulações realizadas com os algoritmos genéricos para verificar se os modelos dinâmicos permitem reproduzir em simulação resultados fisicamente esperados. Foram realizadas simulações com o modelo completo considerando-se 6, 8, 12 e 16 elos. Observou-se que, em todos os casos, os últimos elos são os que alcançam maior amplitude de deslocamento. Este comportamento já era esperado em razão dos torques serem aplicados diretamente sobre o último elo. A movimentação dos demais elos acontece em razão do acoplamento dinâmico. É importante ressaltar que o tempo de processamento das simulações cresce muito com o acréscimo do número de elos. O determinante da matriz de inércia se aproxima de zero quando se amplia muito o número de elos para um mesmo comprimento de cabo. Essa matriz precisa ser invertida na solução numérica das equações diferenciais do modelo e isso pode gerar instabilidade numérica. Quando se aumenta o comprimento total do cabo conservando-se o número de elos, por exemplo, o determinante da matriz de inércia volta a crescer e a simulação numérica volta a ser feita com maior facilidade.

Finalmente, pode-se considerar que o problema estudado aqui pode ser adaptado a diversos problemas de aplicação, conforme visto na introdução, como por exemplo, em Sistemas de Produção Flutuantes compostos por dutos de petróleo, cabos de ancoragem, entre outros. Como continuação futura do presente trabalho, pretende-se realizar estudos visando a aplicação da teoria desenvolvida a problemas reais no ambiente subaquático, tais como cabos umbilicais utilizados em veículos do tipo ROV, cabos de ancoragem, etc. Pretende-se realizar estudos no sentido de se identificar qual o número ideal de elos para representar de forma discreta a flexibilidade contínua, em alguns casos específicos de aplicação. Pretende-se ainda programar os algoritmos genéricos em código paralelizável ou escrever os algoritmos de forma a facilitar em paralelização dos códigos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMIEC-WÓJCIK, I., BRZOZOWSKA, L. and WOJCIECH, S., *Modification of the Rigid Finite Element Method in Modeling Dynamics of Lines and Risers,* Archive of Mechanical Engineering. Volume 60, Issue 3, Pages 409–429 (2013).

[2] BANERJEE, A.K. and DO, V.N. *Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to an Underwater Vehicle.* Applied Mathematics and Computation. 70:97-116 (1995).

[3] CARDOSO, R.J.S. VARUM, H. and VARUM, H., *A geometrical non-linear model for cable systems analysis.* International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, STRUCTURAL MEMBRANES (2005).

[4] CARREIRO,V.H.A. *Análise dinâmica de sólidos elásticos pelo método dos elementos finitos,*Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa, Mestrado em Engenharia Civil, Lisboa, (2009).

[5] COLNAGO, M., *Estudo da Estabilidade do Método das Linhas Usando a Dinâmica de um Cabo Flexível,* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, São Paulo, (2012).

[6] CORDOVÉS, D.C.S., *Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais.* Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Mestrado em Engenharia, São Paulo, (2008).

[7] DESAI, Y.M. and PUNDE, S., *Simple model for dynamic analysis of cable supported structures,*Engineering Structures 23 271–279. March 2001.

[8] ERSDAL, S., JOHANSEN, V., LEIRA, B., SORENSEN, A.J. and SORENSEN, A.J., *Modelling of inextensible cable dynamics with experiments.* International Journal of Non-Linear Mechanics. Volume 41, Issue 4, May 2006, Pages 543-555.

[9] FABER, I. e VIEIRA, A.C., *Gerador Automático de Modelos Dinâmicos de Cabos Umbilicais Subaquáticos Utilizando Formulação Discreta*, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande, Curso de Engenharia de Computação, Rio Grande, (2009).

[10] FUJINO, Y., SUSUMPOW,T. and WARNITCHAI, P. *A non-linear dynamic model for cables and its application to a cable-structure system.* Journal of Sound Vibration. Volume 187, Issue 4, November 1995, Pages 695-712.

[11] FUNG, R.F., LEE, M.J. and WANG, P.H., *Finite element analysis of a three dimensional underwater cable with time-dependent length.* Journal of Sound Vibration. Volume 209, Issue 2, January 1998, Pages 223-249.

[12] GAO, J., ZHU, K.-Q., ZHANG,Y.-S. and ZHU, H.-Y., *A multi-body space coupled motion simulation for a deep-sea tethered remotely operated vehicle.* Journal of Hydrodinamic. 2008, 20(2):210-215.

[13] GOSLING, P.D. and KORBAN, F.A. *A bendable finite element for the analysis of flexible cable structures.* Finite Elements in Analysis and Design. 38 (2001) 45-63.

[14] GOYAL, S., LEE, C.L. and PERKINS, N.C., *Writhing Dynamics of cables with self-contact*

[15] HEEKE, M.B., MACHADO, R.D. and OLIVEIRA, P.A., *Análise estática não linear de cabos utilizando o Método dos Elementos Finitos.* Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, UnB, Brasília, 2002.

[16] ISOLDI, L. A., *Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis.* Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica – FURG, julho de 2002.

[17] LOPES, A.M. *Modelação Cinemática e Dinâmica de Manipuladores de Estrutura em Série.* Robótica Industrial. FEUP, 2002.

[18] MACHADO, C.C., PEREIRA, A. E.L, GOMES, S. C. P. e DE BORTOLI, A. L., *Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis.* Revista Controle e Automação 13 (2002), 134-140.

[19] MARQUES, R. O. *Análise acoplada dos movimentos de um FPSO e da dinâmica dos sistemas de ancoragem e risers.* Dissertação de mestrado para a obtenção do título de Mestre em Ciências, COPPE/UFRJ, 2010.

[20] MENDONÇA, P.T.R., *Análise Dinâmica pelo Método de Elementos Finitos,* Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, 2004.

[21] NASCIMENTO, C.A.M., *Modelagem numérica de vibrações em cabos de transmissão de energia elétrica,* 2011.

[22] NING, D., SHI, Z., TENG, B. and YANG, M., *Coupled dynamic analysis for wave interaction with a truss spar and its mooring line/riser system in time domain, 2012.*

[23] PARK, T.W., YIM, H.J. and YOON, J.W., *Fatigue life prediction of a cable harness in an industrial robot using dynamic simulation ,*2008.

[24] VAZ, M.A and PATEL,M.H. *Three-dimensional behaviour of elastic marine cables in sheared currents.* Applied Ocean Research.Volume 22, Issue1, February 2000, Pages 45-53.

[25] PEREIRA, A.E.L. *Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis.* Dissertação de Mestrado para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, UFRGS, 1999.

[26] PEREIRA, A.E.L. *O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação fluido-estrutura de um Cabo.* Tese de Doutorado para obtenção do grau de Doutor em Matemática Aplicada, UFRGS, 2010.

[27] PITTA, A. S. *Análise do comportamento estrutural da armadura de pressão de um duto flexível sujeito à carga axissimétrica pelo método dos elementos finitos.*

Dissertação de Mestrado para obtenção do título de Mestre em Engª. Civil, UFRJ/COPPE, 2010.

[28] ROCHA, J.I.P.R. *Inspeção e Manutenção Robótica em Linhas de Alta Tensão.* EST-IPS/ISR-IST, Lisboa, 2004.

[29] ROCHINHA, A., SAMPAIO, R., and LE TALLEC, P. *O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais.* Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria. Vol. 6,1, 97-108 (1990).

[30] RIZZO, N.A.S., *Análise da Instabilidade das Armaduras de Dutos Flexíveis pelo Método de Elementos Finitos*, 2010.

[31] SANTOS, L. R. *Modelagem não-Linear da Dinâmica de Cabos Submarinos.* Tese de doutorado para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engª. Mecânica. UFRJ/COPPE, 2007.

[32] SOUZA, R.M., *O método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor.* Universidade Federal do Pará, Belém, Maio, 2003.

[33] ZHU, K.-Q., ZHU, H.-Y., ZHANG,Y.-S. and GAO, J. *A multi-body Space-coupled Motion Simulation for a Deep-sea Tethered Remotely Operated Vehicle.* Journal of Hydrodinamic. 2008, 20(2):210-215.

ANEXO I

TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

I. TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Para uma estrutura flexível do tipo cabo, onde sua extremidade superior é fixa e a outra é livre, torna-se necessário conhecer a orientação e a posição da parte livre, a fim de definir univocamente os movimentos do cabo no espaço.

A orientação da extremidade livre é definida por meio de rotações puras e a posição por translações. Considera-se na modelagem dinâmica o cabo dividido em partes rígidas chamadas elos, conectados por articulações fictícias. O movimento do cabo é obtido pela composição dos movimentos de cada elo em relação ao elo anterior como uma cadeia articulada.

Para conhecer a posição da extremidade livre do cabo é necessário associar a cada articulação um sistema de eixos coordenados e, com o propósito de posicionar este sistema de forma sistemática, sugere-se neste trabalho, a utilização de matrizes homogêneas de transformação entre sistemas.

Um vetor do espaço real tridimensional, em coordenadas homogêneas, é representado por um vetor no espaço de quatro dimensões. Para simplificar o tratamento algébrico das operações de rotação e translação define-se uma matriz 4x4, na qual ambos os operadores estão representados. A matriz de transformação homogênea permite efetuar uma transformação de coordenadas entre dois referenciais. A seguir será utilizado o formalismo descrito por LOPES [17], para determinar uma matriz de transformação homogênea.

