UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E CONSTRUCTAL DESIGN APLICADOS À ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS DE AÇO SUBMETIDAS À FLAMBAGEM ELÁSTICA USADAS EM ESTRUTURAS OCEÂNICAS

ANDERSON LUÍS GARCIA CORREIA

Dissertação apresentada à Comissão de Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Liércio André Isoldi, Dr. Eng. Mecânica

Co-orientador: Elizaldo Domingues dos Santos, Dr. Eng. Mecânica

Rio Grande, agosto de 2013.

À minha família, à minha namorada e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Liércio André Isoldi pela orientação, paciência, amizade e incentivo ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos pela co-orientação, incentivo e amizade no decorrer do trabalho.

Ao Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real (FURG) e ao Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha (UFRGS) pelo auxílio na realização das pesquisas.

Ao colega e amigo Thiago da Silveira pelo apoio e ajuda no desenvolvimento dos estudos.

Ao Prof. Dr. José Antônio Scotti Fontoura, coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica pela atenção despendida em inúmeras ocasiões.

À Nilza Ibias, secretária da Comissão de Curso, pelo atendimento eficiente e bem humorado em todas as ocasiões.

Aos demais amigos que conheci ao longo do curso.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do trabalho.

À FURG por ofertar o Curso de Mestrado em Engenharia Oceânica.

E por fim, mas não menos importante, à minha mãe Dalva, ao meu pai Roberto, ao meu irmão Jeferson, à minha avó Dalva e à minha namorada Luana pelo apoio, incentivo, por acreditarem na minha capacidade e por serem a minha base.

RESUMO

A flambagem elástica é um fenômeno de instabilidade que pode ocorrer se uma chapa fina (plana ou curva) é submetida à carga de compressão axial. Em um determinado nível de carga crítica a placa curva-se repentinamente no sentido transversal (fora do plano). Uma característica importante da flambagem é que a instabilidade pode ocorrer em um nível de tensão que é substancialmente menor do que a tensão de escoamento do material. Em inúmeros casos, a presença de furos nos elementos estruturais da placa é quase inevitável para inspeção, manutenção e serviço, ou para reduzir o peso da estrutura. No entanto, a presença desses furos provoca uma redistribuição das tensões de membrana na placa, alterando significativamente a sua estabilidade. Neste trabalho o método Constructal Design, que tem origem na Teoria Constructal de Adrian Bejan, foi utilizado para determinar a melhor geometria de placas perfuradas finas submetidas ao fenômeno de flambagem elástica. Para estudar este comportamento foram analisadas placas retangulares simplesmente apoiadas, com furos centrados, com a geometria dos mesmos variando de forma entre retangulares, losangulares e elípticos. O objetivo foi obter a geometria ideal que maximize a carga crítica. Para isso, o grau de liberdade de H/L (relação entre a largura e comprimento da placa) e o grau de liberdade H_0/L_0 (relação entre as dimensões características do furo) foram otimizadas para diferentes frações volumétricas de furo ϕ (razão entre o volume do furo e o volume da placa sem furo). A modelagem computacional, baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), foi utilizada para avaliar a carga crítica de flambagem da placa, e o método de Lanczos foi aplicado na solução do problema de autovalores correspondente. Assim, este trabalho demonstrou que o Constructal Design pode ser utilizado não só em problemas de transferência de calor e dinâmica dos fluidos, mas também para definir as melhores formas em problemas de mecânica dos sólidos.

Nesse trabalho foram aplicados três tipos de investigação: o primeiro levando em consideração três placas de mesma dimensão e mesma área, porém com geometrias de furos diferentes, o segundo tipo com quatro placas de dimensões diferentes, relações

H/L diferentes e geometrias de furos iguais e o terceiro tipo com sete placas de dimensões diferentes, áreas iguais e geometria de furos iguais.

Na investigação de placas de mesma dimensão, mesma área e geometrias de furos diferentes, quando $\phi \leq 0{,}20$, a geometria ótima foi o losango, atingindo uma carga máxima de flambagem em torno de 80,0% maior que a placa sem furo, 21,5% maior que a placa com furo elíptico e 17,4%, maior que a placa com furo retangular.

Na investigação de placas de dimensões diferentes, relações H/L diferentes e geometrias de furos iguais, a placa que obteve o maior acréscimo percentual no valor de carga crítica de flambagem em relação à uma placa sem furo foi a placa com maior relação H/L (H/L = 1,00), chegando a 199,07%. A placa que apresentou o menor acréscimo percentual foi a placa com menor relação H/L (H/L = 0,33), com 14,74%.

Na investigação de placas de dimensões diferentes, áreas iguais e geometrias de furos iguais, observou-se que para todos os valores de ϕ analisados, a placa com os melhores resultados, quando comprimida axialmente, é a placa que tem a menor relação H/L.

Palavras-chave: flambagem elástica, placa perfurada, carga crítica, otimização geométrica, constructal design, elementos finitos.

ABSTRACT

The elastic buckling is an instability phenomenon that can occur if a slender plate (plane or curved) is subjected to axial compressive load. At a certain given critical load the plate will suddenly bend in the out-of-plane transverse direction. An important characteristic of the buckling is that the instability may occur at a stress level that is substantially lower than the material yield stress. Besides, the presence of holes in structural plate elements is almost inevitable for inspection, maintenance and service purpose, or to reduce the structure weight. However, the presence of these holes causes a redistribution of the membrane stresses in the plate, significantly altering their stability. In this paper the Constructal Design method, which originates in the Bejan's Constructal Theory, was employed to define the best geometry of thin perforated plates submitted to elastic buckling phenomenon. To study this behavior simply supported rectangular plates with centered holes were analyzed, with varying the geometric shape between rectangular, diamond and elliptical. The purpose was to obtain the optimal geometry which maximizes the critical buckling load. For this, the degree of freedom H/L (ratio between width and length of the plate) and the degree of freedom H_0/L_0 (ratio between the characteristic dimensions of the hole) were optimized for different hole volume fractions ϕ (ratio between the perforation volume and the massive plate volume). A computational modeling, based on the Finite Element Method (FEM), was used for assessing the plate buckling load, and the Lanczos method was applied to the solution of the corresponding eigenvalue problem. Therefore, this work showed that Constructal Design can be employed not only in the heat transfer and fluid flow realm but also to define the best shapes in solid mechanics problems.

In this work were applied three types of investigation: the first considering three plates of the same dimensions and the same area, but with different hole geometries, the second type with four plates of different dimensions, different relationships H/L and same hole geometry and the third type with seven plates of different dimensions, same areas and same hole geometry.

In the investigation of plates of the same size, the same area and different hole geometries, when $\phi \leq 0{,}20$, the optimal geometry was the diamond, reaching a maximum load of buckling around 80,0% higher than the plate without hole, 21,5% higher than the plate with elliptical hole and 17,4%, higher than the plate with rectangular hole.

In the investigation of plates of different dimensions, different relationships H/L and same hole geometry, the plate that had the highest increase percentage in the value of the critical load buckling in relation to a plate without holes was the plate with the highest ratio H/L (H/L = 1,00), reaching 199,07%. The plate with the lowest increase percentage was the plate with the lowest ratio H/L (H/L = 0,33), with 14.74%.

In the investigation of plates of different dimensions, same areas and same hole geometry, it was observed that for all values of ϕ analyzed, the plate with the best results when axially compressed, it is the plate that has the lowest ratio H/L.

Keywords: elastic buckling, perforated plate, critical load, geometric optimization, constructal design, finite elements.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

A	área da placa [m²]
a	comprimento da placa [m]
b	largura da placa [m]
b_e	largura efetiva [m]
b_{eff}	largura efetiva [m]
cos	cosseno trigonométrico
D	rigidez à flexão [Pa×m^4]
det	função determinante
E	módulo de elasticidade (módulo de Young) [Pa]
f_y	força de escoamento [N]
H	largura da placa [m]
H_0	característica dimensional do furo na direção y [m]
$\tilde{H}$	largura da placa adimensionalizada
$\tilde{H}_0$	característica dimensional do furo na direção y adimensionalizada
I	segundo momento de área [m^4]
k	coeficiente de flambagem
k_m	constante elástica da mola [N/m]
k_τ	coeficiente de flambagem (carga cisalhante)
$[K]$	matriz de rigidez total
$[K_E]$	matriz de rigidez convencional para pequenas deformações
$[K_G]$	matriz de rigidez geométrica
L	comprimento da placa [m]
L_x	dimensão na direção x (longitudinal) [m]
L_y	dimensão na direção y (transversal) [m]
L_0	característica dimensional do furo na direção x [m]
$\tilde{L}$	comprimento da placa adimensionalizado
$\tilde{L}_0$	característica dimensional do furo na direção x adimensionalizada

M	momento fletor $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_B	momento em torno do ponto B $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_n	momento fletor na direção n (normal à borda da placa) $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_{ns}	momento torçor contido no plano *ns* $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_{sn}	momento torçor contido no plano *sn* $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_x	momento fletor na direção x (longitudinal) $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_{xy}	momento torçor contido no plano *xy* $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_y	momento fletor na direção y (transversal) $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
M_{yx}	momento torçor contido no plano *yx* $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
$\overline{M}_n$	valor prescrito do momento fletor na direção n $\left[\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{m}}\right]$
m	número de meias-ondas senoidais (direção longitudinal)
N_x	esforço normal na direção x (longitudinal) $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
N_{xy}	esforço normal contido no plano *xy* $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
N_y	esforço normal na direção y (transversal) $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
N_{yx}	esforço normal contido no plano *yx* $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
n	direção normal à borda da placa
n	número de meias-ondas senoidais (direção transversal)
P	carga aplicada em uma das extremidades da barra [N]
P_{cr}	carga crítica de flambagem (carregamento axial) $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$

$P_{\max}$ capacidade máxima de carga $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$

$\overline{P}$ valor prescrito da carga concentrada externa atuante no canto da placa $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$

$\{P\}$ carga compressiva aplicada na placa $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$

$\{P_0\}$ esforço interno existente no início do carregamento $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$

q carga uniformemente distribuída $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

q_x carga uniformemente distribuída na direção x (longitudinal) $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

q_y carga uniformemente distribuída na direção y (transversal) $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

q_z carga uniformemente distribuída na direção z (normal) $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

S_n esforço resultante das ações do esforço cortante na direção n (normal à borda da placa) e do momento torçor contido no plano ns [N]

$\overline{S}_n$ valor prescrito do esforço resultante das ações do esforço cortante na direção n (normal à borda da placa) e do momento torçor contido no plano ns [N]

s direção longitudinal à borda da placa

sin seno trigonométrico

t espessura da placa [m]

$\tilde{t}$ espessura da placa adimensionalizada

$\{U\}$ vetor de deslocamento total [m]

u componente de deslocamento na direção x (longitudinal) [m]

u_0 componente de deslocamento na direção x (longitudinal) associado ao plano descrito por $z = 0$ [m]

u_x deslocamento na direção x (longitudinal) [m]

u_y deslocamento na direção y (transversal) [m]

V volume total da placa sem furo [m³]

V_0 volume do furo [m³]

V_n	esforço cortante na direção n (normal à borda da placa) $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
V_x	esforço cortante na direção x (longitudinal) $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
V_y	esforço cortante na direção y (transversal) $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
v	componente de deslocamento na direção y (transversal) [m]
v_0	componente de deslocamento na direção y (transversal) associado ao plano descrito por $z = 0$ [m]
w	componente de deslocamento na direção z (normal) [m]
w	deflexão fora do plano [m]
$\mathbf{w}$	deslocamento nodal [m]
w	deslocamento transversal na borda da placa [m]
w_0	componente de deslocamento na direção z (normal) associado ao plano descrito por $z = 0$ [m]
$\bar{w}$	valor prescrito do deslocamento transversal na borda da placa [m]
x	direção longitudinal
$\tilde{x}$	direção longitudinal adimensionalizada
y	direção transversal
$\tilde{y}$	direção transversal adimensionalizada
z	direção normal
z	direção transversal à borda da placa
γ_{xy}	deformação por cisalhamento associada às direções x (longitudinal) e y (transversal) [m]
ε_x	deformação específica na direção x (longitudinal)
ε_{xy}	deformação específica contida no plano xy
ε_{xz}	deformação específica contida no plano xz
ε_y	deformação específica na direção y (transversal)
ε_{yz}	deformação específica contida no plano yz
ε_z	deformação específica na direção z (normal)
θ	variação angular imposta à barra [rad]

λ	escalar
$\bar{\lambda}_n$	valor prescrito da rotação em torno da borda [rad]
$\bar{\lambda}_p$	parâmetro de esbeltez (placa sob flambagem)
ν	coeficiente de Poisson
π	constante matemática = 3,141516...
ρ	fator de redução
σ_{cr}	tensão crítica de flambagem [Pa]
σ_n	tensão normal na direção *n* (normal à borda da placa) [Pa]
σ_x	tensão normal na direção *x* (longitudinal) [Pa]
σ_y	tensão normal na direção *y* (transversal) [Pa]
σ_z	tensão normal na direção *z* (normal) [Pa]
τ_{cr}	tensão crítica de flambagem sob cisalhamento [Pa]
τ_{ns}	tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *n* (normal à borda da placa) e paralela à direção *s* (longitudinal à borda da placa) [Pa]
τ_{nz}	tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *n* (normal à borda da placa) e paralela à direção *z* (transversal à borda da placa) [Pa]
τ_{xy}	tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *x* (longitudinal) e paralela à direção *y* (transversal) [Pa]
τ_{xz}	tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *x* (longitudinal) e paralela à direção *z* (normal) [Pa]
τ_{yz}	tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *y* (transversal) e paralela à direção *z* (normal) [Pa]
ϕ	fração volumétrica do furo
ψ_x	rotação em torno do eixo *x* [rad]
ψ_y	rotação em torno do eixo *y* [rad]
∇	operador diferencial delta

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O tema abordado é o estudo do comportamento de placas metálicas perfuradas sob compressão uniaxial, de modo a otimizar o tipo e a dimensão do furo em relação à área da placa para obter uma maior carga crítica de flambagem elástica.

A flambagem elástica é um fenômeno de instabilidade que pode ocorrer em placas de paredes delgadas quando submetidas a esforços axiais. Quando alcança a carga crítica, esses esforços causam curvaturas na placa na direção transversal ao plano da mesma. O esforço pode ser caracterizado por compressão pura, momento fletor, cisalhamento, cargas concentradas ou mesmo pela combinação de esforços distintos (Real e Isoldi, 2010).

O tema é de suma importância, à medida que em muitas estruturas metálicas realizam-se furos para, por exemplo, atenuar o peso dos componentes. Um exemplo notório disso são as plataformas de extração e armazenamento de petróleo e estruturas de navios. A simples percepção faz imaginar que a melhor forma de furo para ser empregada nesses componentes é o elíptico, por não possuir vértices concentradores de tensão. Porém estudos previamente realizados, por meio de análise computacional, demonstram que nem sempre essa forma geométrica é a mais indicada para obter uma maior resistência, principalmente quando os esforços envolvidos são de compressão. Em Real et al. (2011), por exemplo, chegou-se à conclusão que para uma determinada faixa de valores para a dimensão do furo, a forma geométrica que proporcionava uma maior carga crítica de flambagem era o losango, quando comparado a furos de geometria retangular e elíptica.

Uma vez encontrada a melhor configuração geométrica para determinada estrutura, submetida a determinado esforço mecânico, torna-se possível a redução de material para a construção da mesma acarretando a diminuição do peso total e redução de custos de matéria-prima. Outra alternativa seria substituir os materiais por outros de menor custo, mantendo o mesmo coeficiente de segurança da configuração inicial. Também pelo fato de poder se trabalhar com estruturas de tamanho reduzido, é possível diminuir o tempo de construção de determinada estrutura, aliado a uma maior praticidade de transporte da mesma, caso trate-se de uma estrutura a ser instalada em um local distante.

Tendo em vista a crescente expansão da indústria naval, esse tipo de pesquisa poderia trazer muitos benefícios para o setor econômico de nosso país e para empresas privadas envolvidas no processo.

O fato de não utilizar componentes em sua forma otimizada, acarreta desperdício de material, que é um dos principais fatores que colaboram para o aumento dos custos de um projeto.

Outro aspecto que poderia ser modificado é a taxa de retrabalho, uma vez que projetos elaborados de forma arbitrária, sem uma maior investigação de otimizações tem uma maior chance de apresentar problemas em sua fase de execução, o que acarreta consumo excessivo de material, necessidade do aumento de horas trabalhadas e atrasos significativos nos prazos previstos em contrato, o que pode se tornar um ponto determinante para o não fechamento de novos contratos. Todos esses aspectos negativos se refletem no chamado Custo Brasil, que nada mais é do que um conjunto de dificuldades que comprometem o desenvolvimento e o crescimento do país.

Além de toda essa aplicação prática, esse estudo pode ter também aplicação didática, uma vez que toda a pesquisa na área da engenharia incentiva outros pesquisadores a buscarem informações a respeito do tema central do estudo.

Na presente pesquisa foram realizados estudos em relação ao fenômeno de flambagem elástica (linear) em placas de aço finas perfuradas, buscando otimizar geometricamente estes elementos estruturais através do método Constructal Design. Para isso, três tipos de investigação foram desenvolvidos: o primeiro levando em consideração três placas de mesma dimensão e mesma área, porém com geometrias de furos diferentes, o segundo tipo com quatro placas de dimensões diferentes, relações H/L diferentes e geometrias de furos iguais e o terceiro tipo com sete placas de dimensões diferentes, áreas iguais e geometria de furos iguais.

O estudo foi realizado adotando o Método dos Elementos Finitos através simulações numéricas no software ANSYS®.

Sabe-se que elementos estruturais esbeltos submetidos a cargas de compressão axial podem falhar de maneira súbita devido ao fenômeno de instabilidade conhecido como flambagem (Megson, 2005).

As placas finas são elementos estruturais comumente utilizados nas mais diversas áreas da engenharia, como em edifícios, pontes, aviões, automóveis e, particularmente, na engenharia naval e oceânica em navios e estruturas offshore. Além disso, muitas estruturas necessitam de furos para a redução do peso próprio ou para fins de acesso, serviços e até mesmo estética. A presença de furos gera uma redistribuição de tensões acompanhada por uma mudança no comportamento mecânico das placas (Cheng e Zhao, 2010).

Quando estes componentes estruturais são submetidos a uma compressão axial, pode ocorrer flambagem. Na flambagem, no momento em que a carga crítica é atingida, ocorre uma súbita flexão da placa na direção transversal ao plano de aplicação da carga (Åkesson, 2007). Normalmente essa carga possui valor muito inferior à carga que atingiria a tensão de escoamento do material.

Cabe destacar que atualmente a maioria dos estudos empregando o método Constructal Design, que é baseado na Teoria Constructal, é dedicada ao desenvolvimento de geometrias ótimas em problemas de mecânica dos fluidos e de transferência de calor. No entanto, é possível considerar as estruturas sólidas como sistemas que são configurados de modo a facilitar o fluxo de tensões. Esse ponto de vista é bastante incomum, mas é eficaz quando o objetivo é descobrir a melhor configuração do volume submetido ao esforço (Lorente, Lee e Bejan, 2010). A Teoria Constructal é a visualização mental de que todos os sistemas de fluxo seguem um princípio físico, que é a Lei Constructal. Enquanto que, o Constructal Design é o método empregado na engenharia para a busca da forma ótima das geometrias. Esse mesmo método é empregado na engenharia para obter as formas geométricas da natureza deterministicamente.

1.2 OBJETIVOS

Empregando uma abordagem computacional aliada ao Constructal Design, o objetivo geral do trabalho é obter a geometria ótima do furo (forma e dimensões) em placas finas sob flambagem elástica, de forma a maximizar a carga crítica suportada pela mesma, além de analisar a influência das dimensões da placa na carga crítica de flambagem.

Para alcançar o objetivo geral desta pesquisa, foi necessário atingir os seguintes objetivos específicos:

- realizar um levantamento sobre o estado da arte de placas finas submetidas à flambagem;
- realizar uma revisão bibliográfica sobre teoria de placas, flambagem elástica, Constructal Design e simulação numérica;

- desenvolver tutoriais para familiarização com o software utilizado nas simulações numéricas;
- verificar o modelo computacional empregado nas simulações numéricas;
- definir, com base no método Constructal Design, os casos necessários para desenvolver os estudos de otimização geométrica;
- aplicar o princípio constructal a problemas de mecânica dos sólidos na flambagem de placas;
- verificar o efeito do grau de liberdade H_0/L_0 sobre o comportamento mecânico de placas retangulares com furos elípticos, retangulares e losangulares;
- verificar a influência do tipo de furo sobre a geometria ótima obtida para o furo $(H_0/L_0)_o$;
- verificar a influência do tipo de furo sobre a carga crítica de flambagem uma vez maximizada;
- avaliar o efeito do ϕ sobre a razão ótima de H_0/L_0 para os vários furos estudados;
- analisar e discutir os resultados encontrados;
- elaborar as considerações finais e as sugestões para a continuidade do trabalho.

1.3 ESTADO DA ARTE

O estudo foi realizado por meio de simulação computacional, utilizando o método Constructal Design que tem origem na Teoria Constructal. A Teoria Constructal, que consiste em uma filosofia de solução geométrica, foi criada por Adrian Bejan em 1997 e a sua primeira aplicação na área da engenharia foi na resolução de um problema envolvendo o resfriamento de condutores eletrônicos.

A Teoria Constructal também vem sendo utilizada para determinar as formas presentes na natureza. De acordo com ela, para a permanência de um fluxo, ele deve sofrer adaptações de forma a produzir uma distribuição mais fácil. Isso explica as ramificações existentes ao longo do curso de um rio para reduzir a resistência ao fluxo, ou a ramificação presente nas plantas, para uma melhor distribuição da seiva e nutrientes (Bejan, 1997; Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008).

No campo da engenharia, essa teoria é amplamente utilizada para a resolução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor.

Na área da mecânica dos fluidos, em Bejan e Lorente (2008), por exemplo, foram realizados estudos para demonstrar a melhor secção transversal dos dutos em relação à queda de pressão ao longo do escoamento.

Na área de transferência de calor o Constructal Design vem sendo utilizado na otimização de cavidades de refrigeração e também no desenvolvimento de aletas mais eficientes.

Porém, na área de mecânica dos materiais, são poucos os relatos de utilização do método Constructal Design. Isso torna o presente estudo ainda mais atraente, tendo em vista que ele terá um aspecto de inovação.

El-Sawy e Nasmy (2001) realizaram um estudo da influência do formato, dimensão e posição de perfurações em placas finas de diferentes tamanhos submetidas à flambagem.

Moen e Schafer (2009) determinaram expressões para representar a influência de um ou mais furos sobre a carga crítica de flambagem em placas flexionadas ou comprimidas, sendo as mesmas verificadas por simulações numéricas que utilizaram como método de discretização o Método dos Elementos Finitos, realizadas no software ABACUS. As placas sob estudo foram modeladas como simplesmente apoiadas nos quatro lados e livre para ondas nas bordas. Foi analisada a influência de um único furo no comportamento de uma placa, variando o comprimento da placa de 3 a 24 vezes o diâmetro ou comprimento do furo. Foram analisadas 4 larguras diferentes de placas, correspondendo às larguras padronizadas pela Associação de Construtores de Vigas de Aço (SSMA).

Ainda no mesmo trabalho citado, o furo foi centrado transversalmente entre as bordas da placa. A Figura 1.1 mostra as condições de contorno e carregamento da placa.

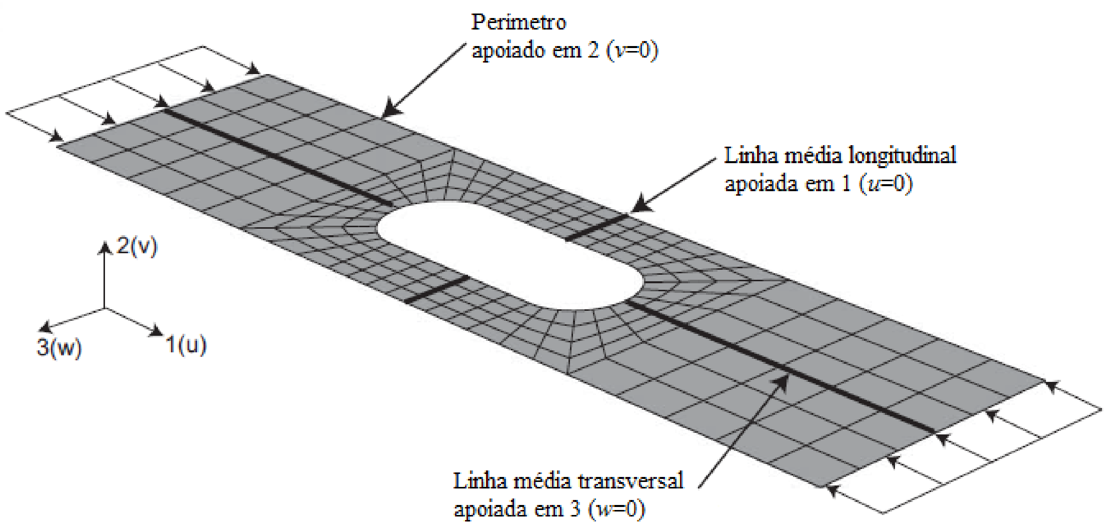

Figura 1.1 – Condições de contorno e carregamento para uma placa simplesmente apoiada, comprimida uniformemente (Moen e Schafer, 2009).

Após os ensaios, eles perceberam que ocorre convergência nos valores de razões entre a carga crítica de flambagem da placa furada e a carga crítica da placa sem furo quando o comprimento da placa excede em 5 vezes o comprimento do furo. Isso demonstra que a influência do furo independe das dimensões da placa para relações maiores que essa.

Há casos em que a presença de furo pode aumentar a carga crítica. De acordo com o estudo de Moen e Schafer (2009), isso ocorre quando a relação entre a largura do furo e a largura da placa está próxima ou excede o valor de 0,66. Para o caso de 0,66, a carga crítica de flambagem excede em cerca de 7% o valor para uma placa sem furo com as mesmas dimensões.

Para situações na qual a razão entre a largura do furo e a largura da placa é inferior a 0,66, ocorre uma redução do valor de carga crítica em relação à carga crítica em uma placa sem furo. A Figura 1.2 mostra a influência do furo na carga crítica de flambagem da placa.

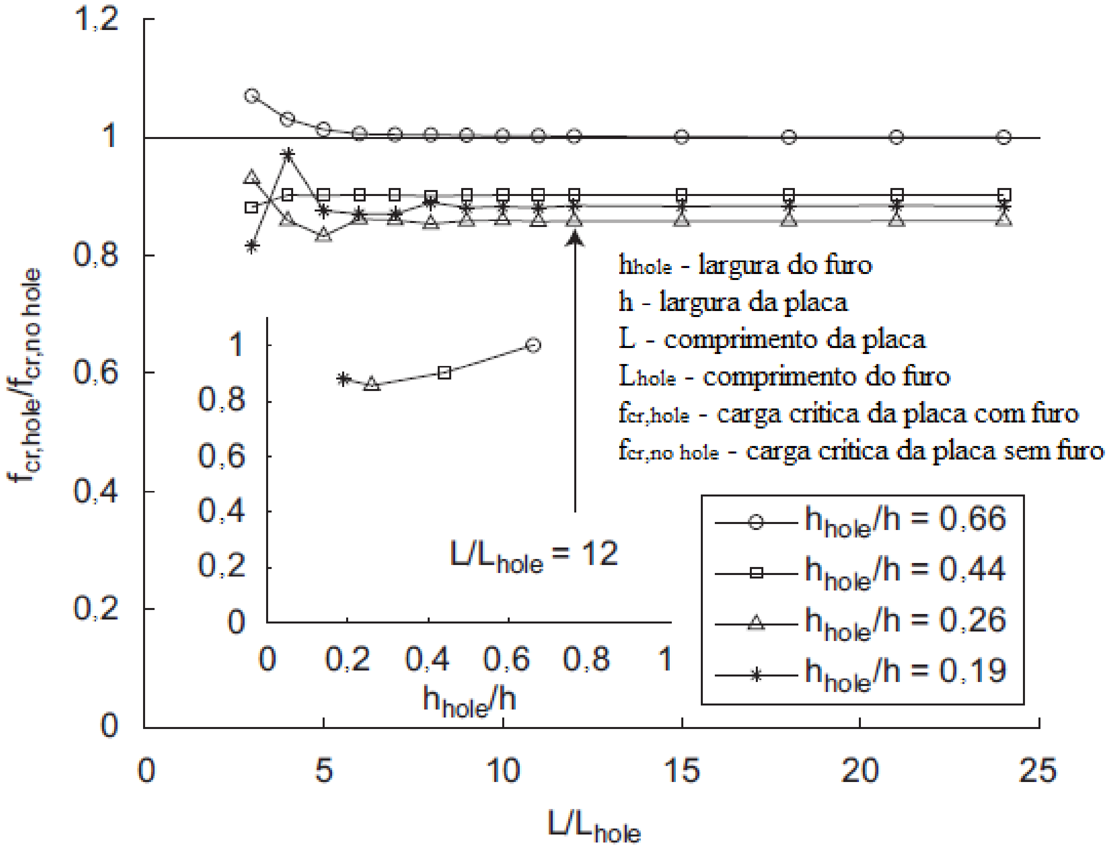

Figura 1.2 – Influência de um furo na carga crítica de flambagem em uma placa simplesmente apoiada, comprimida uniformemente (Moen e Schafer, 2009).

