UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO PÓS FLAMBAGEM DE PLACAS FINAS DE AÇO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL EM ESTRUTURAS NAVAIS E OFFSHORE

Lillian Gonçalves Baptista
Engenheira Civil

Rio Grande
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO PÓS FLAMBAGEM DE PLACAS FINAS DE AÇO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL EM ESTRUTURAS NAVAIS E OFFSHORE

Lillian Gonçalves Baptista
Engenheira Civil

Dissertação apresentada à Comissão de Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real

Rio Grande
2014

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela banca examinadora do Curso de Pós-Graduação.

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
Orientador

Prof. Dr. Jose Antonio Scotti Fontoura
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga
Universidade Federal de Pelotas - UFPEL (membro externo)

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
FURG

Prof. Dr. Luiz Antônio Bragança da Cunda
FURG

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Jeanete e ao meu pai Renato, por terem sempre me apoiado em todas as minhas decisões, por estarem sempre ao meu lado e por serem a minha base.

Ao Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real pela orientação, paciência, dedicação, amizade e incentivo ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores e alunos do Laboratório de Engenharia Costeira - LEC, por servirem de companhia em tardes de pesquisa, compartilhando momentos de aprendizado e alegrias.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do trabalho.

À FURG por ofertar o Curso de Mestrado em Engenharia Oceânica.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein

RESUMO

BAPTISTA, L. G. **Simulação Numérica Não-Linear do Comportamento Pós Flambagem de Placas Finas de Aço Sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais e Offshore.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, 2014

Placas são elementos estruturais de superfície plana amplamente empregados em engenharia, cuja espessura é pequena quando comparada com as demais dimensões. Estas estruturas laminares podem ser delimitadas por enrijecedores, formando parte integrante de estruturas de navios, plataformas de petróleo offshore, comportas e docas flutuantes. É muito comum encontrar perfurações nessas placas para inspeção e manutenção, e o tamanho desses furos tem significativa importância no desempenho da estrutura. Uma análise não-linear da flambagem com base no método dos elementos finitos, considerando-se as imperfeições geométricas iniciais e as não-linearidades do material, foi realizada para um grupo de 150 placas com características usuais no polo naval de Rio Grande, onde a largura é mantida constante e o comprimento é variado, assim como a espessura e o diâmetro do furo circular centralizado. A modelagem computacional foi realizada no software ANSYS, baseada no Método dos Elementos Finitos, onde foi possível obter a carga última para cada modelo e analisar a influência do tamanho do furo, da esbeltez e do comprimento variável na capacidade de carga das placas. Ficou evidente que a força máxima é significativamente reduzida pelo furo. Nota-se também que quanto mais espessa a placa maior sua resistência, e que a capacidade de carga é raramente afetada com a variação de seu comprimento. Foi possível também realizar uma análise onde, para um dado diâmetro de furo exigido, qual comprimento e espessura de placa fornece uma estrutura economicamente mais viável, onde o consumo de aço seja menor e a resistência máxima atingida.

Palavras-chave: flambagem de placas, método dos elementos finitos, simulação numérica, análise não-linear

ABSTRACT

BAPTISTA, L. G. **Numerical Simulation of Nonlinear Behavior Post Buckling of Thin Steel Plates Under Uniaxial Compression in Naval and Offshore Structures.** Dissertation (Master in Oceanic Engineering) - Pos-Graduate Program in Oceanic Engineering, FURG, Rio Grande, 2014

Plates are flat surface structural elements widely used in engineering, whose thickness is small compared to other dimensions. These laminar structures can be bounded by stiffeners, forming part of structures of ships, offshore oil platforms gates and floating docks. It is very common to find holes in these plates for inspection and maintenance, and the size of these holes has great importance on the structure performance. A non-linear buckling analysis, based on the finite element method, considering the initial geometric imperfections and material non-linearity was performed for a group of 150 plates with usual features in naval polo from Rio Grande, where the width was kept constant and its length was varied, as well the thickness and the diameter of the central circular hole. The computer modeling was performed using ANSYS software, based on the Finite Element Method. It was possible to get the ultimate strength for each plate model and analyze the influence of the hole size, slenderness and of the variable length on the load carrying capacity of the plates. It was evident that the maximum strength is significantly reduced by the hole. It is noted also that the thicker the plate, the greater its resistance, the load capacity is rarely affected with variation of the your length. It was also possible to do an analysis where, for a given required hole diameter, which length and thickness of plate provides an economically viable structure, where the consumption of steel is less and the maximum strength achieved.

Keywords: buckling of plates, finite element method, numerical simulation, nonlinear analysis

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a comprimento da placa

b largura da placa

t espessura da placa

d_c diâmetro do orifício circular centrado

E módulo de elasticidade

ν coeficiente de poisson

σ_u tensão última

σy tensão de escoamento do material

σ_x tensão normal na direção *x*

σ_y tensão normal na direção y

τ_{xy} tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *x* e paralela à direção *y*

u componente de deslocamento na direção x

v componente de deslocamento na direção y

w componente de deslocamento na direção z

X eixo de coordenada na direção x

Y eixo de coordenada na direção y

Z eixo de coordenada na direção z

P_z carga externa paralela ao eixo z

Q esforço cortante

M momento fletor

M_{xy} momento torçor contido no plano *xy*

ε_x deformação específica normal na direção x

ε_y deformação específica normal na direção y

ε_z	deformação específica normal na direção y
γ_{xz}	deformação de cisalhamento contida no plano xz
γ_{yz}	deformação de cisalhamento contida no plano yz
A'	ponto de referência
D	rigidez à flexão
β	índice de esbeltez
I	momento de inércia
P_{cr}	carga crítica de flambagem
P_{ult}	carga última
K	matriz de rigidez do sistema
F	vetor de forças
k	rigidez da mola

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Placas finas são elementos estruturais amplamente empregados em engenharia. Este fato é explicado por diversos aspectos favoráveis ligados a estes elementos, dentre os quais se destacam a elevada relação resistência-peso e a existência de eficientes métodos analíticos descrevendo seu comportamento mecânico. Exemplos de utilização de placas finas são facilmente encontrados: automóveis, aeronaves, navios, submarinos, plataformas, pontes, prédios, reservatórios, entre outros (Figura 1.1). Portanto, estes elementos são utilizados na construção dos mais diversos tipos de estruturas: mecânicas, civis, navais e oceânicas.

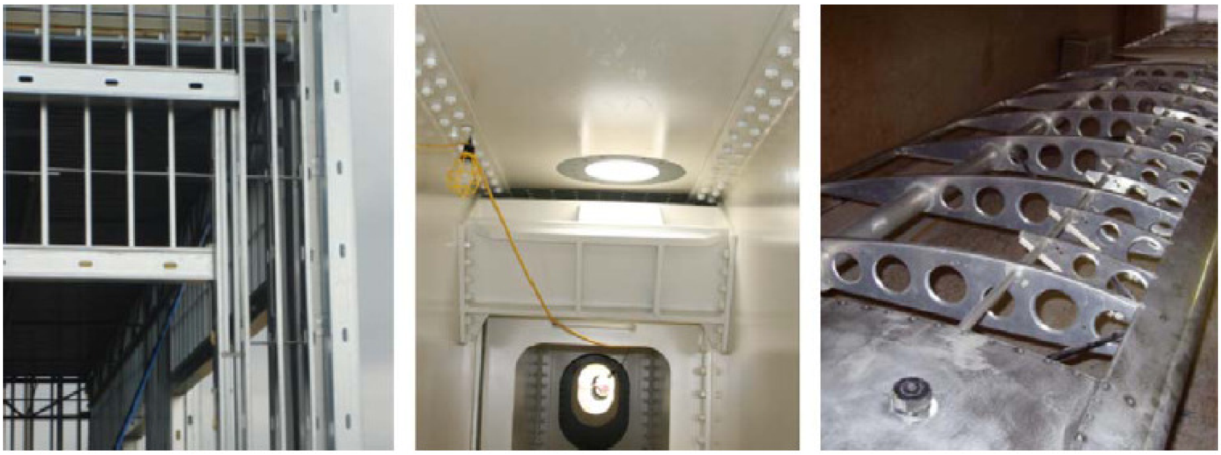

Figura 1.1 - Exemplos de uso de placas finas: (a) estruturas metálicas, (b) navios, (c) asas de aviões (Extraída de Moen e Shafer, 2009)

As placas são caracterizadas por possuírem uma dimensão (espessura) muito menor que as outras. Elas desempenham sua função estrutural sob solicitações de flexão e/ou solicitações em seu próprio plano. As placas podem ser fabricadas com materiais isotrópicos (aço, alumínio, ou titânio, por exemplo) ou com materiais compósitos (que vem sendo bastante utilizado na engenharia estrutural moderna).

Segundo KUMAR (2007), as placas finas limitadas por enrijecedores são parte integrante das estruturas de navios, plataformas de petróleo offshore, comportas e docas flutuantes (Figura 1.2). Aberturas são feitas nessas placas para acesso, manutenção ou redução do peso total (Figura 1.3). A realização dessas aberturas influencia na resistência máxima desses elementos de placa, uma vez que ocorre uma redistribuição das tensões, ocasionando uma mudança no comportamento mecânico da estrutura.

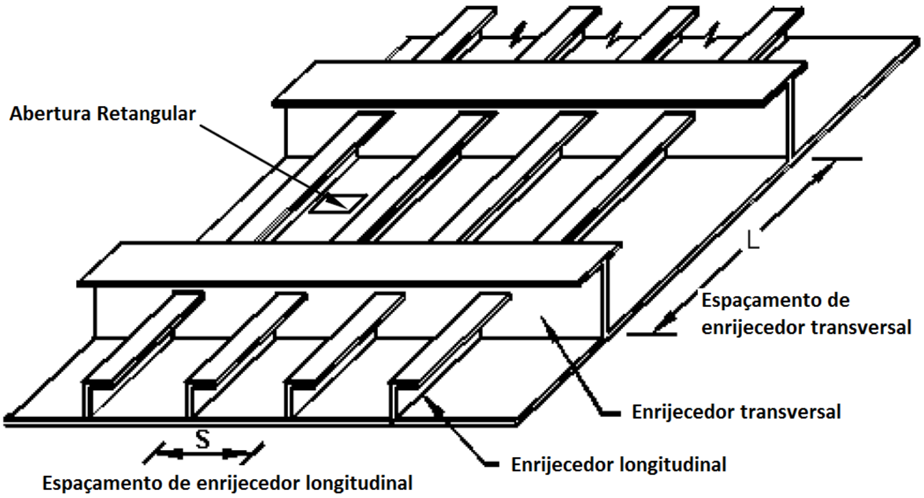

Figura 1.2 - Estrutura típica de um convés de navio (KUMAR, 2007)

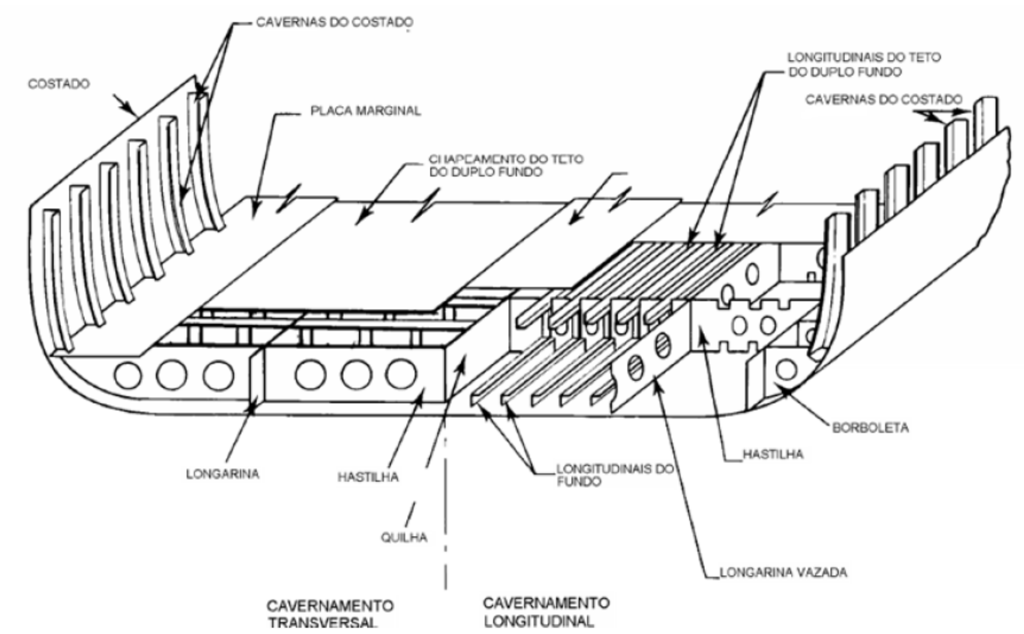

Figura 1.3 - Ilustração da estrutura terciária do duplo-fundo de um navio (Extraída de Elementos Estruturais de Navios, Sâmara Pinto, Rio de Janeiro 2011)

1.2 Revisão da literatura

A investigação da flambagem de placas teve origem na observação do comportamento de placas planas de navios. Foi BRYAN (1891) quem apresentou a primeira solução da equação diferencial de placa de SAINT-VENANT (1883), com a análise da tensão crítica elástica de uma placa retangular apoiada nas quatro bordas e submetida a uma tensão de compressão uniforme longitudinal.

Por volta de 1910, ainda para análise elástica, TIMOSHENKO (1910) apresentou soluções para vários outros casos de condições de contorno. Em seguida, BLEICH (1924) estendeu essa análise para o regime inelástico.

Desde então, o fenômeno da estabilidade de placas tem sido exaustivamente estudado e sintetizado por diversos autores, podendo ser citados como referência:

NARAYANAN e CHOW (1984) desenvolveram gráficos com base na capacidade final de placas perfuradas submetidas à compressão uniaxial com aberturas quadradas e circulares.

ROBERTS e AZIZIAN (1984) geraram as curvas de interação para a força final de placas quadradas com furos quadrados e circulares centrais submetidas à compressão uniaxial, compressão biaxial e cisalhamento puro.

YETTRAM e BROWN (1985) estudaram o comportamento de estabilidade de placas planas quadradas com perfurações quadradas centralizadas.

SHANMUGAM (1997) analisou os efeitos de aberturas em elementos de placa enrijecidos submetidas à compressão uniaxial, compressão biaxial e cisalhamento puro.

SHANMUGAM, THEVENDRAN e TAN (1999) utilizaram o Método dos Elementos Finitos e analisaram a flambagem não-linear de placas quadradas com furos centrados, quadrados e circulares. Concluíram que a capacidade de carga das placas é afetada significativamente pelo tamanho dos furos e pela esbeltez da placa. Também concluíram que placas com furos circulares, de forma geral, tem uma tensão de ruptura maior comparada com as de furos quadrados.

PAIK, THAYAMBALLI e KIM (2001) apresentaram formulações para a resistência última de chapeamento de navios sob a combinação de tensões de compressão biaxial, cisalhamento de borda, e cargas de pressão lateral. Uma análise elastoplástica é feita aplicando-se um deslocamento na placa e monitorando a tensão gerada nela.

EL-SAWY, NAZMY e MARTINI (2004) utilizaram o método de elementos finitos para determinar a tensão de flambagem elastoplástica de placas quadradas e retangulares simplesmente apoiadas com furo circular carregadas uniaxialmente. O estudo recomenda evitar recortes perto da borda da placa, pois isto diminui consideravelmente a tensão crítica de flambagem, especialmente quando a falha ocorre no modo de flambagem elasto-plástica.

REAL e ISOLDI (2011) investigaram o efeito da dimensão do furo e a localização da carga de flambagem elástica de placas retangulares submetidos a carga de compressão uniaxial uniforme, utilizando o método dos elementos finitos.

HELBIG *et al.* (2013) realizou uma análise numérica do comportamento mecânico sob flexão de placas finas de material compósito laminado reforçado por fibras.

Atualmente, os resultados obtidos dos estudos teóricos das placas tem sido comprovados através de estudos numéricos e normalmente são escolhidos como tópico de calibragem e aplicação de métodos de análise computacional para placas. Apesar de o comportamento elástico de placas finas perfuradas ter recebido a atenção de vários pesquisadores nas últimas décadas, muito pouco foi reportado sobre a analise de flambagem não-linear dessas estruturas.

1.3 Proposta de trabalho

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste estudo numérico de placas finas, de material isotrópico e homogêneo, submetidas a solicitações mecânicas de compressão uniaxial no próprio plano, com análise não-linear do comportamento pós-flambagem, é estudar o efeito das perfurações na capacidade resistente, para o seu emprego em estruturas navais e oceânicas a serem construídas no Pólo Naval da cidade de Rio Grande/RS.

1.3.2 Objetivos específicos

a) Realizar a simulação numérica de placas finas, de material isotrópico e homogêneo, usualmente empregadas na construção de plataformas de petróleo offshore;
b) Realizar uma analise não-linear física e geométrica do comportamento pós-flambagem das placas quando submetidas à compressão axial no próprio plano;
c) Analisar a influência da espessura, comprimento da placa e tamanho do furo na resistência última das placas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Teoria de Placas Finas

2.1.1 Introdução

Placas são estruturas de superfície plana, cuja espessura é pequena, quando comparada com as demais dimensões. Estas estruturas laminares podem ser delimitadas por linhas retas ou curvas, porém as formas mais utilizadas são placas retangulares ou circulares. As condições de apoio dos bordos (condições de contorno) da placa podem ser bordo livre, apoio simples ou engaste. Contudo, também é possível a ocorrência de apoios pontuais (colunas ou pilares) e apoios elásticos (molas de translação e molas de rotação). As placas podem suportar carregamentos estáticos ou dinâmicos, que normalmente atuam de forma perpendicular ao seu plano médio. A Figura 2.1 serve para ilustrar a utilização de placas na construção naval.

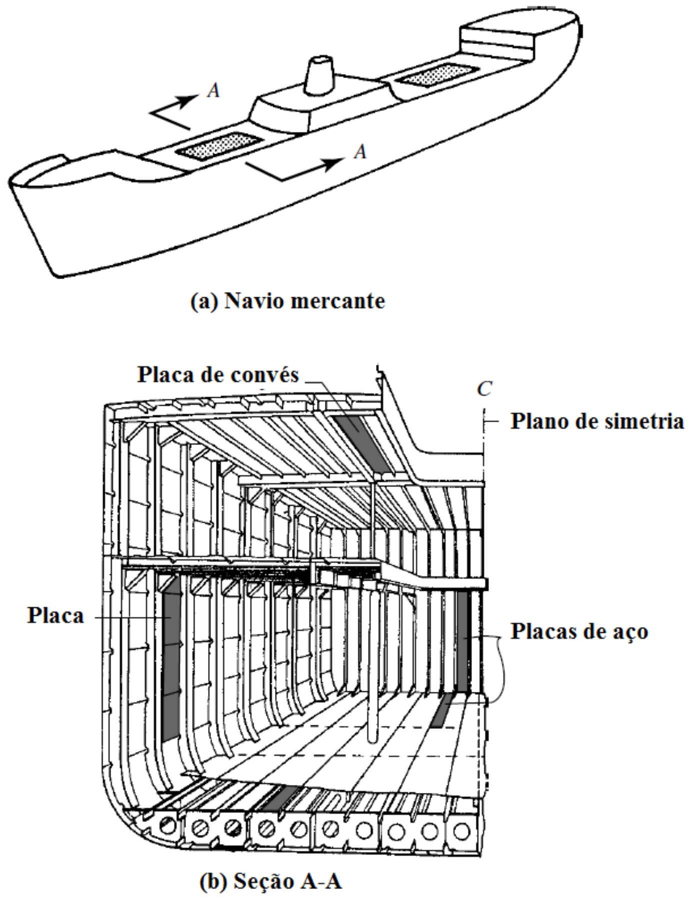

Figura 2.1 - Utilização de placas na construção naval (SZILARD, 2004)

O comportamento mecânico de uma placa pode ser comparado ao de uma grelha formada por um conjunto de vigas ortogonais, porém as placas são mais eficientes na resistência a cargas de superfície devido à sua continuidade física e à contribuição dos momentos torçores. Então, o comportamento resistente bidimensional das placas permite construir estruturas mais leves e oferece, portanto, vantagens econômicas, quando se trata de cobrir uma determinada superfície. As cascas, estruturas laminares de superfície curva, também são eficientes para cobrir superfícies, porém são de fabricação mais complexa e mais cara do que as placas.

Conforme SZILARD (2004), o estudo a seguir será limitado às placas finas, compostas por um material elástico linear, trabalhando dentro do regime de pequenas deformações e de pequenos deslocamentos. Embora restritiva em certos aspectos, esta delimitação permitirá a utilização do Princípio da Superposição dos Efeitos, o que permitirá combinar uma série de soluções simples na resolução de problemas complexos.

2.1.2 Equação diferencial para placas finas

A seguir será apresentado o procedimento para a obtenção da equação diferencial que rege o comportamento de placas finas de um material elástico linear, no regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. O desenvolvimento desta teoria de placas finas para pequenos deslocamentos é usualmente atribuído a Kirchhoff e a Love, porém as contribuições de Bernoulli, Lagrange, Navier, Poisson e Saint-Venant também foram importantes.

2.1.2.1 Sistema de coordenadas e convenção de sinais

A Figura 2.2 apresenta as principais características geométricas de uma placa, o sistema de coordenadas de referência e o carregamento de superfície. A geometria da placa pode ser descrita através de seu plano médio, que corta a espessura ao meio em cada ponto. Para placas retangulares, o uso de um sistema de coordenadas cartesianas é o mais conveniente. As componentes de deslocamento u, v e w e as componentes de forças internas e externas são consideradas positivas quando apontarem para o sentido positivo dos eixos coordenados X, Y e Z. Será adotada a convenção usual em Engenharia, que considera como positivos os momentos fletores que tracionam as fibras inferiores da placa.

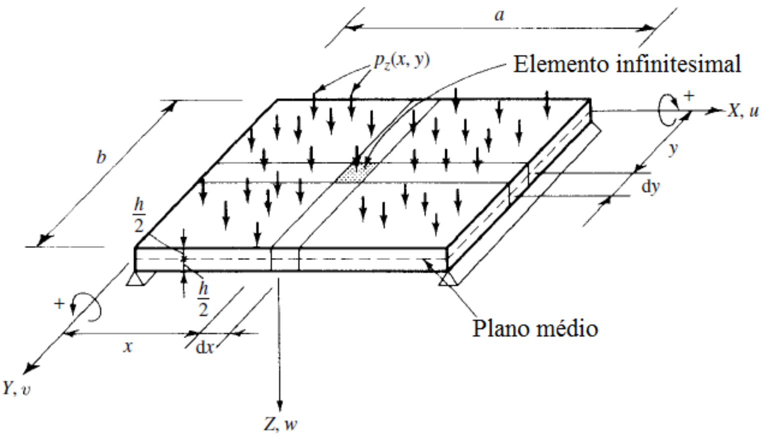

Figura 2.2 - Placa retangular sob carregamento transversal (SZILARD, 2004)

A determinação da equação diferencial para placas finas está baseada nas seguintes hipóteses:

1. O material que compõe a placa é elástico linear, homogêneo e isotrópico.
2. A placa é inicialmente plana.
3. A superfície média da placa permanece livre de tensões durante a flexão.
4. A espessura é constante, sendo pequena quando comparada com as demais dimensões da placa. Uma relação entre o menor lado da placa sobre sua espessura maior ou igual a 10 deve ser admitida.
5. Os deslocamentos transversais $w(x, y)$ são pequenos, quando comparados com a espessura da placa. A teoria de pequenos deslocamentos para placas finas é considerada válida para relações onde o deslocamento pela espessura da placa seja menor ou igual a 10.
6. As inclinações da superfície média (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade.
7. As seções planas e normais à superfície média antes da deformação permanecem planas e normais à superfície média após a deformação. Isto equivale a se desprezar o efeito de empenamento que as deformações por cisalhamento exercem sobre a seção transversal.
8. As deformações causadas por forças coplanares sobre a superfície média podem ser desprezadas quando comparadas com as deformações produzidas pela flexão da placa.

Estas hipóteses, em sua maior parte, correspondem a uma extensão das hipóteses da Teoria Técnica de Vigas para a Teoria de Placas Finas, tendo sido comprovadas experimentalmente.

Dentro do campo de validade destas hipóteses um elemento infinitesimal extraído do interior da placa estará submetido ao estado de tensões indicado na Figura 2.3.