I.1 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Os referenciais cartesianos $x_0y_0z_0$ e $x_1y_1z_1$ têm a mesma origem no ponto $\boldsymbol{O}$, sendo que o referencial $x_0y_0z_0$ encontra-se fixo e o referencia $x_1y_1z_1$ pode girar em relação à $x_0y_0z_0$ como mostra a Figura I.1. Pode-se considerar fisicamente, $x_1y_1z_1$ como estando apoiado em um corpo.

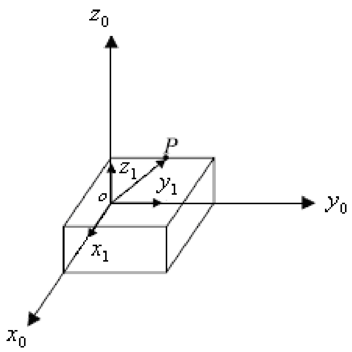

Figura I.1 Representação de um referencial fixo $x_0y_0z_0$, e de um móvel $x_1y_1z_1$.

Considere os vetores unitários $\vec{i}_{x_0}$, $\vec{j}_{y_0}$, $\vec{k}_{z_0}$ segundo o eixo do referencial $x_0y_0z_0$ e $\vec{i}_{x_1}$, $\vec{j}_{y_1}$, $\vec{k}_{z_1}$ segundo o eixo do referencial $x_1y_1z_1$. As coordenadas de um ponto P, no espaço, podem ser expressas em relação à $x_0y_0z_0$ e em relação à $x_1y_1z_1$, respectivamente por

$$\vec{p}_{x_0y_0z_0} = [\,p_{x_0} \;\; p_{y_0} \;\; p_{z_0}\,]^T \tag{I.1}$$

$$\vec{p}_{x_1y_1z_1} = [\,p_{x_1} \;\; p_{y_1} \;\; p_{z_1}\,]^T \,. \tag{I.2}$$

Da definição de componentes de um vetor, tem-se:

$$\vec{p}_{x_1y_1z_1} = p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1} \,, \tag{I.3}$$

onde $p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}$ representam as projeções de $\vec{p}$ segundo os eixos ox_1, oy_1 e oz_1. Então, utilizando-se a definição de produto escalar e a equação (I.3), tem-se:

$$\begin{aligned}
p_{x_0} &= \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{p} = \vec{i}_{x_0}\cdot\left(p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}\right) = \left(\vec{i}_{x_0}\cdot\vec{i}_{x_1}\right)p_{x_1} + \left(\vec{i}_{x_0}\cdot\vec{j}_{y_1}\right)p_{y_1} + \left(\vec{i}_{x_0}\cdot\vec{k}_{z_1}\right)p_{z_1}\\
p_{y_0} &= \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{p} = \vec{j}_{y_0}\cdot\left(p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}\right) = \left(\vec{j}_{y_0}\cdot\vec{i}_{x_1}\right)p_{x_1} + \left(\vec{j}_{y_0}\cdot\vec{j}_{y_1}\right)p_{y_1} + \left(\vec{j}_{y_0}\cdot\vec{k}_{z_1}\right)p_{z_1}\\
p_{z_0} &= \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{p} = \vec{k}_{z_0}\cdot\left(p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}\right) = \left(\vec{k}_{z_0}\cdot\vec{i}_{x}\right)p_{x_1} + \left(\vec{k}_{z_0}\cdot\vec{j}_{y_1}\right)p_{z_1} + \left(\vec{k}_{z_0}\cdot\vec{k}_{z_1}\right)p_{z_1}
\end{aligned} \tag{I.4}$$

ou na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \\ \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \\ \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

Pretende-se determinar a transformação matricial $R = {}^{x_0y_0z_0}R_{x_1y_1z_1}$ que converte as coordenadas de P expressas em relação ao sistema de referência $x_1y_1z_1$, $P_{x_1y_1z_1}$, nas coordenadas de P expressas em relação ao sistema de referência $x_0y_0z_0$, $P_{x_0y_0z_0}$, depois do corpo no referencial $x_1y_1z_1$ ter sofrido uma rotação. Ou seja,

$$\vec{p}_{x_0y_0z_0} = R\,\vec{p}_{x_1y_1z_1} \ , \tag{I.6}$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \\ \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \\ \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \end{bmatrix} \tag{I.7}$$

Perceba que as colunas da matriz R representam as coordenadas dos eixos principais do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$, isto é, representam os co-senos diretores dos eixos do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$. Assim, a matriz R representa a orientação do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$.

De modo semelhante podem ser obtidas as coordenadas de $P_{x_1y_1z_1}$ a partir das coordenadas de $P_{x_0y_0z_0}$ por

$$\vec{p}_{x_1y_1z_1} = Q\,\vec{p}_{x_0y_0z_0} \tag{I.8}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_1}\cdot\vec{i}_{x_0}\cdot & \vec{i}_{x_1}\cdot\vec{j}_{y_0} & \vec{i}_{x_1}\cdot\vec{k}_{z_0} \\ \vec{j}_{y_1}\cdot\vec{i}_{x_0} & \vec{j}_{y_1}\cdot\vec{j}_{y_0} & \vec{j}_{y_1}\cdot\vec{k}_{z_0} \\ \vec{k}_{z_1}\cdot\vec{i}_{x_0} & \vec{k}_{z_1}\cdot\vec{j}_{y_0} & \vec{k}_{z_1}\cdot\vec{k}_{z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} \tag{I.9}$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_1}\cdot\vec{i}_{x_0}\cdot & \vec{i}_{x_1}\cdot\vec{j}_{y_0} & \vec{i}_{x_1}\cdot\vec{k}_{z_0} \\ \vec{j}_{y_1}\cdot\vec{i}_{x_0} & \vec{j}_{y_1}\cdot\vec{j}_{y_0} & \vec{j}_{y_1}\cdot\vec{k}_{z_0} \\ \vec{k}_{z_1}\cdot\vec{i}_{x_0} & \vec{k}_{z_1}\cdot\vec{j}_{y_0} & \vec{k}_{z_1}\cdot\vec{k}_{z_0} \end{bmatrix} \tag{I.10}$$

Dado que o produto escalar é comutativo, de (I.7) e (I.10) obtém-se que:

$$Q = R^T \tag{I.11}$$

e

$$QR = I_3 \tag{I.12}$$

onde I_3 representa a matriz identidade de dimensão 3×3. Portanto, tem-se

$$Q = R^{-1} = R^T \ , \tag{I.13}$$

As matrizes R e Q são ortogonais. Sendo os vetores $\vec{i}_{x_0}$, $\vec{j}_{y_0}$, $\vec{k}_{z_0}$ e $\vec{i}_{x_1}$, $\vec{j}_{y_1}$, $\vec{k}_{z_1}$ unitários, as transformações representadas pelas equações (I.6) e (I.8) são consideradas transformações ortonormais.

Desta forma podem ser determinadas as transformações que representam as rotações do referencial $x_1y_1z_1$ em relação aos eixos do referencial $x_0y_0z_0$. Se o referencial $x_1y_1z_1$ sofrer uma rotação de um ângulo α em relação ao eixo $0x_0$, então o ponto $P_{x_1y_1z_1}$ de coordenadas $[p_{x_1}\ \ p_{y_1}\ \ p_{z_1}]^T$ em relação à $x_1y_1z_1$, terá diferentes coordenadas $[p_{x_0}\ \ p_{y_0}\ \ p_{z_0}]^T$ em relação à $x_0y_0z_0$. A transformação $R_{x_0,\alpha}$ chama-se matriz de rotação em relação à $0x_0$ de um ângulo α (Figura I.2) e pode ser determinada a partir dos conceitos desenvolvidos anteriormente. Assim, obtém-se:

$$\vec{p}_{x_0y_0z_0} = R_{x_0,\alpha}\,\vec{p}_{x_1y_1z_1} \tag{I.14}$$

com $\vec{i}_{x_0} \equiv \vec{i}_{x_1}$, lembrando-se que a definição do produto escalar é dada por $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, sendo α o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tem-se:

$$R_{x_0,\alpha} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{i}_{x_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \\ \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{j}_{y_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \\ \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{i}_{x_1} & \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{j}_{y_1} & \vec{k}_{z_0}\cdot\vec{k}_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{I.15}$$

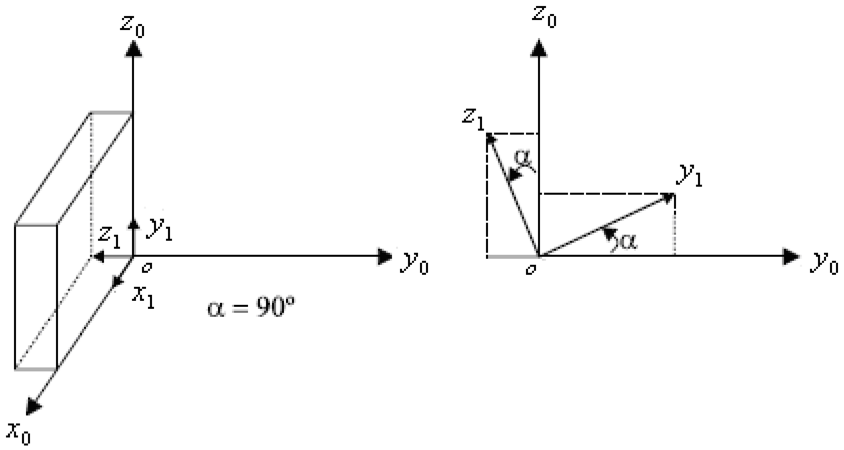

Figura I.2 Rotação do corpo rígido da Figura I.1 de um ângulo α em relação ao eixo $0x_0$.