O efeito da flambagem é proeminente em torno da região do furo, uma vez que a rigidez axial nessa região é menor que a rigidez axial em uma área mais distante do furo.

A variação da carga crítica é causada por dois efeitos concorrentes. Em um deles, a presença do furo altera a curvatura da placa de uma meia-onda para duas meias-ondas, ocasionando um aumento na carga crítica. No outro, a remoção de material no furo reduz a rigidez local, ocasionando uma diminuição na carga crítica.

Desse modo, a influência do furo no comportamento mecânico da chapa varia de acordo com a relação de magnitudes de cada um dos efeitos.

Porém nem sempre contamos com estruturas de apenas um furo, às vezes há a necessidade de termos vários furos. Levando isso em consideração, também foram realizados estudos para essa situação. Para isso, foram simuladas placas com uma variação no número de furos de 1 a 8. A variação da largura das placas foi a mesma da simulação para um furo único. As condições de contorno também permaneceram inalteradas. A Figura 1.3 mostra a disposição dos furos na placa.

Figura 1.3 – Placa com múltiplos furos, comprimida uniformemente (Moen e Schafer, 2009).

De maneira semelhante ao caso de um furo único, quando temos vários furos a carga crítica também varia em função da proporção entre a largura do furo e a largura da placa. A figura 1.4 mostra a influência de múltiplos furos na carga crítica de flambagem da placa.

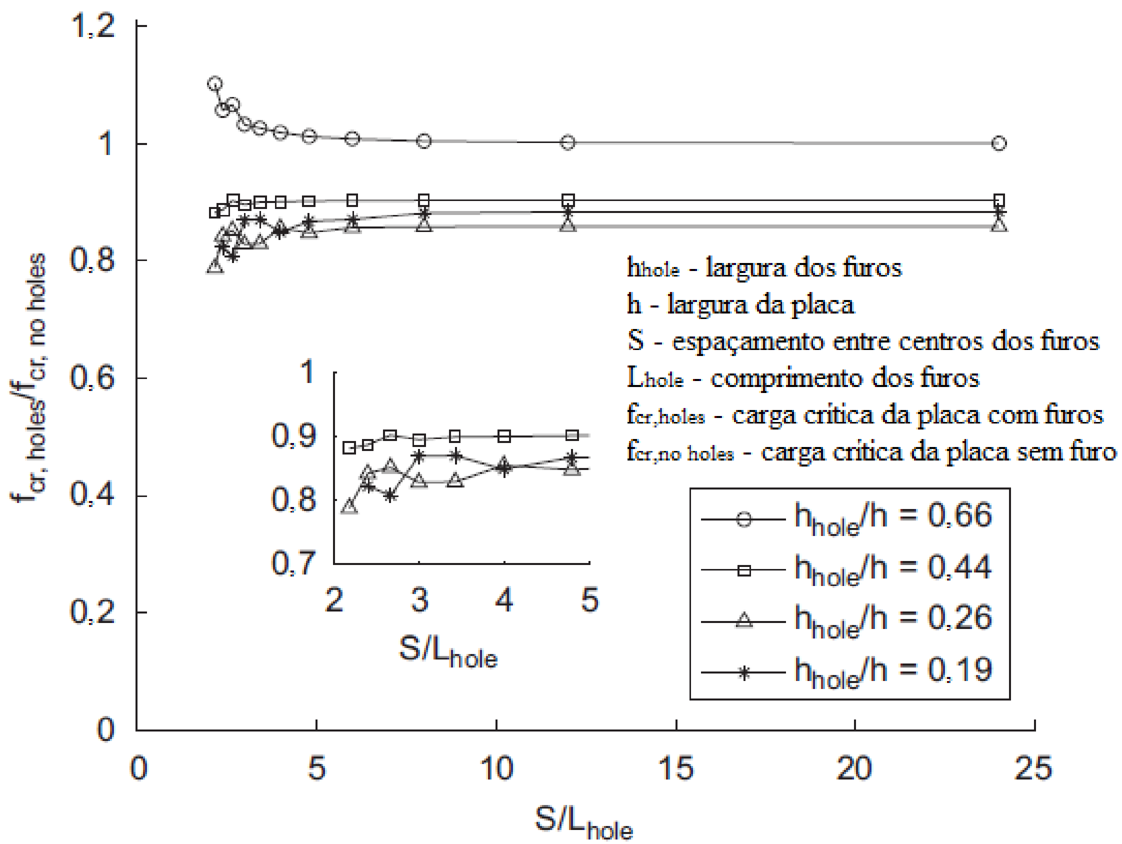

Figura 1.4 – Influência de múltiplos furos na carga crítica de flambagem em uma placa simplesmente apoiada, comprimida uniformemente (Moen e Schafer, 2009).

Quando temos furos muito largos e espaçamentos não muito pequenos, ocorre o encurtamento do meio comprimento de onda, resultando no aumento da carga crítica. Para furos com largura menor e pequeno espaçamento, a influência local das flambagens nos furos adjacentes se combinam para reduzir a carga crítica de flambagem. Ocorre convergência nos valores de razões entre a carga crítica de flambagem da placa furada e a carga crítica da placa sem furo quando o espaçamento entre furos excede em 5 vezes o comprimento do furo.

As observações derivadas desse estudo são utilizadas para o desenvolvimento de expressões matemáticas que caracterizem o fenômeno da flambagem elástica para placas simplesmente apoiadas com um ou mais furos.

Após a realização dos estudos em relação ao carregamento de compressão axial, foram feitos estudos a respeito do comportamento de placas submetidas à flexão quanto ao número de furos presentes.

Placas perfuradas submetidas à flexão, também fazem parte do cotidiano da engenharia, portanto merecem a mesma atenção das placas submetidas à compressão axial.

Da mesma maneira que no estudo das placas sob compressão, o estudo das placas sob flexão foi realizado com base em simulação computacional, utilizando elementos finitos.

As placas foram modeladas com lados simplesmente apoiados e o material e a espessura das placas são as mesmas das placas submetidas a compressão axial.

A maior redução da carga crítica ocorre quando a largura do furo é a metade da largura da placa. A carga crítica aumenta para relações entre largura do furo e largura da placa inferiores à 0,5 porque desse modo, apenas uma pequena parte do furo fica situada na região comprimida da placa.

A carga crítica se comporta de forma mais insensível em comparação à placa comprimida axialmente com vários furos no que se refere à relação entre o espaçamento entre furos e a largura dos mesmos.

As variações entre os valores para placas comprimidas e placas flexionadas ocorreu devido à alterações na quantidade e comprimento das meias-ondas entre os furos, o que pode ser chamado de efeito de enrijecimento do comprimento de ondas. A carga crítica para placas submetidas a flexão não é afetada pelo enrijecimento do comprimento de onda porque não é observada flambagem entre os furos.

O método de previsão assume que a distorção da tira entre o furo e a borda comprimida da placa ou entre o furo e a borda tracionada da placa pode ocorrer dependendo da localização transversal do furo na placa, largura do furo em relação à largura da placa e da localização da linha neutra da placa. Se o furo estiver totalmente contido na região tracionada da placa, ele causará uma influência mínima na flambagem.

Outro foco de estudo foram placas simplesmente apoiadas em 3 lados, com furos, sob compressão. Da mesma forma que nos outros casos, o estudo utilizou diferentes relações entre a largura dos furos e das placas com diferentes espaçamentos entre furos. Novamente, os resultados das análises foram utilizados para a determinação de equações aproximadas para descrever o fenômeno de flambagem nesse tipo de estrutura, levando em consideração a influência dos furos.

A espessura e o material da placa foram considerados os mesmos dos estudos anteriormente citados.

Chegou-se a um resultado no qual a carga crítica diminui à medida que a relação entre o comprimento do furo e a largura da placa na região comprimida aumenta. Isso ocorre porque a rigidez axial da placa é maior perto das bordas simplesmente apoiadas e menor perto da borda livre.

Quando a relação entre o comprimento do furo e a largura da placa na região comprimida aumenta, a placa perde material ligado à extremidade rígida, reduzindo a rigidez axial, diminuindo dessa forma a carga crítica de flambagem.

Nesse estudo, a presença de furos sempre reduziu a carga crítica de flambagem nas placas. Não foi observada flambagem entre furos na região comprimida da placa, devido ao fato da relação entre o comprimento e a largura da placa ser sempre maior que a relação entre o comprimento do furo e a largura da placa na área comprimida.

Ao final dos estudos, os autores chegaram à validação das equações desenvolvidas, porém deixando claro que as mesmas ainda necessitam de melhorias para condizerem com as equações de estabilidade da placa clássica no que diz respeito ao comprimento dos furos e gradientes de tensão na região próxima aos furos.

É admitido também que a carga de flambagem é controlada pela flambagem da tira flexível adjacente ao furo ou pela flambagem da placa em uma região afastada do furo. Essas conclusões são apoiadas por outros estudos utilizando elementos finitos, que também esclarecem os mecanismos subjacentes da flambagem em placas delgadas com furos (El-Sawy, Nazmy e Martini, 2004; Shimizu, 2007; Paik, 2007a; Paik, 2007b; Paik, 2008).

Já no trabalho de Lorente, Lee e Bejan (2010), foi realizada uma análise do fluxo de tensão mecânica, fazendo uma analogia com fluxo de energia térmica e fluxo de massa. Foram estudadas três situações: estrangulamento geométrico, bifurcação geométrica e escoamento sobre placas. No caso do estrangulamento geométrico, partindo da premissa de que a presença de um estrangulamento geométrico representa sempre uma maior dificuldade no desenvolvimento do fluxo, seja ela de massa ou de energia foi feita uma analogia entre os fluxos de calor e massa com o fluxo de tensão mecânica em um estrangulamento. No caso de fluxo de massa, sabe-se que para uma vazão mássica constante, comprimento e volume fixos; o valor da perda de carga local é intensificado na região da estricção. Tal comportamento também pode ser observado quanto à intensidade da tensão mecânica em um corpo de prova submetido à tração axial. A tensão apresenta seu maior valor na região de menor área transversal, uma vez que as linhas imaginárias de fluxo de tensão estão mais concentradas.

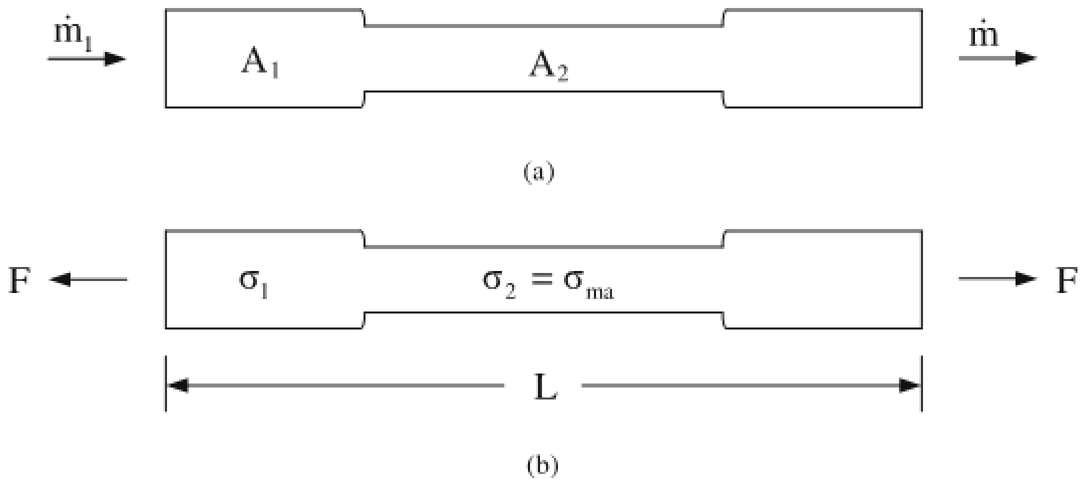

Figura 1.5 – (a) Fluxo de fluido através de um duto com estrangulamento; (b) fluxo de tensão análogo através de uma barra de seção transversal não uniforme (Lorente, Lee e Bejan, 2010).

No caso da bifurcação geométrica, foi feita uma analogia com o fluxo de fluido em uma tubulação com formato de “Y”, conforme Fig. 1.6, no qual é sabido que de acordo com a lei de Hess-Murray a geometria ótima varia em função do regime de escoamento. Para o regime de Poiseuille, tem-se como relação ótima, a relação D1/D2 = $2^{1/3}$. Já para o regime turbulento, a relação ótima é D1/D2 = $2^{3/7}$ (Lorente, Lee e Bejan, 2010).

No caso da tensão mecânica, há dois tipos de falhas importantes a serem analisadas em colunas submetidas a esforços axiais, a falha por compressão e a falha por flambagem. De acordo com Lorente, Lee e Bejan (2010), no caso da falha por esforço compressivo, a geometria ótima possui formato de "V", ou seja, x = 0 (ver Fig. 1.6). Já no caso da falha por flambagem, a geometria ótima apresenta o formato de "Y". Foi também percebido o fato de o menor volume necessário para suportar a solicitação ser obtido quando D1/D2 = $2^{1/2}$, o que se iguala à relação obtida através da lei de Leonardo da Vinci para a botânica.

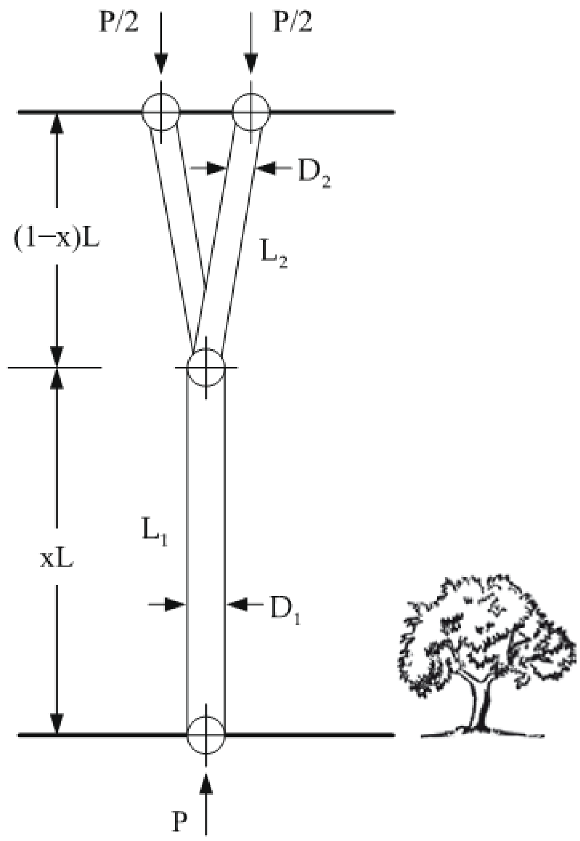

Figura 1.6 – Estrutura sólida bifurcada com igual resistência à flambagem sob compressão em todos os elementos (Lorente, Lee e Bejan, 2010).

No caso de escoamento sobre placas, o objetivo foi obter a forma ótima da camada adesiva que faz a junção entre a folha e um corpo rígido. A camada adesiva fica submetida a cisalhamento puro. Os detalhes dessa primeira configuração são apresentados na Fig. 1.7.

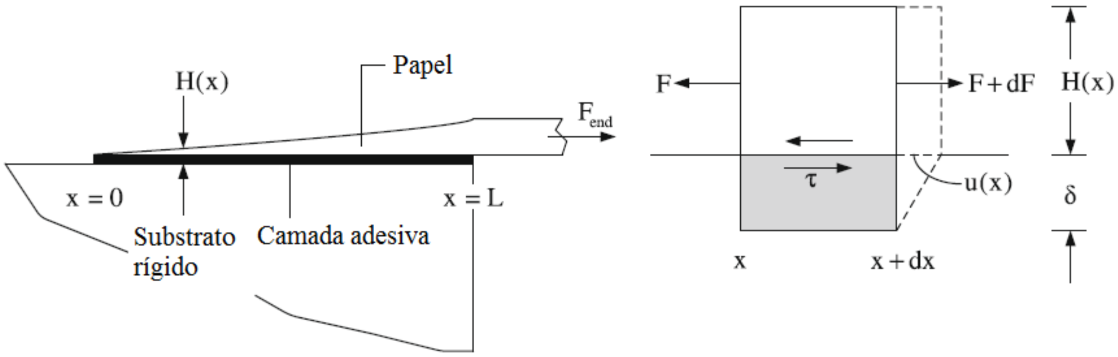

Figura 1.7 – Placa fina com espessura não uniforme e com camada adesiva (Lorente, Lee e Bejan, 2010).

A resistência da folha tem influência diferente na geometria da folha e do adesivo, uma folha mais resistente acarreta em uma folha mais fina e uma camada mais espessa de adesivo, em contrapartida, uma folha menos resistente acarreta em uma folha mais espessa e uma camada mais fina de adesivo.

Como forma de otimização, a camada de adesivo foi remodelada de forma a receber uma tensão de cisalhamento uniforme. A Figura 1.8 mostra os detalhes dessa segunda configuração.

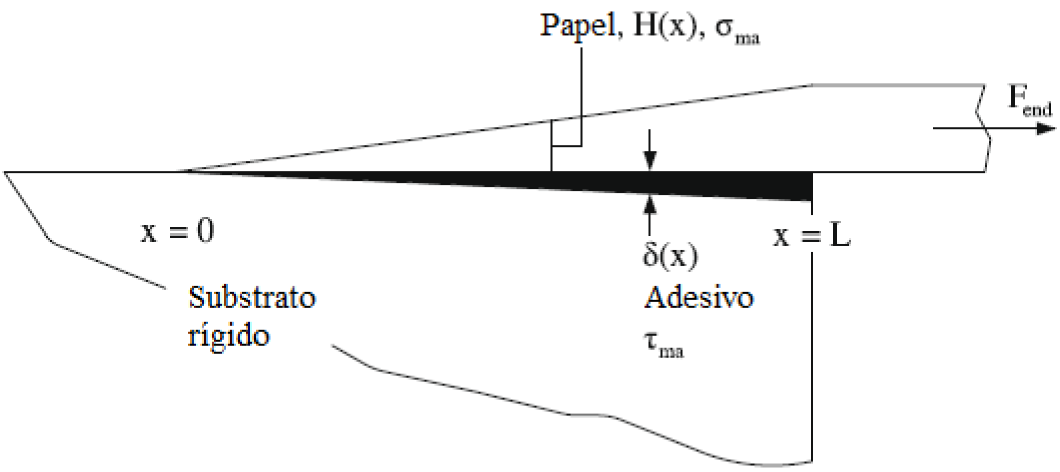

Figura 1.8 – Modelo com tensão longitudinal constante na folha e tensão de cisalhamento constante na camada adesiva (Lorente, Lee e Bejan, 2010).

Nessa nova configuração, a geometria ótima apresenta 25% de redução na folha e uma redução na camada adesiva de 87,5%.

Por fim, foi feita uma terceira configuração com duas folhas de papel com adesivo no meio, de forma a possuir tensão uniforme nas folhas e tensão cisalhante uniforme na camada adesiva também. A terceira configuração é exibida na Fig. 1.9.

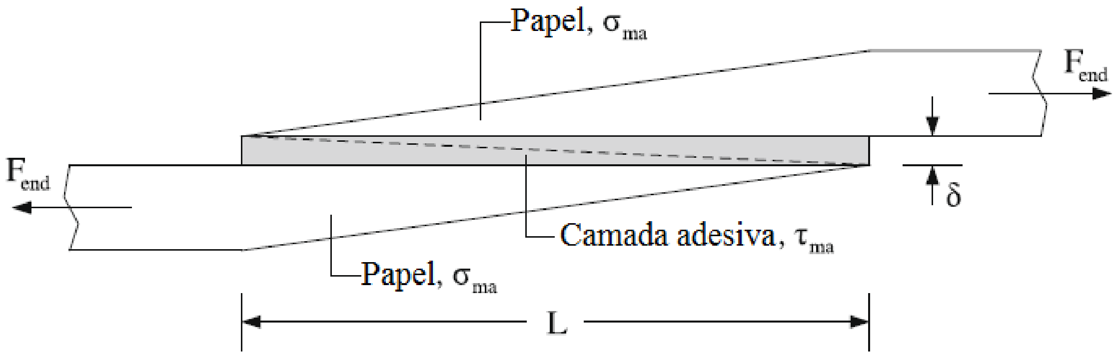

Figura 1.9 – Modelo com duas folhas e duas camadas adesivas, ambas com tensão uniforme (Lorente, Lee e Bejan, 2010).

O resultado para a tensão ótima nessa configuração foi o mesmo encontrado na configuração anterior.

No trabalho de Real e Isoldi (2011), foi feito o estudo da influência da dimensão de furos circulares em placas finas submetidas à flambagem sobre a carga crítica de flambagem, assim como a influência do posicionamento dos furos nas placas, também sobre a carga crítica de flambagem.

Para a realização do estudo, foram adotados cinco placas de mesma espessura (0,01 m) e tamanhos diferentes: 1 m × 1 m, 1 m × 2 m, 1 m × 3 m, 1 m × 4 m e 1 m × 5 m. Foram utilizados também seis diâmetros de furos diferentes: 0,10 m, 0,20 m, 0,30 m, 0,40 m, 0,50 m e 0,60 m. O comprimento da placa foi denominado *a* e a largura, denominada *b*. O diâmetro do furo foi denominado *d*.

A Figura 1.10 mostra os modos de flambagem da placa de 1 m × 1 m.

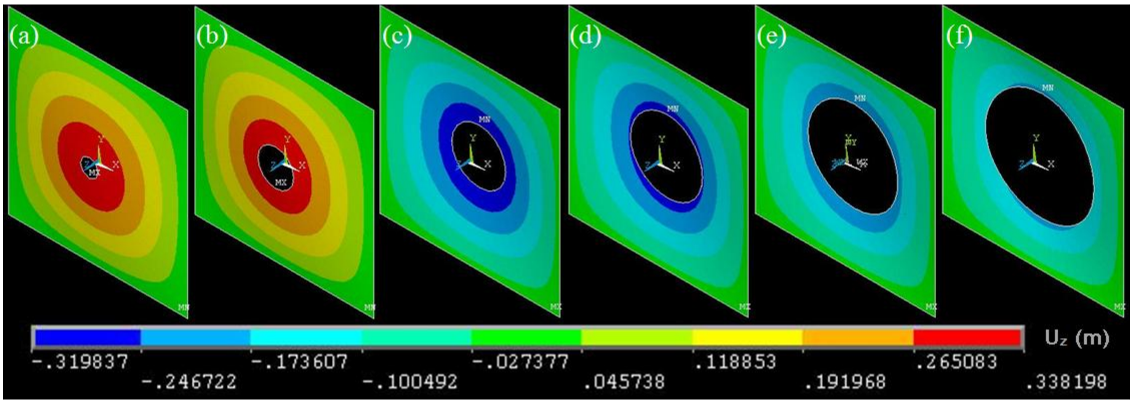

Figura 1.10 – Modo de flambagem da placa com *a*/*b* = 1 e *d*/*b* de: (a) 0,10; (b) 0,20; (c) 0,30; (d) 0,40; (e) 0,50; (f) 0,60 (Real e Isoldi, 2011).

Após a realização das simulações em todas as placas, foi elaborado um gráfico relacionando o valor da carga crítica de flambagem com o valor da relação *d*/*b*, que é mostrado na Fig. 1.11.

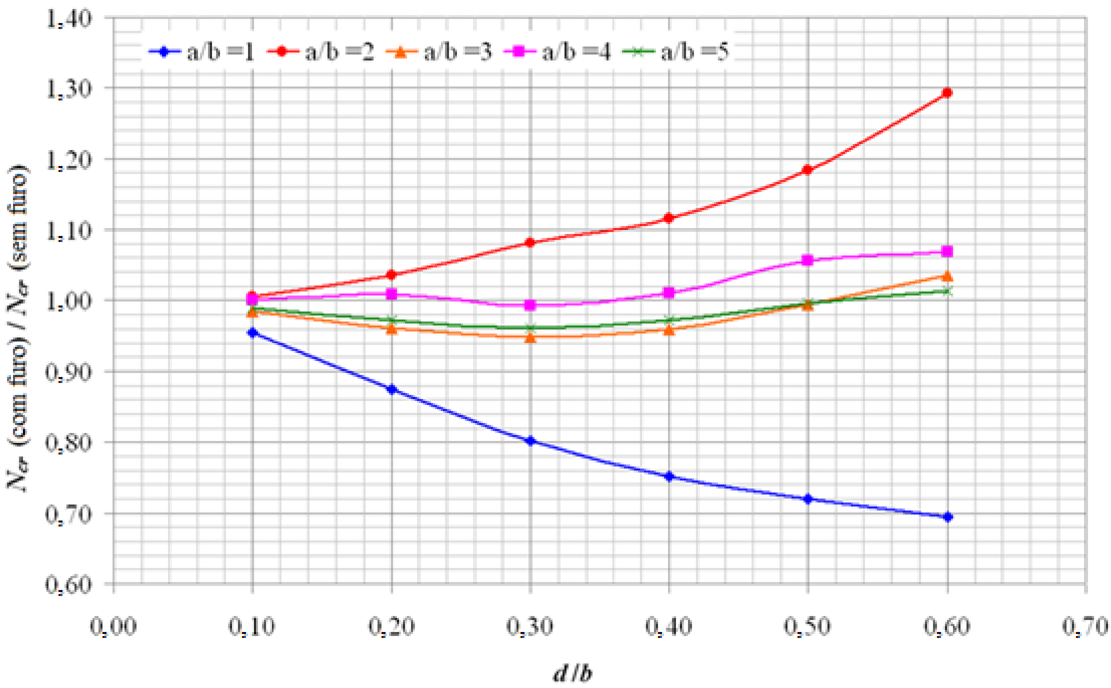

Figura 1.11 – Variação da carga crítica em função de *d*/*b* para todas as placas (Real e Isoldi, 2011).

Os valores apresentados na Fig. 1.11 mostram que a placa com melhor comportamento em relação à carga crítica de flambagem foi a placa com a relação $a/b = 2$ e a placa que exibiu o pior comportamento foi a placa com a relação $a/b = 1$.

Para finalizar o estudo, foi realizado uma investigação da influência do posicionamento do furo na placa sobre a carga crítica de flambagem. Foi introduzida a variável x_{hole} para indicar a distância entre o centro do furo e a borda lateral da placa. A Figura 1.12 mostra as três configurações de posicionamento investigadas.