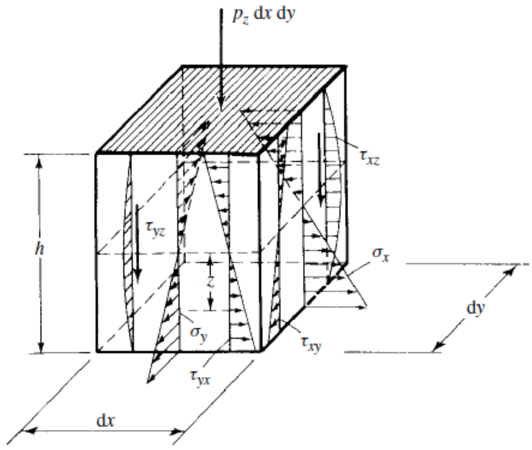

Figura 2.3 - Estado de tensões em um elemento de placa (SZILARD, 2004)

2.1.2.2 Equilíbrio de um elemento de placa

A Figura 2.4 mostra os esforços solicitantes resultantes que atuam sobre um elemento na forma de um paralelepípedo extraído do interior da placa, sob carregamento transversal. Aos esforços que atuam sobre as faces positivas do elemento foram atribuídos sentidos positivos, enquanto que aos esforços que atuam sobre as faces negativas do elemento foram atribuídos sinais negativos. Na forma de notação empregada, o primeiro índice corresponde à direção da normal ao plano onde o esforço atua e o segundo índice à direção em que o esforço atua.

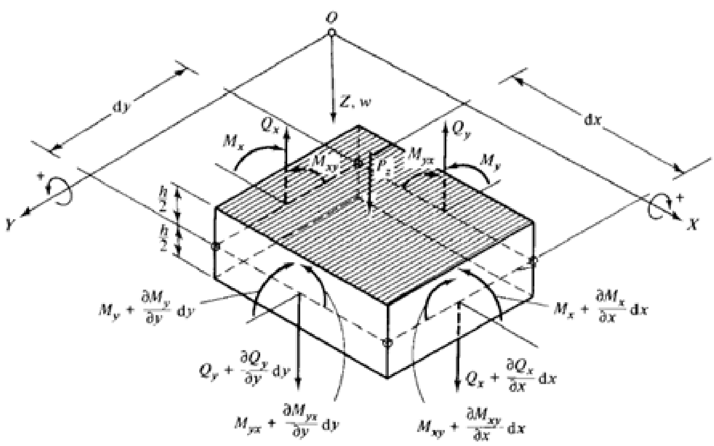

Figura 2.4 - Esforços resultantes atuantes em um elemento de placa (SZILARD, 2004)

O comportamento de uma placa pode ser comparado com o de uma malha de vigas ortogonais, na qual a carga externa P_z é equilibrada pela ação dos esforços cortantes Q_x e Q_y além dos momentos fletores M_x e M_y. A principal diferença está em que na placa existem os momentos torçores M_{xy} e M_{yx}, que também contribuem para resistir ao carregamento externo.

Na teoria de placas é usual trabalhar-se com os esforços solicitantes que atuam por unidade de comprimento da superfície média. Para diferenciar estes esforços distribuídos dos esforços resultantes adota-se a correspondente notação para os esforços por unidade de comprimento: q_x, q_y, m_x, m_y, m_{xy} e m_{yx}. Um elemento de superfície média em equilíbrio sob a ação da carga distribuída p_z, por unidade de superfície, é mostrado na Figura 2.5.

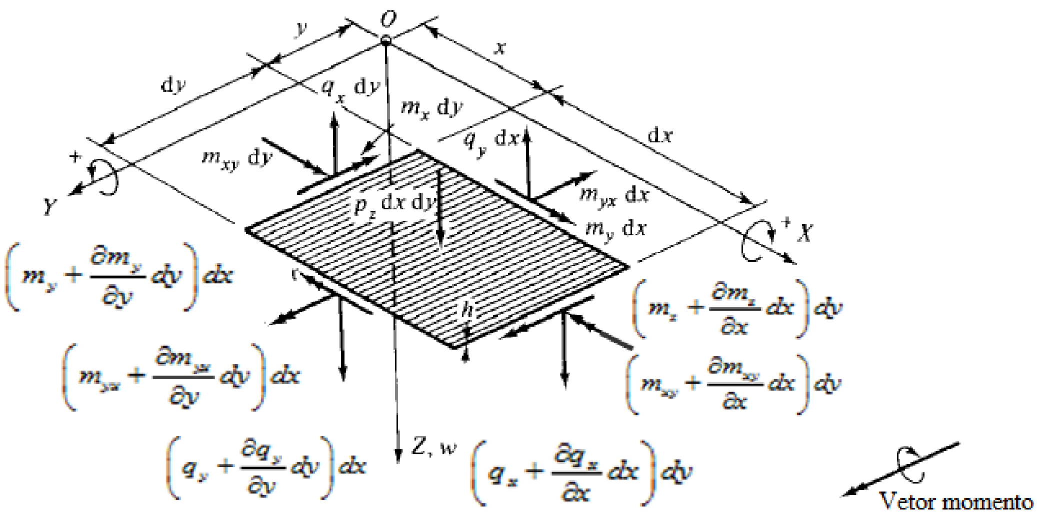

Figura 2.5 - Equilíbrio de um elemento de superfície média da placa (SZILARD, 2004)

Considerando que o elemento de placa está submetido apenas a cargas distribuídas transversais, das seis equações de equilíbrio fundamentais somente as três seguintes podem ser empregadas:

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0 \text{ e } \sum F_z = 0. \tag{2.1}$$

Em primeiro lugar estabelece-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo Y, supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento:

$$\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - m_{yx}dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy\frac{dx}{2} - q_x dy\frac{dx}{2} = 0 \quad (2.2)$$

Expandindo-se e simplificando-se a Equação 2.2 e desprezando-se os infinitésimos de ordem superior, resulta:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dydx - q_x dxdy = 0\,. \qquad (2.3)$$

Dividindo-se a Equação (2.3) por $dxdy$ e isolando-se q_x, chega-se a:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x\,. \qquad (2.4)$$

Procedendo-se de forma análoga para o equilíbrio de momentos em torno do eixo X e supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento, resulta:

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = q_y\,. \qquad (2.5)$$

Fazendo-se agora o equilíbrio de forças na direção Z, chega-se a:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy - q_x dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx - q_y dx + p_z dxdy = 0\,. \qquad (2.6)$$

Expandindo-se e simplificando-se a Equação (2.6) e, depois, dividindo-se por $dxdy$, resulta:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z\,. \qquad (2.7)$$

Substituindo-se as Equações (2.4) e (2.5) na equação (2.7) e lembrando-se que pela reciprocidade das tensões de cisalhamento tem-se que $m_{xy} = m_{yx}$, resulta uma única equação de equilíbrio dada na forma:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z\left(x, y\right). \qquad (2.8)$$

2.1.2.3 Relações deformação-deslocamento para placas finas

Considerando-se que, por hipótese, as deformações de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} e a deformação normal ε_z podem ser desprezadas, em um elemento de placa somente poderão ocorrer as deformações normais ε_x e ε_y, e a deformação de cisalhamento γ_{xy}.

Observando-se, a partir da Figura 2.6, a configuração fletida de uma seção transversal da placa paralela ao eixo X, conforme as hipóteses estabelecidas anteriormente, pode-se concluir que o deslocamento axial u no ponto A' pode ser calculado a partir da expressão:

$$u = -z.\theta = -z.\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \tag{2.9}$$

sendo que o deslocamento axial v, de forma semelhante, será definido por:

$$v = -z.\theta = -z.\frac{\partial w}{\partial y} \quad . \tag{2.10}$$

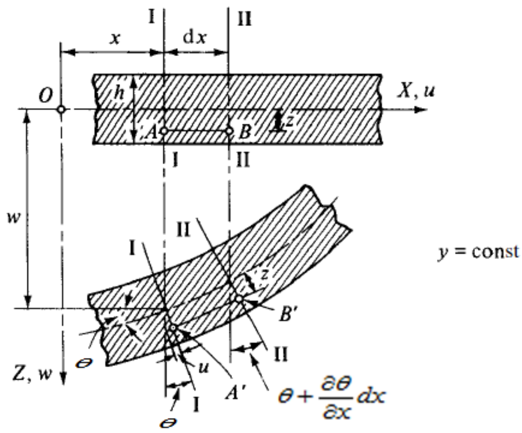

Figura 2.6 - Forma fletida da placa na direção x (SZILARD, 2004)

Substituindo-se a definição do deslocamento axial u na relação deformação-deslocamento clássica da Mecânica dos Sólidos, chega-se a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z.\frac{\partial \theta}{\partial x} = -z.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad . \tag{2.11}$$

Raciocinando-se de forma análoga, para a deflexão da placa na direção Y, resulta:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad . \tag{2.12}$$

A deformação de cisalhamento γ_{xy} relaciona-se com os deslocamentos axiais u e v através da expressão:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{2.13}$$

Substituindo-se as Equações (2.9) e (2.10) na Equação (2.13), resulta:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \tag{2.14}$$

Pode-se, então, definir as curvaturas da placa nas direções X e Y, bem como o seu empenamento, respectivamente, a partir das expressões:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \; \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{ e } \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \tag{2.15}$$

2.1.2.4 Relações tensão-deslocamento para placas finas

Considerando-se as hipóteses formuladas inicialmente, uma lâmina de material situada a uma distância z do plano médio da placa estará submetida a um estado de tensão conforme ilustrado pela Figura 2.7.

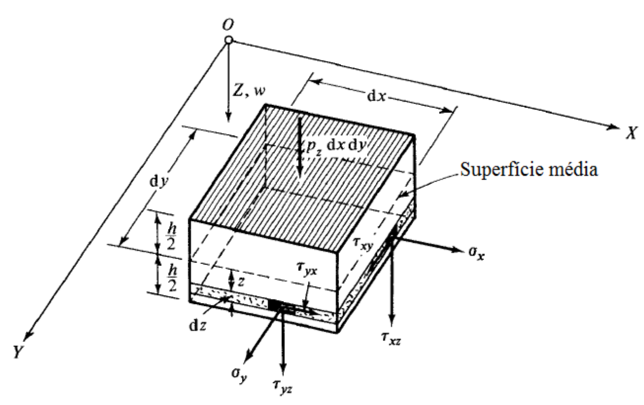

Figura 2.7 - Tensões em um elemento de placa (SZILARD, 2004)

As componentes de tensão no plano $X0Y$ podem ser determinadas a partir das deformações empregando-se a Lei de Hooke para um estado plano de tensões, definida pela Equações 2.16 até 2.18, onde E é o modulo de elasticidade do material:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \tag{2.16}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right), \tag{2.17}$$

$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy} = \tau_{yx} \tag{2.18}$$

Observe-se que a partir das hipóteses iniciais, as deformações de cisalhamento $\gamma_{xz}\,\mathrm{e}\,\gamma_{yz}$ podem ser desprezadas, portanto, as tensões $\tau_{xz}\,\mathrm{e}\,\tau_{yz}$ não poderão ser calculadas utilizando-se a Lei de Hooke. Esta é uma inconsistência da Teoria de Placas Finas, que, contudo, não impede a sua aplicação na solução de problemas práticos de Engenharia.

Substituindo-se as Equações (2.11), (2.12) e (2.14) nas Equações (2.16), (2.17) e (2.18), resultam as relações tensão-deslocamento para placas finas:

$$\sigma_x = -\frac{zE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{2.19}$$

$$\sigma_y = -\frac{zE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{2.20}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{zE}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.21}$$

2.1.2.5 Relações esforço solicitante-deslocamento para placas finas

Assim como na teoria de vigas, na teoria de placas finas é possível determinar-se os momentos fletores a partir da integração das tensões normais ao longo da espessura da placa, multiplicadas pela sua distância z até a superfície média. Desta forma, os momentos fletores $m_x\,\mathrm{e}\,m_y$, por unidade de comprimento, podem ser obtidos a partir das equações:

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \ \text{ e } \ m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \, . \tag{2.22}$$

De modo similar, os momentos torçores m_{xy} e m_{yx} podem ser calculados a partir da integração das tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx}, multiplicadas pela sua distância até a superfície média, na forma:

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \ \text{ e } \ m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \, . \tag{2.23}$$

Observe-se que como $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ pela simetria do tensor de tensões, resulta necessariamente que $m_{xy} = m_{yx}$.

Substituindo-se as Equações de (2.19) a (2.21) nas Equações (2.22) e (2.23), e realizando-se a integração ao longo da espessura da placa, chega-se às relações entre os esforços solicitantes e os deslocamentos, para placas finas, na forma:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\kappa_x + \nu \kappa_y\right), \tag{2.24}$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -D\left(\kappa_y + \nu \kappa_x\right), \tag{2.25}$$

$$m_{xy} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu) D \chi \, , \tag{2.26}$$

onde

$$D = \frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)} \, , \tag{2.27}$$

é a rigidez à flexão da placa. Comparando-se esta expressão com a rigidez à flexão EI de uma viga de largura unitária, conclui-se que a placa apresenta uma rigidez superior devido ao efeito de Poisson.

Finalmente, substituindo as Equações de (2.24) a (2.26) na Equação (2.8), chega-se à equação diferencial que rege o problema de uma placa fina, de material elástico linear, no regime de pequenos deslocamentos, submetida a um carregamento transversal na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D}. \tag{2.28}$$

Empregando-se o operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{2.29}$$

a Equação (2.28) pode ser reescrita na forma

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_z. \tag{2.30}$$

A Equação (2.28) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem, não-homogênea do tipo elíptica, com coeficientes constantes, que é frequentemente chamada de equação bi-harmônica não-homogênea. Esta equação é do tipo linear, pois os expoentes das derivadas parciais de w não são superiores a um.

Os esforços cortantes também podem ser expressos em função do deslocamento transversal w. Para isto, devem-se substituir as Equações de (2.24) a (2.26) nas Equações (2.4) e (2.5), resultando:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \tag{2.31}$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w. \tag{2.32}$$

A solução do problema de uma placa fina sob carregamento transversal consiste em se encontrar uma função $w(x,y)$, que satisfaça de forma exata a equação diferencial (2.28) e as condições de contorno do problema.

2.1.3 Condições de contorno do problema

Além de satisfazer a equação diferencial de forma rigorosa, uma solução exata para placas finas carregadas transversalmente deve atender também às condições de contorno do problema. Como se trata de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, em cada bordo, em cada direção, devem ser satisfeitas duas condições de contorno, seja em termos de deslocamentos (condições de contorno geométricas), seja em termos de esforços internos (condições estáticas de contorno), ou ainda na forma de uma combinação destas.

As principais condições de contorno para placas encontram-se indicadas na Figura 2.8. É possível ter-se ainda bordos sobre apoios elásticos, tanto para o deslocamento transversal, como para a rotação.

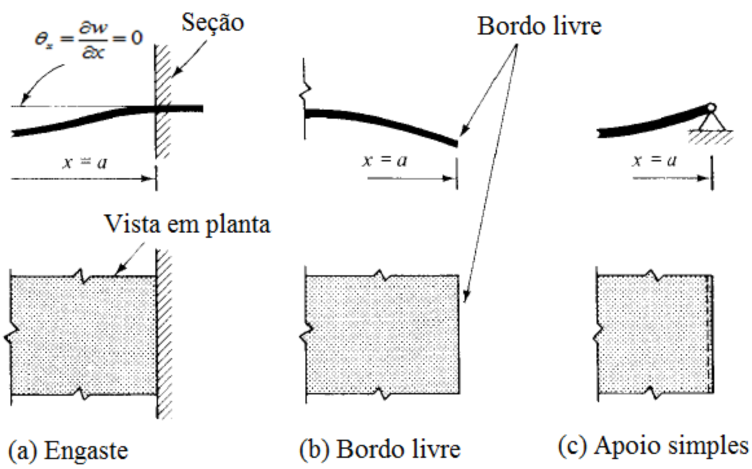

Figura 2.8 - Condições de contorno para placas (SZILARD, 2004)

a) Condições de contorno geométricas:

Uma condição de contorno geométrica pode ser imposta em um bordo da placa fixando-se o valor do deslocamento transversal ou da inclinação da placa na direção normal ao bordo. Por exemplo, no caso de uma placa que possua todos os bordos perfeitamente engastados, as condições de contorno para este problema seriam:

$$w = 0 \text{ e } \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a, \tag{2.33}$$

$$w = 0 \text{ e } \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b. \tag{2.34}$$

b) Condições de contorno estáticas:

Quando uma placa tiver um de seus bordos completamente livre para se deslocar e descarregado, as condições de contorno neste bordo serão estáticas, ou seja, o esforço cortante e o momento fletor neste bordo devem ser nulos. Estas condições podem ser expressas a partir das seguintes equações:

$$v_x = m_x = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a, \tag{2.35}$$

$$v_y = m_y = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = b. \tag{2.36}$$

Aqui cabe uma observação importante. Em uma placa existem três esforços solicitantes: esforço cortante, momento fletor e momento torçor. Então, em um bordo livre, seriam necessárias três condições de contorno, uma para cada esforço cortante, e não somente duas. Este problema foi resolvido por Kirchhoff, que transformou o efeito do momento torçor nos bordos em uma força cortante adicional, conforme ilustrado na Figura 2.9.

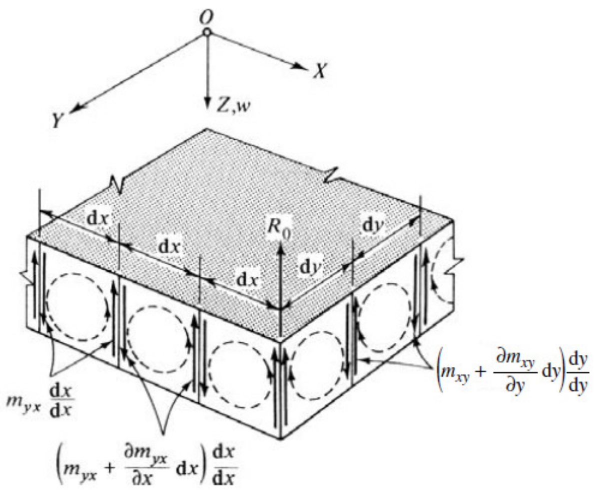

Figura 2.9 - Efeito de bordo do momento torçor na placa (SZILARD, 2004)

Então, nos bordos da placa, o esforço cortante terá uma parcela adicional, e será dado pelas seguintes equações, para os bordos cuja direção normal seja X ou Y, respectivamente:

$$v_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right], \tag{2.37}$$

e

$$v_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right]. \tag{2.38}$$

Desta forma as condições de contorno em bordo livre se reduzem de três para duas e podem ser dadas na forma:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a, \tag{2.39}$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right] = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = b. \tag{2.40}$$

Observa-se que no caso de uma placa simplesmente apoiada, nos cantos as forças cortantes adicionais geradas pelo momento torçor não se cancelarão, mas sim se somarão, gerando uma força resultante de canto R_0, que tende a levantar os cantos da placa, conforme ilustrado na Figura 2.10, dada por:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.41}$$

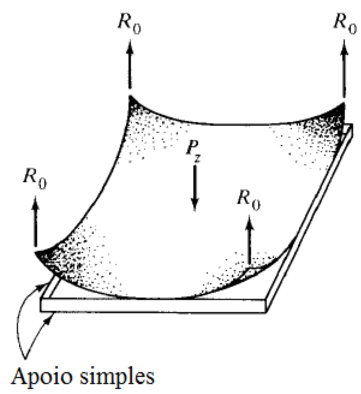

Figura 2.10 - Forças de canto levantando os cantos da placa (SZILARD, 2004)

c) Condições de contorno mistas:

As condições de contorno mistas ocorrem, por exemplo, em um bordo simplesmente apoiado, onde se tem simultaneamente as condições de deslocamento transversal nulo e de momento fletor nulo na direção normal ao bordo, quando este se encontra descarregado. Estas condições podem ser expressas matematicamente através das seguintes equações:

$$w = 0 \text{ e } m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = a, \tag{2.42}$$

$$w = 0 \text{ e } m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = b. \tag{2.43}$$

2.1.4 Solução da equação diferencial

Conforme já estabelecido, a solução rigorosa da equação diferencial deve ser uma função $w(x, y)$, que ao mesmo tempo satisfaça a equação diferencial (2.28) e as condições de contorno descritas no item anterior. Porém, soluções deste tipo somente são possíveis para casos muito simples de carregamento e condições de apoio.

De um modo geral, partindo-se da linearidade da Equação (2.28), a solução pode ser obtida através da sobreposição de duas soluções: uma solução homogênea $w_H(x, y)$, que satisfaz as condições de contorno ao longo dos bordos da placa; e uma solução particular $w_P(x, y)$, que satisfaz o equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa. Então, a solução geral, $w(x, y)$, será dada por:

$$w(x, y) = w_H(x, y) + w_P(x, y). \tag{2.44}$$

Uma forma alternativa de solução foi desenvolvida por Navier, na qual a função $w(x, y)$ e o carregamento transversal $p_z(x, y)$ são representados por séries duplas de Fourier, cujos coeficientes são determinados de forma a satisfazer as condições de contorno e garantir o equilíbrio do carregamento aplicado.

Existe também a solução de Lévy, que emprega séries simples de Fourier, podendo ser utilizada desde que pelo menos dois bordos paralelos da placa sejam simplesmente apoiados. Este tipo de solução em série possui uma convergência mais rápida do que a solução de Navier.

Contudo, para os casos mais complexos de geometria, condições de contorno e carregamento, pode ser necessária a utilização de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, por exemplo, para que se possa obter a solução do problema.

As soluções para os casos de maior interesse prático encontram-se tabeladas nos livros clássicos sobre a teoria de placas como TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER (1959) e SZILARD (2004).

2.2 Flambagem de Placas

Em estruturas navais e oceânicas é usual encontrar-se elementos formados por placas finas, que estão submetidos a carregamentos contidos no próprio plano da placa, conforme é ilustrado pela Figura 2.11.

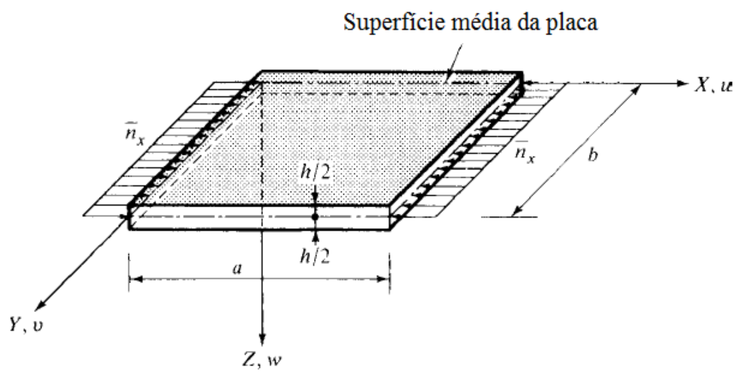

Figura 2.11 - Placa retangular submetida a um carregamento de compressão uniaxial em sua superfície média (SZILARD, 2004)

Se estas forças contidas no plano médio da placa forem de pequena magnitude, as deformações da placa também estarão contidas no plano médio, não havendo deslocamento lateral w. Porém, se estas cargas tiverem sua intensidade aumentada, ocorrerá uma alteração no modo de deformação da placa. Para um determinado valor destas cargas, começarão a surgir deslocamentos transversais ao plano médio da placa. Então, o equilíbrio que para valores baixos de carregamento era estável, para cargas de maior intensidade torna-se instável, devido à ocorrência do fenômeno chamado flambagem. O valor do carregamento que produz este fenômeno é chamado de carga crítica. Uma vez atingida a carga crítica, qualquer pequeno acréscimo de carga produz um grande acréscimo nos deslocamentos transversais w, que podem levar a placa rapidamente à ruptura. Como este fenômeno ocorre de forma súbita, ainda dentro do regime elástico do material, para tensões bem menores que a sua tensão de escoamento, sua ocorrência pode ser catastrófica, para a estrutura como um todo.

O problema da estabilidade do equilíbrio de uma placa pode ser melhor compreendido através da analogia do comportamento de uma esfera sobre três superfícies distintas, conforme será apresentado no item a seguir.

2.2.1 Estabilidade do equilíbrio

O conceito de estabilidade é frequentemente explicado considerando o equilíbrio de uma esfera rígida em várias posições, tal como descrito na Figura 2.12.