As matrizes de rotação de um ângulo φ em relação ao eixo $0y_0$ e de um ângulo θ em relação ao eixo $0z_0$ podem ser obtidas de modo semelhante, como mostra as Figuras I.3 e I.4.

$$R_{y_0,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \text{ e } R_{z_0,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{I.16}$$

As matrizes $R_{x_0,\alpha}$, $R_{y_0,\phi}$ e $R_{z_0,\theta}$ são identificadas como rotação básicas ou elementares.

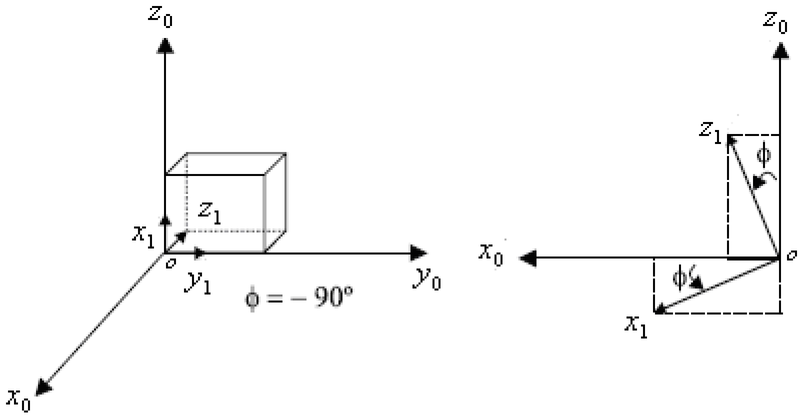

Figura I.3 Rotação do corpo rígido da Figura I.1 de um ângulo ϕ em relação ao eixo $0y_0$.

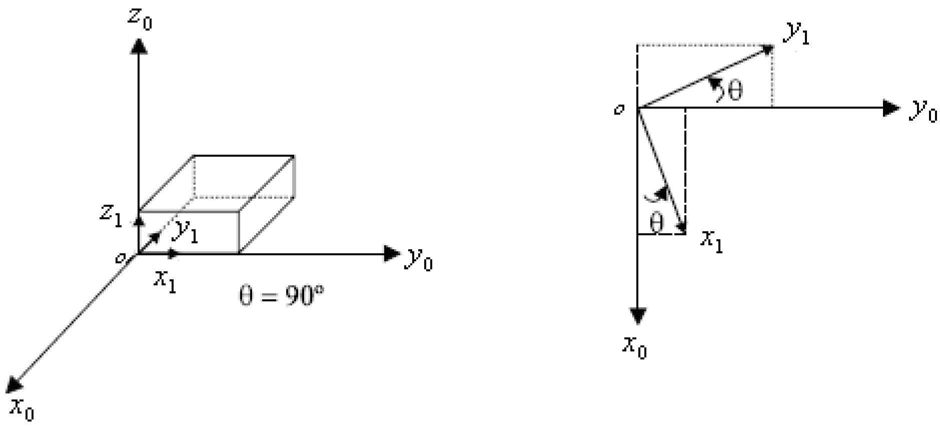

Figura I.4 Rotação do corpo rígido da Figura I.1 de um ângulo θ em relação ao eixo $0z_0$.

I.2 COMPOSIÇÃO DE MATRIZES DE ROTAÇÃO

Na seção anterior foi obtida uma representação matemática da rotação de um referencial $x_1y_1z_1$ em relação a cada um dos eixos de um referencial fixo $x_0y_0z_0$.

Se o referencial $x_1y_1z_1$, inicialmente alinhado com $x_0y_0z_0$, sofrer uma sequência finita de rotações em torno desses mesmos eixos, então essa sequência pode ser representada através de um produto de várias matrizes de rotação básicas.

Por exemplo, a matriz $R = R_{y_0,\phi} R_{z_0,\theta} R_{x_0,\alpha}$ representa a rotação do referencial $x_1 y_1 z_1$ de um ângulo α em relação ao eixo $0x_0$, seguida de uma rotação de um ângulo θ em relação ao eixo $0z_0$ e, por último, da rotação de um ângulo ϕ em relação ao eixo $0y_0$. A ordem pela qual são efetuadas as rotações é importante, pois o produto de matrizes em geral não é comutativo.

I.3 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Para transformações que incluam informações sobre rotação, translação, fator de escala e efeito de perspectiva o conceito de transformação homogênea torna-se útil no seu desenvolvimento.

Se a um dado vetor $\vec{p} = [p_{x_0} \; p_{y_0} \; p_{z_0}]^T$, no espaço tridimensional, é acrescentada uma quarta componente, de modo a $\vec{p}$ ser transformado em $\hat{p} = [wp_{x_0} \; wp_{y_0} \; wp_{z_0} \; w]^T$, diz-se que $\hat{p}$ está expresso em coordenadas homogêneas.

Em geral, a representação de um vetor *n*-dimensional por um vetor (*n*+1)-dimensional, chama-se de representação homogênea. Inversamente, obtém-se o vetor *n*-dimensional da sua representação em coordenadas homogêneas dividindo-se as coordenadas do vetor (*n*+1)-dimensional pela componente de ordem (*n*+1). Assim, no espaço 3D, um vetor $\vec{p} = [p_{x_0} \; p_{y_0} \; p_{z_0}]^T$ é representado pelo vetor aumentado $\hat{p} = [w\,p_{x_0} \; wp_{y_0} \; w\,p_{z_0} \; w]^T$ verificando-se as relações

$$p_{x_0} = \frac{wp_{x_0}}{w}, \quad p_{y_0} = \frac{wp_{y_0}}{w} \quad \text{e} \quad p_{z_0} = \frac{wp_{z_0}}{w} \tag{I.17}$$

Não existe uma representação única para um vetor em coordenadas homogêneas. Assim, $\hat{p}_1 = [w_1 p_{x_0} \; w_1 p_{y_0} \; w_1 p_{z_0} \; w_1]^T$ ou $\hat{p}_2 = [w_2 p_{x_0} \; w_2 p_{y_0} \; w_2 p_{z_0} \; w_2]^T$ podem ser consideradas representações válidas para o vetor $\vec{p} = [p_{x_0} \; p_{y_0} \; p_{z_0}]^T$. Desta forma a quarta componente, w, funciona como um fator de escala. Se o fator de escala $w = 1$, então as componentes físicas do vetor são iguais às componentes em coordenadas homogêneas.

Uma matriz homogênea 4×4 pode ser considerada composta por quatro submatrizes:

$$T=\left[\begin{array}{c|c} R_{3\times3} & \vec{p}_{3\times1} \\ \hline f_{1\times3} & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \textit{matriz} & \textit{vetor} \\ \textit{rotação} & \textit{posição} \\ \hline \textit{efeito de} & \textit{fator} \\ \textit{perspectiva} & \textit{escala} \end{array}\right]$$

(I.18)

A matriz de rotação é representada pela submatriz $R_{3\times3}$, isto é, a orientação do referencial móvel em relação ao referencial fixo, a submatriz $\vec{p}_{3\times1}$ representa o vetor da origem do referencial fixo, a submatriz $f_{1\times3}$ representa o efeito de perspectiva e o quarto elemento da diagonal principal representa o fator de escala.

A matriz de rotação 3×3 pode ser aumentada para 4×4, transformando-se assim numa matriz homogênea, T_{rot}, representando apenas a operação de rotação. Deste modo, as matrizes de rotação nas equações (I.15) e (I.16), escritas em termos de matrizes homogêneas são:

$$T_{x_0,\alpha}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(I.19)

$$T_{y_0,\phi}=\left[\begin{array}{ccc|c} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(I.20)

$$T_{z_0,\theta}=\left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(I.21)

As matrizes em (I.19), (I.20) e (I.21), são as matrizes de rotação homogêneas básicas.

Por outro lado, os três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação homogênea representam à translação do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$. Assim, $x_1y_1z_1$ tem eixos paralelos ao referencial $x_0y_0z_0$, mas a sua origem encontra-se deslocada de $(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1})$ deste referencial. A matriz homogênea de translação básica ou elementar é dada por:

$$T_{trans} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_{0_1} \\ 0 & 1 & 0 & y_{0_1} \\ 0 & 0 & 1 & z_{0_1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{I.22}$$

Em resumo, uma transformação homogênea converte um vetor expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial $x_1y_1z_1$, num vetor expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial $x_0y_0z_0$. Ou seja, uma matriz homogênea representa a situação ou posição generalizada de um referencial móvel em relação a um referencial fixo. Isto é, com $w = 1$, tem-se:

$$\hat{p}_{x_0y_0z_0} = T\ \hat{p}_{x_1y_1z_1} \tag{I.23}$$

onde

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & p_{x_0} \\ & R_{3\times 3} & & p_{y_0} \\ & & & p_{z_0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{I.24}$$

I.4 COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Para representar uma sequência finita de transformações homogêneas, multiplicam-se sucessivamente as transformações homogêneas básicas, de modo a obter a matriz de transformação global. Como a multiplicação de matrizes em geral não é comutativa deve-se levar em conta a ordem pela qual se fazem as transformações básicas.