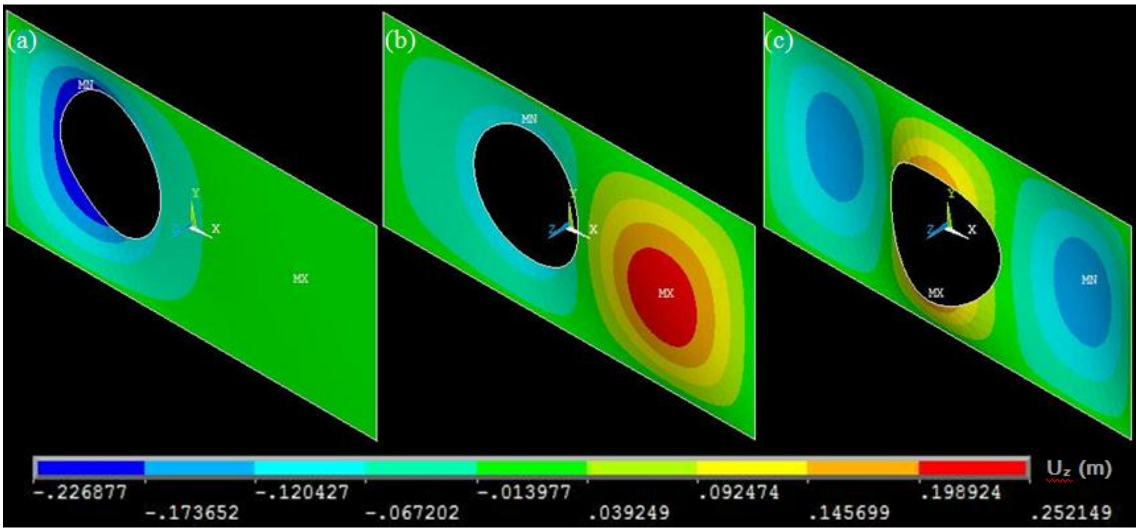

Figura 1.12 – Modo de flambagem da placa com d = 0,60 m e x_{hole} de: (a) 0,250 a; (b) 0,375 a; (c) 0,500 a (Real e Isoldi, 2011).

A Figura 1.13 mostra a influência do posicionamento do furo sobre a carga crítica de flambagem.

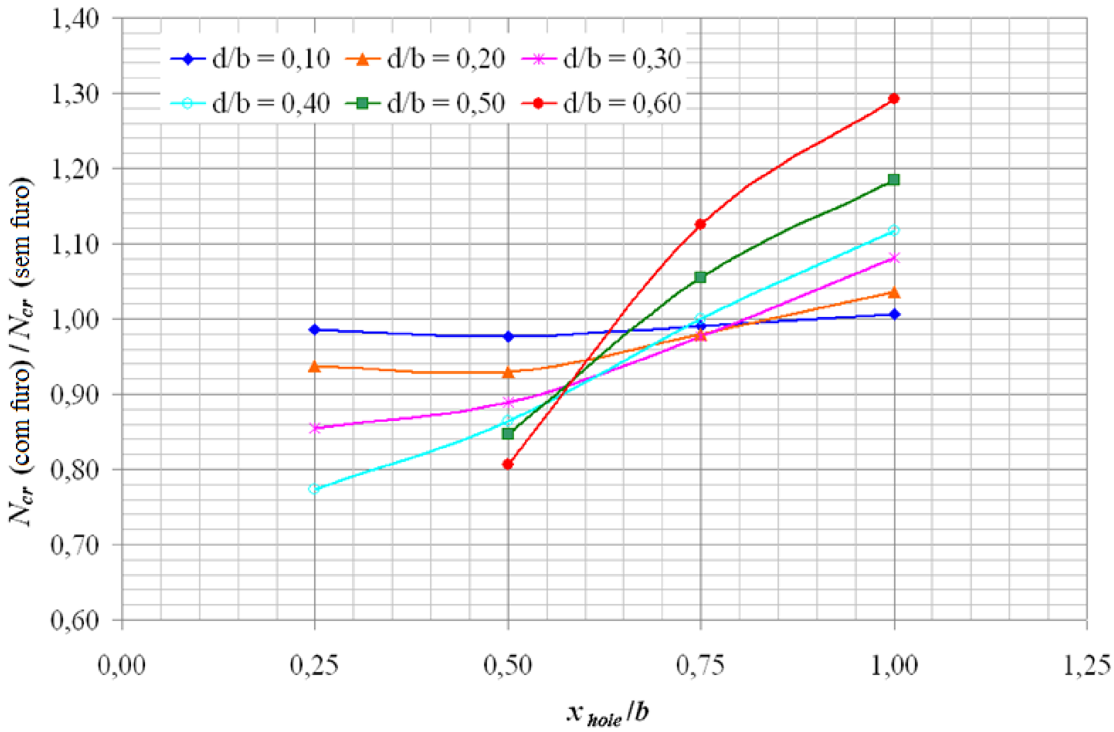

Figura 1.13 – Variação da carga crítica em função de x_{hole}/b (Real e Isoldi, 2011).

Os valores apresentados na Fig. 1.13 mostram que para furos de menor diâmetro, o posicionamento do furo não tem grande influência sobre o valor da carga crítica de flambagem. Porém conforme o diâmetro do furo aumenta, cresce também a influência do posicionamento. Para os furos de maior diâmetro, a carga crítica de flambagem máxima é obtida quando o furo encontra-se localizado no centro da placa.

2. FUNDAMENTOS DE FLAMBAGEM DE PLACAS

2.1 TEORIA DE PLACAS

2.1.1 Conceitos básicos

Considere uma placa de dimensões L_x, L_y, com espessura t conforme mostrado na Fig. 2.1.

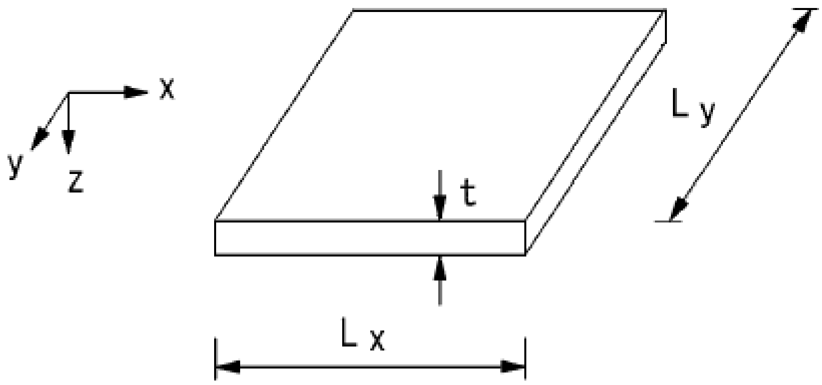

Figura 2.1 - Placa genérica (Adaptado de Yamaguchi, 1999).

Uma característica desse corpo é possuir uma dimensão muito menor que as outras duas dimensões:

$$t << L_x, L_y \tag{2.1}$$

Na Equação (2.1), t é a espessura da placa, L_x é a dimensão na direção *x* (longitudinal) e L_y é a dimensão na direção *y* (transversal).

De acordo com Yamaguchi (1999), quando um corpo possui esta característica geométrica indicada pela Eq. (2.1) e é plano antes do carregamento, ele é chamado de placa. Note-se que uma casca possui uma característica geométrica semelhante, mas é curvada, mesmo antes do carregamento.

A característica da Eq. (2.1) presta-se às seguintes premissas sobre alguma tensão e componentes de deformação:

$$\sigma_z = 0 \tag{2.2}$$

Na Equação (2.2), σ_z é a tensão normal na direção *z*.

Neste tipo de problema as deformações na direção *z* e nos planos *xz* e *yz* são dadas por:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \tag{2.3}$$

Na Equação (2.3), ε_z é a deformação específica na direção *z* (normal), ε_{xz} é a deformação específica de cisalhamento contida no plano *xz* e ε_{yz} é a deformação específica contida no plano *yz*.

A Figura 2.2 mostra a forma deformada de uma placa.

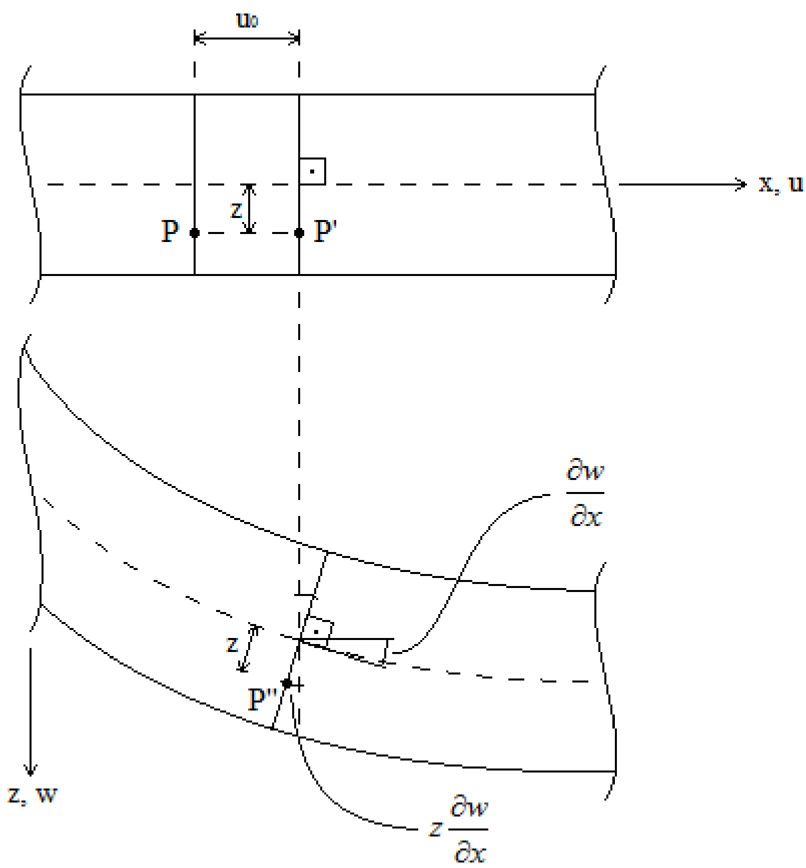

Figura 2.2 – Forma deformada de uma placa.

Pode-se derivar o seguinte campo de deslocamento a partir da Eq. (2.3):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{2.4}$$

Na Equação (2.4), u é a componente de deslocamento na direção *x* (longitudinal), u_0 é a componente de deslocamento na direção *x* (longitudinal) associada ao plano descrito por *z* = 0 e w_0 é a componente de deslocamento na direção *z* (normal) associada ao plano descrito por z = 0.

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{2.5}$$

Na Equação (2.5), v é a componente de deslocamento na direção *y* (transversal) e v_0 é a componente de deslocamento na direção *y* (transversal) associada ao plano descrito por $z = 0$.

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{2.6}$$

Na Equação (2.6), w é a componente de deslocamento na direção *z* (normal).

Desse ponto em diante, w_0 será substituído por w.

Fisicamente, as expressões (2.4), (2.5) e (2.6) combinadas implicam que os filamentos lineares da placa, inicialmente perpendiculares à superfície média, permanecem retos e perpendiculares à superfície média deformada. Isto é conhecido como hipótese de Kirchhoff. Embora as Eqs. (2.4), (2.5) e (2.6) derivem da Eq. (2.3), pode-se chegar a elas partindo da hipótese de Kirchhoff, uma vez que a mesma é equivalente aos pressupostos da Eq. (2.3) (Yamaguchi, 1999; Wang, Wang e Reddy, 2005).

2.1.2 Equações governantes

De acordo com Yamaguchi (1999), usando as relações deformação-deslocamento na mecânica do contínuo, pode-se obter o seguinte campo de deformação associado com as expressões (2.4), (2.5) e (2.6):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

Na Equação (2.7), ε_x é a deformação específica na direção *x* (longitudinal).

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.8}$$

Na Equação (2.8), ε_y é a deformação específica na direção *y* (transversal).

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.9}$$

Na Equação (2.9), ε_{xy} é a deformação específica contida no plano *xy*.

Isto constitui as relações deformação-deslocamento para a teoria de placas finas.

Na teoria de placas, as condições de equilíbrio são consideradas em termos de forças resultantes e momentos, sendo obtidas pela integração das equações de equilíbrio ao longo da espessura de uma placa (Wang, Wang e Reddy, 2005).

As forças e os momentos resultantes estão ilustrados na Fig. 2.3.

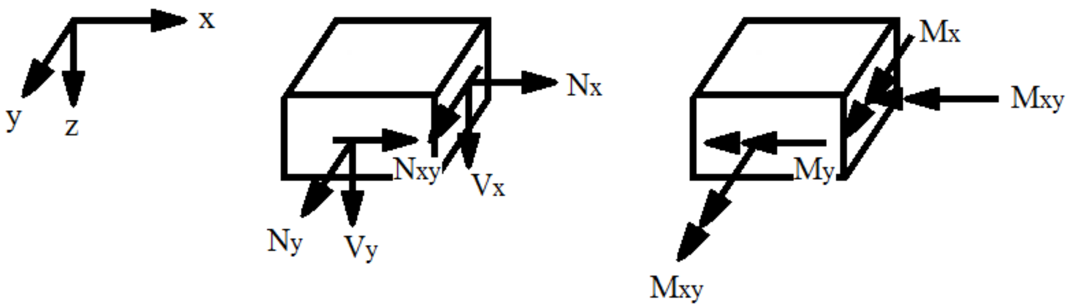

Figura 2.3 - Forças e momentos resultantes (Yamaguchi, 1999).

Através da Eq. (2.2), obtêm-se as equações de equilíbrio como segue:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \tag{2.10}$$

Na Equação (2.10), N_x é o esforço normal na direção *x* (longitudinal), N_{xy} é o esforço normal contido no plano *xy* e q_x é a carga uniformemente distribuída na direção *x* (longitudinal).

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y = 0 \tag{2.11}$$

Na Equação (2.11), N_y é o esforço normal na direção *y* (transversal) e q_y é a carga uniformemente distribuída na direção *y* (transversal).

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q_z = 0 \qquad (2.12)$$

Na Equação (2.12), V_x é o esforço cortante na direção *x* (longitudinal), V_y é o esforço cortante na direção *y* (transversal) e q_z é a carga uniformemente distribuída na direção *z* (normal).

Os termos associados com τ_{xz} e τ_{yz} desaparecem, uma vez que nos problemas de placas, as superfícies de topo e de fundo são apenas submetidas a cargas verticais.
Deve-se considerar também o equilíbrio de momento de uma região infinitesimal da placa, que leva a:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x = 0 \qquad (2.13)$$

Na Equação (2.13), M_x é o momento fletor na direção *x* (longitudinal) e M_{xy} é o momento torçor contido no plano *xy*.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y = 0 \qquad (2.14)$$

Na Equação (2.14), M_y é o momento fletor na direção *y* (transversal).

As forças resultantes e os momentos são definidos matematicamente como:

$$N_x = \int_z \sigma_x dz \qquad (2.15)$$

Na Equação (2.15), σ_x é a tensão normal na direção *x* (longitudinal).

$$N_y = \int_z \sigma_y dz \tag{2.16}$$

Na Equação (2.16), σ_y é a tensão normal na direção *y* (transversal).

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_z \tau_{xy} dz \tag{2.17}$$

Na Equação (2.17), N_{yx} é o esforço normal contido no plano *yx* e τ_{xy} é a tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *x* (longitudinal) e paralela à direção *y* (transversal).

$$V_x = \int_z \tau_{xz} dz \tag{2.18}$$

Na Equação (2.18), τ_{xz} é a tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *x*.

$$V_y = \int_z \tau_{yz} dz \tag{2.19}$$

Na Equação (2.19), τ_{yz} é a tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *y* (transversal) e paralela à direção *z* (normal).

$$M_x = \int_z \sigma_x z dz \tag{2.20}$$

$$M_y = \int_z \sigma_y z dz \tag{2.21}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_z \tau_{xy} z dz \tag{2.22}$$

Na Equação (2.22), M_{yx} é o momento torçor contido no plano yx e τ_{xy} é a tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção x (longitudinal) e paralela à direção y (transversal).

De acordo com Yamaguchi (1999), uma vez que a espessura de uma placa é pequena em comparação com as outras dimensões, é geralmente aceitável que as relações constitutivas para um estado plano de tensões sejam aplicadas. Assim, as relações tensão-deformação para uma placa isotrópica são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

Na Equação (2.23), E é o módulo de elasticidade (módulo de Young), ν é o coeficiente de Poisson, e γ_{xy} é a deformação por cisalhamento associada às direções x (longitudinal) e y (transversal).

Usando as expressões (2.7), (2.8), (2.9), (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23), as relações constitutivas para uma placa isotrópica em termos de resultantes de tensão e deslocamentos são descritas por:

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) \tag{2.24}$$

$$N_y = \frac{Et}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \tag{2.25}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{Et}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \tag{2.26}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.27}$$

Na Equação (2.27), D é a rigidez à flexão.

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.28}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.29}$$

Sendo a rigidez à flexão D, definida por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.30}$$

Na derivação das expressões (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29), assumiu-se que a espessura da chapa t é constante, e que a superfície média inicial encontra-se no plano definido por $z = 0$. Através das expressões (2.13) e (2.14), pode-se relacionar as forças de cisalhamento com o deslocamento.

As expressões (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29), constituem a estrutura de um problema de placa: 11 equações para 11 incógnitas, ou seja, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, V_x, V_y, u_0, v_0 e w.

2.1.3 Problemas no plano e fora do plano

Tal como pode ser realizada nas equações derivadas anteriormente, o problema pode ser decomposto em dois conjuntos de problemas os quais são desacoplados uns dos outros.

a) Problemas no plano

Estes problemas também podem ser chamados de problema estendido de uma placa e são regidos por:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+q_x=0 \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+q_y=0 \tag{2.32}$$

$$N_x=\frac{Et}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{2.33}$$

$$N_y=\frac{Et}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2.34}$$

$$N_{xy}=N_{yx}=\frac{Et}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.35}$$

Têm-se cinco equações para cinco incógnitas. Estes problemas podem ser vistos e tratados da mesma maneira que um problema de estado plano de tensões, adotando a teoria da elasticidade bidimensional.

b) Problemas fora do plano

Estes problemas são considerados problemas de flexão e são governados por:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+q_z=0 \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-V_x=0 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-V_y=0 \tag{2.38}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.39}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.40}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.41}$$

Tem-se assim, seis equações para seis incógnitas.
Eliminando V_x e V_y das expressões (2.36), (2.37) e (2.38), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q_z = 0 \tag{2.42}$$

Substituindo as expressões (2.39), (2.40) e (2.41) na Eq. (2.42), obtém-se a equação governante em termos de deslocamento, dada por:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q_z \tag{2.43}$$

ou

$$\nabla^4 w = \frac{q_z}{D} \tag{2.44}$$

Na Equação (2.44), ∇ é o operador diferencial delta.

Sendo o operador definido através das expressões (2.45) e (2.46):

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 \tag{2.45}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.46}$$

2.1.4 Condições de contorno

Considerando uma placa fina com o sistema de coordenadas *n*-*s*-*z*, conforme Fig. 2.4:

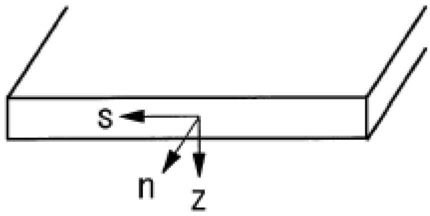

Figura 2.4 - Sistema de coordenadas *n*-*s*-*z* (Yamaguchi, 1999).

Introduzindo o sistema de coordenadas *n*-*s*-*z* juntamente às bordas da placa, conforme mostrado na Fig. 2.4, os momentos e as forças de cisalhamento são definidos como:

$$M_n = \int_z \sigma_n z dz \tag{2.47}$$

Na Equação (2.47), M_n é o momento fletor na direção *n* (normal à borda da placa), z é a direção transversal à borda da placa e σ_n é a tensão normal na direção *n* (normal à borda da placa).

$$M_{ns} = M_{sn} = \int_z \tau_{ns} z dz \tag{2.48}$$

Na Equação (2.48), M_{ns} é o momento torçor contido no plano *ns*, M_{sn} é o momento torçor contido no plano *sn* e τ_{ns} é a tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *n* (normal à borda da placa) e paralela à direção *s* (longitudinal à borda da placa).

$$V_n = \int_z \tau_{nz} dz \tag{2.49}$$

Na Equação (2.49), V_n é o esforço cortante na direção *n* (normal à borda da placa) e τ_{nz} é a tensão de cisalhamento contida no plano ortogonal à direção *n* (normal à borda da placa) e paralela à direção *z* (transversal à borda da placa).

Na teoria das placas, em vez de considerar essas três quantidades, combina-se o momento de torção e a força de cisalhamento, substituindo a ação do momento torçor M_{ns} pela ação da força de cisalhamento, como pode ser visto na Fig. 2.5 (Wang, Wang e Reddy, 2005).

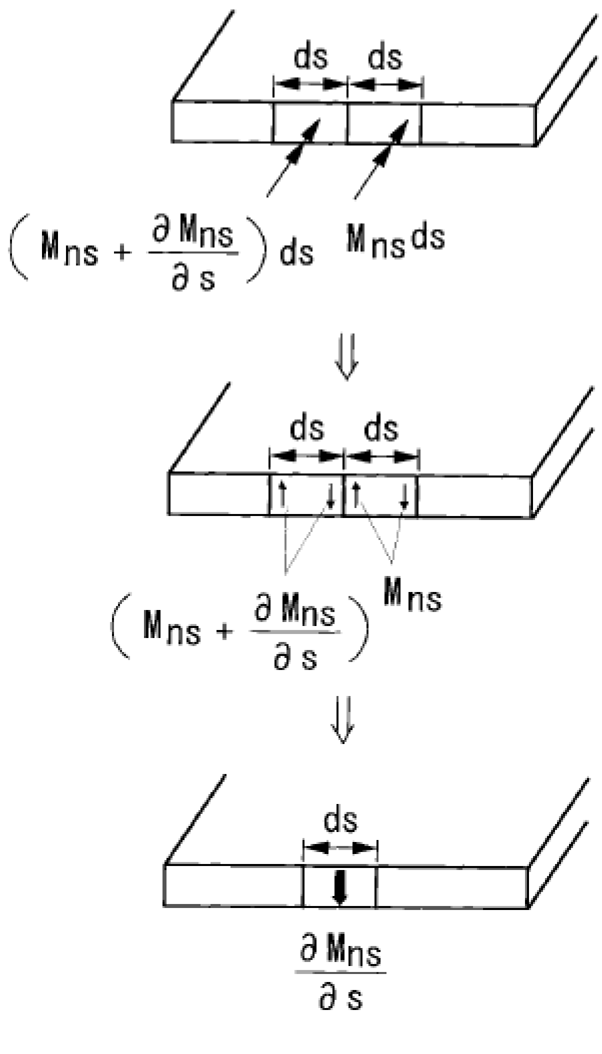

Figura 2.5 - Esforço cortante devido a momento torçor (Yamaguchi, 1999).

Define-se a resultante vertical como:

$$S_n = V_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{2.50}$$

Na Equação (2.50), S_n é o esforço resultante das ações do esforço cortante na direção *n* (normal à borda da placa) e do momento torçor contido no plano *ns* e s é a direção longitudinal à borda da placa.

As condições de contorno são, portanto, dada em geral por:

$$w = \overline{w} \quad ou \quad S_n = \overline{S}_n \tag{2.51}$$

Na Equação (2.51), w é o deslocamento transversal na borda da placa, $\overline{w}$ é o valor prescrito do deslocamento transversal na borda da placa e $\overline{S}_n$ é o valor prescrito do esforço resultante das ações do esforço cortante na direção *n* (normal à borda da placa) e do momento torçor contido no plano *ns*.

$$-\frac{\partial w}{\partial n} = \overline{\lambda}_n \quad ou \quad M_n = \overline{M}_n \tag{2.52}$$

Na Equação (2.52), w é o deslocamento transversal na borda da placa, n é a direção normal à borda da placa, $\overline{\lambda}_n$ é o valor prescrito da rotação em torno da borda e $\overline{M}_n$ é o valor prescrito do momento fletor na direção *n* (normal à borda da placa).

As quantidades representadas com uma barra superior são valores prescritos e estão ilustrados na Fig. 2.6.

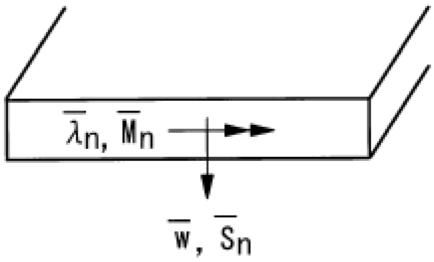

Figura 2.6 - Quantidades prescritas na borda (Yamaguchi, 1999).

As expressões (2.51) e (2.52) asseguram uma solução única para um problema de flexão de uma placa.

De acordo com Wang, Wang e Reddy (2005) e Yamaguchi (1999), as condições de contorno para alguns casos práticos são como se segue:

a) Borda simplesmente apoiada

$$w = 0, \qquad M_n = \overline{M}_n \tag{2.53}$$

b) Borda engastada

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{2.54}$$

c) Borda livre

$$M_n = \overline{M}_n, \qquad S_n = \overline{S}_n \tag{2.55}$$

d) Canto livre (intersecção de bordas livres)

No canto livre, os momentos de torção provocam ação vertical, como pode ser percebido na Fig. 2.7.

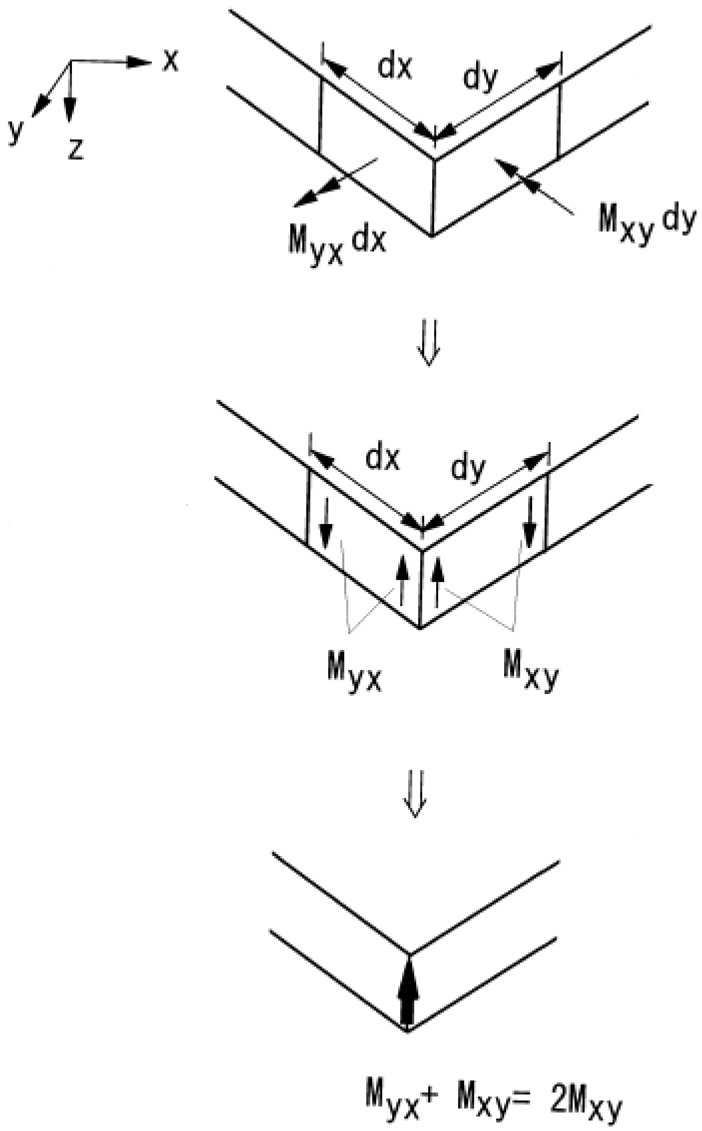

Figura 2.7 - Ação vertical no canto causada por momento torçor (Yamaguchi, 1999).

Portanto, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$-2M_{xy} = \overline{P} \tag{2.56}$$

Na Equação (2.56), M_{xy} é o momento torçor contido no plano *xy* e $\overline{P}$ é o valor prescrito da carga concentrada externa atuante no canto da placa na direção *z*.

2.2 ESTABILIDADE E EQUILÍBRIO

Um exemplo usual para definir os tipos de equilíbrio é o do corpo esférico sobre três superfícies diferentes, uma superfície côncava, uma superfície convexa e uma superfície plana, como mostradas na Fig. 2.8:

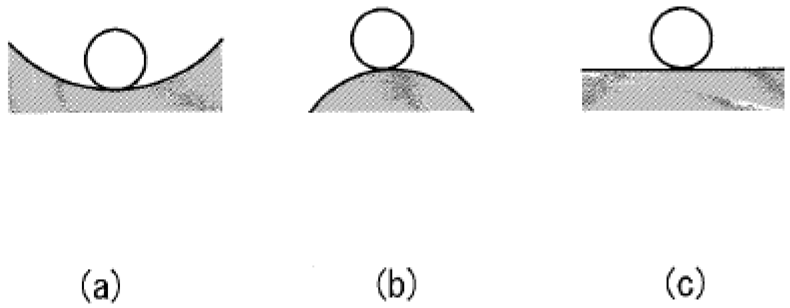

Figura 2.8 - Estados de equilíbrio (Yamaguchi, 1999).