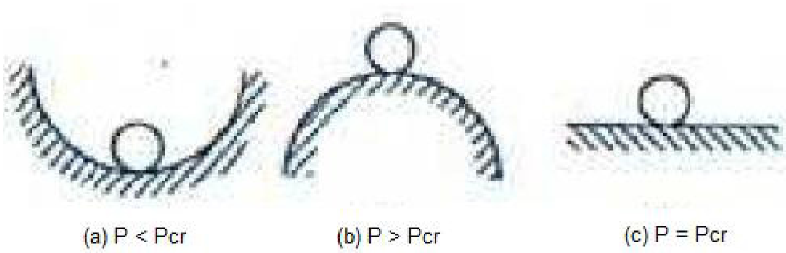

Figura 2.12 - (a) Equilírio Estável; (b) Equilíbrio Instável; (c) Equilíbrio Neutro (CHAJES, 1974)

Estabilidade é um conceito que está intimamente relacionado com a capacidade de uma dada estrutura conseguir estabelecer uma posição de equilíbrio após a introdução de qualquer perturbação externa, como, por exemplo, a aplicação de uma força ou a imposição de um deslocamento. Embora a bola esteja em equilíbrio em cada posição indicada, um exame mais atento revela a existência de diferenças importantes entre as três situações. Se a bola na Figura 2.12a for ligeiramente deslocada da sua posição original de equilíbrio, ela retorna para a posição após a remoção da força perturbadora. Um corpo que se comporta dessa maneira esta num estado de equilíbrio dito como estável. Por comparação, a bola na Figura 2.12b, se for ligeiramente deslocada da sua posição de repouso, não voltará, e além disso continuará a se mover para longe da posição de equilíbrio inicial. O equilíbrio da esfera na Figura 2.12b é chamado de equilíbrio instável. A Figura 2.12c mostra um outro tipo possível de equilíbrio, onde, a bola, depois de ter sido deslocada um pouco, nem retorna à sua posição original, nem continua a se mover para mais longe. Este comportamento é referido como equilíbrio indiferente ou neutro. (CHAJES, 1974)

Conforme HIBBELER (2010), a fim de compreender melhor a natureza dessa instabilidade, considera-se um mecanismo formado por duas barras sem peso, rígidas e acopladas por pinos nas duas extremidades (Figura 2.13a). Quando essas barras estão na posição vertical, a mola, com rigidez k, está sem deformação e uma força vertical pequena P é aplicada no topo de uma das barras. Podemos alterar a posição de equilíbrio deslocando o pino em A uma pequena quantidade Δ (Figura 2.13b). Como mostra o diagrama de corpo livre do pino quando as barras são deslocadas (Figura 2.13c), a mola produzirá uma força de recuperação $F = k\Delta$, enquanto a carga aplicada P desenvolverá duas componentes horizontais, que tendem a empurrar o pino (e as barras) ainda mais para fora do equilíbrio. Como θ é pequeno, $\Delta = \theta\left(\frac{L}{2}\right)$ e a força perturbadora $P_x = 2P\theta$.

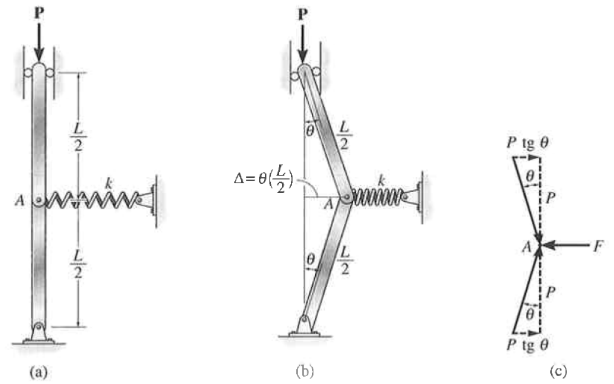

Figura 2.13 - Mecanismo de barras acopladas por pinos (HIBBELER, 2010)

Se a força de restauração superar a perturbadora, isto é, $\frac{kL\theta}{2} > 2P\theta$, então, observando que θ se cancela, resolvendo em P, o que leva a:

$$P < \frac{kL}{4} \rightarrow \text{ equilíbrio estável} \tag{2.45}$$

Essa é a condição de equilíbrio estável, visto que a força desenvolvida pela mola seria suficiente para restaurar as barras de volta à posição vertical. Por outro lado, se $\frac{kL\theta}{2} < 2P\theta$, ou:

$$P > \frac{kL}{4} \rightarrow \text{ equilíbrio instável} \tag{2.46}$$

então o mecanismo estaria em equilíbrio instável. Em outras palavras, se a carga P fosse aplicada e ocorresse um pequeno deslocamento em A, o mecanismo tenderia a sair do equilíbrio e não voltar à posição inicial.

O valor intermediário de P, definido desde que $\frac{kL\theta}{2} = 2P\theta$, é a carga crítica. Aqui:

$$P = \frac{kL}{4} \rightarrow \text{ equilíbrio neutro} \tag{2.47}$$

essa carga representa o caso de um mecanismo em equilíbrio neutro.

Esses três estados de equilíbrio são representados graficamente na Figura 2.14. O ponto de transição onde a carga é igual ao valor crítico $P = P_{cr}$ é chamado ponto de bifurcação.

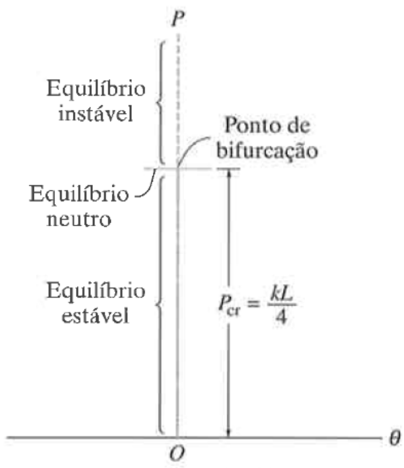

Figura 2.14 - Estados de Equilíbrio (HIBBELER, 2010)

2.2.2 Carga crítica de flambagem

Um ponto muito importante para a Teoria Clássica da Flambagem é que uma estrutura somente pode passar da condição de equilíbrio estável para a condição de equilíbrio instável, se assumir temporariamente o estado de equilíbrio neutro. Esta condição é que permitirá a determinação matemática da carga crítica de uma estrutura.

No problema da estabilidade elástica de placas, justamente no estado de equilíbrio neutro, tem-se uma bifurcação no modo de deformação da placa. A partir da condição de equilíbrio neutro, para qualquer pequeno acréscimo de carga, a placa assumirá a configuração deformada de uma superfície curva, chamada de modo de flambagem. Este fenômeno ocorre com o material ainda dentro do regime elástico linear, obedecendo à lei de Hooke. O fenômeno da bifurcação do modo da deformação da placa após a carga crítica é apresentado na Figura 2.15.

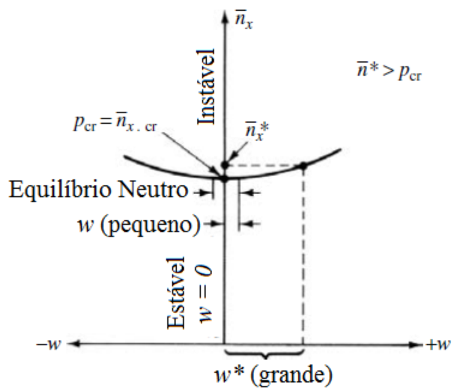

Figura 2.15 - Bifurcação do modo de deformação da placa (SZILARD, 2004)

Um problema importante é o do comportamento pós-flambagem das placas. Ao contrário do que acontece com as colunas, a carga crítica de uma placa não coincide com a sua carga de ruptura. Devido a uma redistribuição de tensões no plano, uma placa consegue absorver acréscimos de carga mesmo após a ocorrência do fenômeno da flambagem. Contudo, o comportamento pós-flambagem de placas é um fenômeno que envolve não-linearidades de origem geométrica (grandes deslocamentos) e/ou de origem física (comportamento elasto-plástico do material). Normalmente, para a solução deste tipo de problema devem ser empregados métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, por exemplo.

A carga crítica de uma placa pode ser estabelecida através dos seguintes métodos: empregando-se a equação diferencial de equilíbrio da placa sob carregamento no plano; utilizando-se os métodos de energia ou ainda usando uma abordagem dinâmica do problema. Adiante será empregado o método do equilíbrio, que utiliza a equação diferencial da placa sob carregamento no plano, no estado de equilíbrio neutro.

2.2.2.1 Equação diferencial para placas finas sob carregamento no plano

Conforme SZILARD (2004), aqui será apresentado o procedimento para a obtenção da equação diferencial que rege o comportamento de placas finas de um material elástico linear, no regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, sob a ação de cargas contidas em sua superfície média.

Este carregamento contido no próprio plano médio da placa por ser produzido por cargas coplanares aplicadas nas bordas da placa ou por variações de temperatura. Além disso, quando os deslocamentos no plano da placa u e v forem restringidos, surgirão forças reativas nos bordos da placa. Contudo, este último efeito pode ser desconsiderado, se os deslocamentos transversais w da placa forem pequenos.

Para se obter a equação diferencial da placa sob carregamento no plano, inicia-se estabelecendo o equilíbrio de um elemento de placa $dxdy$, de espessura h, conforme o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.16.

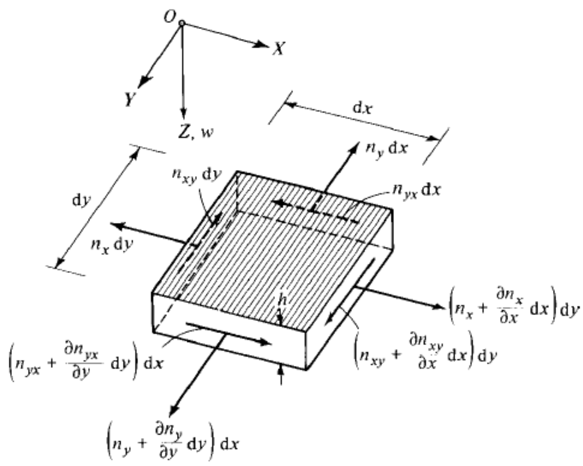

Figura 2.16 - Elemento de placa submetido a um sistema de forças coplanares (SZILARD, 2004)

Este elemento encontra-se submetido a um sistema de forças coplanares, por unidade de comprimento, n_x, n_y e $n_{xy} = n_{yx}$. Estes esforços normais e tangenciais são também comumente chamados de esforços de membrana. Os incrementos destas forças nas faces positivas do elemento podem ser obtidos através de sua expansão em série de Taylor, retendo-se apenas até o segundo termo. Considera-se que o elemento não se encontra submetido a forças de volume nas direções X e Y.

Então, realizando-se o equilíbrio de forças na direção X, resulta

$$\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x}dx\right)dy - n_x dy + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - n_{yx}dx = 0, \qquad (2.48)$$

que após as devidas simplificações produz,

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0. \qquad (2.49)$$

De forma similar, fazendo-se o equilíbrio de forças segundo o eixo Y, chega-se a,

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 . \tag{2.50}$$

As Equações (2.49) e (2.50) formam um sistema de equações diferenciais homogêneas. Este sistema pode ser resolvido através do emprego das funções de tensão de Airy $\Phi(x, y)$, de forma que,

$$n_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},\ n_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \text{ e } n_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} . \tag{2.51}$$

Então, o sistema de equações diferenciais (2.49) e (2.50), dentro do regime deformações infinitesimais e pequenos deslocamentos, pode ser resolvido de forma independente da equação diferencial da placa, podendo ser considerado em separado.

Resta agora estabelecer-se o equilíbrio em relação ao eixo Z, considerando-se a placa inicialmente fletida, conforme a Figura 2.17. De forma a tornar mais simples as deduções, os bordos anteriores da placa serão considerados como fixos e contidos no plano XY.

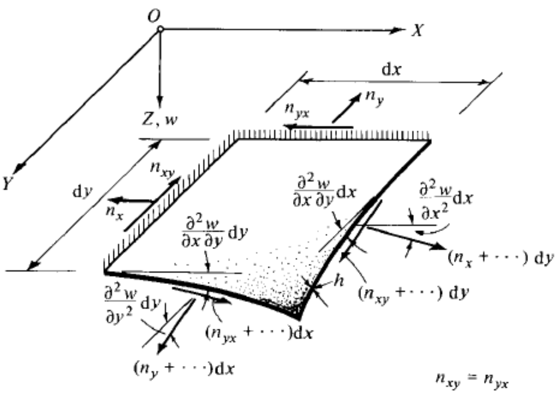

Figura 2.17 - Forças de membrana em um elemento de placa deformado (SZILARD, 2004)

Considerando-se as componentes de força na direção Z, resulta:

$$\sum F_Z = \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left(n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy$$
$$+ \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \qquad (2.52)$$
$$+ \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy$$

a qual após as devidas simplificações e desconsiderando-se os termos de ordem superior se transforma em

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p_Z^*(x, y) \,. \qquad (2.53)$$

Ou seja, o efeito das forças no plano pode ser considerado como uma carga lateral fictícia $p_Z^*(x, y)$ atuando sobre a placa. Somando-se esta parcela de carga lateral fictícia na equação diferencial da placa (2.28), resulta, finalmente:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y) = p_Z(x, y) + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \,. \qquad (2.54)$$

Se os esforços de membrana n_x, n_y e n_{xy} forem constantes e conhecidos ao longo da superfície da placa, a Equação (2.54) pode ser resolvida da mesma forma que a equação diferencial da placa, empregando-se os métodos de Navier ou de Lévy.

Se estes esforços variarem ao longo da placa, deverá ser empregada a função de tensão de Airy, definidas pela Equação (2.51), resultando,

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y) = p_Z(x, y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \,. \qquad (2.55)$$

Para que a Equação (2.55) possa ser resolvida, é necessária a utilização de uma equação diferencial adicional que relacione a função de tensão de Airy, $\Phi(x, y)$, com a função que define os deslocamentos transversais $w(x, y)$. Se isto não for possível, deve-se utilizar algum método numérico, como o método dos elementos finitos, por exemplo.

Se a placa tiver uma curvatura inicial $w_0(x, y)$, a Equação (2.54) assumirá a forma:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = p_Z(x,y) + n_x \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} . \qquad (2.56)$$

Estas imperfeições geométricas iniciais podem ter uma importante influência na determinação da carga crítica de uma placa.

2.2.2.2 Determinação da carga crítica de placas: o método do equilíbrio

Neste item será estudada a determinação da carga crítica de placas retangulares através do método do equilíbrio. Para isto será considerada uma placa retangular de lados a e b, inicialmente plana, submetida a forças coplanares $\overline{n}_x, \overline{n}_y$ e $\overline{n}_{xy}$ aplicadas em seus bordos, conforme ilustrado pela Figura 2.18.

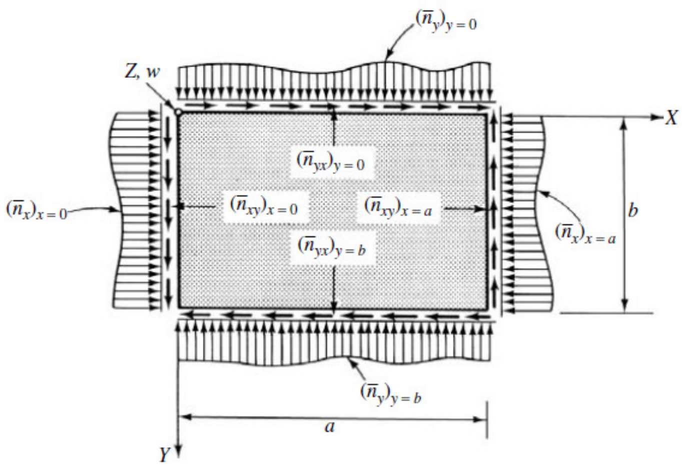

Figura 2.18 - Placa submetida a forças distribuídas em seus bordos (SZILARD, 2004)

Estas forças de bordo podem ser representadas como sendo o resultado da multiplicação de um escalar λ, denominado fator de carga, por um valor de referência $\overline{n}_0$ na forma

$$\overline{n}_x = -\lambda \overline{n}_{x0}, \overline{n}_y = -\lambda \overline{n}_{y0} \text{ e } \overline{n}_{xy} = -\lambda \overline{n}_{xy0}, \qquad (2.57)$$

sendo que o sinal negativo indica compressão, no caso das forças normais; e, para as forças de cisalhamento, que as mesmas atuam no sentido contrário dos eixos coordenados nos bordos positivos da placa.

Assim, aumentando-se o valor do fator de carga λ, aumenta-se os valores das forças de bordo coplanares $\overline{n}_x, \overline{n}_y$ e $\overline{n}_{xy}$. Fazendo-se crescer o valor de λ, vai ser atingido um valor para o qual o equilíbrio da placa deixará de ser estável, alcançando-se o estado de equilíbrio neutro. Neste estado de equilíbrio neutro, acontece uma bifurcação no modo de deformação da placa, conforme indicado na Figura 2.15. A partir deste ponto, torna-se possível a ocorrência de deslocamentos transversais w, mesmo na ausência de um carregamento transversal p_Z, e a superfície média da placa, inicialmente plana, transforma-se em uma superfície curva.

Considerando-se que a carga transversal é nula, a equação diferencial (2.54), para o estado de equilíbrio neutro, transforma-se em uma equação diferencial homogênea, na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(\overline{n}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{n}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\overline{n}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \tag{2.58}$$

A Equação (2.58) é a equação diferencial que rege o problema da flambagem de placas retangulares, formadas por um material elástico, linear, homogêneo e isotrópico.

A equação diferencial da instabilidade elástica de placas, a partir das definições das forças de bordo dadas na Equação (2.57), pode assumir a seguinte forma:

$$\nabla^4 w + \frac{\lambda}{D}\left(\overline{n}_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\overline{n}_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \overline{n}_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \tag{2.59}$$

Assim o problema da determinação da carga crítica de uma placa retangular consiste em determinar-se o menor valor do fator de carga λ, que seja capaz de levar a placa a atingir o estado de equilíbrio neutro, onde ocorre a bifurcação do modo de deformação da placa, ou seja, placa é capaz de atingir o equilíbrio na forma de uma superfície levemente encurvada.

A Equação (2.59) é uma equação diferencial linear homogênea, onde o fator de carga λ aparece multiplicando apenas as derivadas de ordem inferior. A solução deste tipo de equação é designada em matemática como a solução de um problema de autovalores. A solução rigorosa do problema deve satisfazer a Equação (2.59) e as condições de contorno do problema.

Contudo, como não existe carregamento transversal p_Z ao longo da superfície da placa (equação diferencial homogênea), nem momentos aplicados em seus bordos (condições de contorno homogêneas), a ordem de grandeza dos deslocamentos transversais resulta indeterminada. Se uma função $w(x, y)$ representa uma solução do problema, qualquer função que seja igual ao produto de um escalar por w também será uma solução possível. Resulta que a forma da superfície deformada da placa, isto é, seu modo de flambagem pode ser estabelecido, mas os valores exatos dos deslocamentos em cada ponto não podem ser determinados.

Quando uma placa encontra-se submetida a um carregamento combinado, formado por forças normais e forças de cisalhamento ao mesmo tempo, é usual estabelecer-se relações entre estas forças através de razões constantes. Assim, em um problema em que o efeito dominante seja da força normal que atua na direção X, ou seja, $\overline{n}_{x0}$, podem ser usadas as seguintes relações:

$$\overline{n}_{y0} = \alpha\overline{n}_{x0} \text{ e } \overline{n}_{xy0} = \beta\overline{n}_{x0}. \tag{2.60}$$

onde as constantes α e β definem as proporções entre $\overline{n}_{y0}$ e $\overline{n}_{x0}$ e entre $\overline{n}_{xy0}$ e $\overline{n}_{x0}$, respectivamente. Desta forma, uma vez determinado o valor crítico para a força normal na direção X, ou seja, $\left(\overline{n}_x\right)_{cr} = -\lambda_{cr}\overline{n}_{x0}$, os valores críticos para as demais forças serão:

$$\left(\overline{n}_y\right)_{cr} = -\lambda_{cr}\alpha\overline{n}_{x0} \text{ e } \left(\overline{n}_{xy}\right)_{cr} = -\lambda_{cr}\beta\overline{n}_{x0}. \tag{2.61}$$

Uma forma simplificada de se resolver o problema consiste em se tomar como valor de referência a carga crítica de Euler de uma faixa de placa de largura unitária, como se fosse uma coluna isolada. Ou seja, para a placa carregada como indicado na Figura 2.19, tem-se que:

$$\overline{n}_{x0} = \frac{\pi^2 D}{a^2} = \frac{\pi^2 E h^3}{12\left(1-\nu^2\right)a^2}. \tag{2.62}$$

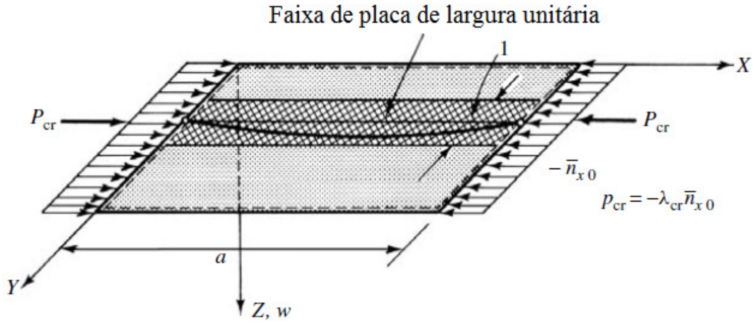

Figura 2.19 - Flambagem de uma faixa unitária de placa (SZILARD, 2004)

Normalmente, a solução do problema da flambagem de placas pode ser encontrada na forma,

$$w(x,y)=\sum_{m}\sum_{n}W_{mn}X_{m}(x)Y_{n}(y)\,, \tag{2.63}$$

como um somatório de produtos de funções que dependem isoladamente de x e de y.

Substituindo-se a Equação (2.63) na equação diferencial da flambagem (2.59), e impondo-se a condição que a solução seja não trivial, resulta a equação característica do problema, que permite a determinação do valor crítico de λ, isto é, de λ_{cr}. O valor crítico de λ, λ_{cr}, é o menor valor possível para λ, que satisfaz de forma exata a equação característica do problema. Então, a carga crítica da placa será dada por:

$$p_{cr}=\left(\overline{n}_{x}\right)_{cr}=\lambda_{cr}\overline{n}_{x0}\,. \tag{2.64}$$

Para o caso de placas simplesmente apoiadas em todo o seu contorno, que esteja livre da ação de forças de cisalhamento ($\overline{n}_{xy}=0$), a solução do problema pode ser dada na forma:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\ \ (m,n=1,3,5,...)\,. \tag{2.65}$$

Nestas condições, a minimização da equação característica leva ao valor crítico do fator de carga λ_{cr}.

A obtenção da carga crítica para outros tipos de condições de contorno é mais complexa. Contudo, se a placa tiver dois bordos paralelos simplesmente apoiados, o método de solução de Lévy pode ser aplicado, desde que as forças cisalhantes nos bordos sejam nulas ($\overline{n}_{xy}=0$). Considerando-se que os bordos simplesmente apoiados estejam situados em $x=0$ e em $x=a$, o modo de flambagem da placa pode ser representado por uma função no seguinte formato:

$$w(x,y)=\sum_{m}Y_{m}(y)sen\left(\frac{m\pi x}{a}\right). \tag{2.66}$$

O restante do procedimento de solução é semelhante àquele já abordado no item 2.1.4 da Teoria de Placas Finas. Contudo, deve-se observar que as equações algébricas que resultam da aplicação das condições de contorno serão homogêneas agora. Então, a solução não trivial para as constantes de integração A_m, B_m, C_m e D_m deve ser obtida igualando-se o determinante do sistema de equações algébricas que envolvem estas constantes a zero. Finalmente, deve ser salientado que as operações matemáticas para se chegar a equação característica e encontrar-se o valor mínimo de λ_{cr} são bastante trabalhosas.

Para condições de contorno diferentes das já mencionadas, a determinação de uma solução exata para a carga crítica da placa é praticamente impossível, devendo-se lançar mão de métodos numéricos aproximados, como o método dos elementos finitos.

2.2.3 Flambagem local

A flambagem local é um fenômeno típico dos elementos de placa, no qual o eixo da placa permanece reto e as translações são normais ao plano médio da peça, como pode ser ilustrado na Figura 2.20.

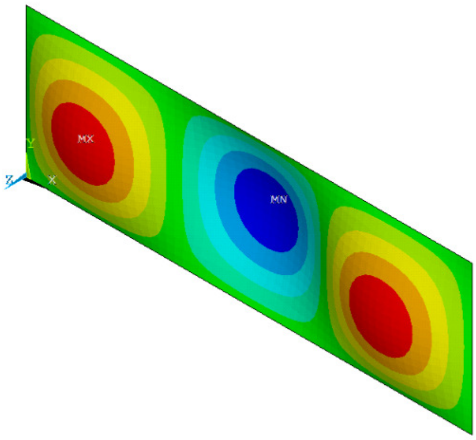

Figura 2.20 - Configurações de flambagem local de placa plana simulada no software ANSYS

Entretanto, observa-se também que, após o início da ocorrência da flambagem local, esses elementos de placa esbeltos apresentam uma resistência pós-flambagem significativa, devido à mudança na distribuição original das tensões em seu plano médio. Por essa razão, a carga última de colapso de placas finas é normalmente maior que a sua carga crítica de flambagem.

2.2.4 Resistência Pós-Flambagem

Até 1930 acreditava-se que o início da flambagem da placa implicava em seu colapso, similarmente ao que se observava no comportamento de barras comprimidas ROORDA (1980) e TRAHAIR e BRADFORD (1988). Entretanto, com o avanço da indústria aeronáutica, diversos pesquisadores voltaram seus estudos para a instabilidade de estruturas esbeltas e concluíram que placas têm comportamento de pós-flambagem estável. Foi observado que a carga de colapso de uma placa plana era realmente maior que sua carga de flambagem, mostrando que, na verdade, as placas possuem grande resistência pós-flambagem. (SCHUMAN e BACK, 1959)

Essa capacidade de carga pós-flambagem permite um carregamento adicional após a encurvadura local. A capacidade de carga não é restrita à ocorrência da deformação elástica. O colapso da placa não ocorre quando atingida a carga crítica de flambagem, e sim mais tarde, a um nível de carga superior.