Para determinar a matriz de transformação global as seguintes regras devem ser consideradas:

- inicialmente ambos os referenciais coincidem, logo a matriz homogênea será a matriz identidade 4x4;
- se o referencial $x_1 y_1 z_1$ sofrer uma rotação/translação em relação a um dos eixos principais de $x_0 y_0 z_0$, então se deve pré-multiplicar a matriz calculada pela matriz homogênea básica apropriada (equação I.19 e I.22);
- se o referencial $x_1 y_1 z_1$ sofrer uma rotação/translação em relação a um dos seus eixos principais, então a matriz calculada até esse momento deve ser pós-multiplicada pela matriz homogênea básica apropriada (equação I.19 e I.22).

APÊNDICE A
Elementos das matrizes e vetores
para os casos de dois, três e quatro elos.

APÊNDICE A.1

CABO COM DUAS ARTICULAÇÕES

Elementos da matriz de inércia I são os seguintes:

$$I_{11} = l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) + I_{R1e}$$

$$I_{12} = l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\cos\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{2a} + \sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}]$$

$$I_{13} = -l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}]$$

$$I_{14} = -l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}]$$

$$I_{15} = I_{16} = 0$$

$$I_{21} = l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\cos\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{2a} + \sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}]$$

$$I_{22} = l_2^2(\frac{m_2}{4} + m_c) + I_{R2e}$$

$$I_{23} = l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}]$$

$$I_{24} = I_{25} = I_{26} = 0$$

$$I_{31} = -l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}]$$

$$I_{32} = l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}]$$

$$\begin{aligned} I_{33} = l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right)\sin^2\theta_{1e} \\ + l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\sin^2\theta_{2e} + 2l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a} \\ + I_{R1a} \end{aligned}$$

$$I_{34} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\sin^2\theta_{2e} + l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}$$

$$I_{35} = I_{36} = 0$$

$$I_{41} = -l_1 l_2(\frac{m_2}{2} + m_c)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}]$$

$$I_{42} = 0$$

$$I_{43} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\sin^2\theta_{2e} + l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}$$

$$I_{44} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\sin^2\theta_{2e} + I_{R2a}$$

$$I_{45} = I_{46} = I_{51} = I_{52} = I_{53} = I_{54} = 0$$

$$I_{55} = I_{T1}$$

$$I_{56} = I_{61} = I_{62} = I_{63} = I_{64} = I_{65} = 0$$

$I_{66} = (I_{T2} + I_{Tc})$

Os elementos da matriz das constantes de atrito C são:

$C_{11} = C_{1e} + C_{2e}; C_{12} = -C_{2e};\ C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0;$

$C_{21} = C_{12}; C_{22} = C_{2e};\ C_{23} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = 0;$

$C_{31} = C_{32} = 0; C_{33} = C_{1a} + C_{2a};\ C_{34} = -C_{2a};\ C_{35} = C_{36} = 0;$

$C_{41} = C_{42} = 0; C_{43} = C_{34};\ C_{44} = C_{2a};\ C_{45} = C_{46} = 0;$

$C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{54} = 0; C_{55} = C_{1T} + C_{2T};\ C_{56} = -C_{2T};$

$C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0; C_{65} = C_{56}; C_{66} = C_{2T};$

Os elementos da matriz das constantes elásticas K são:

$k_{11} = k_{1e} + k_{2e}; k_{12} = -k_{2e};\ k_{13} = k_{14} = k_{15} = k_{16} = 0;$

$k_{21} = k_{12}; k_{22} = k_{2e};\ k_{23} = k_{24} = k_{25} = k_{26} = 0;$

$k_{31} = k_{32} = 0; k_{33} = k_{1a} + k_{2a};\ k_{34} = -k_{2a};\ k_{35} = k_{36} = 0;$

$k_{41} = k_{42} = 0; k_{43} = k_{34};\ k_{44} = k_{2a};\ k_{45} = k_{46} = 0;$

$k_{51} = k_{52} = k_{53} = k_{54} = 0; k_{55} = k_{1T} + k_{2T};\ k_{56} = -k_{2T};$

$k_{61} = k_{62} = k_{63} = k_{64} = 0; k_{65} = k_{56};\ k_{66} = k_{2T};$

As componentes do vetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}$ são:

$$f_1 = -l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right)\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e}\dot{\theta}_{1a}^2 +$$

$$- 2l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2}\right.$$

$$\left. + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\left[\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\right)\dot{\theta}_{2e}\right.\right.$$

$$\left. + \sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2}\right)\right]$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\,\dot{\theta}_{2e}^2\right)\right\}$$

$$f_2 = -2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\left\{\sin\theta_{2e}\left[\cos\theta_{2e}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \frac{1}{2}\cos\theta_{2e}\left(\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2\right)\right]\right\} - 2l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2}\right.$$

$$\left. + m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\left[-\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2e}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\,\dot{\theta}_{1e}^2\right\}$$

$$f_3 = 2l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right)\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{1e}\dot{\theta}_{1a} + 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e} + 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\dot{\theta}_{1e}\dot{\theta}_{1a} + \sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e} - \sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \frac{\dot{\theta}_{2a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2}\right)\right\}$$

$$f_4 = 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e} + 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{1a}^2}{2}\right)\right\}$$

$$f_5 = f_6 = 0$$

As componentes para o vetor gravitacional $\vec{G}$ são:

$$G_1 = l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)g\sin\theta_{1e}$$

$$G_2 = l_2\left(\frac{m_2}{2}\right)g\sin\theta_{2e}$$

$$G_3 = G_4 = G_5 = G_6 = 0$$

As componentes do vetor dos torques externos $\vec{T}$ são:

$$T_{m1} = T_{\theta 1e}\,;T_{m2} = T_{\theta 2e}\,;$$

$$T_{m3} = T_{\theta 1a}\,;T_{m4} = T_{\theta 2a}\,;$$

$$T_{m5} = T_{\theta 1t}\,;T_{m6} = T_{\theta 2t}$$

APÊNDICE A.2

CABO COM TRÊS ARTICULAÇÕES

Elementos da matriz de inércia I são os seguintes:

$$I_{11} = l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) + I_{R1e}$$

$$I_{12} = l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)[\cos\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\cos\theta_{2a} + \sin\theta_{2e}\sin\theta_{1e}]$$

$$I_{13} = l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\cos\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \sin\theta_{3e}\sin\theta_{1e}]$$

$$I_{14} = -l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}]$$
$$- l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$I_{15} = -l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}]$$
$$- l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$I_{16} = -l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$I_{17} = I_{18} = I_{19} = 0$$

$$I_{21} = I_{12}$$

$$I_{22} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) + I_{R2e}$$

$$I_{23} = l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\cos\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a} + \sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}]$$

$$I_{24} = l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}]$$
$$- l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}]$$

$$I_{25} = -l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}]$$

$$I_{26} = -l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}]$$

$$I_{27} = I_{28} = I_{29} = 0$$

$$I_{31} = I_{13}; I_{32} = I_{23}$$

$$I_{33} = l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) + I_{R3e}$$

$$I_{34} = l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}]$$
$$+ l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$I_{35} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}]$$

$$I_{36} = I_{37} = I_{38} = I_{39} = 0$$

$$I_{41} = I_{14}; I_{42} = I_{24};\ I_{43} = I_{34};$$

$$I_{44} = l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right)[\sin^2\theta_{1e}] + l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right)[\sin^2\theta_{2e}]$$
$$+ l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ 2l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}]$$
$$+ 2l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ 2l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}] + I_{R1a}$$

$$I_{45} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right)[\sin^2\theta_{2e}] + l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}]$$
$$+ l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ 2l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$

$$I_{46} = l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}] + l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$

$$I_{47} = I_{48} = I_{49} = 0$$

$$I_{51} = I_{15}; I_{52} = I_{25};\ I_{53} = I_{35};\ I_{54} = I_{45};$$

$$I_{55} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right)[\sin^2\theta_{2e}] + l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ 2l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}] + I_{R2a}$$

$$I_{56} = l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}] + l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$

$$I_{57} = I_{58} = I_{59} = 0$$

$$I_{61} = I_{16}; I_{62} = I_{26};\ I_{63} = I_{36};\ I_{64} = I_{46};\ I_{65} = I_{56};$$

$$I_{66} = l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}] + I_{R3a}$$

$$I_{67} = I_{68} = I_{69} = 0$$

$$I_{71} = I_{72} = I_{73} = I_{74} = I_{75} = I_{76} = 0$$

$I_{77} = I_{T1}$

$I_{78} = I_{79} = 0$

$I_{81} = I_{82} = I_{83} = I_{84} = I_{85} = I_{86} = I_{87} = 0$

$I_{88} = I_{T2}$

$I_{89} = 0$

$I_{91} = I_{92} = I_{93} = I_{94} = I_{95} = I_{96} = I_{97} = I_{98} = 0$

$I_{99} = I_{T3} + I_{Tc}$

Os elementos da matriz das constantes de atrito são:

$C_{11} = C_{1e} + C_{2e}; C_{12} = -C_{2e}; C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = 0;$

$C_{21} = C_{12}; C_{22} = C_{2e} + C_{3e};\ C_{23} = -C_{3e};\ C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{28} = C_{29} = 0;$

$C_{31} = C_{13}; C_{32} = C_{23};\ C_{33} = C_{3e};\ C_{34} = C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{38} = C_{39} = 0;$

$C_{41} = C_{42} = C_{43} = 0; C_{44} = C_{1a} + C_{2a};\ C_{45} = -C_{2a};\ C_{46} = C_{47} = C_{48} = C_{49} = 0;$