Na primeira situação (Fig. 2.8 (a)), é possível perceber que caso a esfera sofra um deslocamento, a mesma voltará a sua posição original após o término da ação. Quando isso ocorre, diz-se que há uma situação de equilíbrio estável. Já na segunda situação (Fig. 2.8 (b)), percebe-se que a esfera ao sofrer um deslocamento provocado por uma ação externa, não retorna à posição original de maneira natural e, além disso, tende a se distanciar cada vez mais do seu estado inicial quando cessada a ação externa. Nessa situação, diz-se que a esfera encontra-se em equilíbrio instável. Por fim, na terceira situação (Fig. 2.8 (c)), nota-se que a esfera ao sofrer um deslocamento por influência de um estímulo externo, não retorna ao seu estado inicial após a interação com o estímulo, porém não continua se distanciando de sua configuração inicial. Nesse caso, diz-se que a esfera encontra-se em estado de equilíbrio neutro (Yamaguchi, 1999).

Um exemplo menos convencional, mas não por isso menos enfático é um sistema constituído de uma barra rígida e uma mola linear. Nesse sistema, a barra sofre a ação de uma força P em uma de suas extremidades, como mostrado na Fig. 2.9:

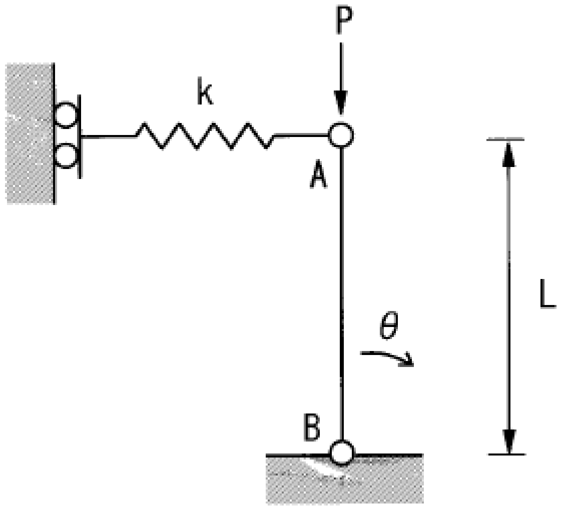

Figura 2.9 - Sistema barra rígida-mola linear (Yamaguchi, 1999).

Quando é imposta uma pequena variação angular θ, surge um momento em torno do ponto B, denominado M_B, que pode ser determinado por:

$$M_B = PL\sin\theta - (k_m L\sin\theta)(L\cos\theta) = L\sin\theta(P - k_m L\cos\theta) \qquad (2.57)$$

Na Equação (2.57), M_B é o momento em torno do ponto B, P é a carga aplicada em uma das extremidades da barra, L é o comprimento da barra, θ é a variação angular imposta à barra e k_m é a constante elástica da mola.

Considerando a variação angular θ infinitesimal, a Eq. (2.57) pode ser simplificada, tomando a forma dada pela Eq. (2.58):

$$\frac{M_B}{\theta} = L(P - k_m L) \qquad (2.58)$$

De acordo com Yamaguchi (1999), o sistema é considerado estável quando o momento M_B age na direção contrária à variação angular θ, considerado instável quando o momento M_B age na mesma direção da variação angular θ e considerado em equilíbrio neutro quando o momento M_B inexiste. Isso pode ser expresso matematicamente na forma da Eq. (2.59):

$$(P - k_m L)\begin{cases} < 0: estável \\ = 0: neutro \\ > 0: instável \end{cases} \tag{2.59}$$

Através do que é exposto na Eq. (2.59), conclui-se que o aumento da carga P faz com que haja uma transição entre um estado de equilíbrio estável para um estado de equilíbrio instável. Pode-se perceber que o limiar entre os dois estados é o estado de equilíbrio neutro, sendo assim, conclui-se que a carga crítica nesse caso é kL. De acordo com Wang, Wang e Reddy (2005) e Åkesson (2007), essa carga crítica representa uma bifurcação entre o equilíbrio estável e o equilíbrio instável. No ponto de bifurcação, a carga recebe a denominação de carga de flambagem. No sistema barra rígida-mola linear utilizado como exemplo, a carga de flambagem kL representa um limite de equilíbrio neutro. Na maioria dos casos, a carga de flambagem corresponde a um estado de equilíbrio neutro, mas não necessariamente a um limite de estabilidade. Frequentemente a carga de flambagem é associada a uma mudança no comportamento estrutural de um elemento, sendo, portanto utilizada como um indicativo de limite de manutenção.

Nas estruturas, podem ser observados três tipos distintos de fenômenos de instabilidade: bifurcação, ruptura e amolecimento. A Figura 2.10 mostra o comportamento de cada um dos três fenômenos de instabilidade mencionados anteriormente.

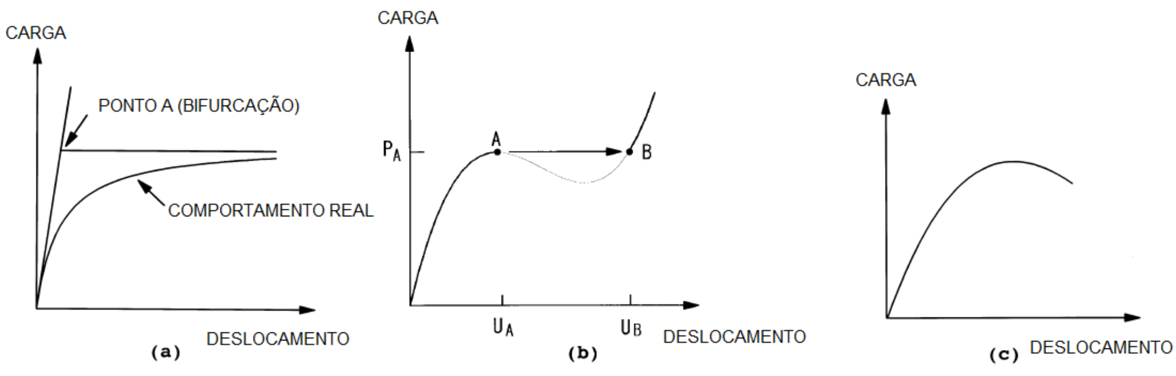

Figura 2.10 - Comportamentos de instabilidade estrutural (Yamaguchi, 1999).

Na Fig. 2.10 (a) é apresentado um diagrama carga × deslocamento para o fenômeno de instabilidade de bifurcação: O ponto A é onde ocorre a bifurcação. Na realidade, raramente ocorre um comportamento do tipo da bifurcação, isso ocorre devido a imperfeições, tais como a curvatura inicial de um membro e a excentricidade da carga. Em vez disso, ocorre um comportamento mais parecido com a situação real indicada na Fig. 2.10 (a). Porém, a carga de bifurcação ainda é uma medida importante em relação a estabilidade estrutural visto que a maioria das instabilidades de uma coluna e uma placa são de fato desta classe. Em muitos casos, podemos avaliar o ponto de bifurcação por meio da análise de flambagem linear.

Em algumas estruturas, observa-se que o deslocamento aumenta abruptamente em um determinado nível de carga. Isto pode ser representado na Fig. 2.10 (b); ocorre um aumento abrupto de deslocamento de U_A até U_B em um mesmo nível de carga P_A, como ilustrado pela seta. O fenômeno é chamado de ruptura. O caminho de equilíbrio da Fig. 2.10 (b) é típico de estruturas do tipo casca, incluindo arcos rasos, e é detectável apenas por meio da análise de deslocamento finito.

O outro fenômeno de instabilidade é o amolecimento. Como ilustra a Fig. 2.10 (c), existe um pico na capacidade de transporte de carga, além do qual a resistência estrutural deteriora. Costumamos observar este fenômeno quando a estrutura começa a escoar. Para calcular o caminho de equilíbrio associado, precisamos recorrer a análise estrutural não-linear.

Uma vez que a análise não linear é complicada e dispendiosa, as informações do limite de estabilidade e resistência final, na prática, são deduzidas a partir da carga de bifurcação, utilizando a análise linear de flambagem (Yamaguchi, 1999).

2.3 TEORIA DA FLAMBAGEM DE PLACAS

De acordo com Åkesson (2007) e Okumoto et al. (2009), flambagem é um fenômeno de instabilidade que pode ocorrer quando uma placa fina - plana ou curva - é submetida a um esforço de compressão axial. Em um determinado nível de carga crítica a placa apresenta um deslocamento súbito na direção transversal ao plano de ação da força. A força de compressão pode não necessariamente se originar de compressão axial pura, podendo também ser gerada por um momento de flexão, por cargas locais concentradas de cisalhamento, ou por uma combinação entre estes.

Se a placa for considerada grossa, sua capacidade de carga é regulada pela tensão de escoamento do material, em vez de pela carga de flambagem. Se em vez disso, a placa for fina, a carga de flambagem é regulada por sua esbeltez.

Considere-se o elemento com carregamento axial exibido na Fig. 2.11 (largura *b*, comprimento *a* e espessura *t*), tendo apoio nas bordas com carregamento e livre nas bordas sem carregamento.

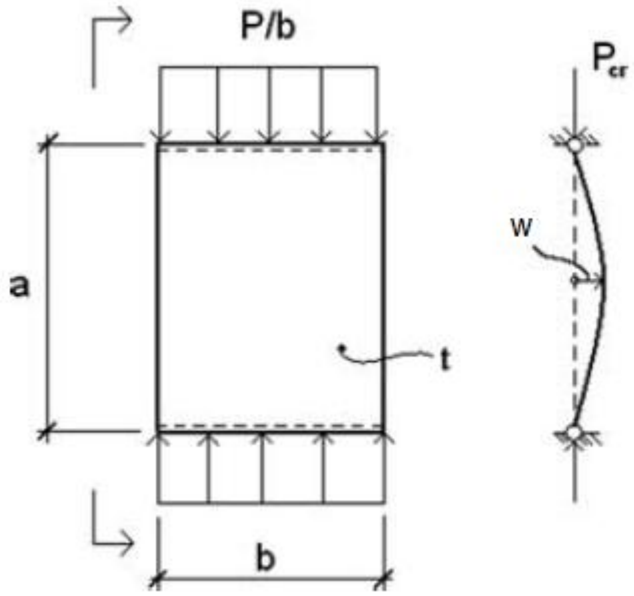

Figura 2.11 - Placa carregada axialmente (Åkesson, 2007).

Quando a carga atinge um determinado valor crítico, expresso como P_{cr} ou σ_{cr}, a estrutura entra em colapso, conforme exemplificado na Fig. 2.12:

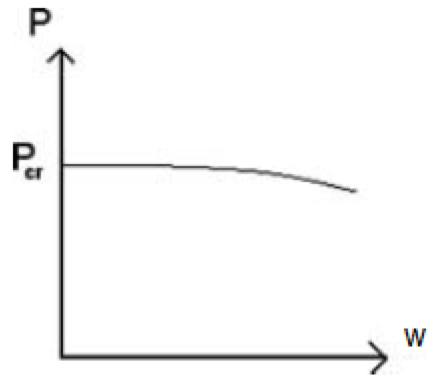

Figura 2.12 - Curva carga × deslocamento para uma placa carregada axialmente (Åkesson, 2007).

Para qualquer valor de carga axial abaixo deste valor crítico, é possível aplicar uma força adicional no sentido transversal ao plano, sem a ocorrência de deformação. Quanto maior a proximidade entre o valor da carga axial e o valor da carga crítica de flambagem, menor se tornará a capacidade de suportar essa carga horizontal adicional.
Exatamente na carga crítica, essa capacidade se torna zero e a estrutura é capaz de absorver simplesmente a carga axial (Åkesson, 2007).
De acordo com a teoria de Euler, a carga crítica para uma coluna é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2} \frac{1}{(1-\nu^2)} \tag{2.60}$$

Na Equação (2.60), P_{cr} é a carga crítica de flambagem (carregamento axial), π é uma constante matemática, I é o segundo momento de área e a é o comprimento da placa.

Esta equação é ajustada para as placas em função da largura relativamente grande em relação ao comprimento do elemento analisado. Este ajuste é feito com o quociente de $\frac{1}{(1-\nu^2)}$, e isto se deve às deformações elásticas livres na direção transversal na parte central, em relação à restrição nas extremidades carregadas.
O próximo passo é a transformação da carga crítica (P_{cr}) em uma tensão crítica de flambagem equivalente (σ_{cr}), com a ajuda da equação para o momento de inércia da placa:

$$I = \frac{bt^3}{12} \tag{2.61}$$

Na Equação (2.61), b é a largura da placa.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{bt} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\dfrac{a}{t}\right)^2} \tag{2.62}$$

Na Equação (2.62), σ_{cr} é a tensão crítica de flambagem.

De acordo com Åkesson (2007) e Okumoto et al. (2009), a equação da tensão crítica de flambagem para a placa tem um fator *k*, denominado coeficiente de flambagem, e um índice de esbeltez, definido como o quociente de *b*/*t*.

É muito importante lembrar que o comprimento de uma placa não é o que rege a tensão crítica de flambagem. A largura *b* é o principal parâmetro que rege a tensão crítica de flambagem de uma placa.

Por definição, uma coluna é suportada apenas nas suas extremidades carregadas, enquanto uma placa apresenta suporte em três arestas, ou mais, e é este fato que faz uma chapa apresentar um comportamento diferente ao de uma coluna quando em flambagem.

As placas tem uma capacidade para desenvolver um campo de tensão na direção transversal em relação à direção de carga após a ocorrência da flambagem, permitindo uma capacidade de carga adicional na assim chamada faixa de pós-crítico ou pós-flambagem.

A equação para a tensão crítica de flambagem de uma placa pode ser formulada analisando-se primeiramente a equação diferencial para uma placa com carregamento na direção transversal ao plano, como mostrado na Fig. 2.13:

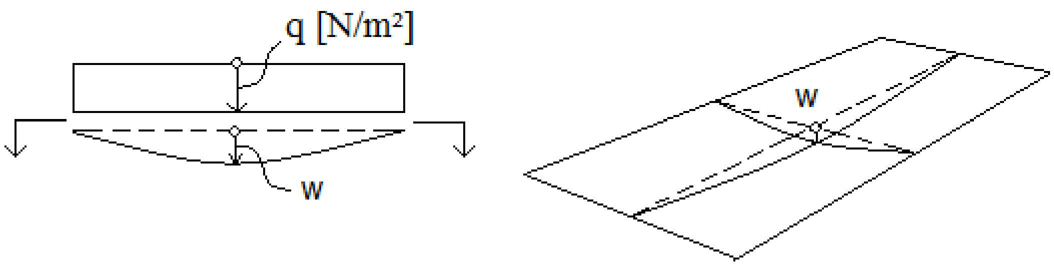

Figura 2.13 - Placa carregada na direção transversal com uma carga uniformemente distribuída (Åkesson, 2007).

$$D\left(\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}\right)=q \qquad (2.63)$$

Na Equação (2.63), w é a deflexão fora do plano e q é a carga uniformemente distribuída.

A Equação (2.63) apresenta a relação entre a deformação lateral, fora do plano e o carregamento transversal q.

A rigidez de flexão da placa D, considerando a placa com carregamento axial no plano é dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.64}$$

Considerando agora uma placa apenas com carregamento axial, conforme a Fig. 2.14:

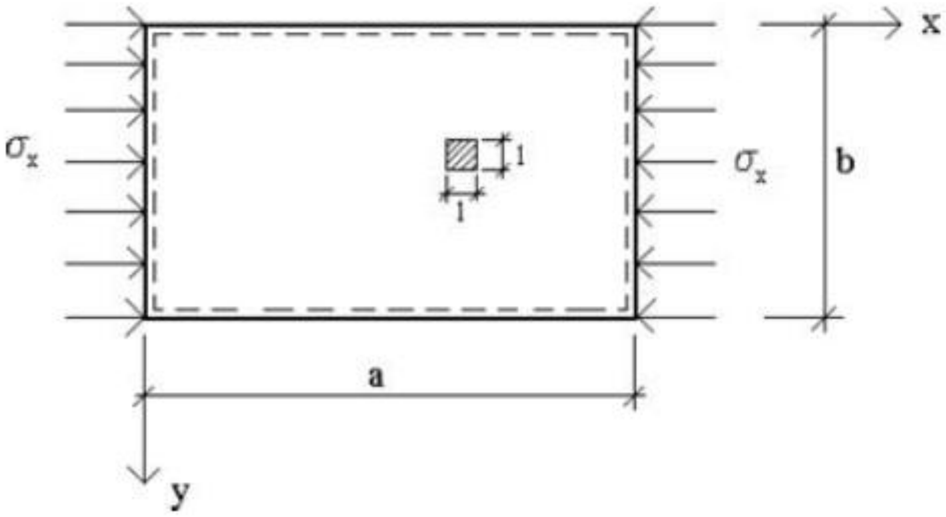

Figura 2.14 - Placa carregada axialmente com uma carga uniformemente distribuída nas arestas (Åkesson, 2007).

A Figura 2.15 mostra o equilíbrio de um elemento pequeno (com d_x = d_y = 1) em um estado defletido, axialmente carregado com uma força normal por unidade de largura, $\sigma_x \cdot t$ [N/m].

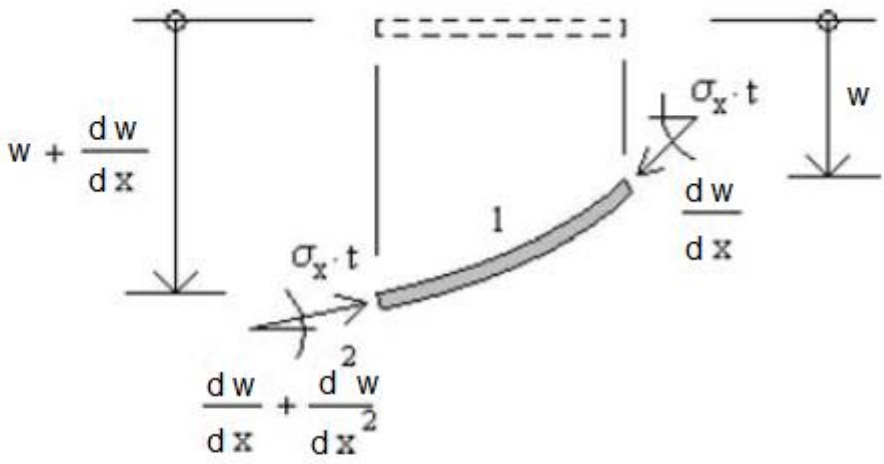

Figura 2.15 - Estado de deflexão de um pequeno elemento carregado axialmente (Åkesson, 2007).

Este pequeno elemento não está submetido a carga na direção transversal, ou seja, q = 0 quando comparado com a Eq. (2.63). Para forças normais inferiores a carga crítica de flambagem, é necessária a presença de uma carga adicional transversal para manter a placa numa forma deformada, no entanto, esta deflexão deixa de ocorrer assim que esta carga adicional é removida. Em determinado nível da carga axial ($\sigma_x = \sigma_{cr}$), a força transversal devido à curvatura está em equilíbrio exato com a força de "rebatimento". Este valor exato da força normal é definido como o valor crítico em relação à flambagem da placa (Okumoto, 2009).

A equação diferencial para uma placa carregada axialmente é dada por:

$$D\left(\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}\right)=-\sigma_{cr}t\frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.65)$$

Assumindo uma onda senoidal, tanto no sentido longitudinal e transversal, a equação geral para a solução desta equação é:

$$w=A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (2.66)$$

Na Equação (2.66), A é uma constante, $\sin$ é o seno trigonométrico, m é o número de meias-ondas senoidais (direção longitudinal), e n é o número de meias-ondas senoidais (direção transversal).

Para $n = 1$ e $m = 2$, o modo de curvatura se assemelha ao mostrado na Fig. 2.16:

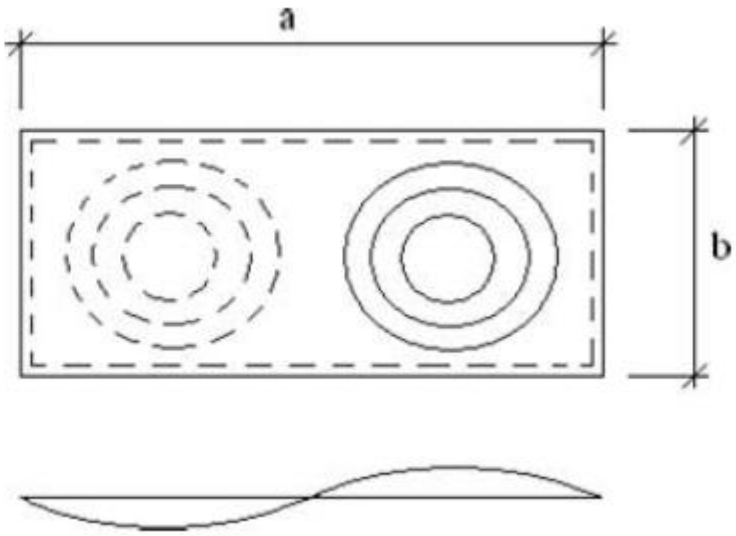

Figura 2.16 - Modo de flambagem de uma placa retangular com relação $a/b = 2$ (Åkesson, 2007).

Utiliza-se a equação geral para a solução da deformação fora do plano (Eq. 2.66), a fim de encontrar o valor da tensão crítica de flambagem, σ_{cr}:

$$\frac{dw}{dx} = A\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.67}$$

Na Equação (2.67), $\cos$ é o cosseno trigonométrico.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -A\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.68}$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = -A\frac{m^3\pi^3}{a^3}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.69}$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} = A\frac{m^4\pi^4}{a^4}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.70}$$

$$\frac{d^3w}{dx^2dy} = -A\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{2.71}$$

$$\frac{d^4w}{dx^2dy^2} = A\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.72}$$

$$\frac{d^4w}{dy^4} = A\sin\frac{m\pi x}{a}\frac{n^4\pi^4}{b^4}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.73}$$

Substituindo as Eqs. (2.70), (2.72), (2.73) e (2.68) na Eq. (2.65) resulta:

$$D\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} + 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^4\pi^4}{b^4}\right) = \sigma_{cr}t\frac{m^2\pi^2}{a^2} \tag{2.74}$$

$$\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = \sigma_{cr}t\frac{m^2\pi^2}{a^2} \tag{2.75}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2Da^2}{tm^2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \tag{2.76}$$

O valor mais baixo de σ_{cr} é obtido para n = 1, ou seja, quando há apenas uma meia-onda senoidal na direção transversal:

$$\begin{aligned}\sigma_{cr} &= \frac{\pi^2Da^2}{tm^2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = \frac{\pi^2D}{t}\frac{a^2}{m^2}\left(\frac{m^4}{a^4} + 2\frac{m^2}{a^2b^2} + \frac{1}{b^4}\right) \\ &= \frac{\pi^2D}{t}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{a^2}{m^2}\frac{1}{b^4}\right) = \frac{\pi^2D}{t}\left(\frac{m^2b^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{m^2b^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2D}{t}\frac{1}{b^2}\left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb}\right)^2 = k\frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2}\end{aligned} \tag{2.77}$$

Na Equação (2.77), k é o coeficiente de flambagem.

O coeficiente de flambagem *k* é definido por:

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \qquad (2.78)$$

De acordo com Åkesson (2007) e Okumoto (2009), o coeficiente de flambagem *k* é uma função da razão de aspecto de um painel *a*/*b*, e do número de meias-ondas senoidais *m* na direção longitudinal, isto é, na direção de carregamento. Este coeficiente tem um valor mínimo de 4,0 para um dado valor de *m* e o mesmo número para o quociente entre *a*/*b*, conforme demonstrado na Fig. 2.17:

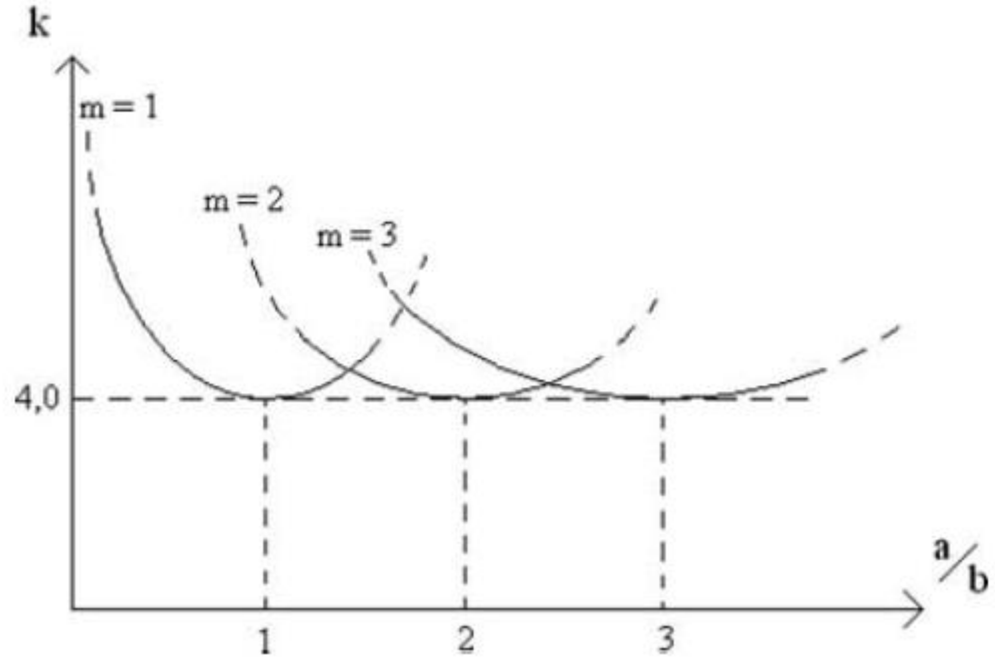

Figura 2.17 - Coeficiente de flambagem (*k*) como função da relação (*a*/*b*) da placa para alguns números de meias-ondas sinoidais na direção longitudinal (*m*) (Åkesson, 2007).

Quanto a uma placa retangular, tendo uma relação de aspecto de painel *a*/*b* = 3, o modo de curvatura que resulta no menor valor da tensão crítica de flambagem (com *k* = 4,0) é o caso em que o número de meias-ondas senoidais de flambagem na direção longitudinal divide a placa em três quadrados, possuindo uma curvatura igualmente grande em cada um (isto é, m = 3) como exposto na Fig. 2.18:

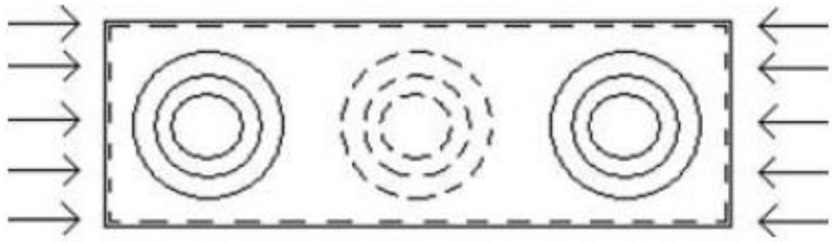

Figura 2.18 - Modo de flambagem de uma placa retangular com relação a/b = 3 (Åkesson, 2007).

Um número maior ou menor de meias-ondas requer mais energia e, portanto, um maior valor de tensão crítica de flambagem ou até mesmo um valor mais alto do coeficiente de flambagem k. Independentemente do tamanho da placa, os projetos adotam um valor assintótico para o coeficiente de flambagem (k = 4,0 para todos os casos) para que os elementos estruturais estejam em segurança.

Em comparação com uma coluna, a tensão crítica de flambagem para uma placa não diminui à medida que aumenta o comprimento da placa, em vez disso, é a largura b que governa a magnitude da tensão.

Dado um valor fixo para a largura b (e uma razão de aspecto do painel a/b = 1), a diferença de tensão crítica de flambagem entre uma placa e uma barra (com as mesmas dimensões) é igual a 4, sendo assim, igual ao valor do coeficiente de flambagem, no primeiro caso.