Isso é levado em consideração no projeto do estado limite último de placas - a encurvadura local não restringe a capacidade de carga para a tensão crítica de flambagem. Sendo assim, a capacidade máxima das placas sob compressão axial consiste em duas partes: a carga de flambagem somada à carga pós-crítica adicional. Esta força de reserva pós-crítica é mostrada no diagrama carga x deslocamento da Figura 2.21.

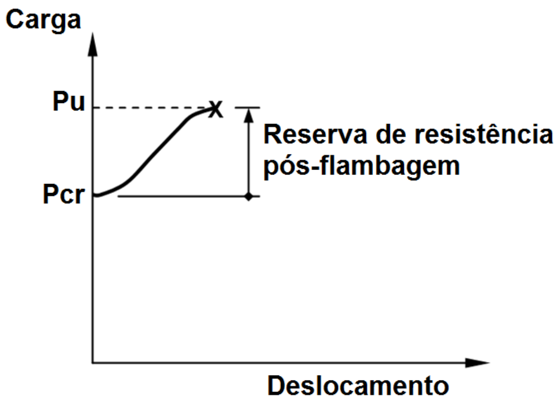

Figura 2.21 - Diagrama carga x deslocamento pós-flambagem (AKESSON, 2007)

De acordo com AKESSON (2007) e como pode ser observado no gráfico, a placa não rompe no chamado ponto de bifurcação. Em vez disso, a placa é capaz de suportar uma carga adicional após a deformação elástica, e isto é devido à formação de uma membrana que estabiliza a flambagem através de um feixe de tensão transversal. Quando a parte central da placa encurva, ela perde a maior parte da sua rigidez, e em seguida a carga é forçada a ser "ligada" em torno desta zona enfraquecida nas partes mais duras em ambos os lados. E devido a esta redistribuição, uma membrana transversal de tensão é formada e ancorada (Figura 2.22).

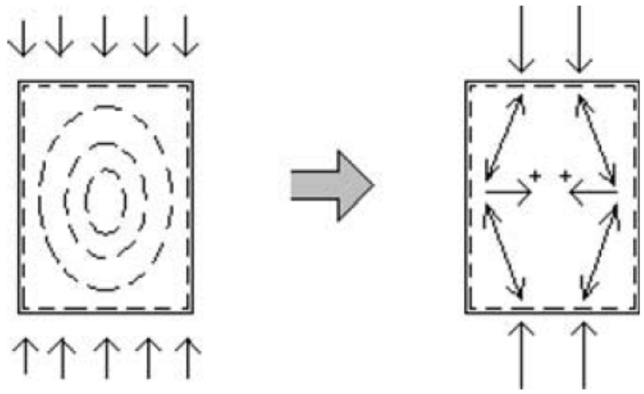

Figura 2.22 - A redistribuição da transferência de carga no estado limite último (o intervalo pós-crítico) (AKESSON, 2007)

O conhecimento desta força adicional é de grande importância prática no projeto de navios e estruturas aeroespaciais, uma vez que, considerando o comportamento pós-flambagem de placas, consideráveis economias de peso podem ser obtidas. Nestas estruturas, os bordos das placas são normalmente suportados por enrijecedores, de tal modo que permaneçam retos. Segundo SZILARD (2004) o aumento da capacidade de carga para além da carga crítica origina-se, além de uma redistribuição das tensões na placa, do fato de as bordas longitudinais das placas serem limitadas por esses enrijecedores.

2.2.5 Flambagem Elástica e Inelástica

Conforme EL-SAWY, NAZMY e MARTINI (2004), a falha de placas submetidas à compressão uniaxial pode ser devido à instabilidade da placa para fora do plano ou por falha do material. Para chapas finas (isto é, valores elevados da relação largura/espessura) feitas a partir de um material típico com tensão de escoamento σy , a instabilidade ocorre em uma tensão média σcr , que é muito menor do que a tensão de escoamento, em especial se a chapa não possuir furos. Esta tensão crítica é chamada de tensão de flambagem elástica. Por outro lado, a instabilidade de placas relativamente espessas (isto é, valores baixos da relação largura/espessura), ou placas com orifícios grandes, pode ocorrer depois de que o material da placa atingiu o ponto de ruína em algumas partes da mesma, o que é chamada de flambagem não-elástica, ou flambagem elasto-plástica. Se a espessura da placa é muito grande, pode ocorrer falha do material antes de qualquer deformação considerável.

2.2.6 Análise não-linear do problema da flambagem

Na análise de uma estrutura sólida, é habitual considerar que os deslocamentos provocados pelas ações são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura. Nestas circunstâncias, admite-se que não existe influência da modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões. Todo o estudo é feito com base na geometria inicial indeformada. Se esta hipótese não for considerada, a análise é designada não-linear geométrica. É também frequente considerar que, ao nível do material que constitui a estrutura, a relação entre tensões e deformações é linear. Nos casos em que esta simplificação não é considerada, é necessário recorrer a algoritmos específicos de análise não-linear física.

2.2.7 Imperfeições geométricas iniciais

As estruturas oceânicas são constituídas, basicamente, de painéis enrijecidos, cujo método de fabricação envolve procedimentos de corte, conformação e soldagem. O comportamento de painéis enrijecidos sob cargas de compressão é relativamente complexo devido ao grande número de combinações de estrutura, material e parâmetros de carga. O problema fica mais complicado devido às incertezas relacionadas às imperfeições de fabricação.

Conforme AMANTE (2006) as distorções geradas pelo processo de fabricação, denominadas imperfeições geométricas iniciais, são deformações dimensionais permanentes que ocorrem na estrutura e representam quantitativamente o afastamento da superfície real em relação à superfície idealizada durante a etapa de concepção da estrutura (Figura 2.23). Esse tipo de imperfeição, caracterizado pela forma e magnitude de sua distribuição, é a principal causa da obtenção de cargas de colapso distintas, em componentes laminares nominalmente idênticos.

Figura 2.23 - Distorções iniciais impostas após processo de soldagem (AMANTE, 2006)

2.3 Solução numérica

Na prática da Engenharia surgem problemas envolvendo a análise de placas com condições de carregamento e de geometria complexas, para as quais não é possível encontrar-se uma solução analítica.

Para estes problemas é necessário o emprego de métodos numéricos, que possibilitam a obtenção de uma solução aproximada do problema com boa precisão. Um dos métodos mais empregados para a solução de problemas complexos de análise de placas é o método dos elementos finitos. Este método começou a ser desenvolvido na década de 50 e vem tendo crescente utilização graças ao grande desenvolvimento ocorrido na área da computação digital.

2.3.1 Método dos elementos finitos

Segundo MADENCI E GUVEN (2006) o método de análise de elementos finitos (MEF), originalmente introduzido em 1956, é uma técnica computacional poderosa para soluções aproximadas para uma grande variedade de problemas de engenharia do mundo real, possuindo domínios complexos submetidos a condições de contorno gerais.

O MEF tornou-se um passo essencial no projeto ou modelagem de um fenômeno físico em várias disciplinas de engenharia. Um fenômeno físico geralmente ocorre em um meio contínuo (sólido, líquido ou gás) que envolve várias variáveis de campo. As variáveis de campo variam de ponto a ponto, possuindo, assim, um número infinito de soluções no domínio.

O MEF baseia-se na decomposição do domínio em um número finito de subdomínios (elementos) para os quais a solução aproximada sistemática é construída através da aplicação dos métodos residuais variacionais ou ponderados. Com efeito, o MEF reduz o problema a um número finito de incógnitas por dividir o domínio em elementos e por expressar a variável de campo desconhecida em termos de funções de aproximação assumidas em cada elemento. Estas funções (também chamadas de funções de interpolação) são definidas em termos de valores das variáveis de campo em pontos específicos, referidos como nós. Os nós são geralmente localizados ao longo dos limites do elemento, e eles se conectam a elementos adjacentes.

O método de análise de elementos finitos requer as seguintes etapas principais:

- Discretização do domínio em um número finito de subdomínios (elementos);
- Seleção de funções de interpolação;
- Desenvolvimento da matriz de elemento para o subdomínio (elemento);
- Montagem das matrizes dos elementos para cada subdomínio para obter a matriz global para todo o domínio;
- Imposição das condições de contorno.

2.3.1.1 Discretização do domínio

Primeiramente o meio contínuo (domínio) da placa é subdividido em um número finito de sub-regiões denominadas elementos finitos. Estes elementos não se sobrepõem e estão ligados apenas por meio de seus nós. Este primeiro passo do processo dos elementos finitos é chamado de discretização. (Figura 2.24)

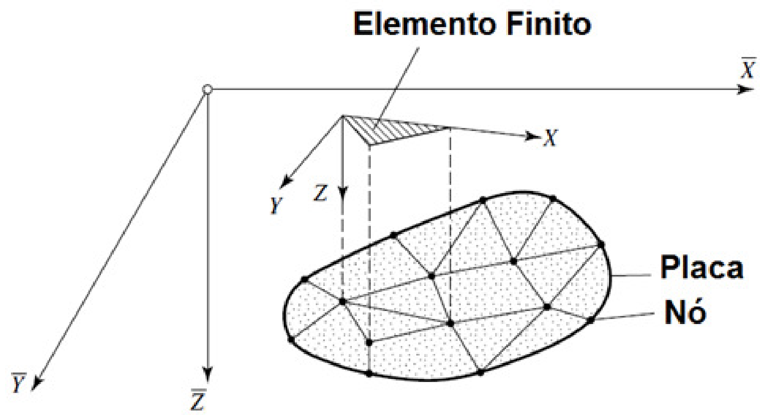

Figura 2.24 - Discretização de uma placa contínua (SZILARD, 2004)

Um nó especifica a localização de coordenadas no espaço onde existem graus de liberdade e as ações do problema físico. Variáveis nodais atribuídas a um elemento são chamadas graus de liberdade do elemento. Os graus de liberdade (DOF) de um nó são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento (MADENCI e GUVEN, 2006).

Dependendo da geometria e da natureza física do problema, o domínio de interesse pode ser discretizado por emprego de elementos de linha, área, ou de volume (Figura 2.25).

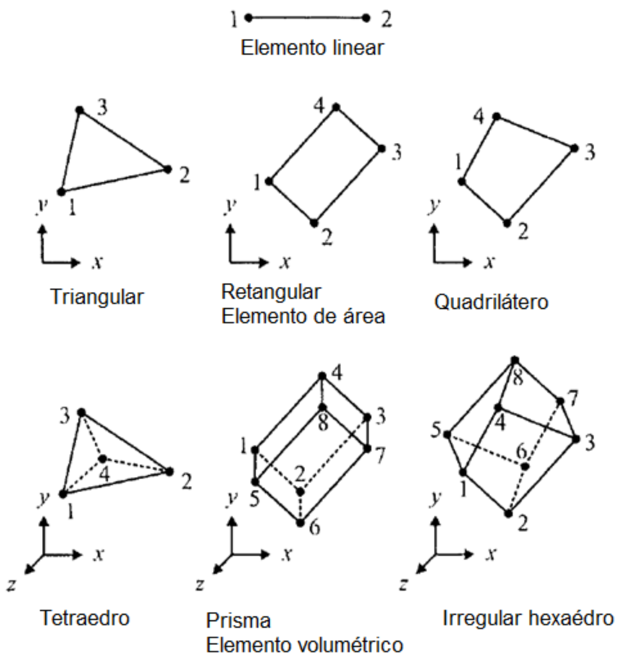

Figura 2.25 - Descrição de elemento de linha, área e volume com número de nós (MADENCI e GUVEN, 2006)

Cada elemento, identificado por um número de elemento, é definido por uma sequência específica de números de nós, chamada de conectividade.

O número de elementos para ser utilizado é determinado, em grande parte, pelas características de convergência dos elementos selecionados.

2.3.1.2 Solução das equações

Para um problema mecânico, o sistema global de equações pode ser montado na forma em notação matricial:

$$Ku = F , \tag{2.67}$$

em que K é a matriz de rigidez do sistema, u é o vetor de incógnitas, e F é o vetor de força. Dependendo da natureza do problema, K pode ser dependente de u, ou seja, $K = K(u)$ e F pode ser dependente do tempo, isto é, $F = F(t)$.

2.3.1.3 Abordagem direta

Embora a abordagem direta seja adequada para problemas simples, ela envolve cada passo fundamental de uma análise típica de elementos finitos. Assim sendo, esta abordagem será demonstrada conforme MADENCI e GUVEN (2006), considerando um sistema de mola linear.

Como mostrado na Figura 2.26, uma mola linear com rigidez k tem dois nós. Cada nó é submetido a forças axiais f_1 e f_2 resultando nos deslocamentos u_1 e u_2 em suas definidas direções positivas.

Submetida a estas forças nodais, o deslocamento resultante da mola será:

$$u = u_1 - u_2 \tag{2.68}$$

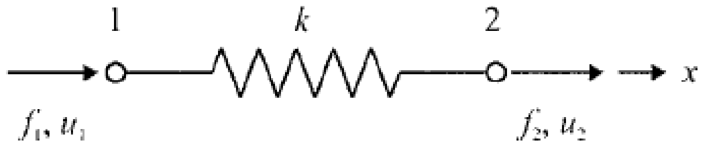

Figura 2.26 - Diagrama de corpo livre de um elemento de mola linear (MADENCI e GUVEN, 2006)

que está relacionada com a força que atua sobre a mola por:

$$f_1 = ku = k(u_1 - u_2)\,. \tag{2.69}$$

O equilíbrio das forças resultantes é:

$$f_2 = -f_1\,. \tag{2.70}$$

Substituindo:

$$f_2 = k(u_2 - u_1)\,. \tag{2.71}$$

Combinando a Eq. (2.69) e (2.71) e reescrevendo as equações resultantes em forma de matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad k^{(e)} u^{(e)} = f^{(e)}\,, \tag{2.72}$$

em que $u^{(e)}$ é o vetor de incógnitas nodais representando os deslocamentos e $k^{(e)}$ e $f^{(e)}$ são referentes às características do elemento como matriz de rigidez e vetor de força do elemento. O superescrito (e) denota o número do elemento.

A matriz de rigidez pode ser expressa na forma indicial como: ${k_{ij}}^{(e)}$

$$k^{(e)} \sim {k_{ij}}^{(e)} \tag{2.73}$$

onde o subescrito i e j são os números das linhas e das colunas. Os coeficientes ${k_{ij}}^{(e)}$, podem ser interpretados como a força necessária no nó i para produzir um deslocamento unitário no nó j enquanto todos os nós estão fixos.

2.3.1.4 Sistema global de equações

A modelagem de um problema de engenharia com elementos finitos exige a montagem das matrizes de características dos elementos (rigidez) e os vetores de força dos elementos, levando ao sistema global de equações

$$Ku = F \tag{2.74}$$

onde K é o conjunto de matrizes de rigidez características dos elementos, referida como a matriz de rigidez global e F é o conjunto de vetores de força dos elementos, referido como o vetor de força global. O vetor de incógnitas nodais é representado por u.

No sistema global de matrizes, K, pode ser obtido a partir da expansão das matrizes de coeficientes dos elementos, $k^{(e)}$, pelo somatório na forma:

$$K = \sum_{e=1}^{E} k^{(e)}, \tag{2.75}$$

em que o parâmetro E indica o número total de elementos. A expansão das matrizes de características dos elementos são do mesmo tamanho que a matriz de rigidez global, mas existem linhas e colunas de correspondência zero para os nós não associados com elementos (e). O tamanho da matriz global é ditado pelo número mais elevado entre os números de nós globais e pelo número de graus de liberdade por nó.

Similarmente, o vetor de forças global F pode ser obtido pela expansão dos vetores de coeficientes dos elementos, $f^{(e)}$, pelo somatório na forma

$$F = \sum_{e=1}^{E} f^{(e)} \tag{2.76}$$

A expansão dos vetores de força dos elementos são do mesmo tamanho que o vetor de força global, mas existem linhas e colunas de correspondência zero para os nós não associados com elementos (e). O tamanho do vetor de forças global é ditado pelo número mais elevado entre os números de nós globais.

As etapas de construção da matriz do sistema global e do vetor de forças global serão a seguir exemplificados conforme MADENCI e GUVEN (2006), considerando o sistema de molas lineares mostrados na Figura 2.27. Associado com o elemento (e), as equações para um elemento da mola dada pela Eq. (2.75) são reescritas como

$$\begin{bmatrix} k_{11}{}^{(e)} & k_{12}{}^{(e)} \\ k_{21}{}^{(e)} & k_{22}{}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^{(e)} \\ u_2{}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1{}^{(e)} \\ f_2{}^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

onde $k_{11}{}^{(e)} = k_{22}{}^{(e)} = k^{(e)}$ e $k_{12}{}^{(e)} = k_{21}{}^{(e)} = -k^{(e)}$. Os índices utilizados na Eq. (2.77) correspondem ao nó 1 e ao nó 2, os números de nós locais do elemento (e). O número de nós global específica a conectividade entre os elementos para o sistema de molas mostrado na Figura 2.27, e as informações de conectividade estão apresentadas na Tabela 2.1.

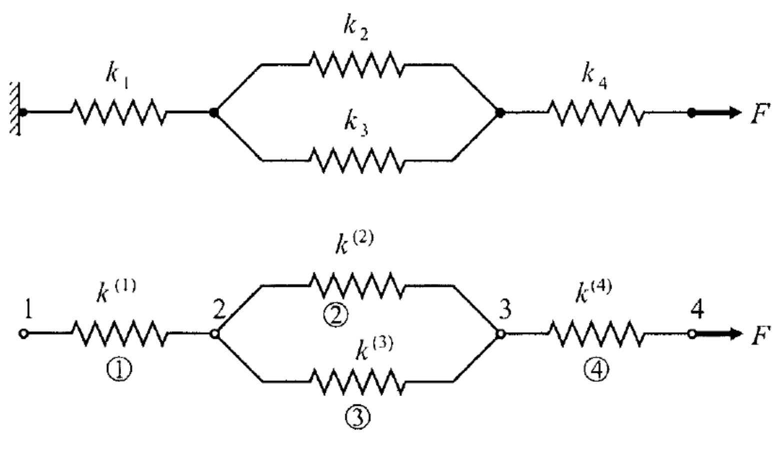

Figura 2.27 - Sistema de molas lineares (MADENCI e GUVEN, 2006)

Tabela 2.1 - Tabela de conectividade

Número do elemento	Número de nó local	Número de nó global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	2
	2	3
4	1	3
	2	4

De acordo com a Eq. (2.75), o tamanho da matriz do sistema global é (4x4) e a contribuição específica de cada elemento é dada como:

Elemento 1

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{array} \equiv \mathbf{k}^{(1)} \tag{2.78}$$

Elemento 2

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{2} & \boxed{3}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{array} \equiv \mathbf{k}^{(2)} \tag{2.79}$$

Elemento 3

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{2} & \boxed{3}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{array} \equiv \mathbf{k}^{(3)} \tag{2.80}$$

Elemento 4

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{matrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\\ \boxed{4}\end{matrix} \end{array} \equiv \mathbf{k}^{(4)} \tag{2.81}$$

Sendo

$$K = \sum_{e=1}^{4} k^{(e)} = k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + k^{(4)} \tag{2.82}$$

ou

$$K = \begin{bmatrix} {k_{11}}^{(1)} & {k_{12}}^{(1)} & 0 & 0 \\ {k_{21}}^{(1)} & ({k_{22}}^{(1)} + {k_{11}}^{(2)} + {k_{11}}^{(3)}) & ({k_{12}}^{(2)} + {k_{12}}^{(3)}) & 0 \\ 0 & ({k_{21}}^{(2)} + {k_{21}}^{(3)}) & ({k_{22}}^{(2)} + {k_{22}}^{(3)} + {k_{11}}^{(4)}) & {k_{12}}^{(4)} \\ 0 & 0 & {k_{21}}^{(4)} & {k_{22}}^{(4)} \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

De acordo com a Eq. (2.76), o tamanho do vetor de força global é (4x1) e a contribuição específica de cada elemento é dada como

Elemento 1

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(1)} \tag{2.84}$$

Elemento 2

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(2)} \tag{2.85}$$

Elemento 3

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(3)} \tag{2.86}$$

Elemento 4

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix} \equiv \mathbf{f}^{(4)} \tag{2.87}$$

Similarmente, temos

$$F = \sum_{e=1}^{4} f^{(e)} = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)} \tag{2.88}$$

ou

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1{}^{(1)} \\ f_2{}^{(1)} = f_1{}^{(2)} = f_1{}^{(3)} \\ f_2{}^{(2)} = f_2{}^{(3)} = f_1{}^{(4)} \\ f_2{}^{(4)} \end{Bmatrix}. \tag{2.89}$$

Consistente com a montagem da matriz de rigidez global do sistema e do vetor de forças global, o vetor de incógnitas, u, será:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1{}^{(1)} \\ u_2{}^{(1)} = u_1{}^{(2)} = u_1{}^{(3)} \\ u_2{}^{(2)} = u_2{}^{(3)} = u_1{}^{(4)} \\ u_2{}^{(4)} \end{Bmatrix}. \tag{2.90}$$

2.3.1.5 Solução do sistema global de equações

Para que o sistema global de equações possa ter uma solução única, o determinante da matriz do sistema global deve ser diferente de zero. No entanto, um exame da matriz global do sistema revela que um dos seus autovalores é zero, resultando assim em uma matriz singular. Portanto, a solução não é única. O autovetor correspondente ao autovalor zero representa o modo de translação, e os restantes autovalores não nulos representam todos os modos de deformação.

Para os valores específicos de $k_{11}{}^{(e)} = k_{22}{}^{(e)} = k^{(e)}$ e $k_{12}{}^{(e)} = k_{21}{}^{(e)} = -k^{(e)}$, a matriz global do sistema fica

$$K = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

com os autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt{5}$ e $\lambda_4 = 3 + \sqrt{5}$. Os correspondentes autovetores são

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(4)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2+\sqrt{5} \\ -2-\sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.92}$$

Cada um desses autovetores representam um possível modo de solução. A contribuição de cada modo de solução está ilustrado na Figura 2.28.

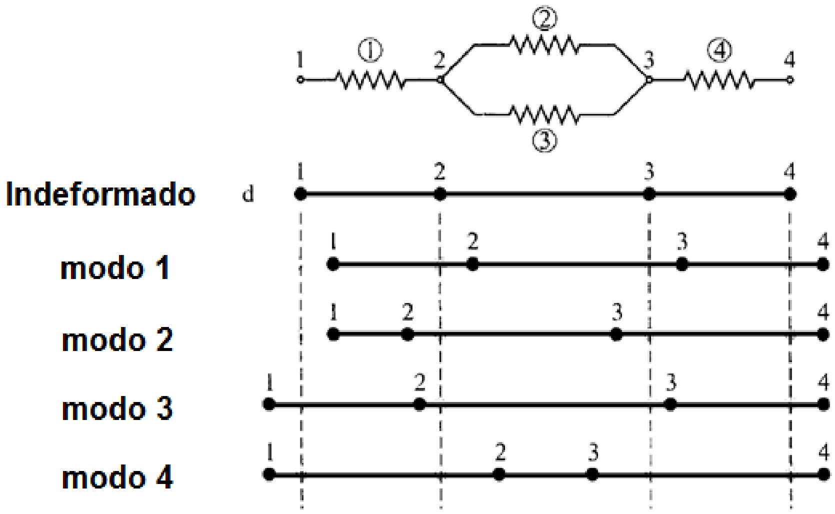

Figura 2.28 - Possíveis modos de solução para o sistema de molas lineares (MADENCI e GUVEN, 2006)

2.3.1.6 Condições de contorno

Como mostrado na Figura 2.27 o nó 1 está impedido para o deslocamento. Essa restrição é satisfeita por impor a condição de contorno $u_1 = 0$. Ou os deslocamentos no nó, u_i, ou as forças no nó, f_i, podem ser especificadas em um determinado nó. É fisicamente impossível especificar ambos como conhecido ou desconhecido. Portanto, a força nodal f_1 permanece como uma das incógnitas. Os deslocamentos nodais u_2, u_3 e u_4 são tratados como incógnitas, e as correspondentes forças nodais assumem os valores de $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ e $f_4 = F$

Estes valores especificados são implantados no sistema global de equações como

$$k^{(e)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = F \end{Bmatrix} \tag{2.93}$$

levando as seguintes equações:

$$k^{(e)}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \tag{2.94}$$

e

$$-k^{(e)}u_2 = f_1 \tag{2.95}$$

A matriz dos coeficientes na Eq. (2.94) já não é singular, e as soluções para estas equações são obtidos como

$$u_2 = \frac{F}{k^{(e)}},\ u_3 = \frac{3F}{2k^{(e)}},\ u_4 = \frac{5F}{2k^{(e)}} \tag{2.96}$$

e a força nodal desconhecida f_1 é determinada como $f_1 = -F$.

A solução física final aceitável é mostrada na Figura 2.29.