$C_{51} = C_{52} = C_{53} = 0;\ C_{54} = C_{45}; C_{55} = C_{2a} + C_{3a};\ C_{56} = -C_{3a};\ C_{57} = C_{58} = C_{59} = 0;$

$C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0;\ C_{65} = C_{56};\ C_{66} = C_{3a};\ C_{67} = C_{68} = C_{69} = 0;$

$C_{71} = C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = C_{76} = 0;\ C_{77} = C_{1T} + C_{2T}; C_{78} = -C_{2T};\ C_{79} = 0;$

$C_{81} = C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{85} = C_{86} = 0;\ C_{87} = C_{78};$

$C_{88} = C_{2T} + C_{3T}; C_{89} = -C_{3T};\ C_{91} = C_{92} = C_{93} = C_{94} = C_{95} = C_{96} = C_{97} = 0;$

$C_{98} = -C_{3T};\ C_{99} = C_{3T};$

Os elementos da matriz das constantes elásticas são:

$k_{11} = k_{1e} + k_{2e};\ k_{12} = -k_{2e};\ k_{13} = k_{14} = k_{15} = k_{16} = k_{17} = k_{18} = k_{19} = 0;$

$k_{21} = k_{12};\ k_{22} = k_{2e} + k_{3e};\ k_{23} = -k_{3e};\ k_{24} = k_{25} = k_{26} = k_{27} = k_{28} = k_{29} = 0;$

$k_{31} = 0;\ k_{32} = k_{23};\ k_{33} = k_{3e};\ k_{34} = k_{35} = k_{37} = k_{38} = k_{39} = 0;$

$k_{41} = k_{42} = k_{43} = 0;\ k_{44} = k_{1a} + k_{2a};\ k_{45} = -k_{2a};\ k_{46} = k_{47} = k_{48} = k_{49} = 0;$

$k_{51} = k_{52} = k_{53} = 0;\ k_{54} = k_{45};\ k_{55} = k_{2a} + k_{3a};\ k_{56} = -k_{3a};\ k_{57} = k_{58} = k_{59} = 0;$

$k_{61} = k_{62} = k_{63} = k_{64} = 0;\ k_{65} = k_{56};\ k_{66} = k_{3a};\ k_{67} = k_{68} = k_{69} = 0$

$k_{71} = k_{72} = k_{73} = k_{74} = k_{75} = k_{76} = 0;\ k_{77} = k_{1T} + k_{2T};\ k_{78} = -k_{2T};$

$k_{79} = 0;$

$k_{81} = k_{82} = k_{83} = k_{84} = k_{85} = k_{86} = 0$; $k_{87} = k_{78}$; $k_{88} = k_{2T} + k_{3T}$; $k_{89} = -k_{3T}$;
$k_{91} = k_{92} = k_{93} = k_{94} = k_{95} = k_{96} = k_{97} = 0$; $k_{98} = k_{89}$; $k_{99} = k_{3T}$

Os elementos do vetor Coriolis-centrífugo são:

$$
\begin{aligned}
f_1 = -2l_1 l_2 \Big(\frac{m_2}{2} + m_3 \\
&+ m_c\Big)\Bigg\{\cos\theta_{1e}\Bigg[\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\,(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a})\dot\theta_{2e} \\
&+ \sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\left(\dot\theta_{1a}\dot\theta_{2a} + \left(\frac{\dot\theta_{1a}^2+\dot\theta_{2a}^2+\dot\theta_{2e}^2}{2}\right)\right)\Bigg] \\
&- \frac{1}{2}[\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}]\dot\theta_{2e}^2\Bigg\} \\
&- 2l_1 l_3\Big(\frac{m_3}{2} \\
&+ m_c\Big)\Bigg\{\cos\theta_{1e}\Bigg[\cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a}+\theta_{3a})(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a})\dot\theta_{3e} \\
&+ \sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} \\
&+ \theta_{3a})\left((\dot\theta_{1a}\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{2a}\dot\theta_{3a}) + \left(\frac{\dot\theta_{1a}^2+\dot\theta_{2a}^2+\dot\theta_{3a}^2+\dot\theta_{3e}^2}{2}\right)\right)\Bigg] \\
&- \frac{1}{2}(\sin\theta_{1e}\cos\theta_{3e})\dot\theta_{3e}^2\Bigg\} \\
&- l_1^2\Big(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\Big)\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e}\,\dot\theta_{1a}^2
\end{aligned}
$$

$$f_2 = -2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\left[-\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\,\dot{\theta}_{1e}^2\right\}$$
$$- 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\left[\cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{3e} + \sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\left(\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\right) + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right)\right)\right] - \frac{1}{2}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\,\dot{\theta}_{3e}^2\right\}$$
$$- 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2}{2}\right)\right)$$

$$f_3 = -2l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{3e}\left[-\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \sin\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\,\dot{\theta}_{1e}^2\right\}$$
$$- 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{3e}\left[-\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\right)\dot{\theta}_{2e} + \sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\,\dot{\theta}_{2e}^2\right\}$$
$$- 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)\left\{\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\left(\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\right) + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2}{2}\right)\right)\right\}$$

$$f_4 = 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e} - \sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2}\right)\right)\right\}$$

$$+ 2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \sin\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e} - \sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left((\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}) + \left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right)\right)\right\}$$

$$+ 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e} + \sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e} - \sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right)\right)\right\}$$

$$+ 2l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right)\left\{\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right\}$$

$$+ 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right)\left\{\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e}\right\}$$

$$+ 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)\left\{\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
f_5 = 2l_1l_2\Big(\frac{m_2}{2} + m_3 \\
&+ m_c\Big)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right. \\
&\left.+ \sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right\} \\
&+ 2l_1l_3\Big(\frac{m_3}{2} \\
&+ m_c\Big)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right. \\
&\left.+ \sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right\} \\
&+ 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\big)\dot{\theta}_{2e}\right. \\
&+ \sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{3e} \\
&\left.- \sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\left(\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\big)\dot{\theta}_{3a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right)\right)\right\} \\
&+ 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right)\left\{\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\big)\dot{\theta}_{2e}\right\} \\
&+ 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)\left\{\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{3e}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_6 = 2l_1l_3\Big(\frac{m_3}{2} \\
&+ m_c\Big)\left\{\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right. \\
&\left.+ \sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right\} \\
&+ 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\big)\dot{\theta}_{2e}\right. \\
&\left.+ \sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2}\right)\right)\right\} \\
&+ 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right)\left\{\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\,\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{3e}\right\}
\end{aligned}
$$

$$f_7 = f_8 = f_9 = 0$$

As componentes do vetor gravitacional são:

$$G_1 = l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) g \sin\theta_{1e}$$

$$G_2 = l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g \sin\theta_{2e}$$

$$G_3 = l_3\left(\frac{m_3}{2}\right) g \sin\theta_{3e}$$

$$G_4 = G_5 = G_6 = G_7 = G_8 = G_9 = 0$$

As componentes do vetor dos torques externos são:

$$T_{m1} = T_{\theta 1e}\ ;\ T_{m2} = T_{\theta 2e}\ ;\ T_{m3} = T_{\theta 3e}\ ;$$

$$T_{m4} = T_{\theta 1a}\ ;\ T_{m5} = T_{\theta 2a}\ ;\ T_{m6} = T_{\theta 3a}\ ;$$

$$T_{m7} = T_{\theta 1t}\ ;\ T_{m8} = T_{\theta 2t}\ ;\ T_{m9} = T_{\theta 3t}\ ;$$

APÊNDICE A.3

CABO COM QUATRO ARTICULAÇÕES

Elementos da matriz de inércia *I* são os seguintes:

$$I_{11} = l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) + I_{R1e}$$

$$I_{12} = l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\cos\theta_{2a} + \sin\theta_{2e}\sin\theta_{1e}]$$

$$I_{13} = l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \sin\theta_{3e}\sin\theta_{1e}]$$

$$I_{14} = l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\cos\theta_{4e}\cos\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \sin\theta_{4e}\sin\theta_{1e}]$$

$$\begin{aligned} I_{15} = -l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)&[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}] \\ - l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)&[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] \\ - l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)&[\sin\theta_{4e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{16} = -l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)&[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}] \\ - l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)&[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] \\ - l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)&[\sin\theta_{4e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{17} = -l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)&[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] \\ - l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)&[\sin\theta_{4e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})] \end{aligned}$$

$$I_{18} = -l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{19} = I_{1,10} = I_{1,11} = I_{1,12} = 0$$

$$I_{21} = I_{12}$$

$$I_{22} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) + I_{R2e}$$

$$I_{23} = l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a} + \sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}]$$

$$I_{24} = l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\cos\theta_{4e}\cos\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a}) + \sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}]$$

$$I_{25} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}] - l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}] - l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{2e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{26} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}] - l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{2e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{27} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}] - l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{2e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{28} = -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{2e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{29} = I_{2,10} = I_{2,11} = I_{2,12} = 0$$

$$I_{31} = I_{13}$$

$$I_{32} = I_{23}$$

$$I_{33} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) + I_{R3e}$$

$$I_{34} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{4e}\cos\theta_{3e}\cos\theta_{4a} + \sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}]$$

$$I_{35} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}] - l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4a}]$$

$$I_{36} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}] - l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4a}]$$

$$I_{37} = -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4a}]$$

$$I_{38} = -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{4e}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4a}]$$

$$I_{39} = I_{3,10} = I_{3,11} = I_{3,12} = 0$$

$$I_{41} = l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{1e}\cos\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}]$$