Esta diferença cresce à medida que aumenta o comprimento a (a tensão crítica de flambagem da placa será constante, no entanto, o suporte para a mesma irá diminuir). Se o comprimento a for mantido constante, e a largura b for aumentada gradualmente, a diferença diminui gradativamente. Isto se deve ao fato de que a curvatura no sentido transversal é muito pequena em placas consideravelmente largas, pois a parte central pode ser comparada com um suporte redutor da curvatura.

Algumas situações requerem a utilização de placas sem apoios simples, podendo ser fixadas ou ainda absolutamente livres. A distribuição de tensões pode também variar, não se manifestando de maneira uniformemente distribuída. Tanto as condições de contorno como a distribuição de tensões, afetam o valor do coeficiente de flambagem *k* (Åkesson, 2007).

Nas Figuras 2.19. 2.20 e 2.21, o valor mínimo do coeficiente de flambagem é dado para diferentes condições de contorno e de carga.

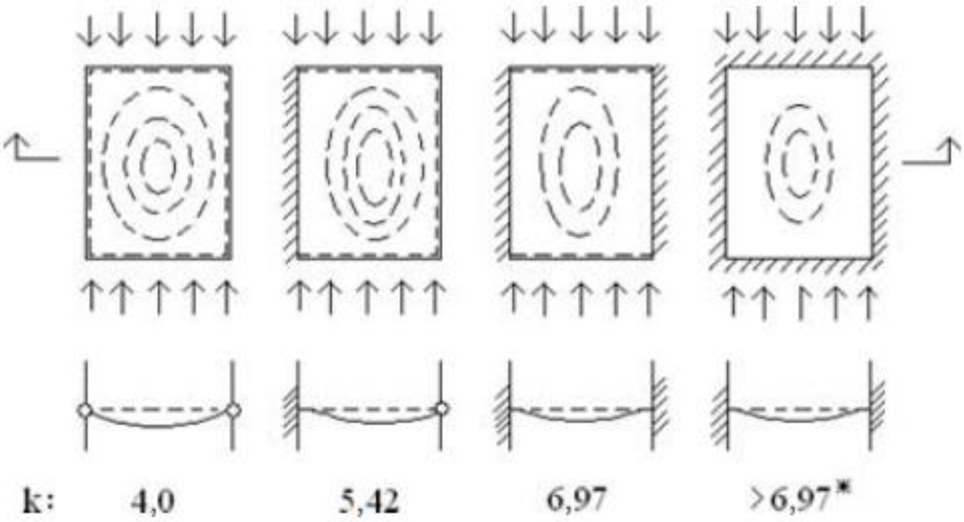

Figura 2.19 - Coeficiente de flambagem como função de diferentes condições de vínculos externos em placas com suporte nas 4 arestas (Åkesson, 2007).

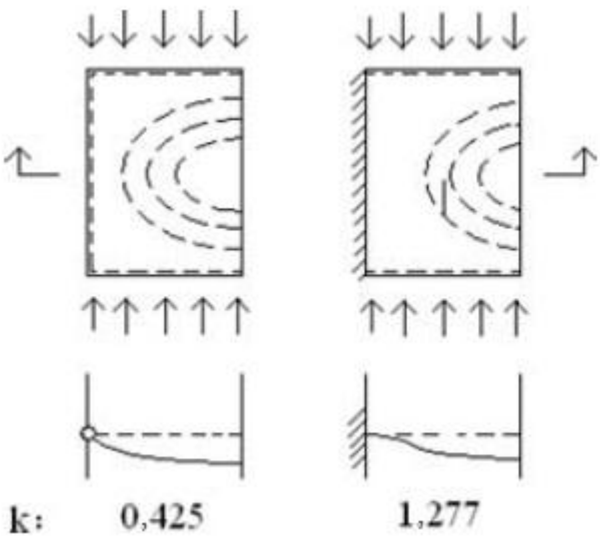

Figura 2.20 - Coeficiente de flambagem como função de diferentes condições de vínculos externos em placas com suporte em 3 arestas (Åkesson, 2007).

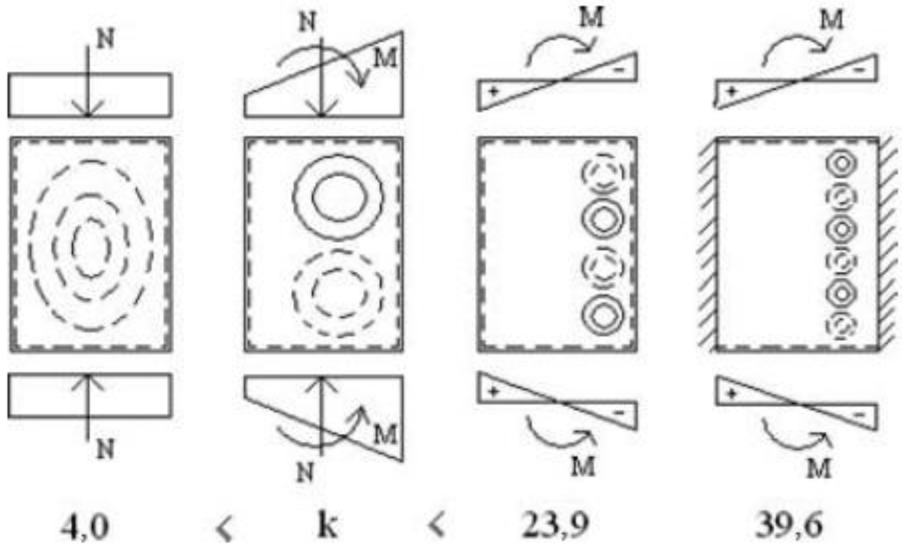

Figura 2.21 - Coeficiente de flambagem como função de diferentes condições de carregamento em placas com suporte nas 4 arestas (Åkesson, 2007).

Em uma placa submetida a cisalhamento, o coeficiente de flambagem, *kτ*, varia de acordo com o valor da razão de aspecto da placa, *a*/*b*, e é dado por:

$$\tau_{cr} = k_{\tau} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} \tag{2.79}$$

Na Equação (2.79), τ_{cr} é a tensão crítica de flambagem sob cisalhamento e k_{τ} é o coeficiente de flambagem (carga cisalhante)

$$k_{\tau} = 5,34 + \frac{4}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \qquad \left[\frac{a}{b} \geq 1\right] \tag{2.80}$$

$$k_{\tau} = 4 + \frac{5,34}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \qquad \left[\frac{a}{b} \leq 1\right] \tag{2.81}$$

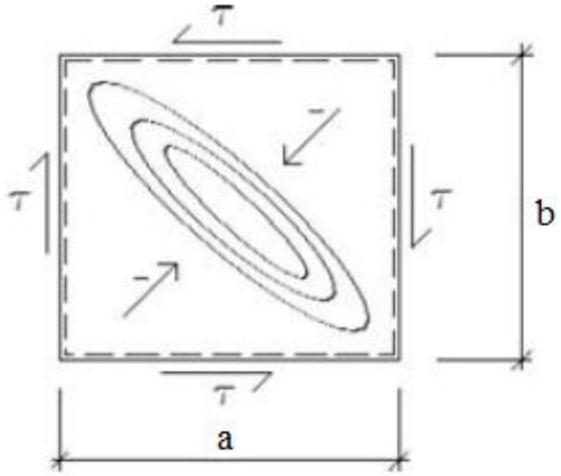

Figura 2.22 - Placa submetida a cisalhamento (Åkesson, 2007).

Nesse tipo de carregamento, nota-se que as forças de cisalhamento em um elemento submetido à flexão são também acompanhadas de momentos de flexão, que devem ser levados em consideração.

Como já foi mencionado antes, as placas possuem capacidade de resistirem a algum esforço após a carga crítica ser atingida. Esta força adicional é mostrada no diagrama carga x deslocamento na Fig. 2.23:

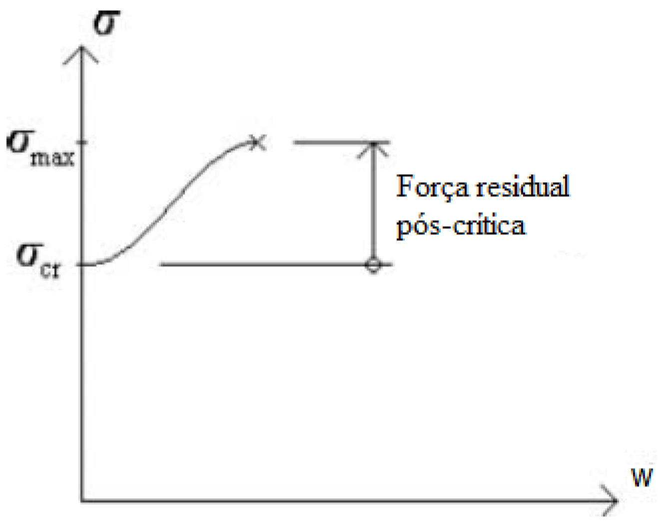

Figura 2.23 - Diagrama tensão × deformação no estado pós-crítico (Åkesson, 2007).

Como pode ser observado no gráfico, a placa não entra em colapso no chamado ponto de bifurcação, como ocorre com a coluna de Euler. Em vez disso, a placa é capaz de suportar uma carga adicional após a flambagem, devido à formação de uma membrana que estabiliza a deformação através de uma tensão transversal. Quando a parte central da placa se deforma, a mesma perde a maior parte da sua rigidez, e a carga é forçada a se concentrar em torno desta zona enfraquecida, contida nas partes mais rígidas em ambos os lados. Devido a esta redistribuição, uma membrana de tração transversal é formada (Åkesson, 2007). A Figura 2.24 exemplifica a redistribuição de tensão na placa em uma situação em que a carga crítica já foi atingida.

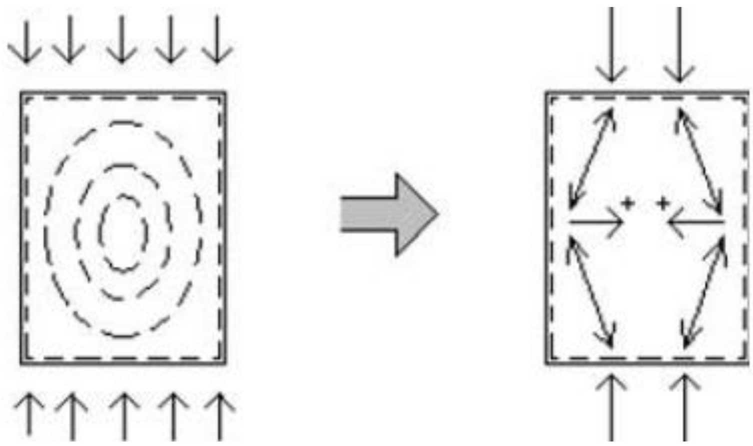

Figura 2.24 - Redistribuição da tensão no estado pós-crítico (Åkesson, 2007).

O comportamento de uma placa demonstra uma inerente indeterminação estática, o que permite a capacidade de redistribuição de carga após a flambagem ter ocorrido.
A capacidade máxima de carga redistribuída é regida pela deformação das zonas de borda mais rígidas que já atingiram o escoamento, como foi sugerido por von Kármán em 1932.
Considerando uma placa na faixa pós-crítica, conforme a Fig. 2.25, onde as zonas de borda mais rígidas determinam uma largura efetiva:

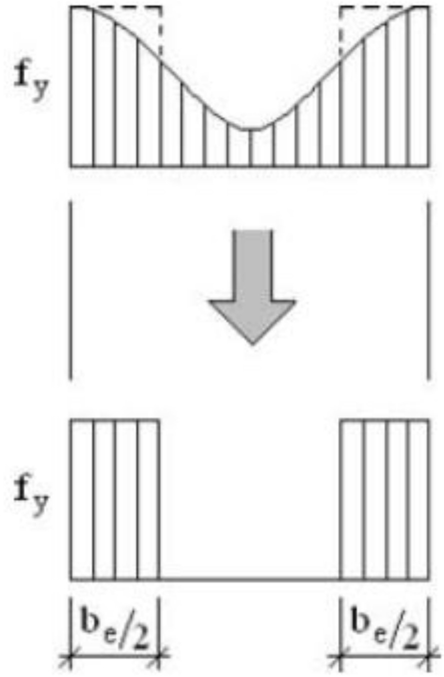

Figura 2.25 - Modelo de Von Kármán para a máxima capacidade de carregamento (Åkesson, 2007).

Para se obter a capacidade máxima de carga P_{max}, e a largura efetiva, utiliza-se a equação para a tensão crítica de flambagem e iguala-se à tensão de escoamento:

$$\sigma_{cr} = f_y = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b_e}{t}\right)^2} \qquad (2.82)$$

Na Equação (2.82), f_y é a tensão de escoamento e b_e é a largura efetiva.

$$b_e = \sqrt{\frac{k\pi^2}{12(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{E}{f_y}}\ t = 1,90\sqrt{\frac{E}{f_y}}\ t \qquad (2.83)$$

$$P_{\max} = f_y b_e t = 1,90\sqrt{E f_y}\ t^2 \qquad (2.84)$$

Na Equação (2.84), $P_{\max}$ é a capacidade máxima de carga.

Desse modo, é visível que a largura efetiva é diretamente proporcional à raiz do módulo de Young *E*, e proporcional à espessura *t*. Isto é evidente, uma vez que estes dois parâmetros são diretamente relacionados com a rigidez das zonas de borda e, por conseguinte, também controlam a capacidade de transporte de carga anterior à flambagem. O que não é óbvio, é que a largura efetiva é inversamente proporcional à raiz do limite de elasticidade de f_y. Mas se for considerado um aumento do limite de elasticidade, a largura efetiva deve diminuir a fim de compensar este aumento na resistência.

O que é ainda mais surpreendente é que a largura efetiva não é dependente da largura original da placas. Se a largura de uma placa for aumentada, a capacidade máxima de suporte de carga permanece a mesma, ou seja, a largura efetiva permaneceria constante, de acordo com a hipótese de von Kármán, conforme a Fig. 2.26:

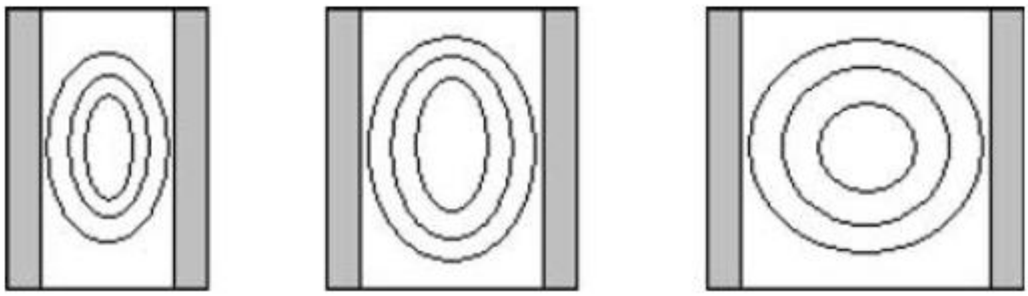

Figura 2.26 - Largura efetiva constante para diferentes larguras de placas (Åkesson, 2007).

Analisando as placas da Fig. 2.26, com diferentes larguras, vê-se que, quanto mais a largura aumenta, maior torna-se a curvatura, e, por conseguinte, também a largura efetiva permanece constante. Por si só, a tensão crítica de flambagem diminui com o aumento da largura (σ_{cr} com o inverso da largura ao quadrado, e P_{cr} com o inverso da largura), no entanto, a capacidade máxima de suporte de carga permanece constante, como mostrado na Fig. 2.27:

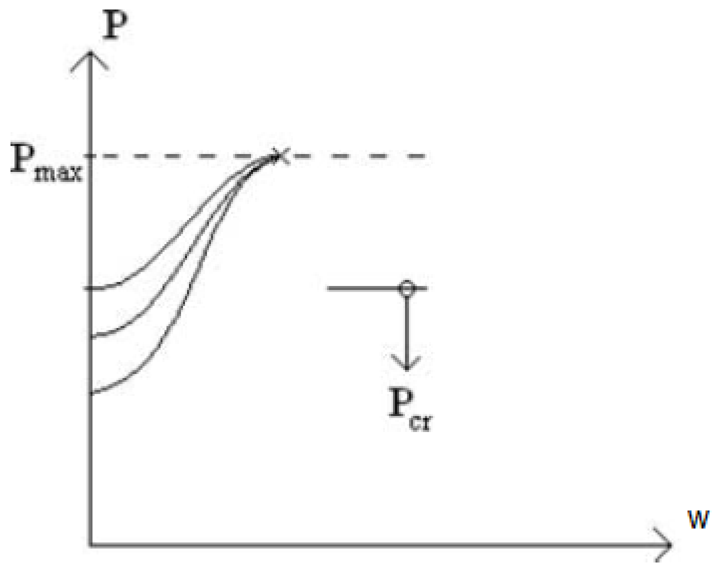

Figura 2.27 - Capacidade máxima de carregamento constante para diferentes larguras de placas (Åkesson, 2007).

Há também um desperdício de material, quando se escolhe uma placa mais larga do que o necessário. A hipótese que foi apresentada por Von Karman demonstrou uma boa concordância com os resultados de testes sobre placas contendo uma grande proporção de esbeltez *b*/*t*.

Entretanto, cabe destacar que os estudos desenvolvidos no presente trabalho estão relacionados somente à flambagem elástica, não considerando o comportamento pós-flambagem das placas.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF), ou do inglês Finite Element Method (FEM), é uma técnica computacional para obtenção de soluções aproximadas para uma grande variedade de problemas de engenharia do "mundo real", possuindo domínios complexos submetidos a condições gerais de contorno. Um fenômeno físico geralmente ocorre em um meio contínuo da matéria (sólido, líquido ou gás). Esse meio contínuo com um limite conhecido é chamado de domínio. A base do MEF depende da decomposição do domínio em um número finito de subdomínios (elementos) para os quais a solução aproximada sistemática é construída pela aplicação dos métodos residuais variacional ou ponderado (Madenci e Guven, 2006).

Tal método vem sendo largamente utilizado para solucionar problemas de engenharia, tendo como principais áreas a mecânica dos sólidos, a transferência de calor, a mecânica dos fluidos, a acústica, a eletricidade e o magnetismo.

Atualmente, existem inúmeros softwares que utilizam o método dos elementos finitos na resolução desses problemas em conjunto com uma interface projetada para ser o mais intuitiva possível, tornando fácil a sua utilização.

De acordo com Burnett (1987), toda a análise se dá seguindo uma determinada ordem. Inicialmente, o analista vislumbra as resoluções das equações que determinam o fenômeno a ser estudado. Para isso ele lança mão de um conjunto composto pelas equações governantes, pelo sistema, pelo domínio e pelas condições de carregamento. Geralmente o sistema é um elemento físico composto por vários materiais como sólidos, líquidos, gases, plasmas ou combinações destes. O domínio representa a porção do espaço ocupada pelo sistema. As equações governantes podem ser equações diferenciais que expressem a conservação ou o balanço de propriedades físicas do sistema, como massa, energia ou momento. As condições de carregamento são agentes externos que podem ser forças, temperaturas, correntes, campos, entre outros.

A implementação do método se dá através da divisão do domínio, que deve ser contínuo, em pequenos elementos, denominados elementos finitos. Cada elemento se conecta ao elemento vizinho através dos pontos nodais. A Figura 3.1 exemplifica a divisão do domínio contínuo em elementos finitos.

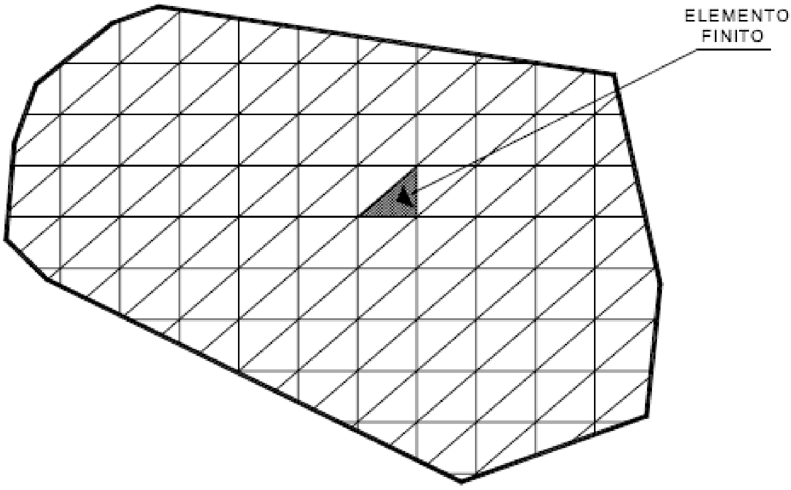

Figura 3.1 – Divisão do domínio (Vanalli, 2004).

Ao longo de todo esse trabalho, utilizou-se o software ANSYS®, que é baseado no método dos elementos finitos, para simular numericamente placas perfuradas sob flambagem. O ANSYS® é um programa de simulação largamente utilizado na engenharia devido a sua versatilidade. O mesmo possui pacotes na área de mecânica dos sólidos, dinâmica dos fluidos, transferência de calor, eletricidade e magnetismo.

3.2 ELEMENTOS E GRAUS DE LIBERDADE

Os elementos comumente utilizados podem possuir uma, duas ou três dimensões e serem lineares ou quadráticos. As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 apresentam os principais elementos utilizados na divisão do domínio.

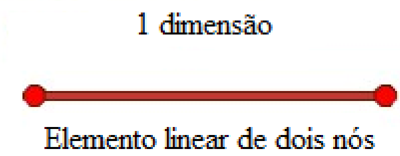

Figura 3.2 – Elemento unidimensional (Adaptado de http://www.cimne.com/caltep/caract/elementos.jpg, 2013).

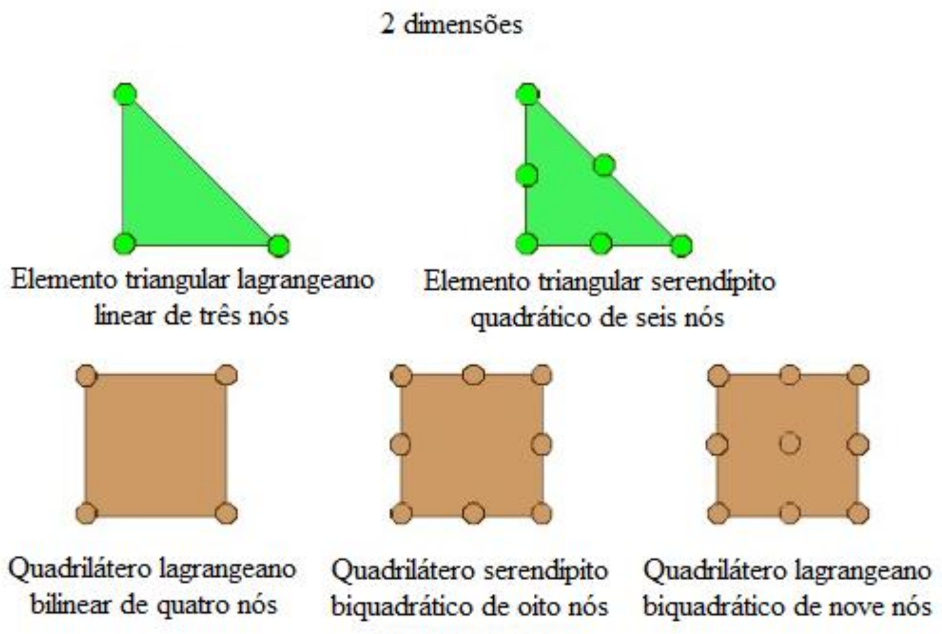

Figura 3.3 – Elementos bidimensionais (Adaptado de http://www.cimne.com/caltep/caract/elementos.jpg, 2013).

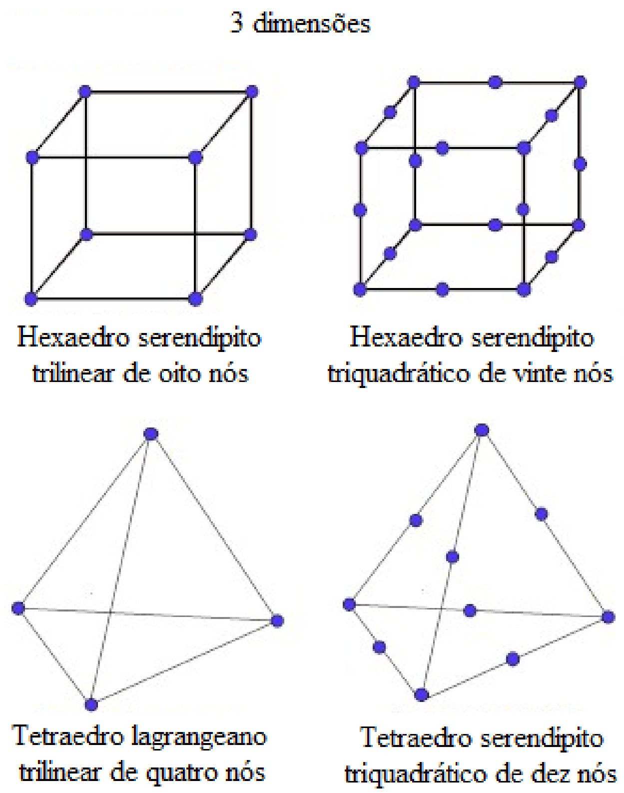

Figura 3.4 – Elementos tridimensionais (Adaptado de http://www.cimne.com/caltep/caract/elementos.jpg, 2013).

Porém, na maioria das vezes são utilizados elementos planos, ou seja, uma dimensão é pequena em comparação com as outras duas. Tais elementos são unidos uns aos outros nos cantos de elementos, sendo esses pontos de união denominados nós. Em alguns casos, utilizam-se também nós secundários localizados nas bordas dos elementos. Os graus de liberdade são atribuídos ao elemento na região dos nós. Em um elemento de corpo em forma de membrana, por exemplo, têm-se dois deslocamentos ortogonais u_x e u_y. Em um elemento de uma placa sob flexão, utilizam-se três graus de liberdade por nó: um deslocamento w, uma rotação ψ_x sobre o eixo x e uma rotação ψ_y sobre o eixo y (Blaauwendraad, 2010). A Figura 3.5 mostra os graus de liberdade considerados nos dois elementos citados anteriormente.

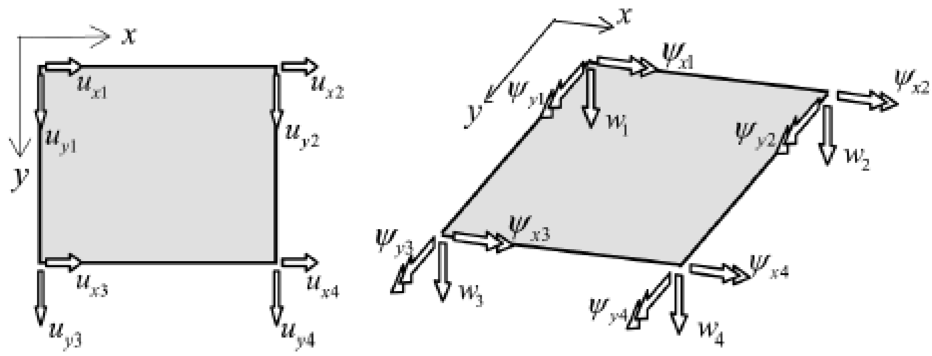

Figura 3.5 – Graus de liberdade em elementos de membrana e placa fletida (Blaauwendraad, 2010).

De acordo com Blaauwendraad (2010), os elementos em forma de placa podem ser conectados espacialmente. Na maioria das estruturas é necessário utilizar elementos que se comportem tanto como membrana quanto como uma placa sob flexão. Em função disso, geralmente são utilizados elementos com seis graus de liberdade em cada nó, sendo chamados de elementos de casca. Os softwares comerciais disponíveis geralmente oferecem um certo número de formas de elementos para ser utilizado. A Figura 3.6 mostra elementos retangulares, triangulares, quadrilaterais que podem ser inseridos no modelo.

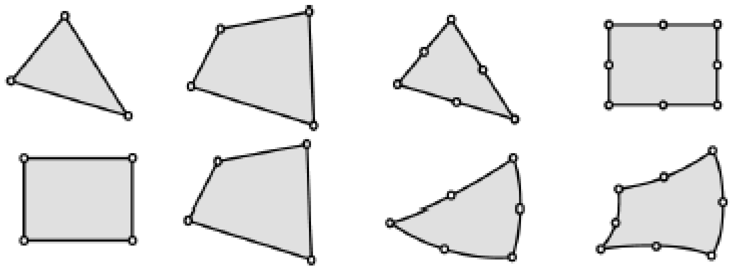

Figura 3.6 – Geometria dos elementos finitos utilizados em softwares comerciais (Blaauwendraad, 2010).