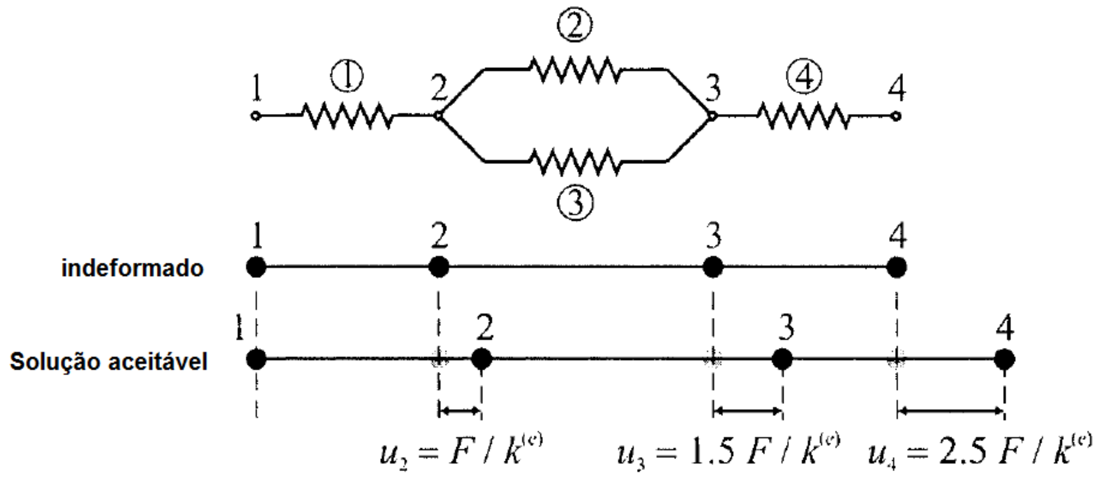

Figura 2.29 - Solução física aceitável para o sistema de molas lineares (MADENCI e GUVEN, 2006)

2.4 Modelagem computacional

A Modelagem Computacional procura simular numericamente fenômenos físicos utilizando uma sistemática que envolve engenharia, matemática e ciência da computação. É possível estudar os mais diversos fenômenos físicos, sendo eles simples ou complexos. Isso, aliado com a disponibilidade de computadores potentes, faz com que a simulação numérica seja uma ferramenta de grande importância para o desenvolvimento científico e tecnológico.

O estudo de estruturas, analisando principalmente tensões e deformações mecânicas, através de simulações computacionais, é conhecido como Mecânica dos Sólidos Computacional.

Os softwares comerciais para a Mecânica de Sólidos Computacional tornam-se atrativos pois apresentam sofisticadas interfaces aos usuários, facilitando a definição e a solução do problema e a análise dos resultados.

Para as análises envolvendo a Mecânica dos Sólidos Computacional realizadas neste trabalho, utilizou-se o software ANSYS Mechanical®.

3 METODOLOGIA

3.1 ANSYS

O ANSYS é um programa computacional, baseado no MEF, que pode ser utilizado nas mais diversas classes de problemas de engenharia. Possui habilidades para resolver sete tipos de análises estruturais diferentes: estática, modal, harmônica, dinâmica transiente, espectral, flambagem e dinâmica explícita. Além destas, várias características especiais estão disponíveis: mecânica da fratura, materiais compósitos, fadiga, etc.

De uma maneira geral, a modelagem computacional realizada no software ANSYS é dividida em três etapas principais:

- pré-processamento;
- solução (processamento);
- pós-processamento.

3.1.1 Pré-processamento

O pré-processamento é responsável por:

a) Definir a geometria da região de interesse (domínio computacional):

A modelagem da placa envolve a geração de um retângulo de tamanho $a \times b$ mm. Para criar a abertura é gerado um círculo com diâmetro d_c, cujas coordenadas x e y do centro coincidem com as da placa e são função de seu comprimento e largura. Usando a opção "Subtract Areas" disponível na operação "Booleans", a área do círculo é subtraída da placa. Assim, a geometria de uma placa com abertura circular centralizada é desenvolvida.

Nesta etapa devem ser especificados a espessura t da placa, o módulo de elasticidade E, a tensão de escoamento do material σy, o coeficiente de Poisson ν e o tipo de elemento que será utilizado na análise.

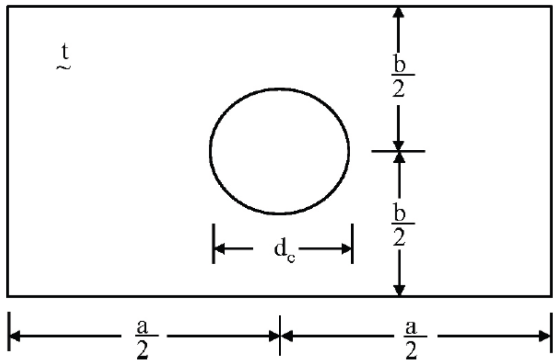

Figura 3.1 - Placa de aço com um orifício circular centrado submetida à compressão uniaxial Adaptada (PAIK, 2007).

b) Dividir o domínio em um número finito de subdomínios (geração da malha):

A divisão do domínio é feita de acordo com o tamanho dos elementos atribuídos no comando "Size Controls", disponível em "Mesh Tool" no menu "Meshing".

Pode-se refinar a malha somente em algumas regiões, definidas por interesse de análise. No caso das placas com perfuração o refinamento é feito no entorno do corte, onde há uma concentração de tensões.

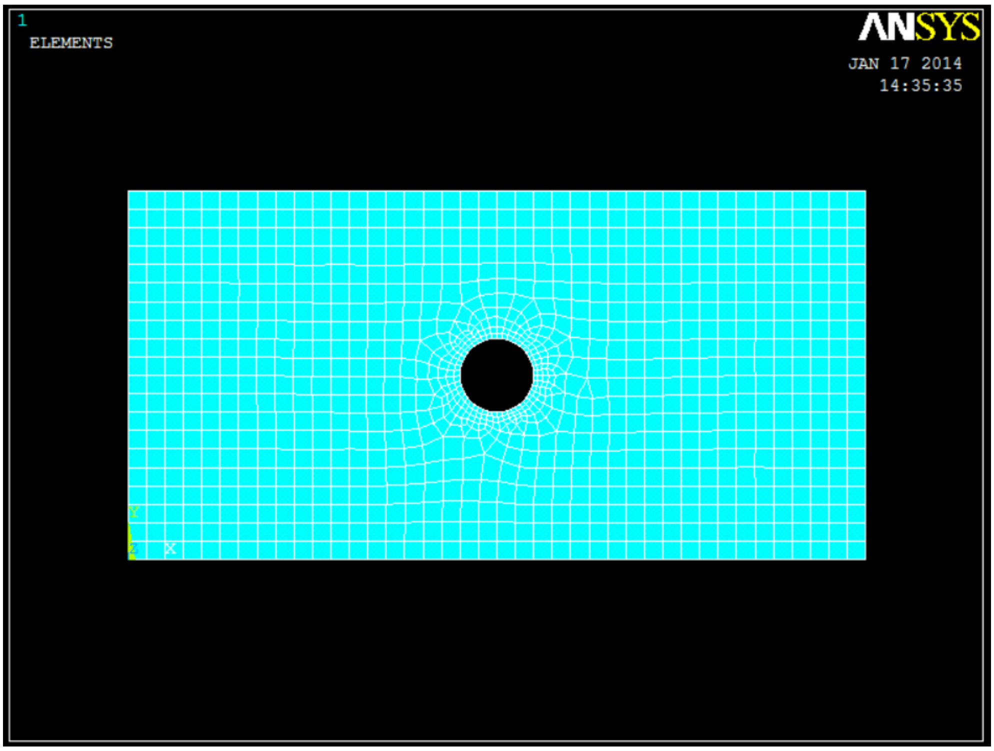

Figura 3.2 - Malha de elementos finitos para uma placa com um orifício circular centrado

c) Definir as condições iniciais:

A análise de flambagem elasto-plástica de uma placa é consideravelmente mais difícil do que a elástica, uma vez que a relação tensão-deformação vai além do limite proporcional e é mais complexa. As condições iniciais foram definidas conforme HELBIG *et al.* (2013), onde o material da placa foi assumido como linear elástico perfeitamente plástico. Uma geometria imperfeita inicial que segue o modo de flambagem de uma pré-análise de autovalor elástico é assumida. O valor máximo da imperfeição é estabelecido conforme EL-SAWY, NAZMY E MARTINI (2004), sendo este valor igual a $w_0 = \frac{b}{2000}$, onde b é a largura da placa.

d) Definir as condições de contorno:

Conforme KUMAR (2007), todas as bordas das placas são consideradas como simplesmente apoiadas. Todos os nós ao longo das quatro bordas são restringidos à deflexão e rotação ao longo da direção da espessura (UZ, RZ = 0).

Conforme ilustrado na Figura 3.3 e Figura 3.4, as bordas descarregadas podem deformar no plano, mas permanecem em linha reta. Isto é obtido através do acoplamento de todos os nós ao longo das bordas descarregadas no plano de deslocamento (UY), de tal modo que os deslocamentos ao longo do comprimento da placa são uniformes.

Esta condição é para gerar a situação real da placa entre reforços longitudinais e transversais.

A reação da borda é restringida para obter uma força igual causada devido a borda carregada. A extremidade reativa é restringida contra a deformação axial (UX = 0).

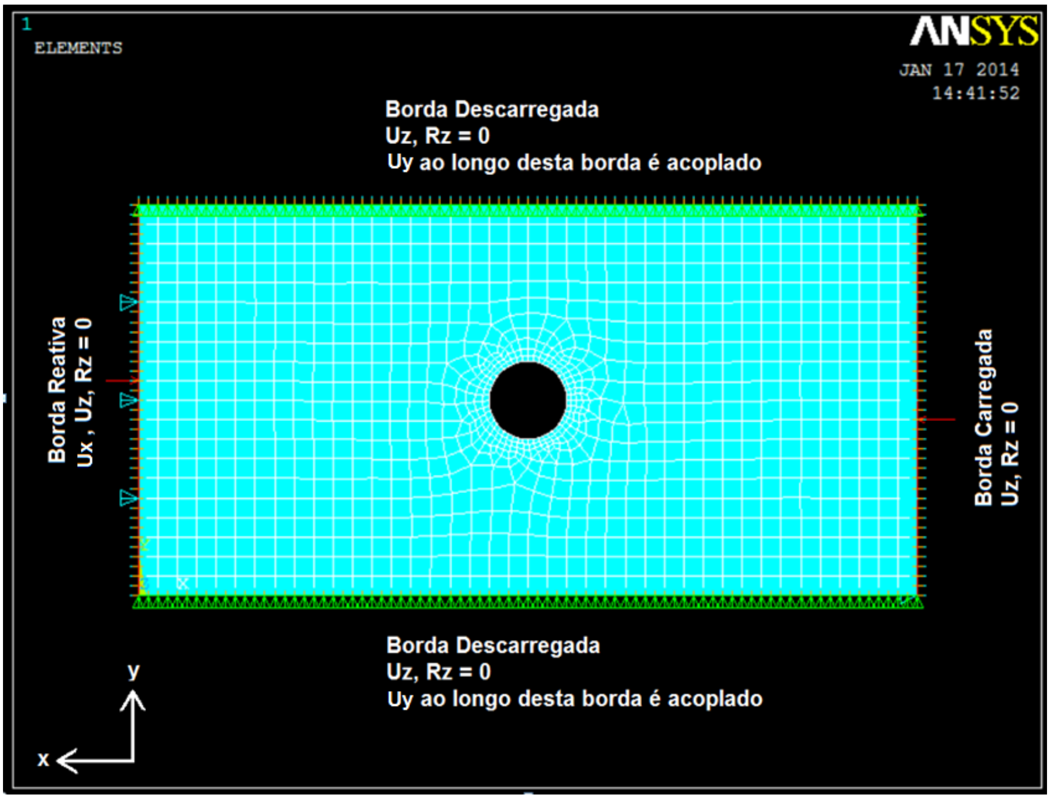

Figura 3.3 - Condições de contorno para modelagem das placas

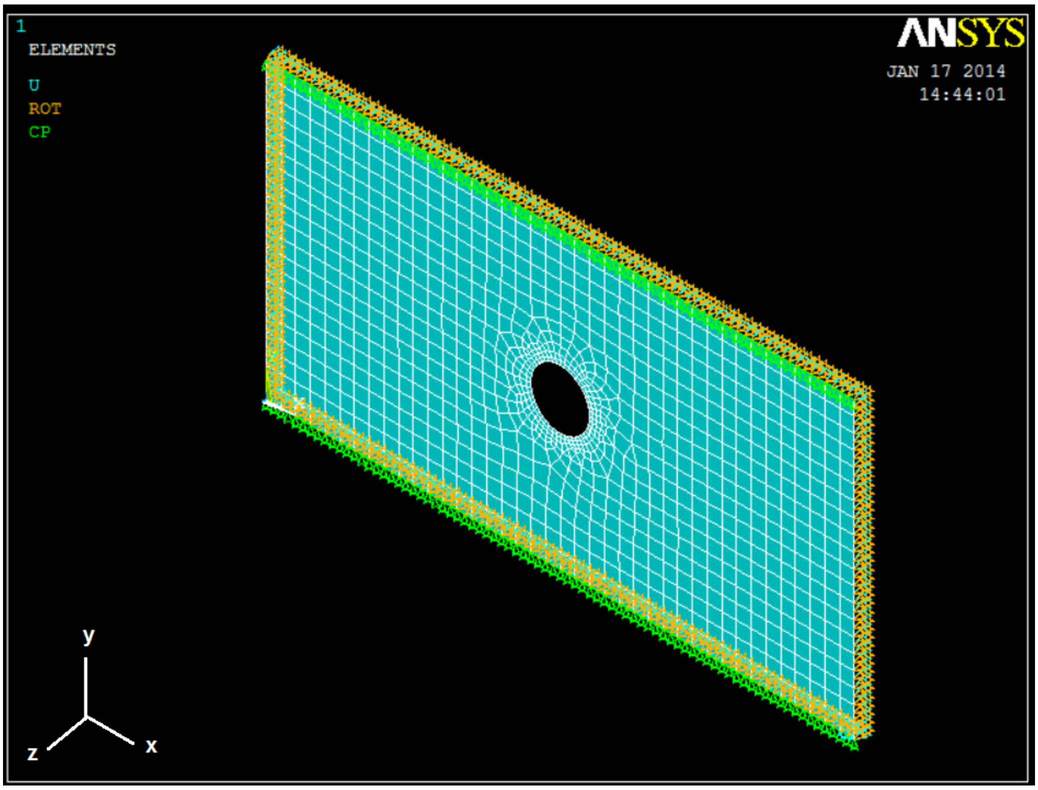

Figura 3.4 - Vista isométrica das condições de contorno

e) Selecionar o fenômeno físico que será modelado:

A análise por elementos finitos utilizada é capaz de modelar a não-linearidade do material, bem como a não-linearidade geométrica devido a grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Iguais incrementos de deslocamento ($UX = 0{,}010a$) em $x = 0$ são aplicados ao longo da direção do carregamento. As equações de equilíbrio não-lineares são resolvidas utilizando processo de iteração Newton Raphson. O somatório da força axial em todos os nós ao longo da borda carregada para cada incremento de deslocamento fornece a carga última resistente da amostra.

3.1.2 Processamento

A solução (processamento) é a etapa principal da simulação numérica. Consiste na resolução das equações de conservação pelo software. Em uma análise não-linear a solução não é calculada resolvendo um conjunto de equações lineares, como é feito para um problema linear. Ao contrário, a solução é encontrada especificando-se a carga como função do tempo e incrementando o tempo para obter a resposta não-linear. Então, o ANSYS divide a simulação em número de incrementos de tempo e encontra a configuração aproximada de equilíbrio no final de cada incremento de tempo. Utilizando o método de Newton-Raphson, normalmente leva uma série de iterações para determinar uma solução aceitável para cada incremento de tempo.

Caso, para a solução de uma iteração não se obtenha convergência, o ANSYS executa uma nova iteração, na tentativa de equilibrar as forças internas e externas. Para cada iteração em uma análise não-linear o programa forma para o modelo a matriz de rigidez e resolve o sistema de equações. O custo computacional para resolver uma iteração em um problema não-linear é muito próximo do tempo para a resolução de uma análise linear completa, tornando o gasto computacional de uma análise não-linear muito mais dispendioso do que uma análise linear. (JUNIOR, 2009)

3.1.3 Pós-processamento

E, finalmente, na etapa de pós-processamento, os resultados obtidos na etapa anterior são analisados. Nessa fase são identificados problemas relacionados a todas as etapas anteriores.

Encontrados os problemas, volta-se ao passo referente, corrige-se e a análise é reiniciada. Na etapa de pós-processamento os softwares comerciais estão equipados com versáteis ferramentas para a análise e apresentação dos resultados.

3.2 Teste de convergência

A exatidão da solução é governada pelo número de elementos da malha. Em geral, quanto maior o número de elementos, maior a exatidão. Porém, quanto mais refinada a malha maior o esforço computacional.

A seguir serão apresentados dois testes de convergência que especificarão o tipo de elemento e o tamanho de malha que apresentaram um resultado mais satisfatório e um tempo hábil de processamento para serem aplicados neste trabalho.

3.2.1 Tipo de elemento

Foram escolhidos dois tipos de elementos do software ANSYS a fim de identificar qual deles convergia ao resultado mais rapidamente: SHELL181 e SHELL93.

Elementos do tipo Shell possuem grande aplicação na modelagem de estruturas finas, em que a espessura é pequena em comparação com as outras dimensões.

O elemento SHELL181 (Figura 3.5) é um elemento que possui quatro nós, com seis graus de liberdade em cada nó (três rotações e três translações).

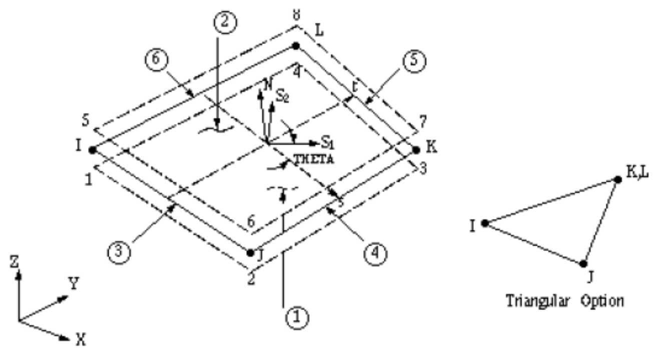

Figura 3.5 - Elemento Shell 181

Já o elemento SHELL93 (Figura 3.6) possui oito nós, com seis graus de liberdade em cada nó (três rotações e três translações).

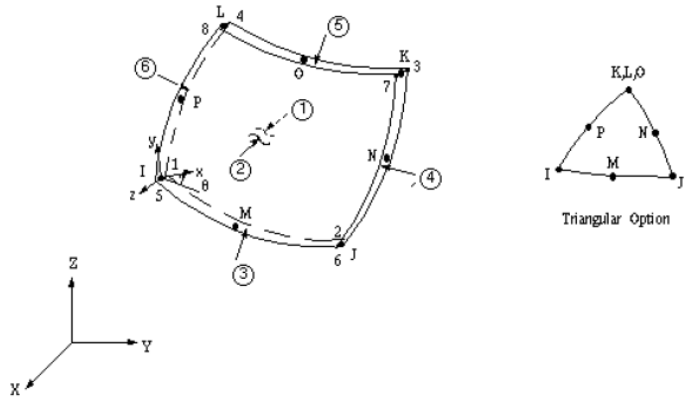

Figura 3.6 - Elemento Shell 93

Foram feitos testes de convergência para os dois tipos de elementos para uma placa cujas características estão presentes na Figura 3.7 e na Tabela 3.1:

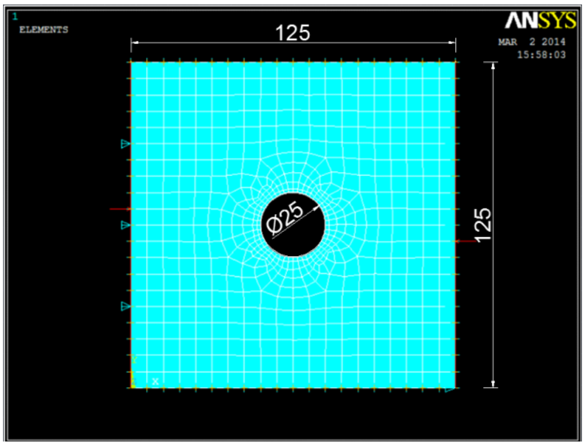

Figura 3.7 - Características da placa modelo para teste de convergência do elemento

Tabela 3.1 - Características da placa modelo para teste de convergência do elemento

a=b (mm)	t (mm)	d (mm)	d_c/b	b/t	w_0 (mm)	E (GPa)	σy (MPa)
125	1,615	25	0,2	77,40	0,097	210	323,3

A placa escolhida foi modelada no programa ANSYS conforme os passos descritos anteriormente no item 2.4.2 deste trabalho. Os valores encontrados para os 4 testes realizados, onde o tamanho do elemento variou, serão apresentados na Tabela 3.2 e na Figura 3.8.

Tabela 3.2 - Teste de convergência do tipo de elemento

Teste	Tamanho do elemento (mm)	Malha		SHELL93			SHELL181		
				PANSYS (kN)	Erro relativo (%)	Aproximação	PANSYS (kN)	Erro relativo (%)	Aproximação
1	25,00	5	5	37,8709	0,0011	0,9989	38,4436	0,0096	0,9904
2	12,50	10	10	37,8190	0,0025	0,9975	38,4383	0,0095	0,9905
3	6,25	20	20	37,9039	0,0002	0,9998	38,1549	0,0021	0,9979
4	3,13	40	40	37,9122	0,0000	1,0000	38,0762	0,0000	1,0000

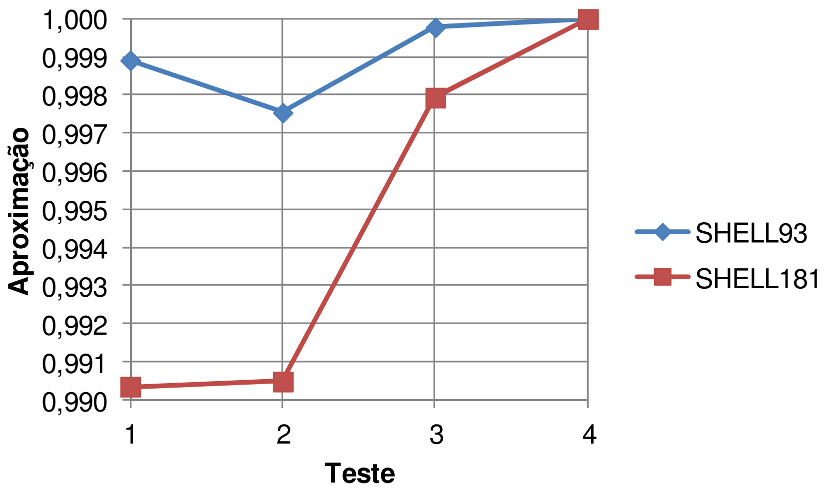

Figura 3.8 - Teste de convergência do tipo de elemento

Pelo fato de o elemento SHELL93 possuir oito nós, seu tempo de processamento foi maior que o do SHELL181, que apresenta quatro nós. Com uma malha menor, o SHELL93 produz resultados mais satisfatórios que o SHELL181. Desta forma o tipo de elemento escolhido para realizar a modelagem computacional foi o SHELL93.

3.2.2 Tamanho da malha

Foram feitos testes de convergência de malha para dois tipos de placas (A e B) cujas características estão presentes na Figura 3.9 e na Tabela 3.3.

Figura 3.9 - Características das placas modelo para teste de convergência de malha

Tabela 3.3 - Características das placas modelo para teste de convergência de malha

Placa	a=b (mm)	t (mm)	d_c (mm)	d_c/b	b/t	w_0 (mm)	E (GPa)	σy (MPa)
A	125	1,615	0	0,0	77,40	0,229	210	323,3
B	125	1,615	25	0,2	77,40	0,097	210	323,3

Os testes e os respectivos resultados serão apresentados na Tabela 3.4 e na Tabela 3.5 .