$$I_{42} = l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{2e}\cos\theta_{4e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a}) + \sin\theta_{2e}\sin\theta_{4e}]$$

$$I_{43} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{3e} \cos\theta_{4e} \cos\theta_{4a} + \sin\theta_{3e} \sin\theta_{4e}]$$

$$I_{44} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) + I_{R4e}$$

$$I_{45} = l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{1e} \cos\theta_{4e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$+ l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{2e} \cos\theta_{4e} \sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$+ l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{3e} \cos\theta_{4e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{46} = l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{2e} \cos\theta_{4e} \sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$+ l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{3e} \cos\theta_{4e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{47} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\sin\theta_{3e} \cos\theta_{4e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{48} = I_{49} = I_{4,10} = I_{4,11} = I_{4,12} = 0$$

$$I_{51} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) [\cos\theta_{1e} \sin\theta_{2e} \sin\theta_{2a}]$$

$$- l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\cos\theta_{1e} \sin\theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$- l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{1e} \sin\theta_{4e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{52} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) [\cos\theta_{2e} \sin\theta_{1e} \sin\theta_{2a}]$$

$$- l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\cos\theta_{2e} \sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a}]$$

$$- l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{2e} \sin\theta_{4e} \sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{53} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\cos\theta_{3e} \sin\theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$+ l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) [\cos\theta_{3e} \sin\theta_{2e} \sin\theta_{3a}]$$

$$- l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{3e} \sin\theta_{4e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{54} = l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{4e} \sin\theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$+ l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{4e} \sin\theta_{2e} \sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$+ l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) [\cos\theta_{4e} \sin\theta_{3e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{55} = l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{1e}]$$
$$+ l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{2e}] + l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}]$$
$$+ 2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ 2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$
$$+ 2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_3l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}] + I_{R1a}$$

$$I_{56} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{2e}] + l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{2e}\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}]$$
$$+ l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ l_1l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$
$$+ 2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_3l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}]$$

$$I_{57} = l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}] + l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{1e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$
$$+ l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2 l_3 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}]$$

$$I_{58} = l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ l_3 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}]$$

$$I_{59} = I_{5,10} = I_{5,11} = I_{5,12} = 0$$

$$I_{61} = -l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}] - l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4\right.$$
$$\left. + m_c\right)[\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] - l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left. + m_c\right)[\cos\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{62} = -l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}] - l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left. + m_c\right)[\cos\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{63} = l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{3a}] - l_3 l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left. + m_c\right)[\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\sin\theta_{4a}]$$

$$I_{64} = l_2 l_4(m_4 + m_c)[\cos\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})] + l_3 l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left. + m_c\right)[\cos\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{4a}]$$

$$I_{65} = l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{2e}] + l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ l_1 l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}]$$
$$+ l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$+ l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$
$$+ 2l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_3 l_4\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}]$$

$$I_{66} = l_2^2(m_3 + m_4 + m_c)[\sin^2\theta_{2e}] + l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}]$$
$$+ l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ 2l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$
$$+ 2l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_3 l_4\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}] + I_{R2a}$$

$$I_{67} = l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}] + l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ l_2 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}]$$
$$+ l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ 2l_3 l_4\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}]$$

$$I_{68} = l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}] + l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$
$$+ l_3 l_4\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\sin\theta_{4e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}]$$

$$I_{69} = I_{6,10} = I_{6,11} = I_{6,12} = 0$$

$$I_{71} = -l_1 l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$
$$- l_1 l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\cos\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{72} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)[\cos\theta_{2e} \sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a}]$$
$$- l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\cos\theta_{2e} \sin\theta_{4e} \sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})]$$

$$I_{73} = -l_3 l_4 (m_4 + m_c)[\cos\theta_{3e} \sin\theta_{4e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{74} = l_3 l_4 (m_4 + m_c)[\cos\theta_{4e} \sin\theta_{3e} \sin\theta_{4a}]$$

$$I_{75} = I_{57}$$

$$I_{76} = I_{67}$$

$$I_{77} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)[\sin^2\theta_{3e}] + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}]$$
$$+ 2 l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e} \sin\theta_{3e} \cos\theta_{4a}] + I_{R3a}$$

$$I_{78} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}] + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin\theta_{4e} \sin\theta_{3e} \cos\theta_{4a}]$$

$$I_{79} = I_{7,10} = I_{7,11} = I_{7,12} = 0$$

$$I_{81} = I_{18}$$

$$I_{82} = I_{28}$$

$$I_{83} = I_{38}$$

$$I_{84} = I_{48} = 0$$

$$I_{85} = I_{58}$$

$$I_{86} = I_{68}$$

$$I_{87} = I_{78}$$

$$I_{88} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)[\sin^2\theta_{4e}] + I_{R4a}$$

$$I_{89} = I_{8,10} = I_{8,11} = I_{8,12} = 0$$

$$I_{91} = I_{92} = I_{93} = I_{94} = I_{95} = I_{96} = I_{97} = I_{98} = I_{99} = I_{9,10} = I_{9,11} = 0$$

$$I_{9,12} = I_{T1}$$

$$I_{10,1} = I_{10,2} = I_{10,3} = I_{10,4} = I_{10,5} = I_{10,6} = I_{10,7} = I_{10,8} = I_{10,9} = I_{10,11} = I_{10,12} = 0$$

$$I_{10,10} = I_{T2}$$

$$I_{11,1} = I_{11,2} = I_{11,3} = I_{11,4} = I_{11,5} = I_{11,6} = I_{11,7} = I_{11,8} = I_{11,9} = I_{11,10} = I_{11,12} = 0$$

$$I_{11,11} = I_{T3}$$

$$I_{12,1} = I_{12,2} = I_{12,3} = I_{12,4} = I_{12,5} = I_{12,6} = I_{12,7} = I_{12,8} = I_{12,9} = I_{12,10} = I_{12,11}$$
$$= 0$$

$$I_{12,12} = I_{T4} + I_{Tc}$$

Os elementos da matriz das constantes de atrito são dados por:

$C_{11} = C_{1e} + C_{2e}$; $C_{12} = -C_{2e}$; $C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = C_{1.10} =$
$C_{1,11} = C_{1,12} = 0$;
$C_{21} = C_{12}$; $C_{22} = C_{2e} + C_{3e}$; $C_{23} = -C_{3e}$; $C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{28} = C_{29} =$
$C_{2.10} = C_{2,11} = C_{2,12} = 0$;
$C_{31} = C_{13}$; $C_{32} = C_{23}$; $C_{33} = C_{3e} + C_{4e}$; $C_{34} = -C_{4e}$;$C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{38} = C_{39} =$
$C_{3.10} = C_{3,11} = C_{3,12} = 0$;
$C_{41} = C_{42} = 0$; $C_{43} = C_{34}$; $C_{44} = C_{4e}$; $C_{45} = C_{46} = C_{47} = C_{48} = C_{49} = C_{4.10} =$
$C_{4,11} = C_{4,12} = 0$;
$C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{54} = 0$; $C_{55} = C_{1a} + C_{2a}$; $C_{56} = -C_{2a}$; $C_{57} = C_{58} = C_{59} =$
$C_{5,10} = C_{5,11} = C_{5,12} = 0$;
$C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0$; $C_{65} = C_{56}$; $C_{66} = C_{2a} + C_{3a}$; $C_{67} = -C_{3a}$; $C_{68} = C_{69} =$
$C_{6,10} = C_{6,11} = C_{6,12} = 0$;
$C_{71} = C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = 0$; $C_{76} = C_{67}$; $C_{77} = C_{3a} + C_{4a}$; $C_{78} = -C_{4a}$
$C_{79} = C_{7,10} = C_{7,11} = C_{7,12} = 0$;
$C_{81} = C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{85} = C_{86} = 0$; $C_{87} = C_{78}$; $C_{88} = C_{4a}$; $C_{89} = C_{8,10} =$
$C_{8,11} = C_{8,12} = 0$;
$C_{91} = C_{92} = C_{93} = C_{94} = C_{95} = C_{96} = C_{97} = C_{98} = 0$; $C_{99} = C_{1T} + C_{2T}$;
$C_{9,10} = -C_{2T}$; $C_{9,11} = C_{9,12} = 0$;
$C_{10,1} = C_{10,2} = C_{10,3} = C_{10,4} = C_{10,5} = C_{10,6} = C_{10,7} = C_{10.8} = 0$; $C_{10,9} = C_{9,10}$;
$C_{10,10} = C_{2T} + C_{3T}$; $C_{10,11} = -C_{3T}$; $C_{10,12} = 0$;
$C_{11,1} = C_{11,2} = C_{11,3} = C_{11,4} = C_{11,5} = C_{11,6} = C_{11,7} = C_{11.8} = C_{11.9} = 0$;
$C_{11.10} = C_{10,11}$; $C_{11,11} = C_{3T} + C_{4T}$; $C_{11,12} = -C_{4T}$;
$C_{12,1} = C_{12,2} = C_{12,3} = C_{12,4} = C_{12,5} = C_{12,6} = C_{12,7} = C_{12.8} = C_{12.9} = C_{12.10} = 0$
$C_{12.11} = C_{11,12}$; $C_{12.12} = C_{4T}$

Os elementos da matriz das constantes elásticas são dados por:

$k_{11} = k_{1e} + k_{2e}$; $k_{12} = -k_{2e}$; $k_{13} = k_{14} = k_{15} = k_{16} = k_{17} = k_{18} = k_{19} = k_{1,10} =$
$k_{1,11} = k_{1,12} = 0$;
$k_{21} = k_{12}$; $k_{22} = k_{2e} + k_{3e}$; $k_{23} = -k_{3e}$; $k_{24} = k_{25} = k_{26} = k_{27} = k_{28} = k_{29} =$
$k_{2,10} = 2 = k_{2,12} = 0$;
$k_{31} = 0$; $k_{32} = k_{23}$; $k_{33} = k_{3e} + k_{4e}$; $k_{34} = -k_{4e}$; $k_{35} = k_{36} = k_{37} = k_{38} = k_{39} =$

$k_{3,10} = k_{3,11} = k_{3,12} = 0;$

$k_{41} = k_{42} = 0;\ k_{43} = k_{34};\ k_{44} = k_{4e};\ k_{45} = k_{46} = k_{47} = k_{48} = k_{49} = k_{4,10} =$

$k_{4,11} = k_{4,12} = 0;$

$k_{51} = k_{52} = k_{53} = k_{54} = 0;\ k_{55} = k_{1a} + k_{2a};\ k_{56} = -k_{2a};\ k_{57} = k_{58} = k_{59} =$

$k_{5,10} = k_{5,11} = k_{5,12} = 0;$

$k_{61} = k_{62} = k_{63} = k_{64} = 0;\ k_{65} = k_{56};\ k_{66} = k_{2a} + k_{3a};\ k_{67} = k_{3a};\ k_{68} = k_{69} =$

$k_{6,10} = k_{6,11} = k_{6,12} = 0;$

$k_{71} = k_{72} = k_{73} = k_{74} = k_{75} = 0;\ k_{76} = -k_{3a};\ k_{77} = k_{3a} + k_{4a};\ k_{78} = -k_{4a};$

$k_{79} = k_{7,10} = k_{7,11} = k_{7,12} = 0;$

$k_{81} = k_{82} = k_{83} = k_{84} = k_{85} = k_{86} = 0;\ k_{87} = k_{78};\ k_{88} = k_{4a};\ k_{89} = k_{8,10} =$

$k_{8,11} = k_{8,12} = 0;$

$k_{91} = k_{92} = k_{93} = k_{94} = k_{95} = k_{96} = k_{97} = k_{98} = 0;\ k_{99} = k_{1T} + k_{2T};$

$k_{9,10} = -k_{2T};\ k_{9,11} = k_{9,12} = 0;$

$k_{10,1} = k_{10,2} = k_{10,3} = k_{10,4} = k_{10,5} = k_{10,6} = k_{10,7} = k_{10,8} = 0;\ k_{10,9} = k_{9,10};$

$k_{10,10} = k_{2T} + k_{3T};\ k_{10,11} = -k_{3T};\ k_{10,12} = 0;$

$k_{11,1} = k_{11,2} = k_{11,3} = k_{11,4} = k_{11,5} = k_{11,6} = k_{11,7} = k_{11,8} = k_{11,9} = 0;\ k_{11,10} =$

$k_{10,11};\ k_{11,11} = k_{3T} + k_{4T};\ k_{11,12} = -k_{4T}$

$k_{12,1} = k_{12,2} = k_{12,3} = k_{12,4} = k_{12,5} = k_{12,6} = k_{12,7} = k_{12,8} = k_{12,9} = k_{12,10} = 0;$

$k_{12,11} = k_{11,12};\ k_{12,12} = k_{4T}$

As componentes do vetor coriolis-centrífugo são dados por:

$$f_1 = -l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right)\{\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{1a}^2\}$$

$$- 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4\right.$$

$$\left. + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\left[\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2}\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\big)\dot{\theta}_{2e}\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{2e}^2\right\}$$

$$- 2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4\right.$$

$$\left. + m_c\right)\left\{\cos\theta_{1e}\left[\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left(\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left. + \big(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\big)\right)$$

$$\left. + \cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\big(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{3e}\right]$$

$$\left. -\frac{1}{2}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{3e}^2\right\} - 2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)$$

$$f_2 = -2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2}{2} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}\right)$$
$$- 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\left[\sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right) - \cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\,\dot{\theta}_{1e}^2\right\}$$
$$- 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\left[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right.\right.\right.$$
$$\left.+ \left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\right)\right)$$
$$\left.\left.+ \cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{3e}\right] - \frac{1}{2}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\,\dot{\theta}_{3e}^2\right\}$$
$$- 2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{\cos\theta_{2e}\left[\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{3a} + \theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{4a}^2 + \dot{\theta}_{4e}^2}{2}\right.\right.\right.$$
$$\left.+ \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{4a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{4a} + \dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{4a}\right)$$
$$\left.+ \cos\theta_{4e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{4a}\right)\dot{\theta}_{4e}\right]$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{4e}\,\dot{\theta}_{4e}^2\right\}$$

$$
\begin{aligned}
f_3 = -2l_3^2 \Big(\frac{m_3}{4} &+ m_4 \\
&+ m_c\Big)\Bigg\{\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\Bigg(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{3a}^2}{2} \\
&+ \big(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\big)\Bigg)\Bigg\} \\
&- 2l_1 l_3\Big(\frac{m_3}{2}+m_4 \\
&+ m_c\Big)\Bigg\{\cos\theta_{1e}\Bigg[\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a}+\theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{3a}^2+\dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right) \\
&+ \cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a}+\theta_{3a})\big(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{3e}\Bigg] \\
&- \frac{1}{2}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{3e}^2\Bigg\} \\
&- 2l_2 l_3\Big(\frac{m_3}{2}+m_4 \\
&+ m_c\Big)\Bigg\{\cos\theta_{2e}\Bigg[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\Bigg(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{3a}^2+\dot{\theta}_{3e}^2}{2}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} \\
&+ \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\Bigg) - \cos\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\big(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{3e}\Bigg] \\
&- \frac{1}{2}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\,\dot{\theta}_{2e}^2\Bigg\} \\
&- 2l_3 l_4\Big(\frac{m_4}{2} \\
&+ m_c\Big)\Bigg\{\cos\theta_{1e}\Bigg[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}\Bigg(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{3a}^2+\dot{\theta}_{3e}^2}{2} \\
&+ \big(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\big)\Bigg) \\
&- \cos\theta_{3e}\sin\theta_{4a}\big(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a}\big)\dot{\theta}_{4e}\Bigg] - \frac{1}{2}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\,\dot{\theta}_{3e}^2\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$f_4 = -2l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)\left\{\sin\theta_{4e}\cos\theta_{4e}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{3a}^2+\dot{\theta}_{4a}^2}{2} + \left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{4a}+\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{4a}+\dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{4a}\right)\right)\right\}$$
$$- 2l_1l_4\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{4e}\left[\sin\theta_{1e}\cos(\theta_{2a}+\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{1e}^2\right) - \cos\theta_{1e}\sin(\theta_{2a}+\theta_{3a}+\theta_{4a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\dot{\theta}_{1e}^2\right\}$$
$$- 2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{4e}\left[\sin\theta_{2e}\cos(\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{2e}^2}{2} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}\right) - \cos\theta_{2e}\sin(\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}\right)\dot{\theta}_{2e}\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\,\dot{\theta}_{2e}^2\right\}$$
$$- 2l_3l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{4e}\left[\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{3a}^2+\dot{\theta}_{3e}^2}{2} + \left(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}\right)\right) - \cos\theta_{3e}\sin\theta_{4a}\left(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{3e}\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\dot{\theta}_{3e}^2\right\}$$

$$f_5 = 2l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right)\{\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\}$$
$$+ 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)\{\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e}\}$$
$$+ 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)\{\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e}\}$$
$$+ 2l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)\{\sin\theta_{4e}\cos\theta_{4e}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{4a})\dot{\theta}_{3e}\}$$
$$+ 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{-\sin\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}\right)\right.$$
$$+ \sin\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e}$$
$$\left.+ \cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right\}$$
$$+ 2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{-\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2}\right.\right.$$
$$\left.+ \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a}\right)$$
$$+ \sin\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e}$$
$$\left.+ \cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right\}$$
$$+ 2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{-\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}\right.$$
$$+ \theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{4a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{4e}^2}{2} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{4a}\right.$$
$$\left.+ \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{4a} + \dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{4a}\right)$$
$$+ \sin\theta_{1e}\cos\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{4a})\dot{\theta}_{4e}$$
$$\left.+ \cos\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})\,\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right\}$$
$$+ 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{-\sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\left(\frac{\dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2} + (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{3a}\right)\right.$$
$$+ \cos\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e}$$
$$\left.+ \sin\theta_{2e}\cos\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\,(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e}\right\}$$
$$+ 2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left.+ m_c\right)\left\{-\sin\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{3a} + \theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{4a}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{4e}^2}{2}\right.\right.$$

$$+ \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{4a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{4a} + \dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{4a}\Big)$$
$$+ \cos \theta_{2e} \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{3a} + \theta_{4a}) \left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\right)\dot{\theta}_{2e}$$
$$+ \sin \theta_{2e} \cos \theta_{4e} \cos(\theta_{3a} + \theta_{4a}) \left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{4a}\right)\dot{\theta}_{4e}\Big\}$$
$$+ 2l_3l_4\Big(\frac{m_4}{2}$$
$$+ m_c\Big)\Big\{- \sin \theta_{3e} \sin \theta_{4e} \sin \theta_{4a}\Big(\frac{\dot{\theta}_{4a}^2 - \dot{\theta}_{3e}^2 + \dot{\theta}_{4e}^2}{2}$$
$$+ \left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{4a}\Big)$$
$$+ \sin \theta_{3e} \cos \theta_{4e} \cos \theta_{4a}\theta_{4a} \left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{4a}\right)\dot{\theta}_{4e}$$
$$+ \cos \theta_{3e} \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{3e}\Big\}$$