Caso seja inserido um nó intermediário em uma borda do elemento, essa borda pode possuir uma forma curvada. Tais elementos são chamados de elementos isoparamétricos.

Para realizar uma análise da estrutura, a mesma é dividida em elementos. A Figura 3.7 mostra dois exemplos da divisão de uma estrutura em elementos.

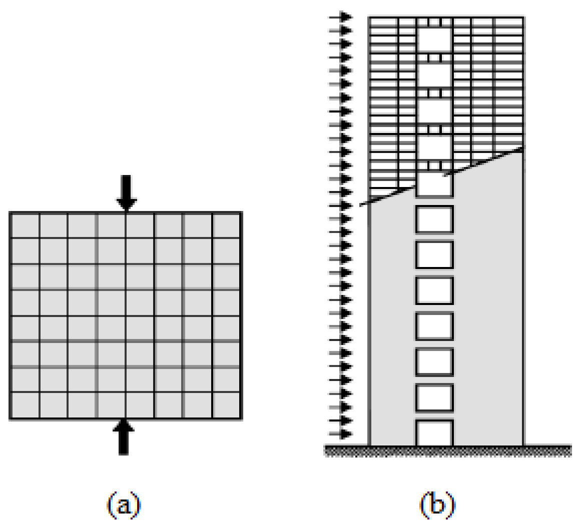

Figura 3.7 – Divisão de estruturas em elementos finitos (Blaauwendraad, 2010).

A Figura 3.7 (a) exemplifica o teste brasileiro para determinar a resistência à compressão de um cilindro de concreto. A Figura 3.7 (b) mostra um exemplo de parede de cisalhamento com uma linha vertical de aberturas que podem ocorrer em um prédio alto. Em ambos os exemplos, utilizou-se uma malha grosseira. Quanto maior o nível de refino da malha, maior é a exatidão dos resultados, porém cresce também o esforço computacional necessário para a obtenção do resultado. Geralmente o próprio software faz uma malha adequada, com base nos tipos de elementos disponíveis. A Figura 3.8 mostra dois exemplos de estruturas espaciais decompostas em elementos finitos.

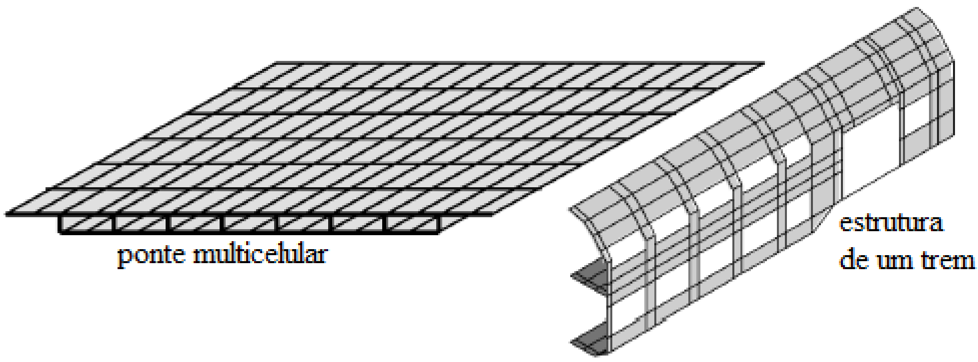

Figura 3.8 – Divisão de estruturas espaciais em elementos finitos (Blaauwendraad, 2010).

3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ E RESTRIÇÕES

De acordo com Burnett (1987) e Blaauwendraad (2010), os graus de liberdade de um nó são comuns a todos os elementos que se ligam a esse nó. Um elemento individual, por sua vez, partilha os graus de liberdade de nós diferentes. Estes graus de liberdade em conjunto formam o vetor de deslocamento do elemento (este pode também conter rotações). Uma força generalizada (que pode ser também um momento) é associada a cada grau de liberdade; estas forças em conjunto formam o vetor de força do elemento. A matriz de rigidez do elemento relaciona o vetor deslocamento do elemento ao vetor força do elemento. Para um elemento triangular de três nós denominados *i*, *j* e *k*, a matriz de rigidez tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{e,i} \\ F_{e,j} \\ F_{e,k} \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

Na Equação (3.1), K são os termos da matriz de rigidez do elemento triangular, u_i é o vetor que representa os graus de liberdade do elemento no nó *i*, u_j é o vetor que representa os graus de liberdade do elemento no nó *j*, u_k é o vetor que representa os graus de liberdade do elemento no nó *k*, $F_{e,i}$ é o vetor que representa as forças atuantes no elemento no nó *i*, $F_{e,j}$ é o vetor que representa as forças atuantes no elemento no nó *j*, $F_{e,k}$ é o vetor que representa as forças atuantes no elemento no nó *k*.

A matriz de rigidez governa o comportamento do elemento estrutural. A sua derivação baseia-se na aproximação do campo de deslocamento dentro do elemento. Quanto maior o grau de polinômios no campo, mais precisa será a solução do elemento. Muitas vezes o desempenho de um elemento é melhor se o mesmo tiver mais graus de liberdade, porém isso não é uma garantia. A qualidade de um elemento é dependente de vários fatores, entre eles, o campo de deslocamento escolhido, a forma como as integrações numéricas são feitas, a compatibilidade entre os deslocamentos em elementos adjacentes, entre outros. Espera-se um melhor desempenho por parte de um elemento com nós intermediários nas bordas quando comparado a um elemento sem esses nós intermediários, porém isso não é regra.

Programadores costumam usar pontos de Gauss no processo de integração matemática para a construção de matrizes de rigidez do elemento. De acordo com Akin (2005) e Blaauwendraad (2010), os pontos de Gauss relacionam-se com integrais de polinômios sobre a área de um elemento. Gauss mostrou que é possível escrever integrais tais como somas ponderadas dos valores do polinômio de um certo número de pontos discretos. Os pontos não coincidem com os nós, mas situam-se no interior dos elementos a uma certa distância das bordas. A Figura 3.9 mostra retângulos com esquemas de dois por dois e de três por três pontos.

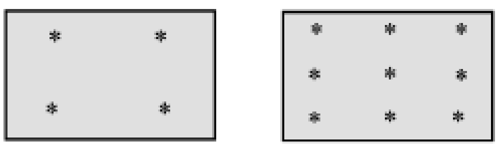

Figura 3.9 – Esquemas de pontos de Gauss (Blaauwendraad, 2010).

O sistema de equações do problema, com *N* pontos nodais é dado por:

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ . \\ . \\ F_N \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Na Equação (3.2), “.” são os termos da matriz de rigidez do elemento triangular, u_1 é o vetor que representa os graus de liberdade do nó 1, u_N é o vetor que representa os graus de liberdade do nó *N*, F_1 é o vetor que representa as forças atuantes no nó 1 e F_N é o vetor que representa as forças atuantes no nó *N*.

A matriz de rigidez global é um conjunto de matrizes de elementos individuais. O vetor do lado direito representa a carga a qual está submetida a estrutura. Esta carga é constituída por cargas pontuais nos nós. Quando o usuário insere uma carga distribuída, o programa irá substituí-lo por cargas pontuais estaticamente equivalentes. Com a alta velocidade dos computadores isso não é problema na prática, sendo possível a aplicação de malhas refinadas. O procedimento de montagem tem um significado físico: se *M* elementos se juntam em um nó *i*, então os *M* vetores de força do elemento $F_{e,i}$ juntos devem equilibrar a carga F_i aplicada naquele nó.

O conjunto de equações dado pela Eq. (3.2) não pode ser resolvido enquanto houver possibilidade de deslocamentos do corpo rígido, consequentemente, a matriz de rigidez global será singular. Deve-se então especificar limitações de deslocamento para impedir tal singularidade. Todos os softwares comerciais oferecem recursos para especificar suportes rígidos ou flexíveis. Se um suporte é rígido, o deslocamento correspondente nessa direção deve ser zero. Assim, perde-se um grau de liberdade. Portanto, a linha e coluna na equação de matriz global que correspondem a esse grau de liberdade devem ser omitidas. Se um suporte de mola for especificado em um nó, o programa irá adicionar a rigidez da mola para o termo da diagonal principal que corresponde ao grau de liberdade daquele ponto. Esta opção pode ser também usada para especificar um suporte rígido, introduzindo-se uma grande rigidez de mola. Alguns programas oferecem a escolha de um tipo de suporte em que apenas uma força de compressão pode ocorrer, tornando a análise não linear. A análise pode ser feita por uma análise linear elástica de uma forma iterativa. Começa-se incluindo todos os suportes e após a análise, libera-se os suportes com uma reação de tração e reinicia-se a análise. O processo iterativo é interrompido quando todas as reações de apoio são de compressão ou nulas (Blaauwendraad, 2010).

3.4 MODELO NUMÉRICO

A análise numérica foi desenvolvida através do software de elementos finitos ANSYS®. Em todas as simulações, foi utilizado o elemento SHELL93 de oito nós e integração reduzida. O elemento possui seis graus de liberdade em cada nó: três translações (u, v, w) e três rotações (Θ_x, Θ_y, Θ_z) (ANSYS User's Manual, 2005).

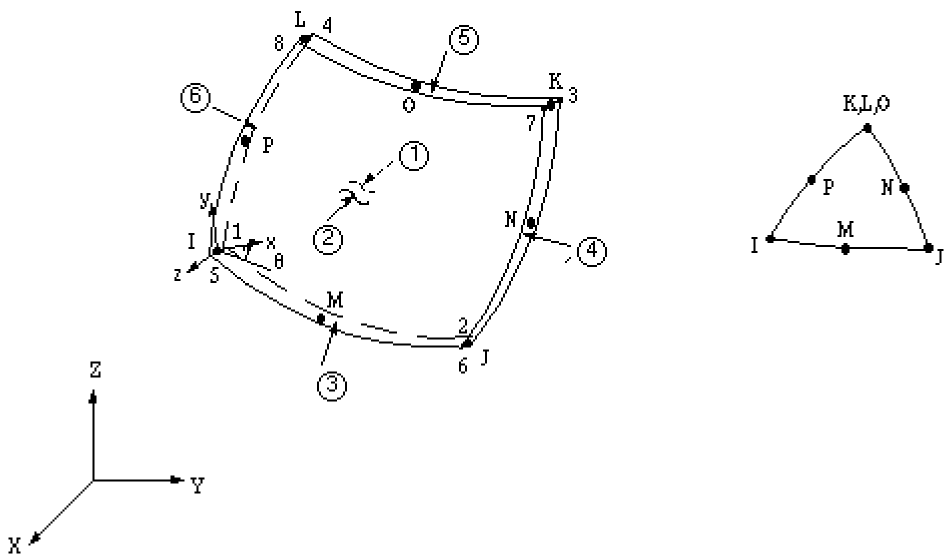

Figura 3.10 – Geometria do elemento SHELL93 (Adaptado de http://ans2.vm.stuba.sk/html/elem_55/graphics/ES4-302.gif, 2013).

Para o estudo numérico do fenômeno da flambagem foi adotada a análise elástica de autovalores. As equações de equilíbrio por elementos finitos para este tipo de análise envolvem a solução de equações algébricas homogêneas cujo autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado representa o modo primário de flambagem (Madenci e Guven, 2006).

A formulação utilizada na análise inclui tanto os termos lineares como os não-lineares. Assim, a matriz de rigidez total [K], é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações, [K_E], com uma outra matriz, [K_G], chamada matriz de rigidez geométrica. A matriz [K_G] depende não só da geometria, mas também do esforço interno existente no início do carregamento, {P_0}. Então, a matriz de rigidez total da placa para um nível de carga {P_0} pode ser escrita como (Przemieniecki, 1985):

$$[K]=[K_E]+[K_G] \tag{3.3}$$

Na Equação (3.3), $[K]$ é a matriz de rigidez total, $[K_E]$ é a matriz de rigidez convencional para pequenas deformações e $[K_G]$ é a matriz de rigidez geométrica.

Quando a carga atinge o nível de {P} = λ{P_0}, onde λ é um escalar, a matriz de rigidez pode ser definida como:

$$[K]=[K_E]+\lambda[K_G] \tag{3.4}$$

Na Equação (3.4), λ é um escalar.

As equações de equilíbrio governantes para a placa podem ser escritas como:

$$\left[[K_E]+\lambda[K_G]\right]\{U\}=\lambda\{P_0\} \tag{3.5}$$

Na Equação (3.5), $\{U\}$ é o vetor de deslocamento total e $\{P_0\}$ é o esforço interno existente no início do carregamento.

O vetor de deslocamento total pode, portanto, ser determinado por:

$$\{U\}=\left[[K_E]+\lambda[K_G]\right]^{-1}\lambda\{P_0\} \tag{3.6}$$

Na flambagem, a placa apresenta um grande crescimento nos deslocamentos sem crescimento da carga. Por definição matemática é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos {U} tendem a infinito quando:

$$\det\left[\left[K_E\right]+\lambda\left[K_G\right]\right]=0 \tag{3.7}$$

Na Equação (3.7), $\det$ é a função determinante.

A Equação (3.7) representa um problema de autovalores, que quando resolvido gera o menor autovalor, λ_1, que corresponde à carga crítica $\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\}$ em que ocorre flambagem. Além disso, o vetor de deslocamento associado $\{U\}$ define a forma do modo de flambagem. O problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos (ANSYS User's Manual, 2005).

3.5 VERIFICAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

Para a verificação do modelo computacional, a carga crítica de uma placa não perfurada foi numericamente avaliada e o resultado foi comparado com a solução analítica. A placa foi discretizada adotando um elemento triangular com lados de tamanho de 50,00 mm (H/20), gerando uma malha com 1814 elementos finitos (Fig. 3.11 (a)). Para tanto, foi considerada uma placa de aço com as características apresentadas na Tab. 3.1.

Tabela 3.1 - Características da placa utilizada na verificação do modelo numérico.

Característica	**Valor**
E	210,0 GPa
v	0,3
H	1,0 m
L	2,0 m
t	10,0 mm

O resultado numérico para a carga crítica de flambagem foi 755,30 kN/m, mostrando uma diferença de -0,51% em relação à solução analítica (P_{cr} = 759,20 kN/m). A Figura 3.11 (b) apresenta o modo de flambagem da placa não perfurada.

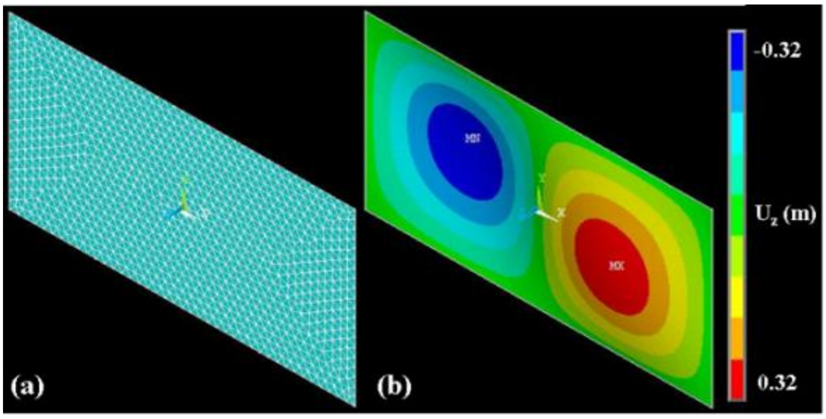

Figura 3.11 – Placa sem furo: (a) Malha de elementos finitos; (b) Forma flambada.

Percebe-se na Fig.3.11 (b) a formação de duas semi-ondas em sentido contrário, o que vai ao encontro do que foi relatado em outros estudos, como por exemplo em Åkesson (2007).

4. TEORIA CONSTRUCTAL

A Teoria Constructal foi proposta em 1997, por Adrian Bejan, como uma visualização mental de que os sistemas de fluxo animados ou inanimados seguem um princípio físico fundamental, que é a Lei Constructal. A Teoria Constructal se baseia em três princípios fundamentais para descrever como as formas geométricas são determinadas (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008 e Bejan e Zane, 2012):

1) A vida é fluxo: todos os sistemas de fluxo são sistemas vivos, tanto o animado quanto o inanimado.

2) Geração de design e sua evolução são um fenômeno da física (baseados em um princípio físico fundamental).

3) Os sistemas têm a tendência universal para evoluir em um determinado sentido no tempo.

A Lei Constructal é o primeiro princípio da física responsável por todo o projeto e evolução dos sistemas de fluxo. Ela sustenta que a forma e estrutura surgem para facilitar o fluxo. Os fenômenos que ocorrem espontaneamente na natureza refletem essa tendência. Eles permitem que os fluxos ocorram com mais facilidade. As gotas da chuva, por exemplo, se aglutinam e se movem juntas, gerando riachos, córregos e as bacias hidrográficas, permitindo que elas se movam mais facilmente (Reis e Gama, 2010).

Tal teoria proclama que a estrutura que proporciona maior facilidade de fluxo em sistemas que movimentam uma corrente de um ponto a uma área ou de uma área para um ponto é uma estrutura em forma de árvore. As descargas elétricas dos raios se dão em estruturas em forma de árvore, porque esta é a geometria adequada para mover uma corrente elétrica a partir de uma nuvem para um ponto na terra. Os sistemas do aparelho circulatório e nervoso geram estruturas semelhantes a uma árvore porque essa é a maneira mais fácil de promover o fluxo (Bejan e Zane, 2012).

Além disso, a teoria de Bejan define a direção do tempo de todos os fenômenos evolutivos. Ela afirma que os projetos devem evoluir, adquirindo configurações cada vez melhores para dar mais acesso para as correntes que fluem através deles. Define também, em termos de física, o que significa ser "forte", para "sobreviver", e para ser eficiente. Pode-se dizer através da Teoria Constructal que a geração de formas e evolução física são fenômenos macroscópicos que surgem naturalmente para fornecer condições de fluxo cada vez melhores. Essa evolução ocorre em todas as escalas. Cada componente de um fluxo do sistema, (riachos, árvores, ruas) evolui de maneira conjunta. Como esses elementos se fundem em estruturas cada vez maiores (bacias hidrográficas, florestas e redes de transportes), uma hierarquia emerge de tal forma que os componentes de tamanho variados trabalham juntos para que tudo flua mais facilmente. Isto é visto na forma de estrutura das redes neurais no cérebro, dos alvéolos no pulmão, o tamanho e a distribuição da vegetação na floresta e dos assentamentos humanos no mapa (Lorente e Bejan, 2010). A Figura 4.1 mostra a ramificação dos alvéolos pulmonares.

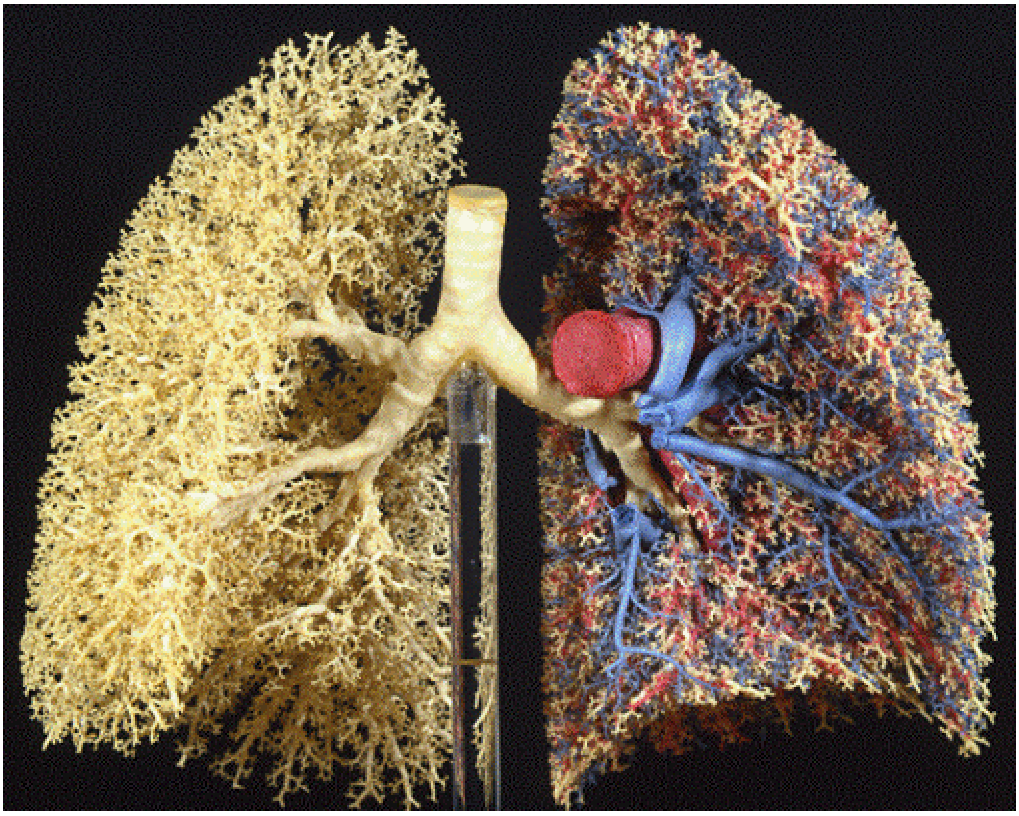

Figura 4.1 - Ramificação dos alvéolos pulmonares (Adaptado de http://celticawitch.files.wordpress.com/2012/09/fractal_lung.gif?w=545, 2013).

A Figura 4.2 mostra a ramificação de um rio.

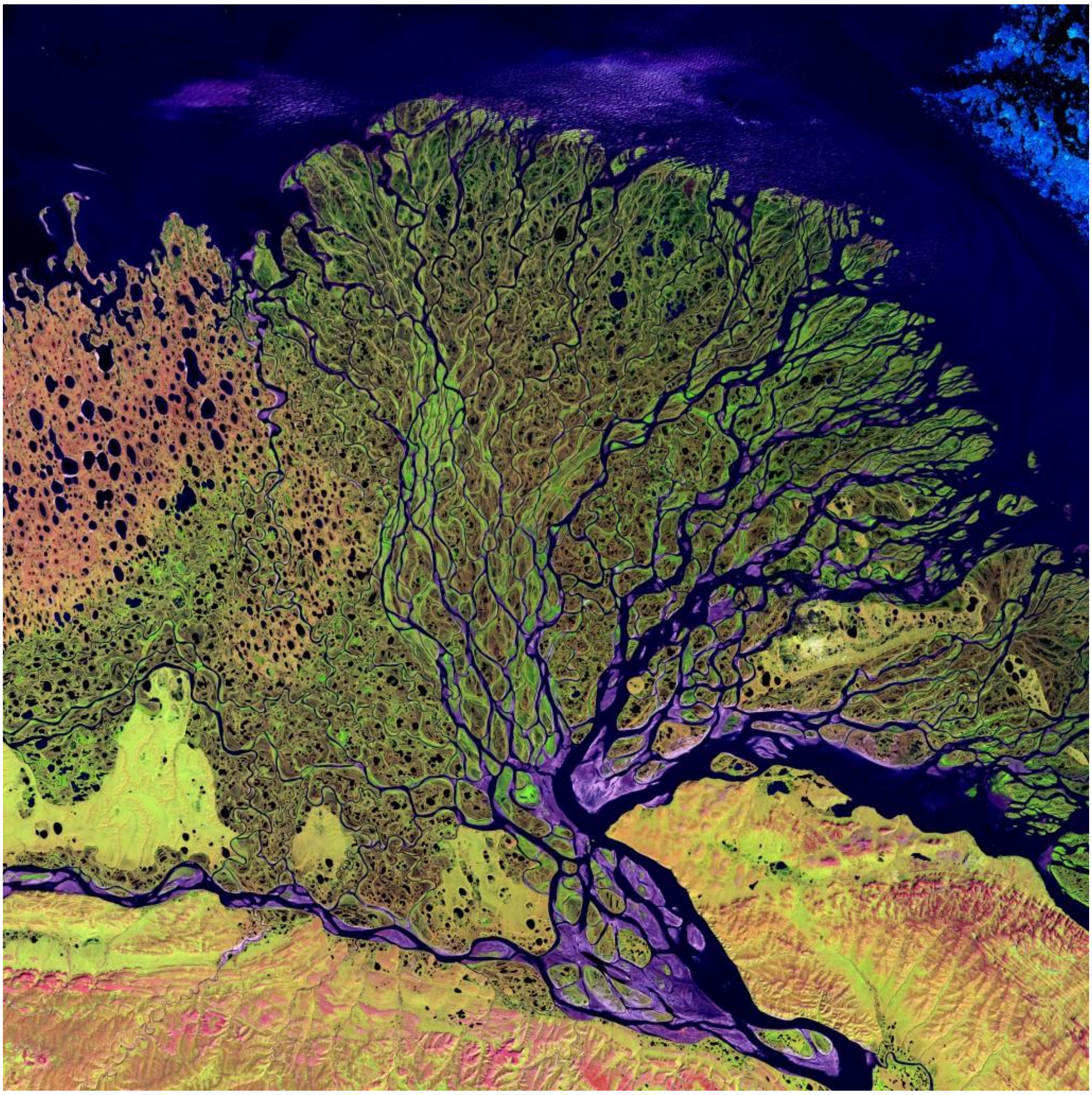

Figura 4.2 – Delta do Rio Lena no norte da Sibéria (Adaptado de http://geolog.egu.eu/wp-content/uploads/2013/03/Lena-River-Delta-1024x1024.jpg, 2013).

A Teoria Constructal estabelece que cada sistema de fluxo está destinado a permanecer imperfeito. A direção da evolução do sistema ocorre no sentido de distribuir as imperfeições, de modo que o "todo" flua mais fácil, mas a evolução nunca termina. O fenômeno natural não é a eliminação, mas a distribuição das imperfeições e essa distribuição gera a geometria do sistema.

A Tabela 4.1 mostra alguns exemplos de aplicações da Teoria Constructal:

Tabela 4.1 – Aplicações da Teoria Constructal (Adaptado de http://en.wikipedia.org/wiki/Constructal_law, 2013).

Aplicação	**Fluido**	**Forma de árvore (baixa resistência)**	**Espaços intersticiais (alta resistência)**
Componentes eletrônicos	Calor	Inserções de alta condutividade (lâminas, agulhas)	Substrato de baixa condutividade
Tráfego urbano	Pessoas	Tráfego de automóveis em rua de baixa resistência	Rua de chão bruto
Bacias hidrográficas	Água	Riacho e rios de baixa resistência	Fluxo de Darcy através de meios porosos
Pulmões	Ar	Vias aéreas e brônquios de baixa resistência	Difusão em tecidos alveolares
Sistema circulatório	Sangue	Vasos, capilares sanguíneos, artérias e veias de baixa resistência	Difusão em tecidos capilares

A Teoria Constructal fornece uma teoria unificadora da evolução. Ela sustenta que os fenômenos inanimados e animados evoluem ao longo do tempo para se mover mais facilmente. Também fornece a definição da física da vida, do que significa estar vivo. Ela afirma que a vida significa fluxo, se os fluxos pararem, o sistema está morto.

Como uma consequência da gama de problemas que tem sido abordados com a Lei Constructal, um crescente número de pesquisadores tem empregado Constructal Design para maximizar a performance de diversos problemas de engenharia adicionais aos mencionados na Tab. 4.1, por exemplo: células de combustíveis, dimensionamento de turbinas, energia das ondas, refrigeração, além dos problemas clássicos de mecânica dos fluidos e transferência de calor (Beyene e Pefley, 2009; Kim, Lorente e Bejan, 2011; Azad e Amidpour, 2011; Rocha, Lorente e Bejan, 2013).

5. METODOLOGIA

5.1 FASES DA METODOLOGIA

Inicialmente uma placa sólida foi estudada analiticamente e numericamente. Os resultados obtidos foram comparados para realizar a verificação do modelo numérico empregado no presente trabalho. Depois, o valor da carga crítica de flambagem presente na placa sólida foi adotado como parâmetro comparativo para as placas perfuradas. Nesse trabalho foram aplicados três tipos de investigação: o primeiro levando em consideração três placas de mesma dimensão e mesma área, porém com geometrias de furos diferentes, o segundo tipo com quatro placas de dimensões diferentes, relações *H*/*L* diferentes e geometrias de furos iguais e o terceiro tipo com sete placas de dimensões diferentes, áreas iguais e geometria de furos iguais. Por fim, o processo de otimização geométrica através do método Constructal Design foi realizado.