Tabela 3.4 - Teste de convergência de malha para a placa A

Teste	a=b [mm]	esize	Número de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha		P_{ult} ANSYS [kN]	Erro Relativo (%)	Aproximação
1	125	b/5	25	25	5	5	40,4388	0,377	0,623
2	125	b/10	100	12,50	10	10	40,5781	0,034	0,966
3	125	b/20	400	6,25	20	20	40,578	0,034	0,966
4	125	b/40	1600	3,13	40	40	40,5919	0,000	1,000

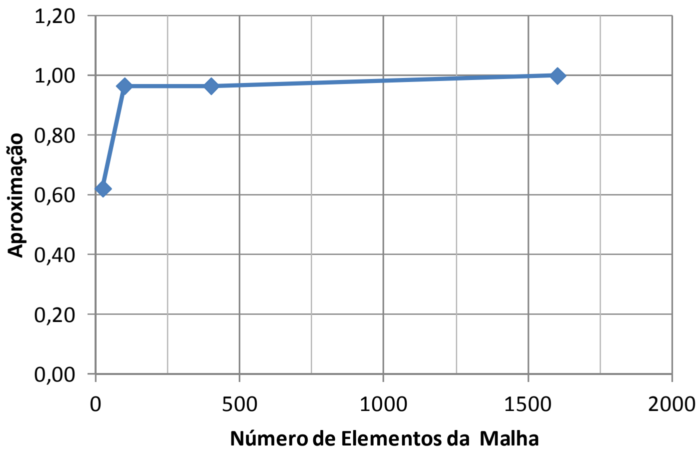

Figura 3.10 - Teste de convergência de malha para a placa A

Tabela 3.5 - Teste de convergência de malha para a placa B

Teste	a=b [mm]	esize	Nº de Elementos	Tamanho do elemento (mm)	Malha		P_{ult} ANSYS [kN]	Erro Relativo (%)	Aproximação
1	125	b/5	136	25	5	5	37,8709	0,109	0,891
2	125	b/10	195	12,50	10	10	37,8190	0,246	0,754
3	125	b/20	584	6,25	20	20	37,9039	0,022	0,978
4	125	b/40	1899	3,13	40	40	37,9122	0,000	1,000

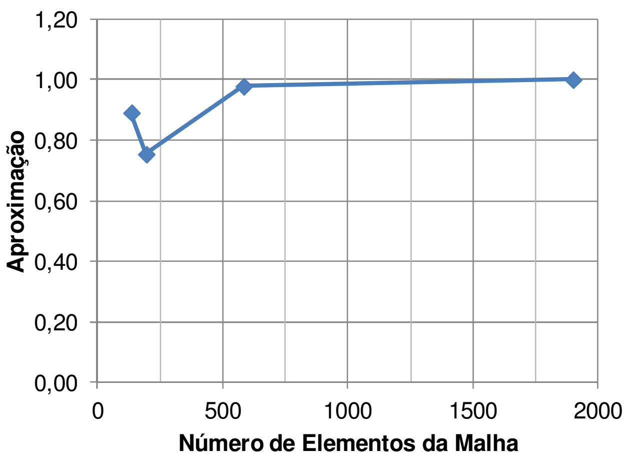

Figura 3.11 - Teste de convergência de malha para a placa B

Um modelo com uma malha muito refinada significa um maior tempo de processamento. Logo, é importante saber a condição de refinamento do modelo numérico em virtude dos resultados que se pretende obter e do tempo disponível para realizar o estudo.

Sabe-se que quanto mais refinada a malha, melhor serão os resultados obtidos. Sendo assim, os valores obtidos no Teste 4 foram tomados como referência para determinação do erro relativo.

Observando os gráficos, nota-se que o mais indicado seria realizar análises como as do Teste 4, com a malha mais refinada e com elementos do tamanho correspondente a largura da placa dividido por 40. Porém, os testes serão simulados conforme o Teste 3, onde a malha possui elementos com tamanho b/20, porque os resultados dos Testes 3 e 4 são suficientemente próximos.

3.3 Validação do modelo

Para a validação do modelo foram tomados como base os valores experimentais (Figura 3.12) encontrados por NARAYANAN E CHOW (1984) no estudo para prever a capacidade de carga máxima e o comportamento pós-flambagem de placas perfuradas, normalmente utilizadas em estruturas de engenharia.

O dispositivo de ensaio é capaz de aplicar a compressão uniaxial em painéis de chapa. O equipamento é capaz de aplicar uma carga máxima de 90 kN axial na direção x ou y. A carga sobre a placa é aplicada através de macacos hidráulicos que atuam contra os blocos que contêm conjuntos de rolamentos para proporcionar arestas simplesmente apoiadas. Rolamentos semelhantes são empregados nas extremidades carregadas.

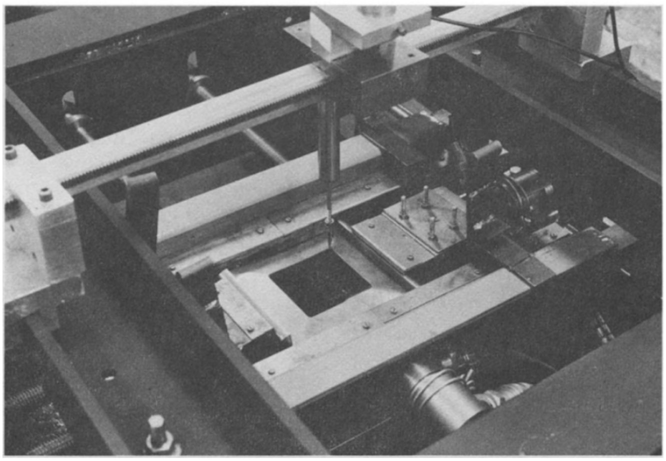

Figura 3.12 - Equipamento de testes experimentais realizados por (NARAYANAN e CHOW, 1984)

As cargas aplicadas são medidas por uma célula de carga calibrada e o encurtamento axial das amostras por um par de transdutores fixados horizontalmente. As imperfeições iniciais e deformações fora do plano da placa são medidos através de transdutores de deslocamento linear. Todos os transdutores são conectados a voltímetros digitais que foram diretamente calibrados para dar uma precisão de medição de deslocamento de 0,001 mm.

A validação do modelo é realizada comparando-se a carga máxima encontrada através do modelo numérico rodado no software ANSYS, empregando o método dos elementos finitos, com a carga máxima mostrada na Tabela 3.6, encontrada em testes experimentais realizados por NARAYANAN e CHOW (1984).

Tabela 3.6 - Valores experimentais (NARAYANAN e CHOW, 1984)

PLACA	a=b (mm)	t (mm)	d_c (mm)	d_d/b	b/t	w_0 (mm)	E (GPa)	σy (MPa)	P_{ult} (kN)
PL1a	125	1,615	0	0,0	77,40	0,229	210	323,3	39,32
CIR2a	125	1,615	25	0,2	77,40	0,229	210	323,3	37,46
CIR2b	125	1,615	25	0,2	77,40	0,097	210	323,3	38,7
CIR3a	125	1,615	37,5	0,3	77,40	0,136	210	323,3	33,94
CIR4a	125	1,615	50	0,4	77,40	0,304	210	323,3	29,57
CIR4b	125	1,615	50	0,4	77,40	0,127	210	323,3	28,39
Cir5a	125	1,615	62,5	0,5	77,40	0,279	210	323,3	27,35
Cir6	86	2,032	25	0,3	42,32	0,254	210	334,7	42,17
Cir7	86	1,615	25	0,3	53,25	0,229	210	323,3	26,18
Cir8	86	0,972	25	0,3	88,48	0,102	210	317,6	12,35
Cir9	86	0,693	25	0,3	124,10	0,051	210	322,8	7,33
Cir10	86	2,032	40	0,5	42,32	0,102	210	334,7	33,64
Cir11	86	1,615	40	0,5	53,25	0,279	210	323,3	22,14
Cir12	86	0,972	40	0,5	88,48	0,152	210	317,6	10,89

O elemento utilizado na modelagem foi o SHELL 93 e a malha de elementos finitos possui tamanho igual a $b/20$, onde b é a largura da placa.

A comparação dos resultados experimentais obtido por NARAYANAN e CHOW (1984) para a capacidade de carga máxima de placas perfuradas com os valores correspondentes obtidos a partir da análise através do software ANSYS, dada na Tabela 3.7, mostra que existe uma boa concordância entre os dois conjuntos de resultados.

Tabela 3.7 - Comparação dos resultados

PLACA	$P_{ult,Exp}$ (kN)	$P_{ult,ANSYS}$ (kN)	P_{ANSYS} / P_{Exp}	Erro relativo (%)
PL1a	39,32	40,58	1,03	3,20
CIR2a	37,46	37,63	1,00	0,47
CIR2b	38,7	37,90	0,98	2,06
CIR3a	33,94	35,03	1,03	3,20
CIR4a	29,57	31,52	1,07	6,60
CIR4b	28,39	31,72	1,12	11,74
Cir5a	27,35	28,07	1,03	2,62
Cir6	42,17	40,15	0,95	4,80
Cir7	26,18	28,10	1,07	7,34
Cir8	12,35	13,63	1,10	10,35
Cir9	7,33	8,86	1,21	20,91
Cir10	33,64	34,24	1,02	1,78
Cir11	22,14	23,21	1,05	4,82
Cir12	10,89	11,38	1,04	4,50

A subestimação ou superestimação pelo modelo numérico está dentro de um nível aceitável, onde o valor da relação P_{ANSYS}/P_{Exp} médio é 1,05, com um desvio padrão de 0,0641 e um coeficiente de variação de 6,10%.

Para a placa CIR2b é apresentado o gráfico comparativo entre os valores experimentais e o da simulação numérica no programa ANSYS, onde podemos observar a existência de uma significante resistência pós-flambagem e que a capacidade de carga é praticamente coincidente no pico da curva . (Figura 3.13)

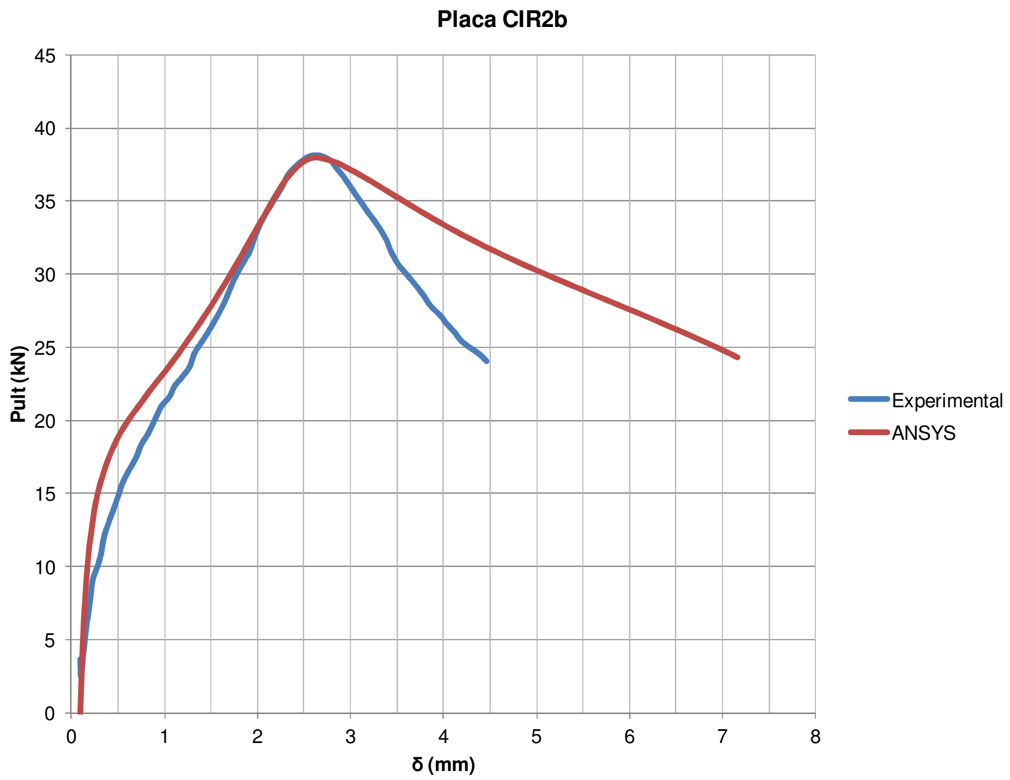

Figura 3.13 - Comparação dos resultados para a placa CIR2b

Pode-se concluir que o modelo numérico baseado no método dos elementos finitos utilizado é capaz de modelar o comportamento e prever a capacidade de carga de placas perfuradas com precisão suficiente.

3.4 Estudo Paramétrico

As situações analisadas neste trabalho compreendem placas quadradas e retangulares, com ou sem perfuração, submetidas à compressão uniaxial, onde:

- a : comprimento
- b : largura
- t : espessura
- d_c : diâmetro do furo
- E : módulo de elasticidade do aço de 210 GPa
- ν : coeficiente de Poisson de 0,3
- Material: Aço AH36 com tensão de escoamento do material σy = 355 MPa - Aços de alta resistência e baixa liga com limite de escoamento entre 310 e 355 MPa são

utilizados em aplicações como plataformas marítimas de extração de petróleo e gás, torres de transmissão de potência e construção naval.

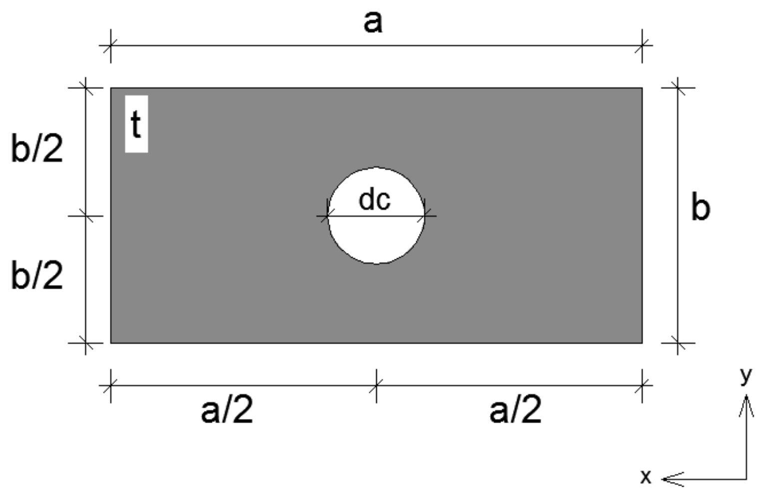

Figura 3.14 - Geometria das placas

Os testes foram divididos em seis grupos, onde cada um apresenta variações paramétricas em:

- tamanho da placa;
- espessura da placa;
- tamanho do furo.

A largura da placa b é mantida constante e igual a 900 mm ao longo do estudo. O comprimento a é variado como 900 mm, 1800 mm, 2700 mm, 3600 mm, 4500 mm e 5400 mm. A espessura das placas t varia em 10 mm, 12,5 mm, 15 mm, 19 mm e 22 mm e o diâmetro do furo centrado varia de zero, 180 mm, 360 mm, 540 mm e 720 mm, conforme Tabela 3.8 até Tabela 3.10.

O coeficiente β, definido como índice de esbeltez da placa, é segundo PAIK (2007) dado por:

$$\beta = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{E}{\sigma y}} \tag{3.1}$$

O respectivo índice variou conforme a espessura da placa para cada grupo analisado, conforme mostrado na Tabela 3.9.

Tabela 3.8 - Variações de comprimento

	a (mm)	b (mm)	a/b
GRUPO 1	900	900	1
GRUPO 2	1800	900	2
GRUPO 3	2700	900	3
GRUPO 4	3600	900	4
GRUPO 5	4500	900	5
GRUPO 6	5400	900	6

Tabela 3.9 - Variações de espessura

t (mm)	β
10	2,19
12,5	1,75
15	1,46
19	1,15
22	0,99

Tabela 3.10 - Variações no diâmetro do furo circular centrado

dc	dc/b
0	0,0
180	0,2
360	0,4
540	0,6
720	0,8

4 RESULTADOS

4.1 Influência do furo

Na Figura 4.1 até 4.3 serão apresentados gráficos da tensão última, obtida pela divisão da força última do ANSYS pela área $b \times t$ da seção transversal da placa, versus a deformação na direção x (ε_x), consequente dos incrementos de deslocamento UX ao longo da borda carregada ($x = 0$), para três chapas de aço cuja relação $a/b = 1$, com um único furo circular centrado até e após a força máxima ser atingida, quando o tamanho do orifício (diâmetro) é variado.

As placas são consideradas fina, moderadamente espessa e espessa, porque os índices de esbeltez são 2,19, 1,46 e 0,99. É de se notar que a razão de esbeltez de placas em navios e em estruturas offshore é tipicamente de 1,5 a 3,5 (PAIK, THAYAMBALLI e KIM, 2001).

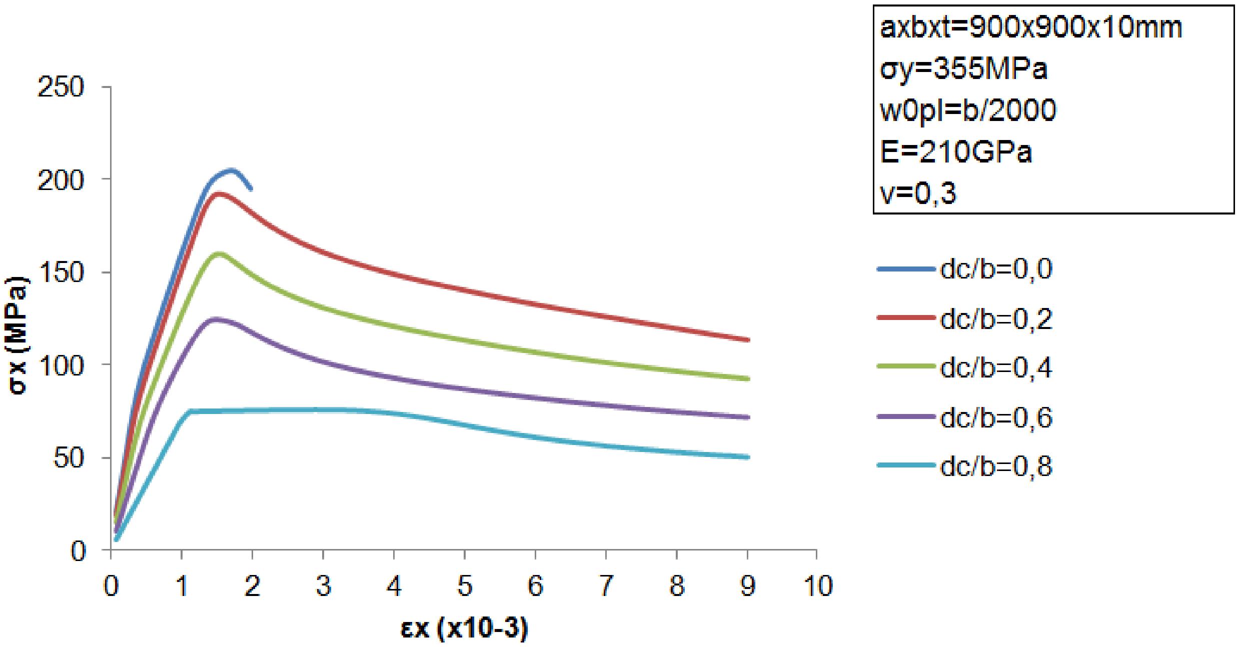

Figura 4.1 - Influência do furo em placa com relação a/b=1 e t=10mm

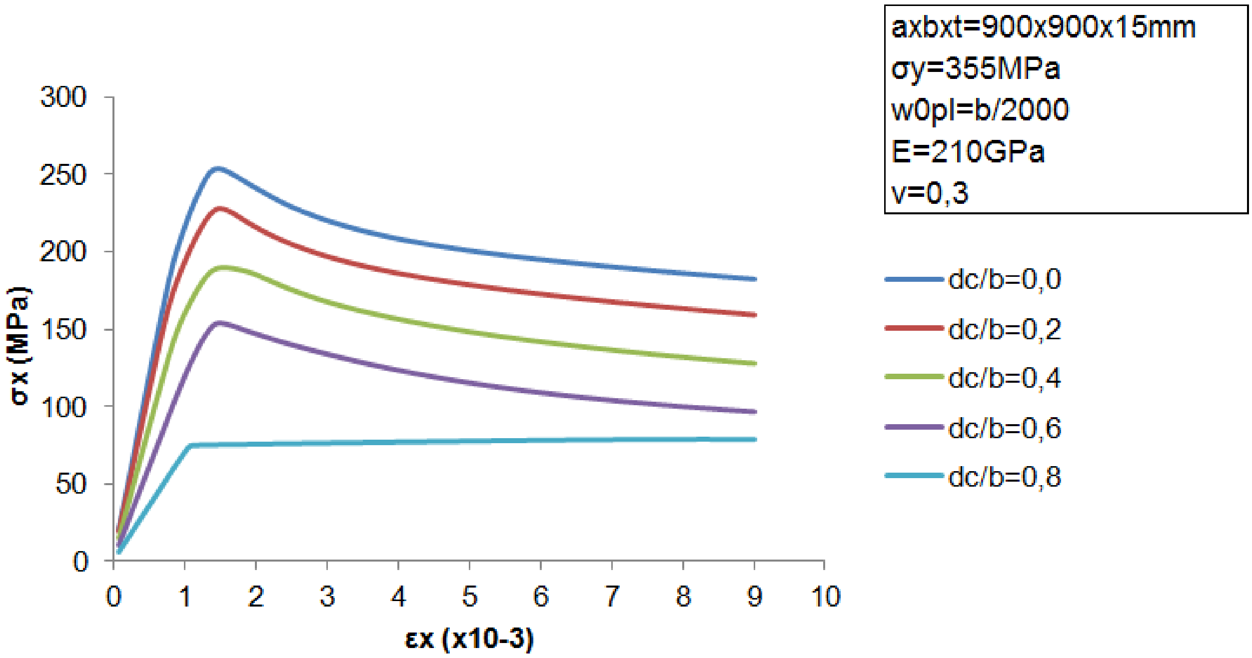

Figura 4.2 - Influência do furo em placa com relação a/b=1 e t=15mm

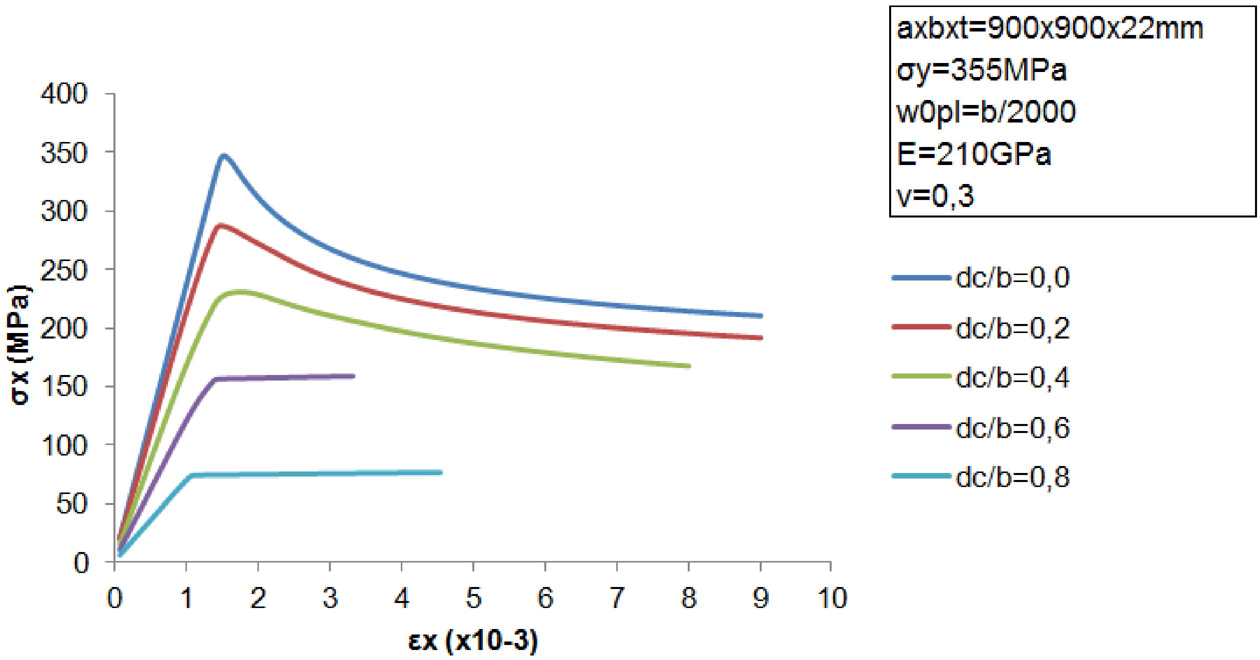

Figura 4.3 - Influência do furo em placa com relação a/b=1 e t=22mm

É evidente, a partir da análise da Figura 4.1 até Figura 4.3, que a força máxima é significativamente reduzida pelo furo. Por exemplo, quando a área do orifício circular corresponde a 50,3% da área total da placa ($d_c/b = 0{,}8$), a força máxima da placa é reduzida em aproximadamente 63% para a placa com $\beta = 2{,}19$, 69% para $\beta = 1{,}46$ e 78% para $\beta = 0{,}99$, quando comparada com a placa maciça, isto é, sem furo.

4.2 Efeito da esbeltez

A esbeltez de uma placa é um fator de forte influência na forma como a estrutura irá sofrer flambagem, definindo se esta será elástica ou inelástica, além de determinar a carga de ruptura. Conforme relatado no item 2.2.6 deste trabalho, sabemos que quanto mais robusta for a placa, mais resistente à flambagem ela será, o que é comprovado quando analisamos os gráficos da Figura 4.4 até Figura 4.9.