$$f_6 = 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)\left\{sin\, \theta_{2e}\, cos\, \theta_{2e}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\right)\dot{\theta}_{2e}\right\}$$
$$+ 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)\left\{sin\, \theta_{3e}\, cos\, \theta_{3e}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{3e}\right\}$$
$$+ 2l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)\left\{sin\, \theta_{4e}\, cos\, \theta_{4e}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{4a}\right)\dot{\theta}_{4e}\right\}$$
$$+ 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)\Big\{cos\, \theta_{1e}\, sin\, \theta_{2e}\, cos\, \theta_{2a}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}$$
$$+ sin\, \theta_{1e}\, sin\, \theta_{2e}\, sin\, \theta_{2a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\Big\}$$
$$+ 2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)\Big\{cos\, \theta_{1e}\, sin\, \theta_{3e}\, cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}$$
$$+ sin\, \theta_{1e}\, sin\, \theta_{3e}\, sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\Big\}$$
$$+ 2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\Big\{cos\, \theta_{1e}\, sin\, \theta_{4e}\, cos(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}$$
$$+ sin\, \theta_{1e}\, sin\, \theta_{4e}\, sin(\theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\Big\}$$
$$+ 2l_2l_3\Big(\frac{m_3}{2} + m_4$$
$$+ m_c\Big)\Big\{- sin\, \theta_{2e}\, sin\, \theta_{3e}\, sin\, \theta_{3a}\left[\left(\frac{\dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2}{2}\right) + \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}\right]$$
$$+ cos\, \theta_{2e}\, sin\, \theta_{3e}\, cos\, \theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}\right)\dot{\theta}_{2e}$$
$$+ sin\, \theta_{2e}\, cos\, \theta_{3e}\, cos\, \theta_{3a}\left(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}\right)\dot{\theta}_{3e}\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&+2l_2 l_4\left(\frac{m_4}{2}+m_c\right)\Bigg\{-\sin\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\frac{\dot\theta_{3a}^2+\dot\theta_{4a}^2-\dot\theta_{2e}^2+\dot\theta_{4e}^2}{2}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{2a}\right.\\
&\qquad\left.+\dot\theta_{2a}\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{4a}+\dot\theta_{2a}\dot\theta_{4a}+\dot\theta_{3a}\dot\theta_{4a}\right)\\
&\qquad+\cos\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{3a}+\theta_{4a})\big(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}\big)\dot\theta_{2e}\\
&\qquad+\sin\theta_{2e}\cos\theta_{4e}\cos(\theta_{3a}+\theta_{4a})\big(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{4a}\big)\dot\theta_{4e}\Bigg\}\\
&\qquad+2l_3 l_4\left(\frac{m_4}{2}+m_c\right)\Bigg\{-\sin\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\sin\theta_{4a}\left(\frac{\dot\theta_{4a}^2-\dot\theta_{3e}^2+\dot\theta_{4e}^2}{2}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{2a}\right.\\
&\qquad\left.+\dot\theta_{2a}\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{3a}+\big(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a}\big)\dot\theta_{4a}\right)\\
&\qquad+\sin\theta_{3e}\cos\theta_{4e}\cos\theta_{4a}\big(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{4a}\big)\dot\theta_{4e}\\
&\qquad+\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\cos\theta_{4a}\big(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a}\big)\dot\theta_{3e}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$f_7 = -2l_3^2\left(\frac{m_3}{4}+m_4+m_c\right)\{sin\,\theta_{3e}\,cos\,\theta_{3e}\,(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e}\}$$
$$+\,2l_4^2\left(\frac{m_4}{4}+m_c\right)\{sin\,\theta_{4e}\,cos\,\theta_{4e}\,(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{4a})\dot{\theta}_{4e}\}$$
$$+\,2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2}+m_4\right.$$
$$\left.+\,m_c\right)\left\{sin\,\theta_{1e}\,sin\,\theta_{3e}\,sin(\theta_{2a}+\theta_{3a})\left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,cos\,\theta_{1e}\,sin\,\theta_{3e}\,cos(\theta_{2a}+\theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right\}$$
$$+\,2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left.+\,m_c\right)\left\{sin\,\theta_{1e}\,sin\,\theta_{4e}\,sin(\theta_{2a}+\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{1e}^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,cos\,\theta_{1e}\,sin\,\theta_{4e}\,cos(\theta_{2a}+\theta_{3a}+\theta_{4a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e}\right\}$$
$$+\,2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2}+m_4\right.$$
$$\left.+\,m_c\right)\left\{sin\,\theta_{2e}\,sin\,\theta_{3e}\,sin\,\theta_{3a}\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{2e}^2}{2}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}\right)\right.$$
$$\left.+\,cos\,\theta_{2e}\,sin\,\theta_{3e}\,cos\,\theta_{3a}(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e}\right\}$$
$$+\,2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left.+\,m_c\right)\left\{sin\,\theta_{2e}\,sin\,\theta_{4e}\,sin(\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2+\dot{\theta}_{2a}^2+\dot{\theta}_{2e}^2}{2}+\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a}\right)\right.$$
$$\left.+\,cos\,\theta_{2e}\,sin\,\theta_{4e}\,cos(\theta_{3a}+\theta_{4a})(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a})\dot{\theta}_{2e}\right\}$$
$$+\,2l_3l_4\left(\frac{m_4}{2}\right.$$
$$\left.+\,m_c\right)\left\{-\,sin\,\theta_{3e}\,sin\,\theta_{4e}\,sin\,\theta_{4a}\left(\frac{\dot{\theta}_{4a}^2-\dot{\theta}_{3e}^2+\dot{\theta}_{4e}^2}{2}\right.\right.$$
$$\left.+\,(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{4a}\right)$$
$$+\,cos\,\theta_{3e}\,sin\,\theta_{4e}\,cos\,\theta_{4a}(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a})\dot{\theta}_{3e}$$
$$\left.+\,sin\,\theta_{3e}\,cos\,\theta_{4e}\,cos\,\theta_{4a}\,(\dot{\theta}_{1a}+\dot{\theta}_{2a}+\dot{\theta}_{3a}+\dot{\theta}_{4a})\dot{\theta}_{4e}\right\}$$

$$f_8 = -2l_4^2\left(\frac{m_4}{2}+m_c\right)\left\{\cos\theta_{4e}\sin\theta_{4e}\left(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{4a}\right)\dot\theta_{4e}\right\}$$
$$-2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2}+m_c\right)\left\{-\sin\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{2a}+\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\frac{\dot\theta_{1a}^2+\dot\theta_{1e}^2}{2}\right)-\cos\theta_{1e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{2a}+\theta_{3a}+\theta_{4a})\,\dot\theta_{1a}\dot\theta_{1e}\right\}$$
$$-2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2}+m_c\right)\left\{-\sin\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\sin(\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\frac{\dot\theta_{1a}^2+\dot\theta_{2a}^2+\dot\theta_{2e}^2}{2}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{2a}\right)-\cos\theta_{2e}\sin\theta_{4e}\cos(\theta_{3a}+\theta_{4a})\left(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}\right)\dot\theta_{2e}\right\}$$
$$-2l_3l_4\left(\frac{m_4}{2}+m_c\right)\left\{-\sin\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\sin\theta_{4a}\left(\left(\dot\theta_{1a}\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{1a}\dot\theta_{3a}+\dot\theta_{2a}\dot\theta_{3a}\right)+\frac{\dot\theta_{1a}^2+\dot\theta_{2a}^2+\dot\theta_{3a}^2+\dot\theta_{3e}^2}{2}\right)-\cos\theta_{3e}\sin\theta_{4e}\cos\theta_{4a}\left(\dot\theta_{1a}+\dot\theta_{2a}+\dot\theta_{3a}\right)\dot\theta_{3e}\right\}$$

$$f_9 = f_{10} = f_{11} = f_{12} = 0$$

As componentes do vetor gravitacional são dadas por:

$$G_1 = l_1\left(\frac{m_1}{2}+m_2+m_3+m_4\right)g\sin\theta_{1e}$$
$$G_2 = l_2\left(\frac{m_2}{2}+m_3+m_4\right)g\sin\theta_{2e}$$
$$G_3 = l_3\left(\frac{m_3}{2}+m_4\right)g\sin\theta_{3e}$$
$$G_4 = l_4\left(\frac{m_4}{2}\right)g\sin\theta_{4e}$$
$$G_5 = G_6 = G_7 = G_8 = G_9 = G_{10} = G_{11} = G_{12} = 0$$

As componentes do vetor dos torques são dadas por:

$$T_{m1} = T_{\theta 1e}\,;\ T_{m2} = T_{\theta 2e}\,;\ T_{m3} = T_{\theta 3e}\,;\ T_{m4} = T_{\theta 4e}\,;$$
$$T_{m5} = T_{\theta 1a}\,;\ T_{m6} = T_{\theta 2a}\,;\ T_{m7} = T_{\theta 3a}\,;\ T_{m8} = T_{\theta 4a}\,;$$
$$T_{m9} = T_{\theta 1t}\,;\ T_{m10} = T_{\theta 2t}\,;\ T_{m11} = T_{\theta 3t}\,;\ T_{m12} = T_{\theta 4t}\,;$$