5.2 FLAMBAGEM DE PLACAS

Em inúmeras situações de projeto, placas finas são submetidas a cargas de compressão uniaxial. A grande esbeltez desses componentes faz com que elas sejam suscetíveis a instabilidades como a flambagem (Real e Isoldi, 2010). Um exemplo de placa fina retangular com comprimento *L*, largura *H*, espessura *t* e submetida a uma carga *P*, pode ser visto na Fig. 5.1, e a solução analítica para a sua tensão crítica é dada por (Åkesson, 2007; El-Sawy e Nazmy, 2001; Wang, Wang e Reddy, 2005):

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{\left[12\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{H}{t}\right)^2\right]} \tag{5.1}$$

Na Equação (5.1), σ_{cr} é a tensão crítica de flambagem, k é o coeficiente de flambagem, π é uma constante matemática, E é o módulo de elasticidade (módulo de Young), ν é o coeficiente de Poisson, H é a largura da placa e t é a espessura da placa.

O coeficiente de flambagem é dado por:

$$k = \left[m\left(\frac{H}{L}\right) + \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{L}{H}\right) \right]^2 \qquad (5.2)$$

$k = [m(H/L) + (1/m)(L/H)]^2$

Na Equação (5.2), m é o número de meias-ondas senoidais (direção longitudinal) e L é o comprimento da placa.

Quando a carga P atinge o valor crítico, ocorre a flambagem elástica da placa. Para uma carga abaixo desse valor, é possível aplicar uma carga transversal adicional sem que ocorra flambagem. Quanto mais próximo for o valor da carga axial do valor da carga crítica, menor é a capacidade da estrutura em suportar uma carga transversal adicional. Quando a carga axial atinge o valor da carga crítica, essa capacidade é nula. A carga crítica de flambagem é definida pelo produto da tensão crítica de flambagem e a espessura da placa:

$$P_{cr} = \frac{\left(k\pi^2 E t^3\right)}{\left[12H^2\left(1-\nu^2\right)\right]} \qquad (5.3)$$

Na Equação (5.3), P_{cr} é a carga crítica de flambagem (carregamento axial).

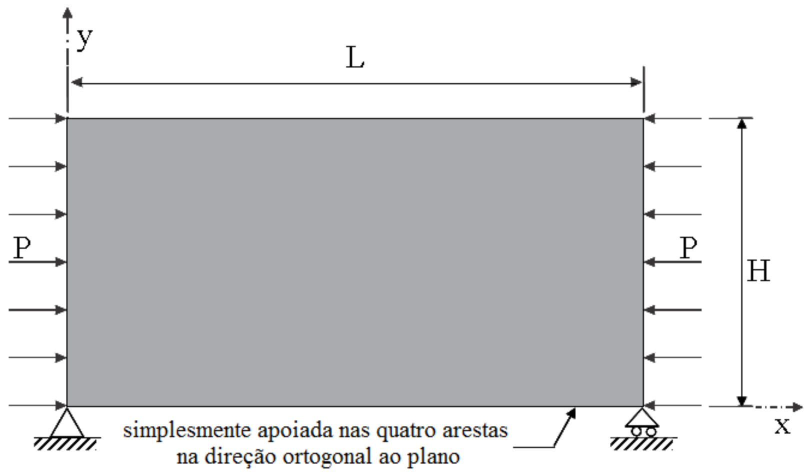

Figura 5.1 – Placa retangular submetida a compressão uniaxial.

As particularidades de cada um dos três tipos de investigação realizados serão abordadas no capítulo seguinte.

6. CONSTRUCTAL DESIGN APLICADO A PLACAS PERFURADAS SOB FLAMBAGEM

Conforme mencionado anteriormente, foram aplicados três tipos de investigação: o primeiro levando em consideração três placas de mesma dimensão, porém com geometrias de furos diferentes, o segundo tipo com quatro placas de dimensões diferentes e geometria dos furos iguais e o terceiro tipo com sete placas de dimensões diferentes, geometria dos furos iguais e áreas iguais.

Os procedimentos realizados em cada uma das investigações, assim como os resultados obtidos para cada uma delas, serão expostos a seguir. Cabe relembrar que o método utilizado para a determinação da carga crítica de flambagem nas placas assume um comportamento linear elástico do material. Sendo assim, os resultados obtidos aqui são válidos apenas se a carga crítica de flambagem calculada não gera tensão normal superior à tensão de escoamento do material, quando aplicada à placa. Se o limite de escoamento for atingido, torna-se necessária uma análise não linear de elementos finitos, incluindo não linearidades geométricas e físicas (Real et al., 2011).

6.1 PLACAS DE MESMA DIMENSÃO, MESMA ÁREA E GEOMETRIAS DE FUROS DIFERENTES

Na investigação de placas de mesma dimensão, mesma área e geometrias de furos diferentes, a análise foi realizada considerando diferentes valores de fração volumétrica, ϕ, para cada forma de furo. Uma variação do grau de liberdade H_0/L_0 foi realizada para cada caso. O outro grau de liberdade H/L foi fixado em 0,50 para todas as simulações numéricas. Além disso, os valores numericamente obtidos para a carga crítica de flambagem foram divididos pela carga crítica analítica da placa sem perfuração, definindo assim a carga crítica adimensional.

A Tabela 6.1 mostra as propriedades do material e as dimensões das placas estudadas nessa investigação.

Tabela 6.1 - Características da placa sem perfurações.

Característica	**Valor**
E	210,0 GPa
v	0,3
H	1,0 m
L	2,0 m
t	10,0 mm

Aplicando a Eq. (5.2), utilizando as informações da Tab. 6.1 e assumindo que são geradas duas meias ondas na direção longitudinal da placa, obtém-se o coeficiente da flambagem k = 4,0. Através da Eq. (5.3), o valor analítico para a carga crítica de flambagem nesse exemplo é P_{cr} = 759,20 kN/m.

Nessa etapa, o Constructal Design foi empregado no estudo de placas finas com furo centrado, considerando três diferentes tipos de furos: elíptico, retangular e losangular. A variação da dimensão dos furos é governada por um parâmetro chamado fração volumétrica (ϕ). Esse parâmetro representa a relação entre o volume do furo (V_0) e o volume total da placa sem furo (V). Então, para a placa com um furo elíptico centrado (Fig. 6.1), a fração volumétrica é definida por:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left[\frac{(\pi H_0 L_0 t)}{4}\right]}{(HLt)} = \frac{(\pi H_0 L_0)}{(4HL)} \tag{6.1}$$

Na Equação (6.1), ϕ é a fração volumétrica, V_0 é o volume do furo, V é o volume total da placa sem furo, H_0 é a característica dimensional do furo na direção y e L_0 é a característica dimensional do furo na direção x.

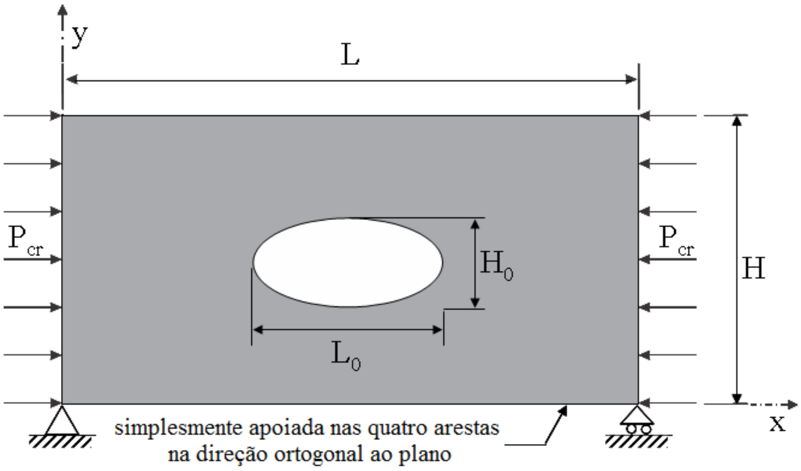

Figura 6.1 – Placa com furo elíptico centrado.

Para uma placa fina com furo centrado em forma retangular (Fig. 6.2), a fração volumétrica é dada por:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(H_0 L_0 t)}{(HLt)} = \frac{(H_0 L_0)}{(HL)} \tag{6.2}$$

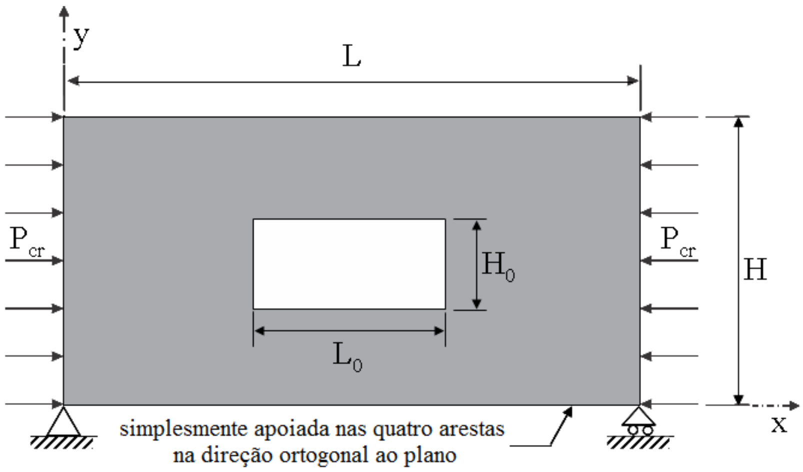

Figura 6.2 – Placa com furo retangular centrado.

E para uma placa com furo centrado em forma de losango (Fig. 6.3), a fração volumétrica é representada por:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left[\frac{(H_0 L_0 t)}{2}\right]}{(HLt)} = \frac{(H_0 L_0)}{(2HL)} \tag{6.3}$$

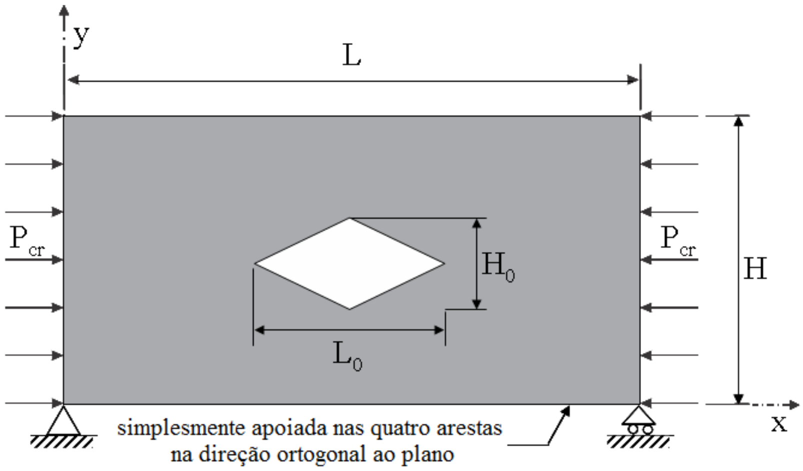

Figura 6.3 – Placa com furo losangular centrado.

O objetivo em todas as análises foi determinar a geometria ótima do furo (H_0/L_0) que é caracterizada pela maximização da carga crítica de flambagem. Com base na Teoria Constructal, as variáveis do problema foram consideradas adimensionais:

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{H}_0, \tilde{L}_0 = \frac{(x, y, t, H, L, H_0, L_0)}{A^{\frac{1}{2}}} \tag{6.4}$$

Na Equação (6.4), $\tilde{x}$ é a direção longitudinal adimensionalizada, $\tilde{y}$ é a direção transversal adimensionalizada, $\tilde{t}$ é a espessura da placa adimensionalizada, $\tilde{H}$ é a largura da placa adimensionalizada, $\tilde{L}$ é o comprimento da placa adimensionalizado, $\tilde{H}_0$ é a característica dimensional do furo na direção y adimensionalizada, $\tilde{L}_0$ é a característica dimensional do furo na direção x adimensionalizada e A é a área da placa.

A área da placa sem furo é definida por:

$$A = HL \tag{6.5}$$

A Figura 6.4 mostra o comportamento da carga crítica adimensional de flambagem em função do grau de liberdade H_0/L_0 para uma placa com furo elíptico centrado.

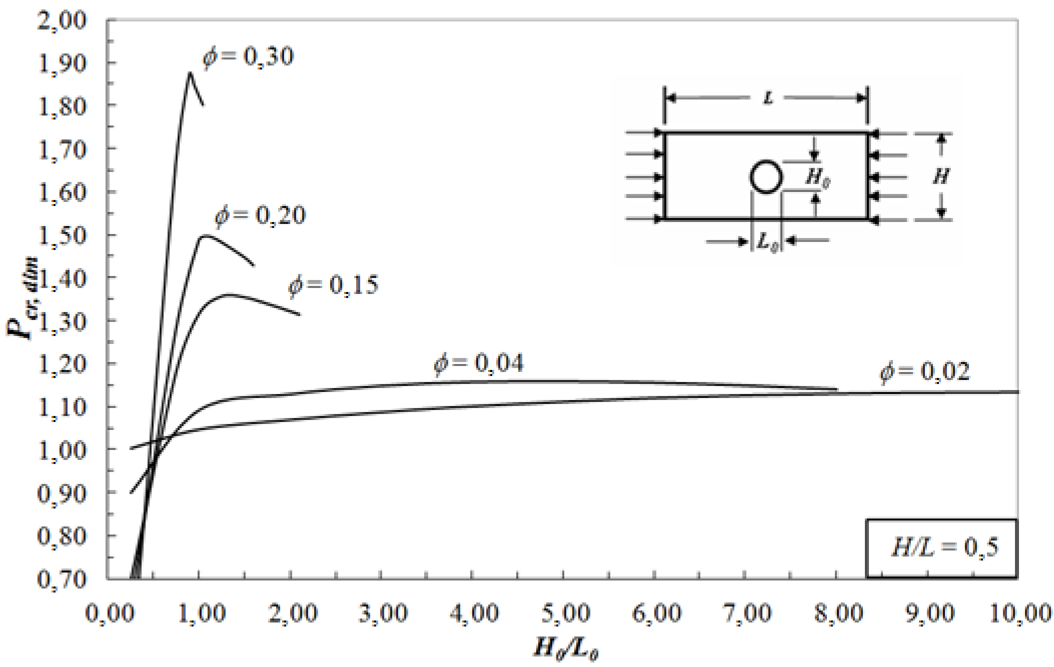

Figura 6.4– Placa com furo elíptico centrado: carga crítica adimensional em função da razão H_0/L_0

.

Percebe-se na Fig. 6.4 que para cada fração volumétrica há um valor máximo de carga crítica localizado em uma faixa intermediária da relação H_0/L_0. Nota-se também um aumento da carga crítica uma vez maximizada com o aumento da fração volumétrica.

Na Figura 6.5 as topologias do modo de flambagem para três relações de H_0/L_0: 0,25 (Fig. 6.5 (a)), 0,90 (Fig. 6.5 (b)) e 1,00 (Fig. 6.5 (c)). A placa apresentada possui fração volumétrica de 0,30.

O comportamento da placa na Fig. 6.5 (a) indica apenas uma meia onda na flambagem, enquanto as topologias na Fig. 6.5 (b) e Fig. 6.5 (c) mostram a formação de duas meias ondas. Essa tendência é confirmada se os valores das cargas críticas adimensionais de flambagem forem comparados: é necessária uma maior intensidade de carga para formar duas meias ondas em uma placa do que para formar uma meia onda. Esse comportamento é semelhante ao descrito em Åkesson (2007).

Foi observado que a melhor geometria, (Fig. 6.5 (b)), tem um aumento da carga de flambagem adimensional de 286,6% e 2,7% em comparação com os extremos mínimos e máximos da relação H_0/L_0, (Fig. 6.5 (a) e Fig. 6.5 (c), respectivamente).

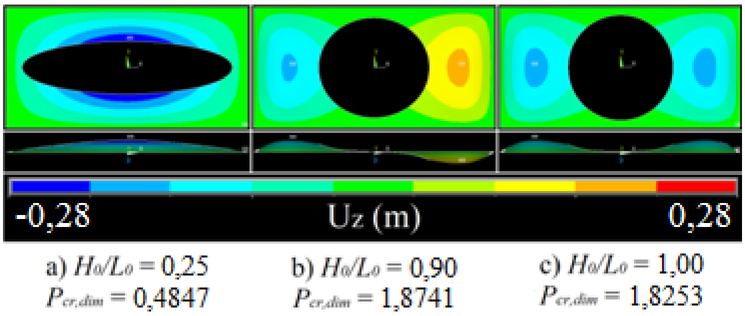

Figura 6.5 – Forma flambada da placa com furo elíptico para $\phi = 0{,}30$.

A Figura 6.6 mostra os resultados para a placa com furo retangular centrado. A carga crítica adimensional de flambagem foi plotada em função do grau de liberdade H_0/L_0 para os mesmos valores de fração volumétrica da Fig. 6.4. Foi percebido um comportamento análogo em relação ao furo elíptico, exibido na Fig. 6.4: quando a fração volumétrica cresce, há uma elevação da máxima carga crítica adimensional de flambagem $P_{cr,dim}$.

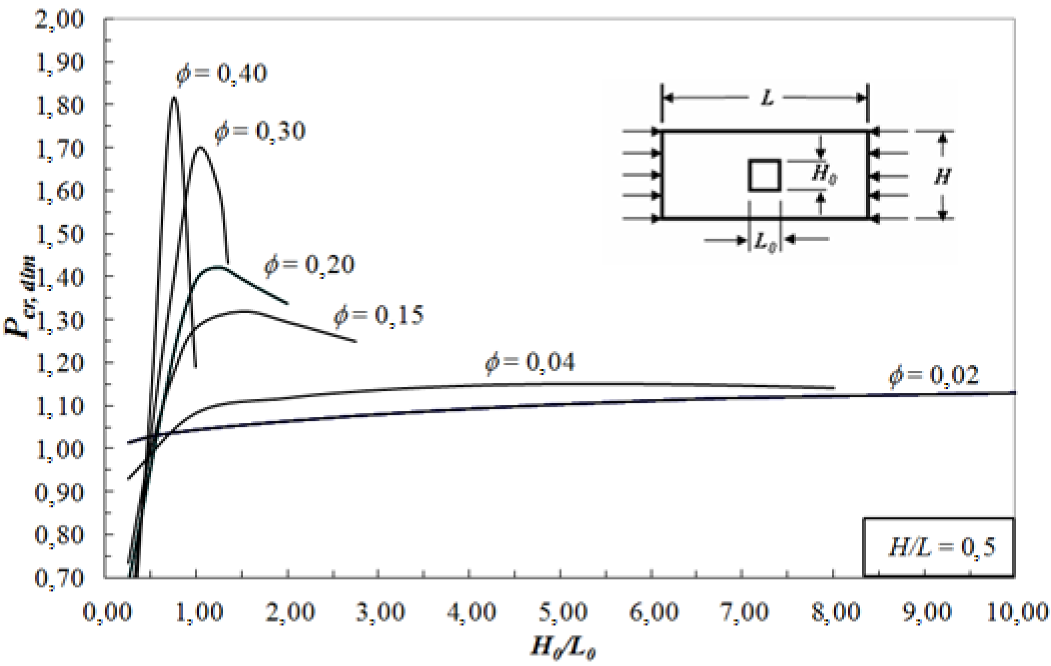

Figura 6.6 – Placa com furo retangular centrado: carga crítica adimensional em função da razão H_0/L_0.

Considerando ϕ de 0,40 e H_0/L_0 de 0,25, 0,50 e 0,75, as topologias do modo de flambagem para uma placa com furo retangular são exibidas nas Fig. 6.7 (a), 6.7 (b) e 6.7 (c), respectivamente.

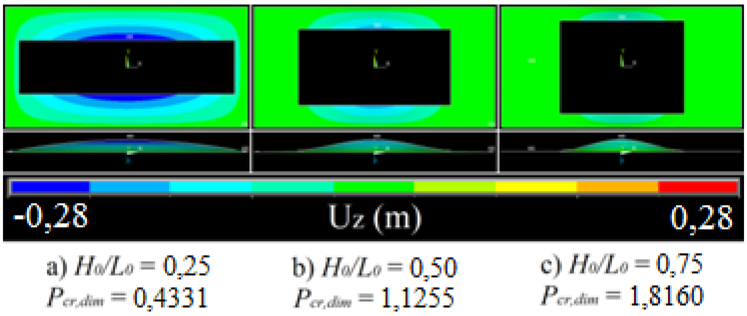

Figura 6.7 – Forma flambada da placa com furo retangular com ϕ = 0,40.

A máxima carga crítica de flambagem é obtida para H_0/L_0 de 0,75 (Fig. 6.7 (c)).
Por fim, foi analisada a placa com furo losangular centrado, e os resultados da carga crítica adimensional de flambagem em função da relação H_0/L_0 são apresentados na Fig. 6.8.

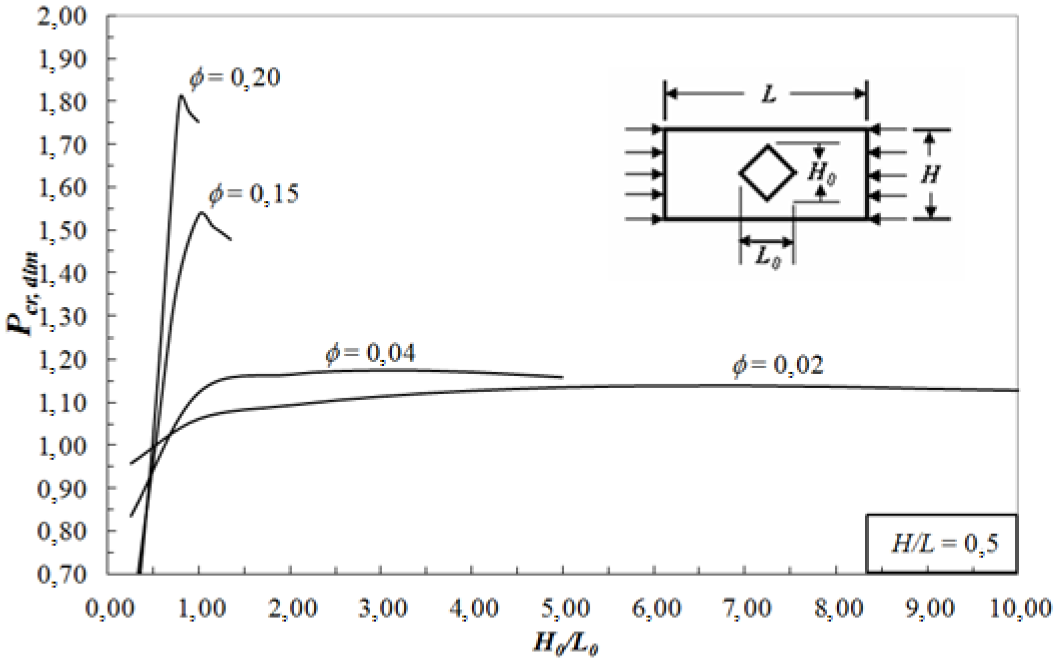

Figura 6.8 – Placa com furo losangular centrado: carga crítica adimensional em função da razão H_0/L_0.

Comparando o comportamento exposto na Fig. 6.8 com o comportamento apresentado nas Fig. 6.4 e 6.6, é possível verificar a mesma tendência, ou seja, é obtido apenas um valor máximo para a carga crítica em função da variação do grau de liberdade H_0/L_0.

A Figura 6.9 mostra as topologias do modo de flambagem para a placa com furo losangular, com fração volumétrica de $\phi = 0,20$ e seguintes relações de H_0/L_0: 0,25 (Fig. 6.9 (a)), 0,80 (Fig. 6.9 (b)) e 1,00 (Fig. 6.9 (c)).

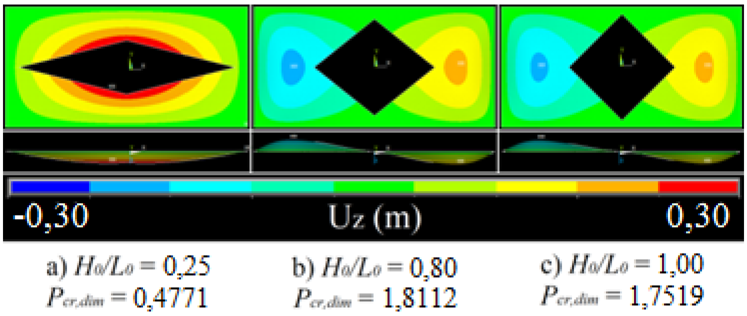

Figura 6.9 – Forma flambada da placa com furo losangular com $\phi = 0,20$.

Nota-se que para uma menor relação H_0/L_0, que representa uma maior intrusão do furo na placa na direção longitudinal, apenas uma meia onda é formada, como observado na Fig. 6.5 (a) e na Fig. 6.7 (a). Já as outras duas topologias (Fig. 6.9 (b) e Fig. 6.9 (c)) são muito semelhantes. Em ambas ocorre a formação de duas meias ondas e possuem deslocamentos distribuídos de maneira mais uniforme em relação à Fig. 6.9 (a). Há nessa situação, uma analogia com o comportamento da placa com furo elíptico.

Além das frações volumétricas mencionadas anteriormente, outros valores de ϕ foram analisados numericamente. A Figura 6.10 mostra a influência da fração volumétrica sobre a máxima carga crítica adimensional de flambagem para os três tipos de furos estudados. Isso enfatiza que não é possível obter furos losangulares e elípticos para valores de $\phi > 0,20$ e $\phi > 0,30$, respectivamente.

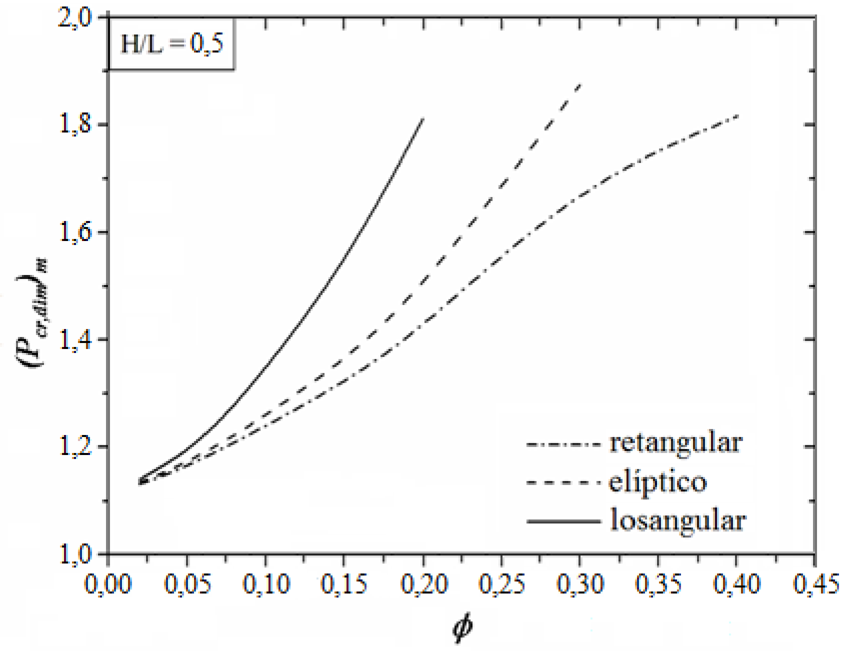

Figura 6.10 – Máxima carga crítica adimensional de flambagem $(P_{cr,dim})_m$ como função de ϕ para cada geometria.

A Figura 6.10 indica que para $\phi \leq 0{,}20$, os maiores valores de carga crítica são encontrados em placas com furos losangulares, ou seja, no trecho onde os três tipos de furos são possíveis, o losango apresenta o melhor desempenho. Para $\phi = 0{,}20$, a maior carga crítica adimensional de flambagem é $P_{cr,dim} = 1{,}8112$, sendo aproximadamente 17,4% e 21,5% melhor que os melhores valores para os furos elípticos e retangulares, respectivamente. No intervalo $0{,}20 \leq \phi \leq 0{,}30$, a geometria elíptica apresenta melhor desempenho em relação ao retângulo, apresentando uma carga crítica adimensional de flambagem máxima de $P_{cr,dim} = 1{,}8741$, sendo aproximadamente 10% maior que o maior valor para o furo retangular. Para $0{,}30 \leq \phi \leq 0{,}40$, a única geometria de furo possível é a retangular. Mesmo assim, a máxima carga crítica adimensional de flambagem obtida para $\phi = 0{,}40$ é $P_{cr,dim} = 1{,}8160$, o que é cerca de 3,0% inferior ao valor máximo obtido com o furo elíptico para $\phi = 0{,}30$. O resultado evidencia a importância da Teoria Constructal na otimização de estruturas na engenharia.