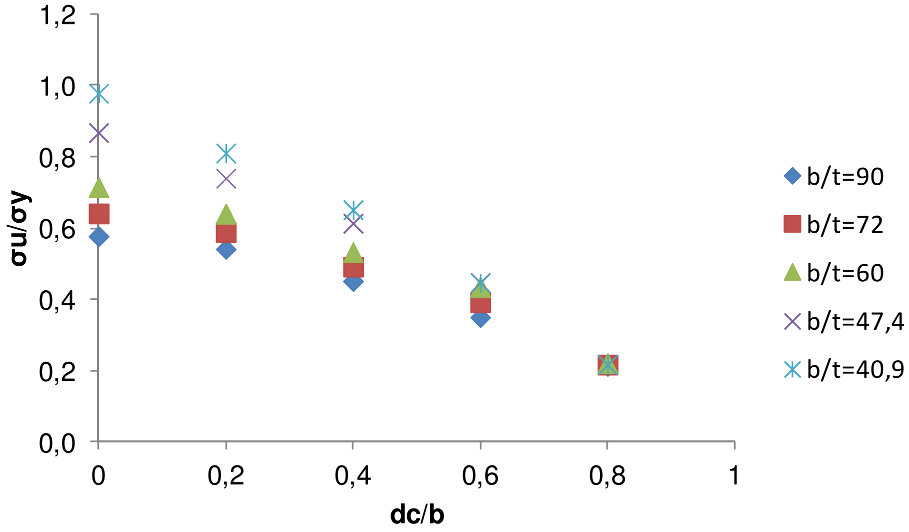

Figura 4.4 - Efeito da esbeltez para placa a/b=1

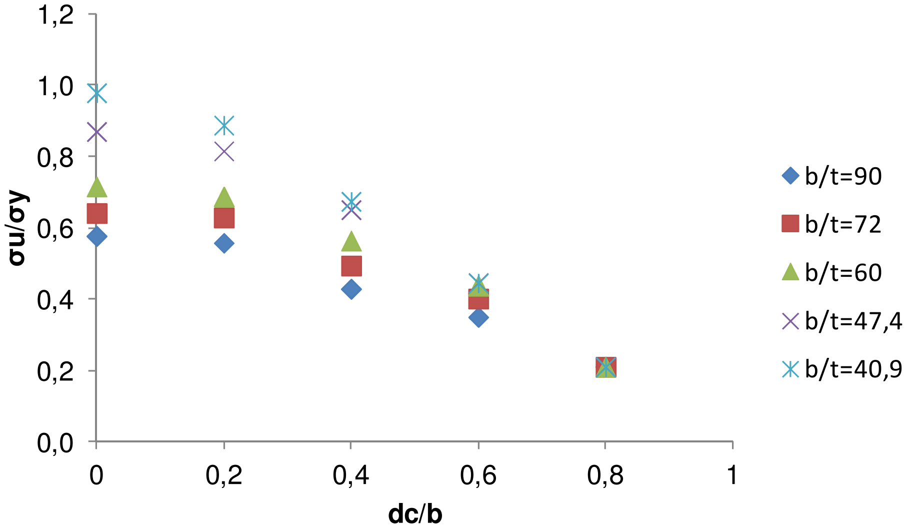

Figura 4.5 - Efeito da esbeltez para placa a/b=2

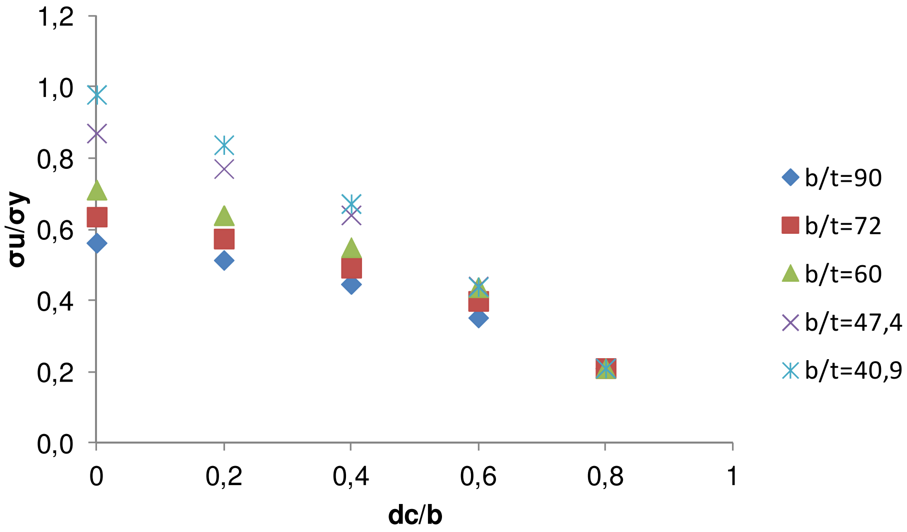

Figura 4.6 - Efeito da esbeltez para placa a/b=3

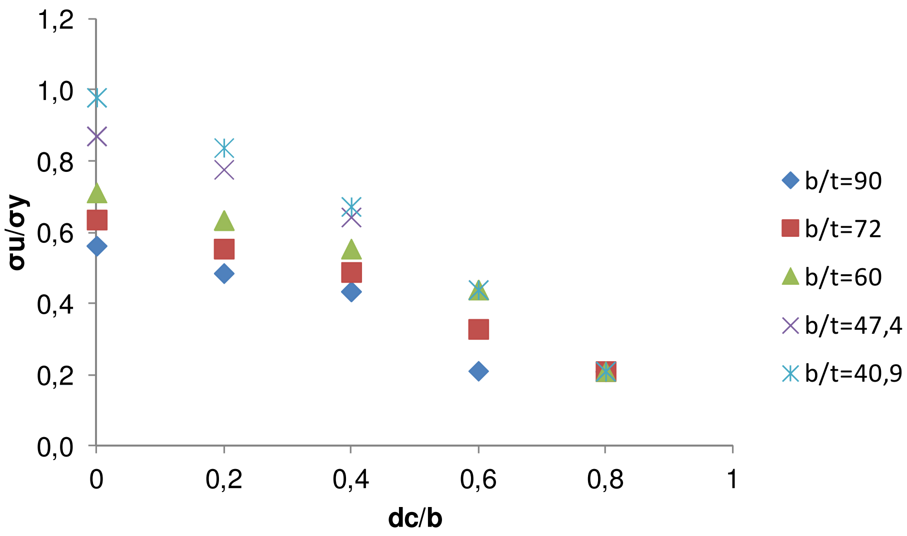

Figura 4.7 - Efeito da esbeltez para placa a/b=4

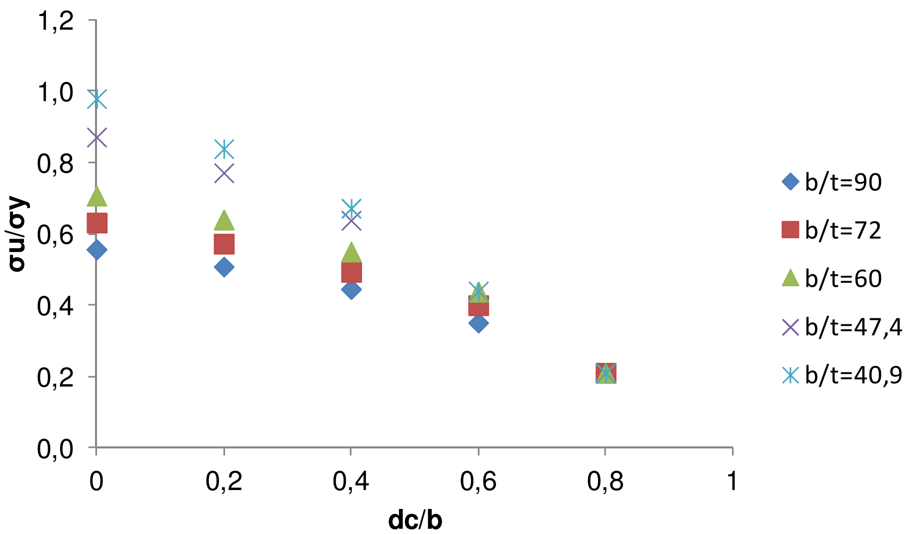

Figura 4.8 - Efeito da esbeltez para placa a/b=5

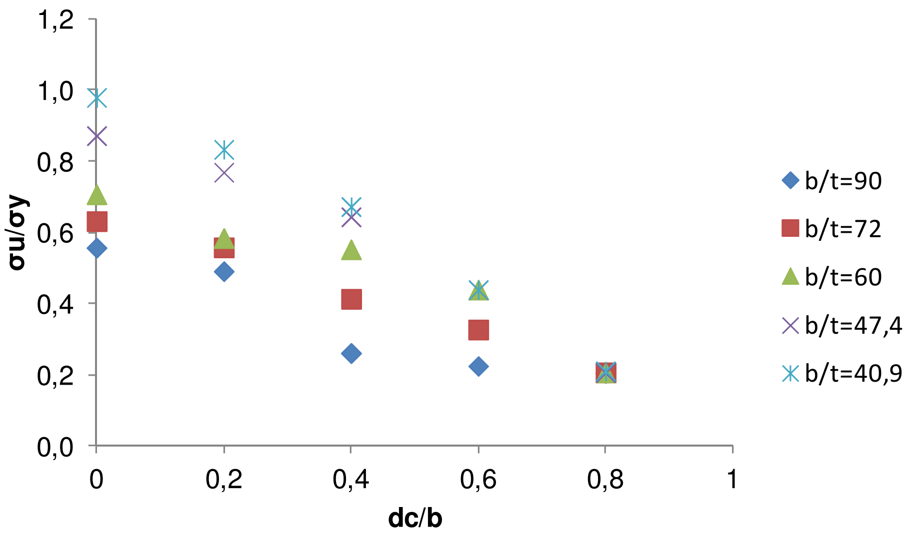

Figura 4.9 - Efeito da esbeltez para placa a/b=6

Para as placas ditas perfeitas, ou seja, sem furos, a esbeltez da placa é determinante no valor de sua resistência última. Nota-se que quanto menor a relação b/t, mais espessa a placa, e maior sua resistência. À medida que o diâmetro do furo vai aumentando, há uma convergência para o valor da tensão normal média, independentemente da espessura da placa. Tal convergência deve-se ao motivo de a carga última ser limitada pela tensão de escoamento do material.

A tensão última é calculada como sendo a força última total (somatório das ações nodais na direção x na borda carregada da placa em $x = 0$), dividida pela área da seção transversal da placa bxt, ou seja:

$$\sigma_u = \frac{(F_x)_{ult}}{bt} \tag{4.1}$$

Este valor corresponde a uma tensão média considerando a placa numa situação de compressão simples.

Na realidade, como há uma imperfeição inicial na placa igual a w_0, desde o início do carregamento a placa está submetida a uma situação de flexo-compressão normal. Nesse caso, as tensões na seção transversal da placa não serão mais uniformes (Figura 4.10). A tensão máxima de compressão ocorrerá no bordo superior.

Figura 4.10 - Situação de flexo-compressão (HIBBELER, 2010)

Esta tensão máxima pode ser muito superior à tensão média, e o escoamento pode ser atingido nos bordos da placa, mesmo quando a tensão média ainda é inferior à tensão de escoamento do material.

Ajunte-se a isto o caso de placas perfuradas, cuja área da seção transversal para $x = \frac{a}{2}$ é menor que a área de seção transversal na seção do apoio ($x = 0$). Isto faz com que as tensões na seção central da placa sejam muito maiores que a tensão média no apoio.

Sendo assim, na ruptura, as tensões no centro da placa são sempre iguais ou superiores à tensão de escoamento do material σ_y. Porém, como estamos adotando como tensão de referência a tensão média no apoio, aparentemente, teremos σ_u menor que σ_y.

4.3 Variações no parâmetro de proporção

Foram feitos testes com variação no parâmetro de proporção a/b das placas. Os gráficos da Figura 4.11 até Figura 4.15 mostram os resultados obtidos. É interessante notar que a resistência última da placa é raramente afetada pelos aspectos de proporção. Quanto mais robusta (espessa) a placa, menos variações são encontradas na resistência última, em função da variação no aspecto de proporção.

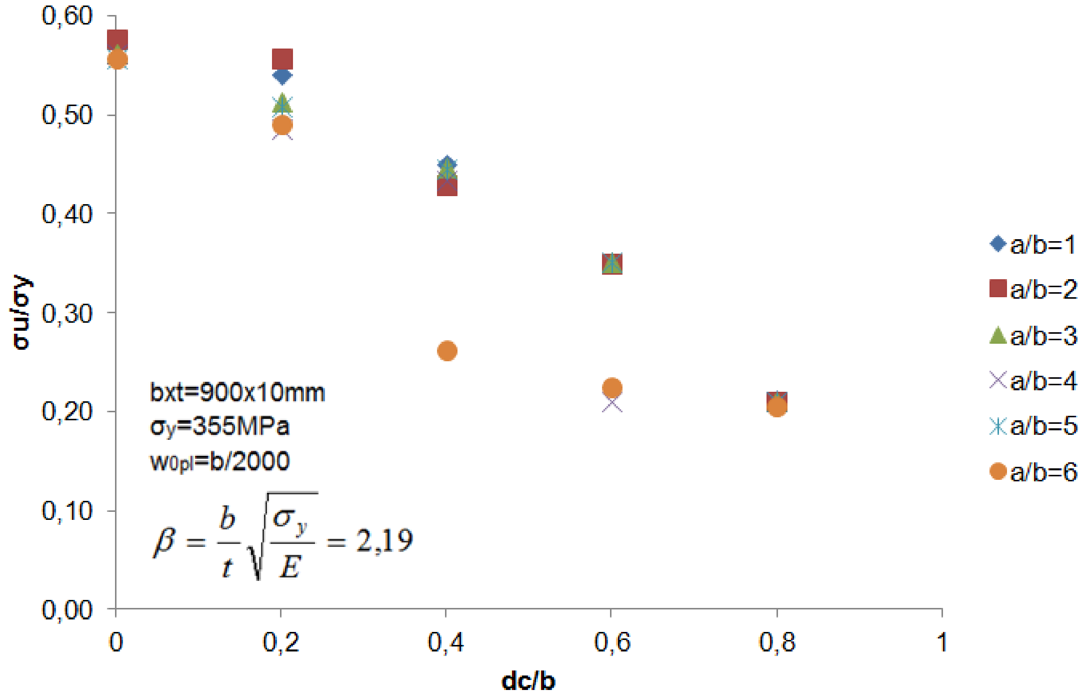

Figura 4.11 - Gráfico com variação no parâmetro de proporção para placa com t=10mm

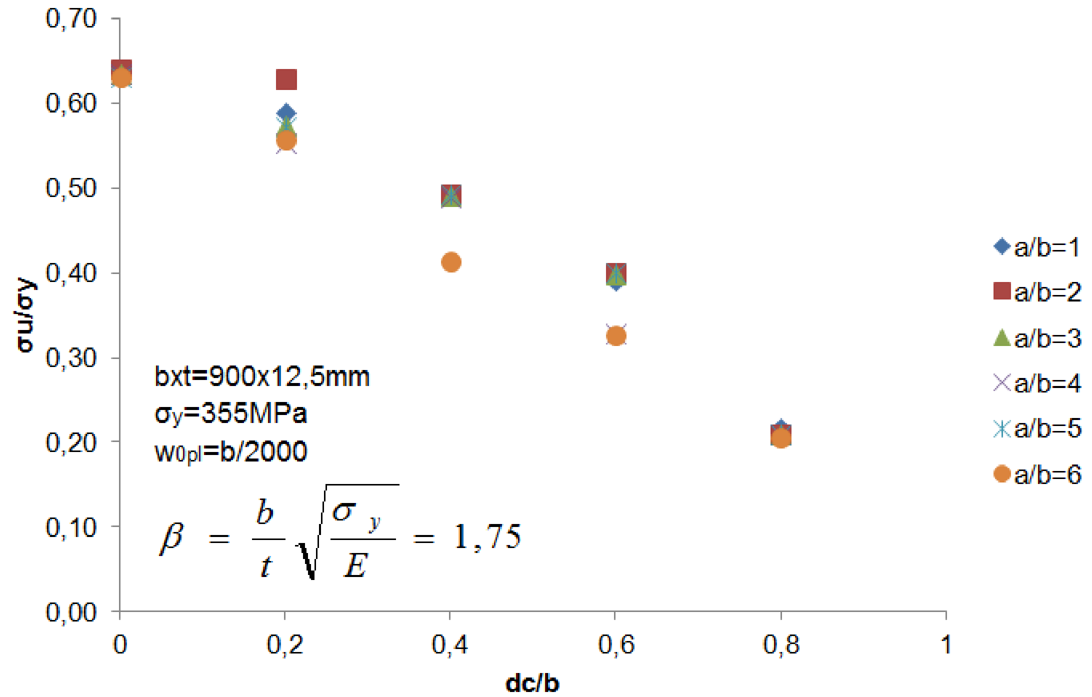

Figura 4.12 - Gráfico com variação no parâmetro de proporção para placa com t=12,5mm

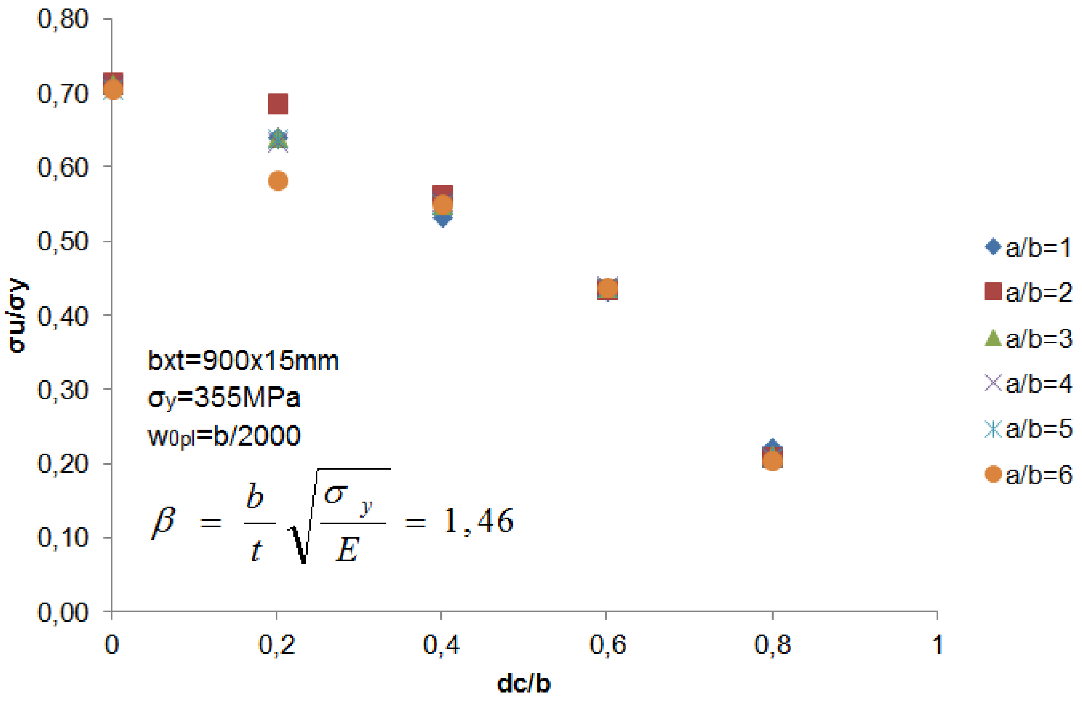

Figura 4.13 - Gráfico com variação no parâmetro de proporção para placa com t=15mm

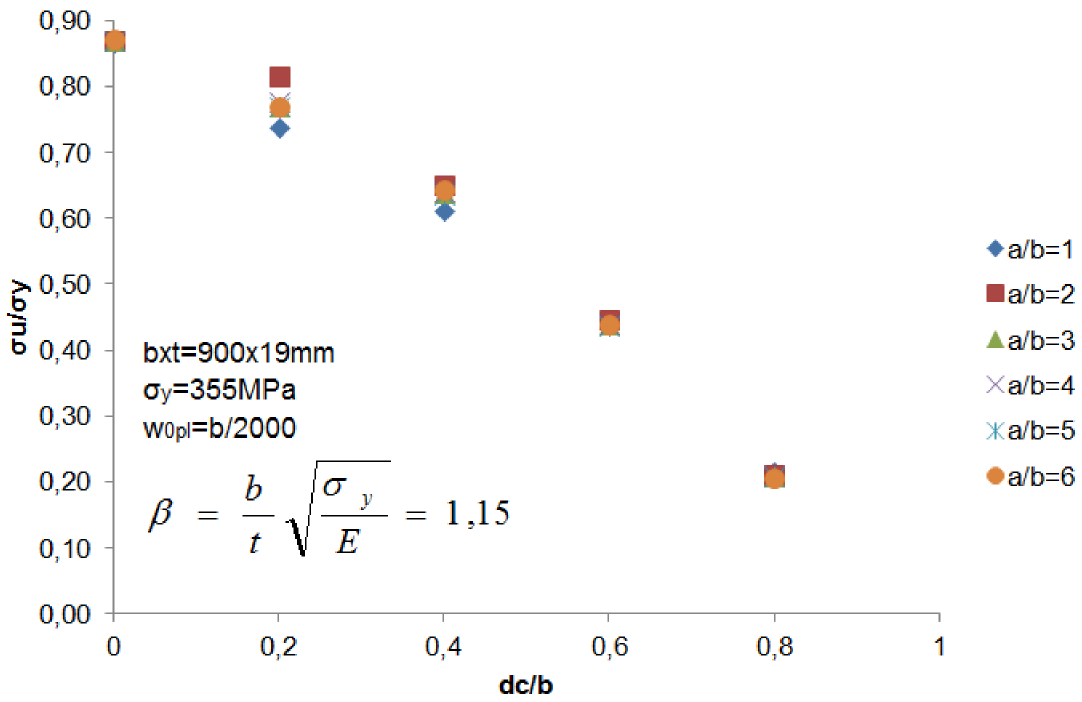

Figura 4.14 - Gráfico com variação no parâmetro de proporção para placa com t=19mm

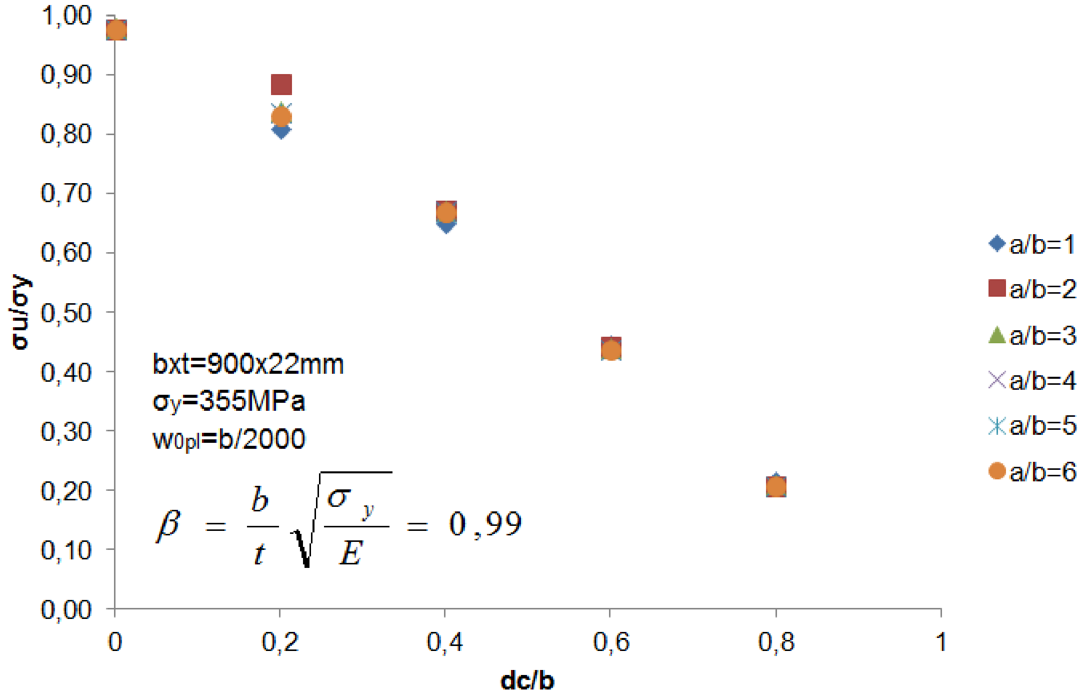

Figura 4.15 - Gráfico com variação no parâmetro de proporção para placa com t=22mm

4.4 Avaliação custo x benefício

Dada uma caverna típica de costado de um navio com necessidade de uma abertura para acesso ou passagem de uma tubulação, definida por um diâmetro dc. O espaçamento entre os perfis longitudinais segue um padrão de 900 mm. É possível a realização de uma análise, dentre os modelos rodados neste trabalho, para a determinação da geometria da placa que com o menor volume, e consequente menor peso de material, atinja a resistência máxima, respeitando a necessidade do recorte.

Tal análise permite determinar a geometria com a relação custo x benefício mais viável, quando levado em consideração o custo referente somente à produção das chapas de aço. Cabe salientar que a resistência máxima é obtida levando em consideração apenas o esforço de compressão uniaxial, desprezando, assim, demais esforços presentes em chapas utilizadas para a construção naval e offshore.

Na Figura 4.16, é possível observar que, para chapas sem recorte, a resistência máxima pode ser atingida com uma significante economia de material. A geometria cujo espaçamento dos enrijecedores transversais é $a = 1800mm$ e a espessura é $t = 10mm$ fornece aproximadamente a mesma resistência última do que os demais modelos.

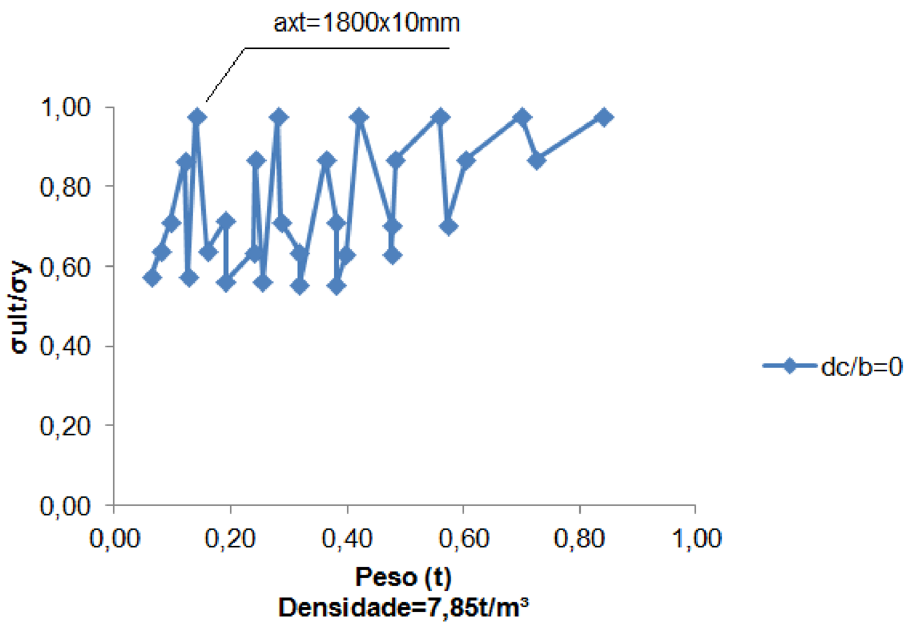

Figura 4.16 - Relação entre resistência e peso de material para placa sem furo

De forma análoga, respeitando a necessidade de um recorte com $dc = 180mm$, é possível afirmar que a resistência máxima é atingida para uma placa cujo espaçamento dos enrijecedores transversais é $a = 2700mm$ e a espessura é $t = 15mm$.

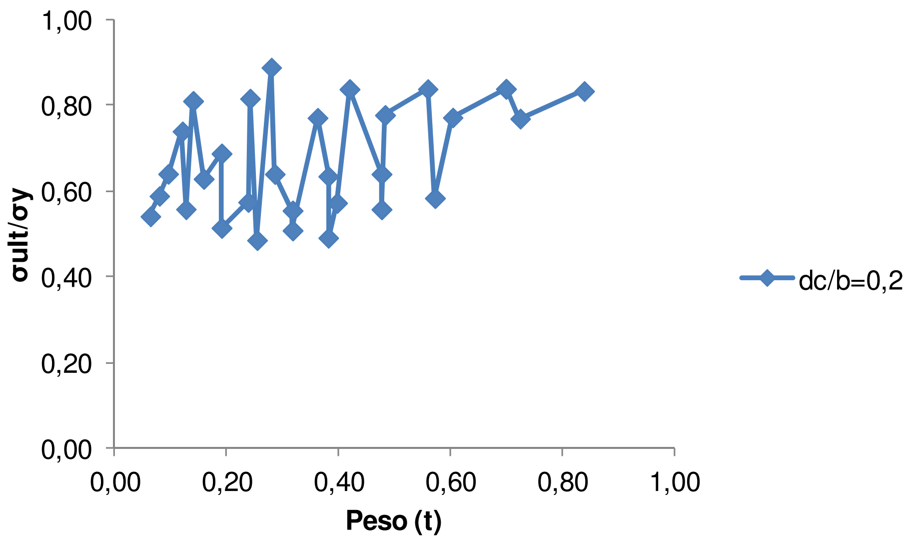

Figura 4.17 - Relação entre resistência e peso de material para placa com dc/b=0,2mm

À medida que a necessidade de um recorte maior se faz presente, podemos concluir que a geometria adotada não é mais um fator determinante na resistência última. Se analisarmos a

Figura 4.18 até Figura 4.20 podemos concluir que existe uma convergência para o valor da resistência última com o aumento do recorte.

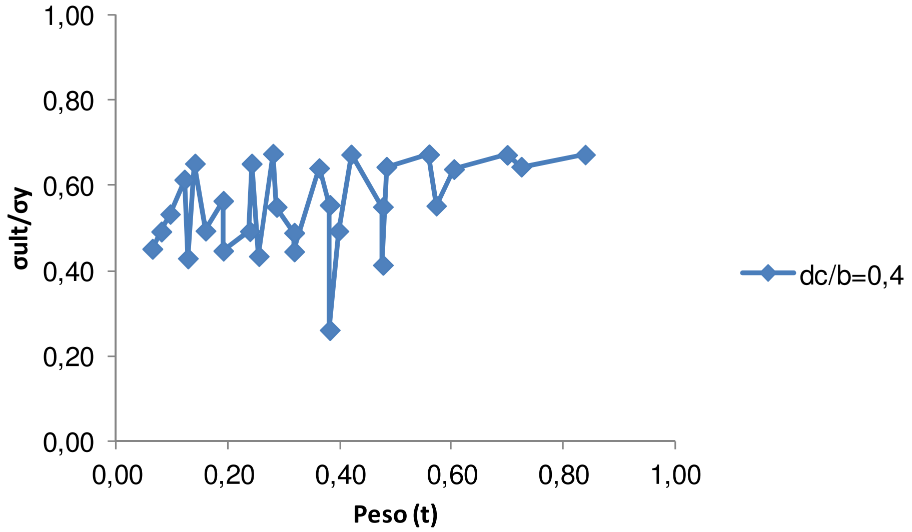

Figura 4.18 - Relação entre resistência e peso de material para placa com dc/b=0,4mm

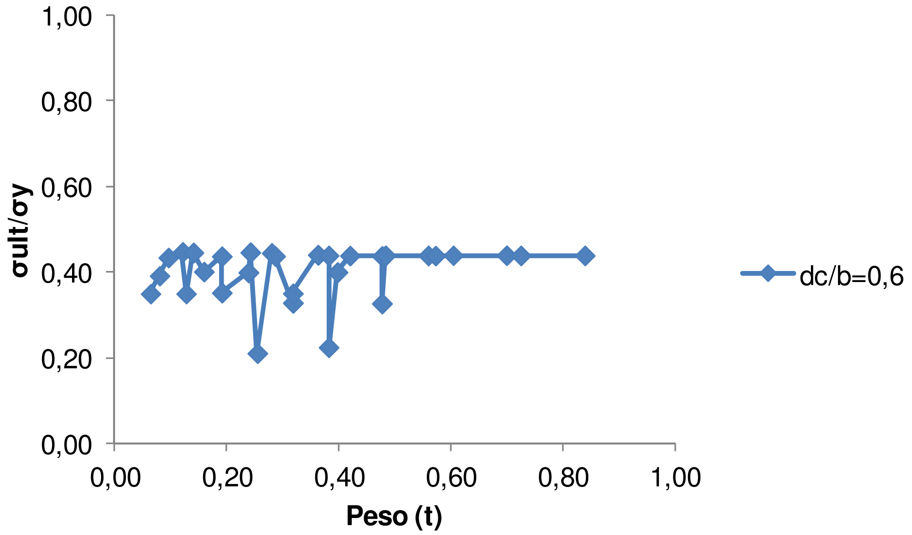

Figura 4.19 - Relação entre resistência e peso de material para placa com dc/b=0,6

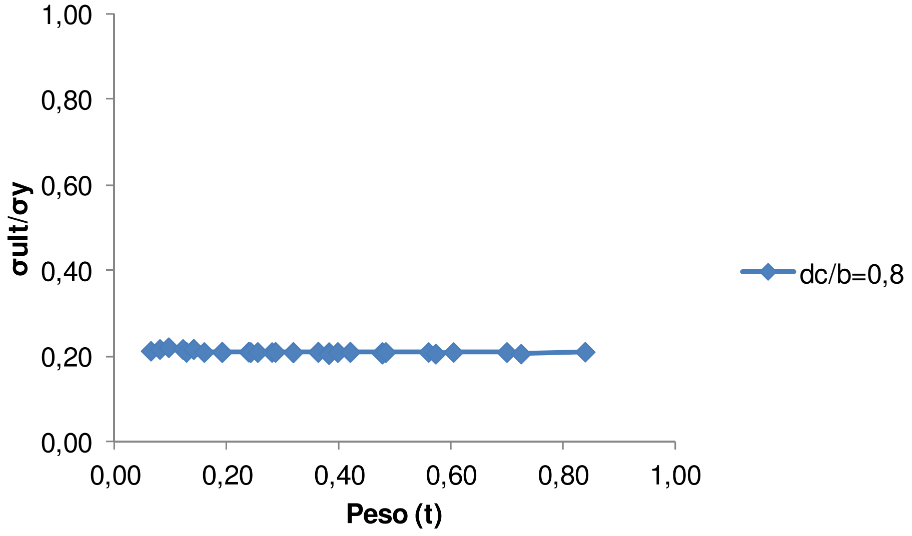

Figura 4.20 - Relação entre resistência e peso de material para placa com dc/b=0,8mm

Para a placa com dc/b=0,8, por exemplo, praticamente todas as geometrias possíveis de serem adotadas correspondem a uma resistência última equivalente.

5 CONCLUSÃO

A investigação das 150 placas realizadas neste trabalho determinaram o valor da resistência última para cada modelo analisado. A tensão última calculada pelo software ANSYS foi menor que a tensão de escoamento do material em todos os casos. Esse motivo deve-se ao fato de que o ANSYS determina o valor da tensão média na seção transversal da placa, considerando uma situação de compressão simples.

Sabe-se que, como há uma imperfeição inicial na placa igual a w_0, a placa está submetida a uma situação de flexo-compressão normal. Nesse caso, as tensões na seção transversal da placa não são uniformes. A tensão máxima de compressão ocorre no bordo superior.

Devido a este motivo, a tensão máxima pode ser muito superior à tensão média, e o escoamento pode ser atingido nos bordos da placa, mesmo quando a tensão média ainda é inferior à tensão de escoamento do material.

A influência do furo sobre a resistência última das placas é um fator determinante. Foi comprovado que, quando a área do orifício circular corresponde a 50,3% da área total da placa ($d_c / b = 0{,}8$), a força máxima da placa chega a ser reduzida até 77,8% ($\beta = 0{,}99$) quando comparada com a placa perfeita, isto é, sem furo.

Para as placas maciças, a esbeltez é determinante no valor de sua resistência última. Nota-se que quanto mais espessa a placa, maior sua resistência. À medida que o diâmetro do furo vai aumentando, há uma convergência para o valor da tensão média, independentemente da espessura da placa. Tal convergência deve-se ao motivo de a carga última ser limitada pela tensão de escoamento do material e a redução da seção transversal da placa.

Na análise das variações paramétricas de proporção conclui-se que a resistência última da placa é raramente afetada com a variação de seu comprimento. Quanto mais robusta (espessa) a placa, menos variações são encontradas na resistência última, em função da variação no aspecto de proporção.

A análise não linear de flambagem realizada comprova a existência de uma resistência pós-flambagem característica de placas finas submetidas a compressão uniaxial.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKESSON, B. **Plate Buckling in Bridges and Other Structures.** [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2007.

AMANTE, D. D. A. M. **Imperfeições de Fabricação na Construção Naval e Offshore.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2006.

BLEICH, F. **Theorie und berechnung der eisernen brücken.** [S.l.]: Julius Springer, 1924.

BRYAN, G. H. **On the stability of a plane under thrusts in its own plane with applications to the buckling of the sides of a ship.** [S.l.]: Proceedings of the London Mathematical Society, v. 22, 1891.

CHAJES, A. **Principles of Estructural Stability Theory.** [S.l.]: Prentice-Hall, 1974.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S.; MARTINI, M. I. **Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression.** Thin-Walled Structures, v. 42, p. 1083-1101, 2004.

HELBIG, D.; REAL, M.; ISOLDI, L. SANTOS, E. **Análise numérica do comportamento mecânico sob flexão de placas finas de material compósito laminado reforçado por fibras**. Resvista Vetor FURG, v. 23, 2013.

HELBIG, D.; REAL, M.; ISOLDI, L.; CORREIA, A.; SANTOS, E. **Constructal Design of Perforated Steel Plates Subject to Linear Elastic and Nonlinear Elasto-Plastic Buckling**, XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Pirenópolis, GO, Brazil, November 10-13, 2013.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais.** 7ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

JUNIOR, P. R. D. C. **Efeito das Distorções no Comportamento Estrutural de Navio Suezmax.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.

KUMAR, M. S. **Ultimate Strength of Square Plate With Rectangular Opening Under Axial Compression.** Journal of Naval Architecture and Marine Engineering, Junho 2007.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®.** [S.l.]: Springer, 2006.

NARAYANAN, R.; CHOW, F. Y. **Ultimate Capacity of Uniaxially Compressed Perforated.** [S.l.]. 1984.

PAIK, J. K. **Ultimate strength of steel plates with a single circular hole under axial compressive loading along short edges.** Ships and Offshore Structures, p. 355-360, 2007.

PAIK, J. K.; THAYAMBALLI, A. K.; KIM, B. J. **Advanced Ultimate Strength Formulations for Ship Plating under Combined Biaxial Compression/Tension, Edge Shear, and Lateral Pressure Loads.** Marine Technology, v. 38, p. 9-25, 2001.

REAL, M., ISOLDI, L. **Effect of Circular Holes Dimension snd Location on the Elastic Buckling Load of Rectangular Plates,** 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering, p. 24-28, 2011

ROBERTS, T. M.; AZIZIAN, Z. G. **Strength of Perforated Plates Subjected to In-Plane Loading. Thin-Walled Structures,** v. II, p. 153-164, 1984.

ROORDA, J. **Buckling of elastic structures.** Canadá: Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, 1980.

SAINT-VENANT, A. J. C. B. D. **Théorie de l'elasticité des corps solides.** Paris: Clebsch, 1883.

SCHUMAN, L.; BACK, G. **Strength of retangular plates under edge compression.** EUA: NASA Technical Report, TR, R-40, 1959.

SHANMUGAM, N. E. **Openings in Thin-Walled Steel Structures.** Thin-Walled Structures, v. 28, p. 355-372, 1997.

SHANMUGAM, N. E.; THEVENDRAN, V.; TAN, Y. H. **Design Formula for Axially Compressed Perforated Plates.** Thin-Walled Structures, v. 34, p. 1-20, 1999.

SILVA, A. L. R. D. C. E. **Análise Numérica Não-Linear da Flambagem Local de Perfis de Aço Estrutural Submetidos à Compressão Uniaxial.** Belo Horizonte: UFMG, 2006.

SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. P. **Einige stabilitätsprobleme der elastizitätstheorie.** [S.l.]: Zeitschrift für Mathematik und Physik, v. 58, 1910.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells.** 2ª edição. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, v. 10, 1959.

TRAHAIR, N. S.; BRADFORD, M. A. **The behavior and design of steel structures.** 2ª Edição. ed. [S.l.]: Chapman & Hall, 1988.

YETTRAM, A. L.; BROWN, C. J. **The Elastic Stability of Square Perforated Plates.** Computers and Structures, v. 21, p. 1267-1272, 1985.

7 APÊNDICE A - RESULTADO DOS MODELOS NÚMERICOS

Este apêndice se destina a apresentar o valor da carga última obtida através da simulação numérica realizada no software ANSYS, para os 150 modelos de placas analisadas. A seguir apresenta-se as características de cada modelo, com o respectivo valor encontrado para Pult.

PLACA	a [mm]	b [mm]	t [mm]	dc [mm]	w0pl	nó x	nó y	Pult [kN]
1	900	900	10	0	0,450	450	450	1844,99
2	900	900	10	180	0,450	450	360	1729,98
3	900	900	10	360	0,450	450	270	1443,41
4	900	900	10	540	0,450	450	180	1119,22
5	900	900	10	720	0,450	450	90	682,61
6	900	900	12,5	0	0,450	450	450	2559,70
7	900	900	12,5	180	0,450	450	360	2353,02
8	900	900	12,5	360	0,450	450	270	1966,29
9	900	900	12,5	540	0,450	450	180	1566,55
10	900	900	12,5	720	0,450	450	90	869,03
11	900	900	15	0	0,450	450	450	3426,45
12	900	900	15	180	0,450	450	360	3069,77
13	900	900	15	360	0,450	450	270	2555,93
14	900	900	15	540	0,450	450	180	2083,39
15	900	900	15	720	0,450	450	90	1063,05
16	900	900	19	0	0,450	450	450	5270,35
17	900	900	19	180	0,450	450	360	4492,15
18	900	900	19	360	0,450	450	270	3726,44
19	900	900	19	540	0,450	450	180	2717,61
20	900	900	19	720	0,450	450	90	1320,09
21	900	900	22	0	0,450	450	450	6874,60
22	900	900	22	180	0,450	450	360	5696,12
23	900	900	22	360	0,450	450	270	4581,05
24	900	900	22	540	0,450	450	180	3136,76
25	900	900	22	720	0,450	450	90	1528,62
26	1800	900	10	0	0,450	900	450	1845,76
27	1800	900	10	180	0,450	900	360	1783,76
28	1800	900	10	360	0,450	900	270	1372,50
29	1800	900	10	540	0,450	900	180	1120,14
30	1800	900	10	720	0,450	900	90	674,54
31	1800	900	12,5	0	0,450	900	450	2561,71
32	1800	900	12,5	180	0,450	900	360	2512,75
33	1800	900	12,5	360	0,450	900	270	1974,33
34	1800	900	12,5	540	0,450	900	180	1605,46
35	1800	900	12,5	720	0,450	900	90	841,32

PLACA	a [mm]	b [mm]	t [mm]	dc [mm]	w0pl	nó x	nó y	Pult [kN]
36	1800	900	15	0	0,450	900	450	3431,71
37	1800	900	15	180	0,450	900	360	3296,86
38	1800	900	15	360	0,450	900	270	2703,77
39	1800	900	15	540	0,450	900	180	2098,42
40	1800	900	15	720	0,450	900	90	1009,60
41	1800	900	19	0	0,450	900	450	5282,90
42	1800	900	19	180	0,450	900	360	4953,04
43	1800	900	19	360	0,450	900	270	3954,10
44	1800	900	19	540	0,450	900	180	2712,77
45	1800	900	19	720	0,450	900	90	1278,86
46	1800	900	22	0	0,450	900	450	6881,28
47	1800	900	22	180	0,450	900	360	6244,76
48	1800	900	22	360	0,450	900	270	4740,86
49	1800	900	22	540	0,450	900	180	3130,74
50	1800	900	22	720	0,450	900	90	1480,80
51	2700	900	10	0	0,450	1350	450	1798,32
52	2700	900	10	180	0,450	1350	360	1644,22
53	2700	900	10	360	0,450	1350	270	1429,08
54	2700	900	10	540	0,450	1350	180	1127,29
55	2700	900	10	720	0,450	1350	90	673,47
56	2700	900	12,5	0	0,450	1350	450	2540,52
57	2700	900	12,5	180	0,450	1350	360	2296,34
58	2700	900	12,5	360	0,450	1350	270	1969,21
59	2700	900	12,5	540	0,450	1350	180	1597,32
60	2700	900	12,5	720	0,450	1350	90	843,91
61	2700	900	15	0	0,450	1350	450	3414,40
62	2700	900	15	180	0,450	1350	360	3067,77
63	2700	900	15	360	0,450	1350	270	2636,77
64	2700	900	15	540	0,450	1350	180	2099,58
65	2700	900	15	720	0,450	1350	90	1010,58
66	2700	900	19	0	0,450	1350	450	5287,13
67	2700	900	19	180	0,450	1350	360	4681,16
68	2700	900	19	360	0,450	1350	270	3892,12
69	2700	900	19	540	0,450	1350	180	2677,90
70	2700	900	19	720	0,450	1350	90	1280,08
71	2700	900	22	0	0,450	1350	450	6884,19
72	2700	900	22	180	0,450	1350	360	5890,79
73	2700	900	22	360	0,450	1350	270	4729,35
74	2700	900	22	540	0,450	1350	180	3087,75
75	2700	900	22	720	0,450	1350	90	1482,22
76	3600	900	10	0	0,450	1800	450	1798,65
77	3600	900	10	180	0,450	1800	360	1552,69
78	3600	900	10	360	0,450	1800	270	1389,21
79	3600	900	10	540	0,450	1800	180	675,93
80	3600	900	10	720	0,450	1800	90	672,55

PLACA	a [mm]	b [mm]	t [mm]	dc [mm]	w0pl	nó x	nó y	Pult [kN]
81	3600	900	12,5	0	0,450	1800	450	2540,46
82	3600	900	12,5	180	0,450	1800	360	2216,26
83	3600	900	12,5	360	0,450	1800	270	1954,55
84	3600	900	12,5	540	0,450	1800	180	1314,98
85	3600	900	12,5	720	0,450	1800	90	841,17
86	3600	900	15	0	0,450	1800	450	3414,86
87	3600	900	15	180	0,450	1800	360	3042,74
88	3600	900	15	360	0,450	1800	270	2658,25
89	3600	900	15	540	0,450	1800	180	2107,31
90	3600	900	15	720	0,450	1800	90	1009,44
91	3600	900	19	0	0,450	1800	450	5289,15
92	3600	900	19	180	0,450	1800	360	4719,20
93	3600	900	19	360	0,450	1800	270	3907,40
94	3600	900	19	540	0,450	1800	180	2670,19
95	3600	900	19	720	0,450	1800	90	1278,65
96	3600	900	22	0	0,450	1800	450	6885,73
97	3600	900	22	180	0,450	1800	360	5893,30
98	3600	900	22	360	0,450	1800	270	4731,78
99	3600	900	22	540	0,450	1800	180	3088,99
100	3600	900	22	720	0,450	1800	90	1480,55
101	4500	900	10	0	0,450	2250	450	1779,96
102	4500	900	10	180	0,450	2250	360	1625,66
103	4500	900	10	360	0,450	2250	270	1423,80
104	4500	900	10	540	0,450	2250	180	1122,35
105	4500	900	10	720	0,450	2250	90	672,17
106	4500	900	12,5	0	0,450	2250	450	2523,72
107	4500	900	12,5	180	0,450	2250	360	2288,10
108	4500	900	12,5	360	0,450	2250	270	1970,60
109	4500	900	12,5	540	0,450	2250	180	1600,44
110	4500	900	12,5	720	0,450	2250	90	841,03
111	4500	900	15	0	0,450	2250	450	3389,85
112	4500	900	15	180	0,450	2250	360	3067,71
113	4500	900	15	360	0,450	2250	270	2638,25
114	4500	900	15	540	0,450	2250	180	2099,98
115	4500	900	15	720	0,450	2250	90	1009,29
116	4500	900	19	0	0,450	2250	450	5291,47
117	4500	900	19	180	0,450	2250	360	4686,04
118	4500	900	19	360	0,450	2250	270	3875,49
119	4500	900	19	540	0,450	2250	180	2670,39
120	4500	900	19	720	0,450	2250	90	1278,46
121	4500	900	22	0	0,450	2250	450	6885,96
122	4500	900	22	180	0,450	2250	360	5896,47
123	4500	900	22	360	0,450	2250	270	4723,96
124	4500	900	22	540	0,450	2250	180	3092,16
125	4500	900	22	720	0,450	2250	90	1480,34

PLACA	a [mm]	b [mm]	t [mm]	dc [mm]	w0pl	nó x	nó y	Pult [kN]
126	5400	900	10	0	0,450	2700	450	1780,19
127	5400	900	10	180	0,450	2700	360	1570,13
128	5400	900	10	360	0,450	2700	270	835,89
129	5400	900	10	540	0,450	2700	180	719,85
130	5400	900	10	720	0,450	2700	90	656,65
131	5400	900	12,5	0	0,450	2700	450	2524,03
132	5400	900	12,5	180	0,450	2700	360	2228,75
133	5400	900	12,5	360	0,450	2700	270	1653,52
134	5400	900	12,5	540	0,450	2700	180	1308,93
135	5400	900	12,5	720	0,450	2700	90	825,61
136	5400	900	15	0	0,450	2700	450	3390,48
137	5400	900	15	180	0,450	2700	360	2800,08
138	5400	900	15	360	0,450	2700	270	2649,73
139	5400	900	15	540	0,450	2700	180	2105,54
140	5400	900	15	720	0,450	2700	90	991,10
141	5400	900	19	0	0,450	2700	450	5293,45
142	5400	900	19	180	0,450	2700	360	4670,29
143	5400	900	19	360	0,450	2700	270	3910,29
144	5400	900	19	540	0,450	2700	180	2667,64
145	5400	900	19	720	0,450	2700	90	1255,61
146	5400	900	22	0	0,450	2700	450	6883,30
147	5400	900	22	180	0,450	2700	360	5858,72
148	5400	900	22	360	0,450	2700	270	4729,08
149	5400	900	22	540	0,450	2700	180	3088,92
150	5400	900	22	720	0,450	2700	90	1484,54