A Figura 6.11 mostra que para uma situação de $\phi = 0{,}20$ a forma ótima é a losangular e não a elíptica, como é esperado intuitivamente.

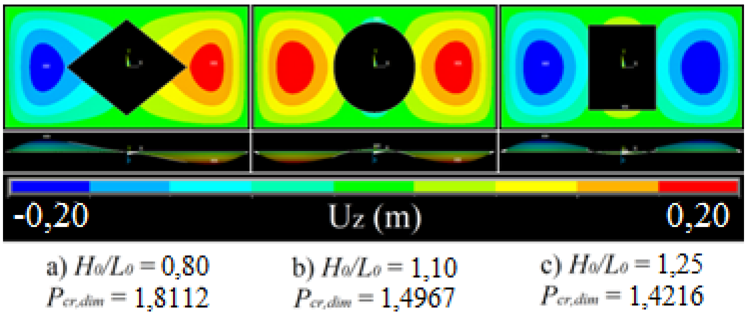

Figura 6.11 – Comparação entre as geometrias ótimas das três geometrias de furo para ϕ = 0,20.

Percebe-se através dos gradientes de tensões apresentados na Fig. 6.11 que as geometrias otimizadas foram definidas de acordo com o Princípio Constructal de minimização da distribuição de imperfeições.

Por último, a Fig. 6.12 mostra os valores otimizados $(H_0/L_0)_o$ em função da fração volumétrica (ϕ) para cada um dos três casos abordados. Pode-se observar que o mesmo comportamento é exibido nos três tipos de furos: o valor ótimo $(H_0/L_0)_o$ decresce com o aumento da fração volumétrica do furo (ϕ). Para o mesmo valor de ϕ, o resultado indica que a melhor performance é obtida pela geometria que possui o menor valor de $(H_0/L_0)_o$. Cabe salientar que os valores de $(H_0/L_0)_o$ estão exibidos em escala logarítmica no gráfico.

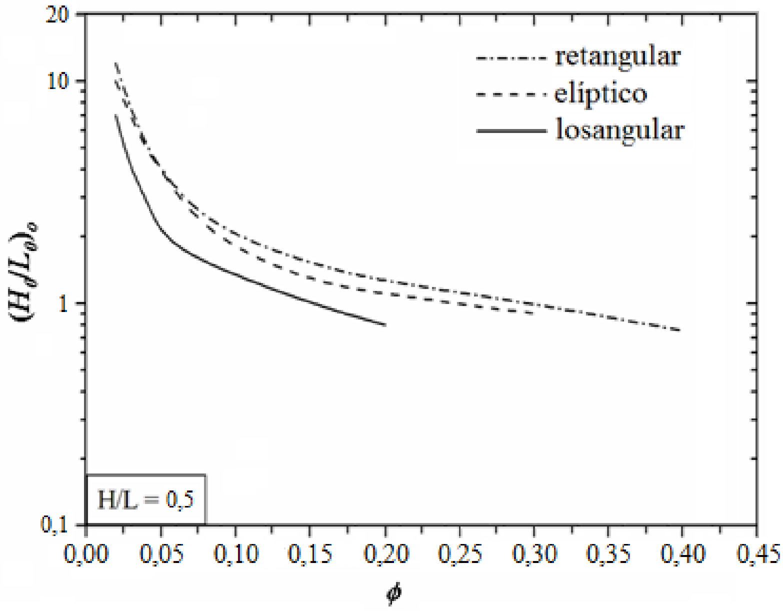

Figura 6.12 – As relações otimizadas de $(H_0/L_0)_o$ como função de ϕ para todas as formas de furo.

6.2 PLACAS DE DIMENSÕES DIFERENTES, RELAÇÕES *H*/*L* DIFERENTES E GEOMETRIAS DE FUROS IGUAIS

Nessa investigação, o Constructal Design foi empregado no estudo de placas finas com furo elíptico centrado, considerando quatro diferentes dimensões de placas: 1 m × 1 m, 1,5 m × 2 m, 1 m × 2 m e 1 m × 3 m. Foi adotada a forma elíptica para o furo porque a mesma é a forma mais comumente encontrada nos problemas de engenharia. As dimensões dos furos sofreram variações, sendo governadas pelo parâmetro chamado fração volumétrica (ϕ) que representa a relação entre o volume do furo (V_0) e o volume total da placa sem furo (V). Então, para a placa com um furo elíptico centrado (Fig. 6.1), a fração volumétrica é definida pela Eq. (6.1), apresentada anteriormente.

Além disso, os valores numericamente obtidos para a carga crítica de flambagem foram divididos pela carga crítica analítica da placa sem perfuração, definindo assim a carga crítica adimensional.

A Tabela 6.2 mostra as propriedades do material e as dimensões das placas estudadas nessa investigação, que tem como propósito avaliar o efeito do grau de liberdade H/L sobre a carga crítica de flambagem e a respectiva razão ótima de H_0/L_0.

Tabela 6.2 - Características das placas sem perfurações.

Característica	Placa 1B	Placa 2B	Placa 3B	Placa 4B
E	210,0 GPa	210,0 GPa	210,0 GPa	210,0 GPa
v	0,3	0,3	0,3	0,3
H	1,0 m	1,5 m	1,0 m	1,0 m
L	1,0 m	2,0 m	2,0 m	3,0 m
t	10,0 mm	10,0 mm	10,0 mm	10,0 mm
k	4,0	4,34	4,0	4,0
$\boldsymbol{P_{cr}}$	759,20 kN/m	366,13 kN/m	759,20 kN/m	759,20 kN/m

Aplicando a Eq. (5.2), utilizando as informações contidas entre a segunda e a sexta linha da Tab. 6.2 e assumindo que são geradas uma, uma, duas e três meias ondas na direção longitudinal das placas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, obtém-se os valores indicados na sétima e na oitava linha da Tab. 7.2.

A Figura 6.13 mostra o comportamento da carga crítica adimensional de flambagem em função do grau de liberdade H_0/L_0 para a placa 1B com furo elíptico centrado.

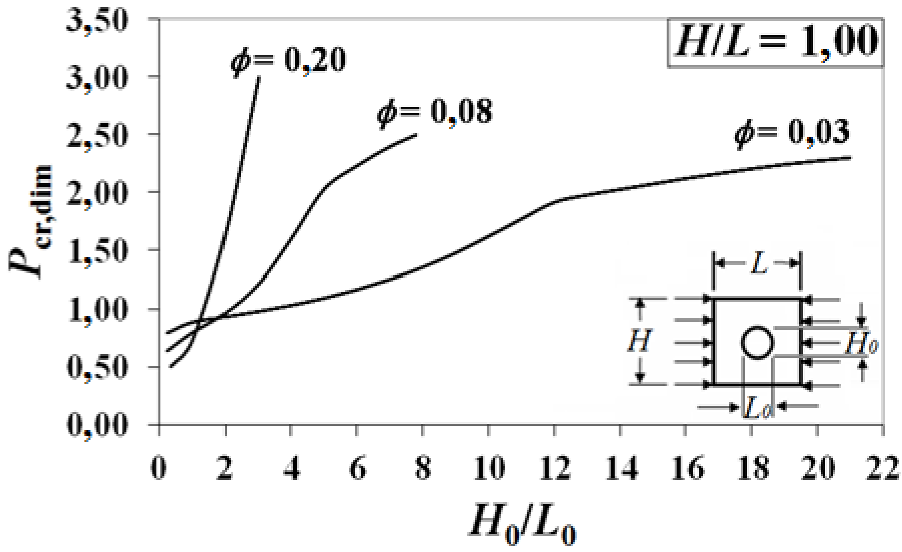

Figura 6.13 – Placa 1B: otimização da carga crítica adimensional de flambagem em função da razão H_0/L_0 para H/L = 1,0.

Percebe-se na Fig. 6.13 que para cada fração volumétrica há um valor máximo de carga crítica localizado no extremo superior da relação H_0/L_0. Nota-se também um aumento da carga crítica com o aumento de ϕ.

A Figura 6.14 mostra as topologias referentes aos valores máximos de carga crítica de flambagem para os três valores de ϕ: 0,03 (Fig. 6.14 (a)), 0,08 (Fig. 6.14 (b)) e 0,20 (Fig. 6.14 (c)) e respectivas relações de H_0/L_0 otimizadas.

O comportamento da placa nas Fig. 6.14 (a), 6.14 (b) e 6.14 (c) mostra a formação de duas meias ondas.

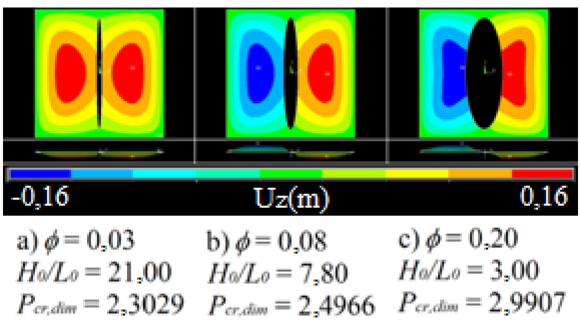

Figura 6.14 – Forma flambada da placa 1B.

A Figura 6.15 mostra o comportamento da carga crítica adimensional de flambagem em função do grau de liberdade H_0/L_0 para a placa 2B com furo elíptico centrado, ou seja, para H/L = 0,75. Foi percebido um comportamento análogo em relação à placa 1B, exibida na Fig. 6.13: quando a fração volumétrica cresce, há uma elevação da máxima carga crítica adimensional de flambagem $P_{cr,dim}$. Pequenas diferenças são observadas para ϕ = 0,20 e 0,08, especialmente na região onde o melhor desempenho é obtido.

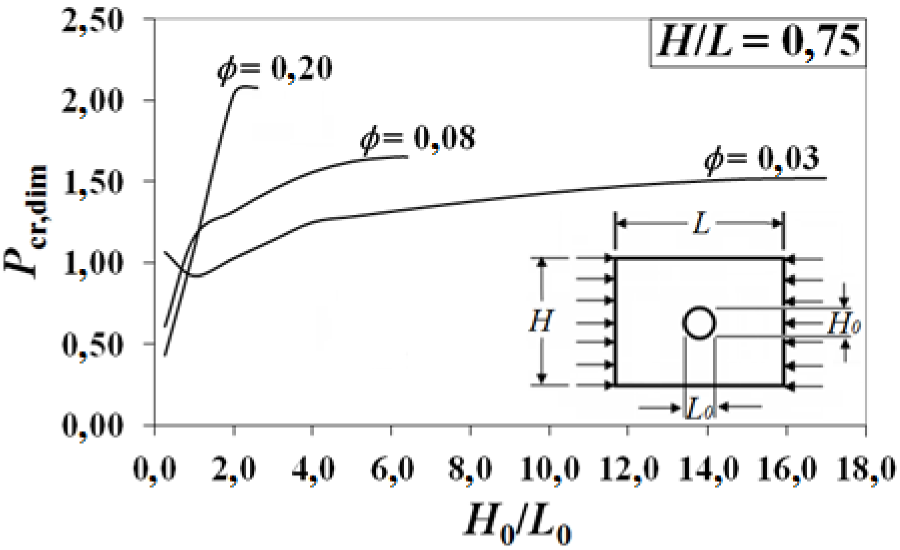

Figura 6.15 – Placa 2B: otimização da carga crítica adimensional de flambagem em função da razão H_0/L_0 para H/L = 0,75.

Na Figura 6.16 tem-se as topologias referentes aos valores máximos de carga crítica de flambagem para as três frações volumétricas (ϕ): 0,03 (Fig. 6.16 (a)), 0,08 (Fig. 6.16 (b)) e 0,20 (Fig. 6.16 (c)) e suas respectivas relações ótimas de H_0/L_0.

O comportamento da placa nas Fig. 6.16 (a), 6.16 (b) e 6.16 (c) indica a formação de duas meias ondas. Contudo, o deslocamento das duas semi-ondas para o maior ϕ estão em sentidos diferentes, enquanto para os menores ϕ o deslocamento ocorre no mesmo sentido. Esta mudança de sentido pode representar um mecanismo de mudança geométrica para melhorar o comportamento estrutural.

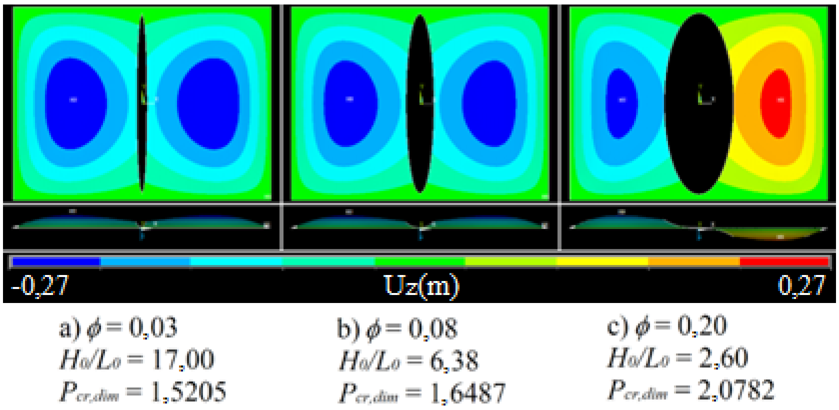

Figura 6.16 – Forma flambada da placa 2B.

A máxima carga crítica de flambagem é obtida para ϕ = 0,20 e H_0/L_0 de 2,60, Fig. 6.16 (c).

Após, analisou-se a placa 3B, e os resultados da carga crítica adimensional de flambagem em função da relação H_0/L_0 são apresentados na Fig. 6.17.

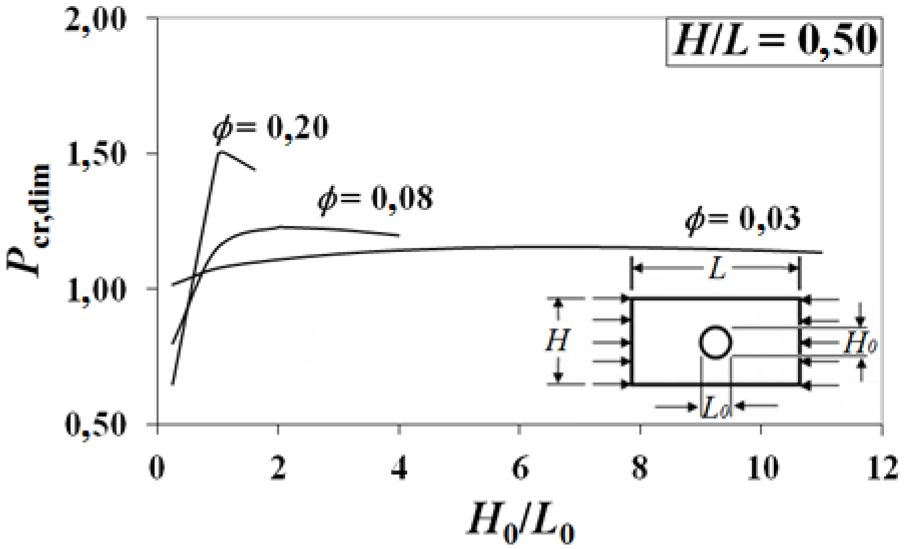

Figura 6.17 – Placa 3B: otimização da carga crítica adimensional de flambagem.

Comparando o comportamento exposto na Fig. 6.17 com o comportamento apresentado nas Fig. 6.13 e 6.15, é possível verificar uma tendência diferente, ou seja, o valor máximo para a carga crítica em função da variação do grau de liberdade H_0/L_0, ocorre em uma zona intermediária do intervalo.

A Figura 6.18 mostra as topologias do modo de flambagem para a placa 3B, com frações volumétricas de ϕ = 0,03, ϕ = 0,08 e ϕ = 0,20 e respectivas relações ótimas de H_0/L_0: 6,58 (Fig. 6.18 (a)), 2,10 (Fig. 6.18 (b)) e 1,08 (Fig. 6.18 (c)).

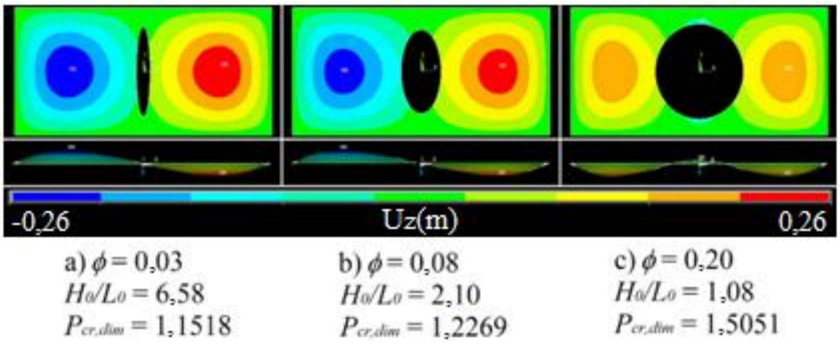

Figura 6.18 – Forma flambada da placa 3B.

Nota-se que para uma menor relação H_0/L_0, que representa uma maior intrusão do furo na placa na direção longitudinal, três meias ondas são formadas, como observado na Fig. 6.18 (c). Já as outras duas topologias (Fig. 6.18 (a) e Fig. 6.18 (b)) são muito semelhantes entre si. Em ambas ocorre a formação de duas meias ondas e possuem deslocamentos distribuídos de maneira mais uniforme em relação à Fig. 6.18 (c).

Por fim, foi analisada a placa 4B, e os resultados da carga crítica adimensional de flambagem em função da relação H_0/L_0 são apresentados na Fig. 6.19.

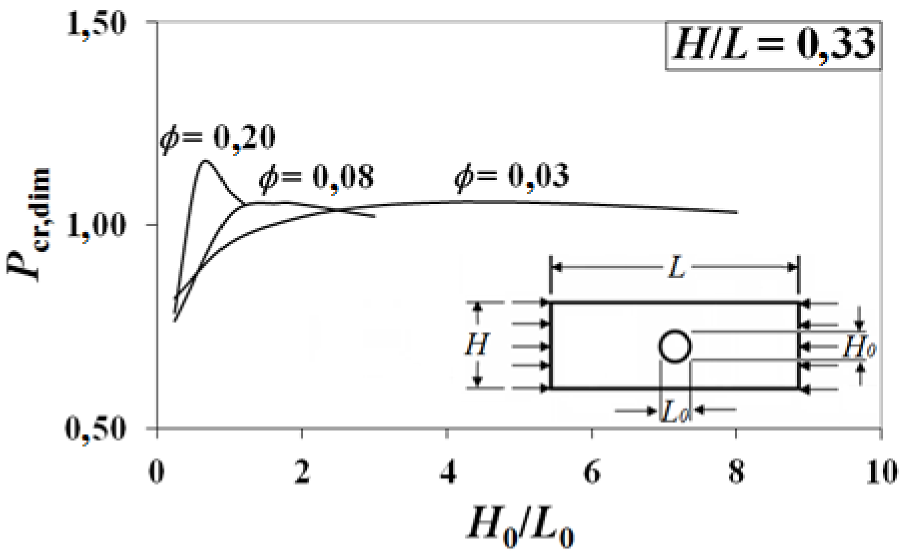

Figura 6.19 – Placa 4B: otimização da carga crítica adimensional de flambagem.

Observa-se na Fig. 6.19 um comportamento semelhante ao apresentado na Fig. 6.17, onde o valor máximo para a carga crítica em função da variação do grau de liberdade H_0/L_0 ocorre em uma zona intermediária do intervalo.

A Figura 6.20 mostra as topologias do modo de flambagem para a placa 4B, com frações volumétricas de $\phi = 0,03$, $\phi = 0,08$ e $\phi = 0,20$ e suas respectivas relações ótimas de H_0/L_0: 4,47 (Fig. 6.20 (a)), 1,67 (Fig. 6.20 (b)) e 0,60 (Fig. 6.20 (c)).

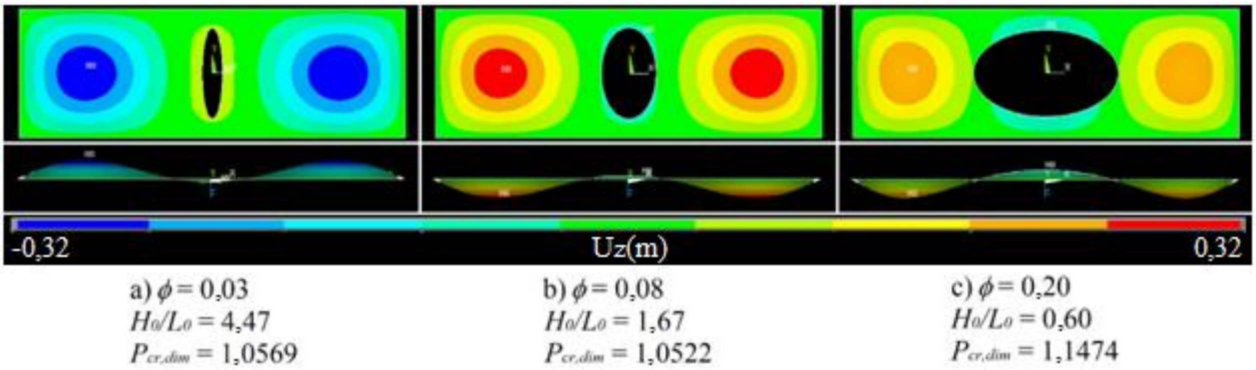

Figura 6.20 – Forma flambada da placa 4B.

Nota-se que nas três topologias exibidas na Fig. 6.20, há a formação de três meias ondas.

A Figura 6.21 mostra a influência da fração volumétrica sobre a máxima carga crítica adimensional de flambagem para as quatro placas estudadas. Isso enfatiza que a carga crítica cresce com a elevação da relação H/L e também com o aumento da fração volumétrica ϕ.

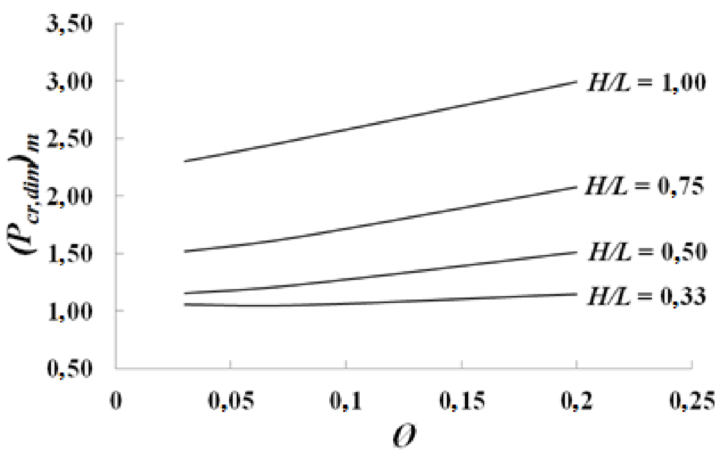

Figura 6.21 – Máxima carga crítica adimensional de flambagem $(P_{cr,dim})_m$ como função da fração volumétrica ϕ para todas as placas.

A Figura 6.22 mostra os valores otimizados $(H_0/L_0)_o$ em função da fração volumétrica (ϕ) para cada uma das quatro placas abordadas. Pode-se observar que o mesmo comportamento é exibido nas quatro placas: o valor ótimo $(H_0/L_0)_o$ decresce com o aumento da fração volumétrica do furo (ϕ).

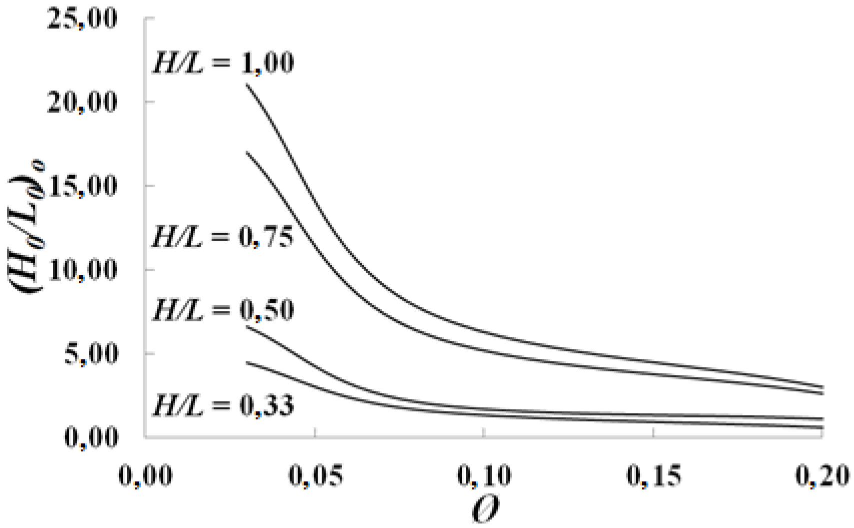

Figura 6.22 – As relações otimizadas de $(H_0/L_0)_o$ como função da fração volumétrica ϕ para todas as placas.

A Tabela 6.3 mostra os acréscimos percentuais de carga crítica em cada placa.

Tabela 6.3 - Acréscimo percentual de carga crítica.

	Placa 1B	**Placa 2B**	**Placa 3B**	**Placa 4B**
P_{cr} Placa sem Furo (kN/m)	753,76	364,72	755,08	755,59
P_{cr} Máxima (kN/m)	2254,30	757,96	1136,50	866,97
Percentual de Acréscimo (%)	199,07	107,82	50,51	14,74

A Figura 6.23 mostra os modos de flambagem das geometrias ótimas obtidas para cada uma das quatro placas.

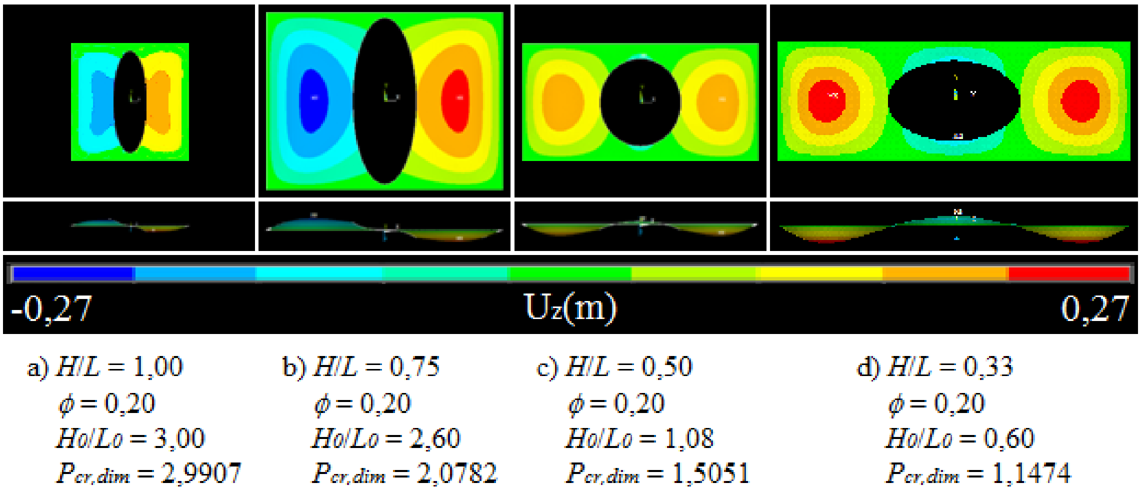

Figura 6.23 – Modos de flambagem das geometrias ótimas para todas as placas.

Também foi realizada uma comparação global entre as placas, utilizando para tanto, os valores absolutos de carga crítica de flambagem e não mais os valores adimensionais.

Por último, a Fig. 6.24 mostra os valores máximos de carga crítica em função da relação H/L para cada uma das três frações volumétricas analisadas (ϕ). Pode-se observar que o mesmo comportamento ocorre para as três frações volumétricas: o valor máximo de carga crítica de flambagem $(P_{cr})_m$ apresenta seu valor mínimo em uma faixa da relação H/L situada entre 0,70 e 0,75, aproximadamente. Após essa faixa, o valor de carga crítica sofre uma elevação com o aumento de H/L.

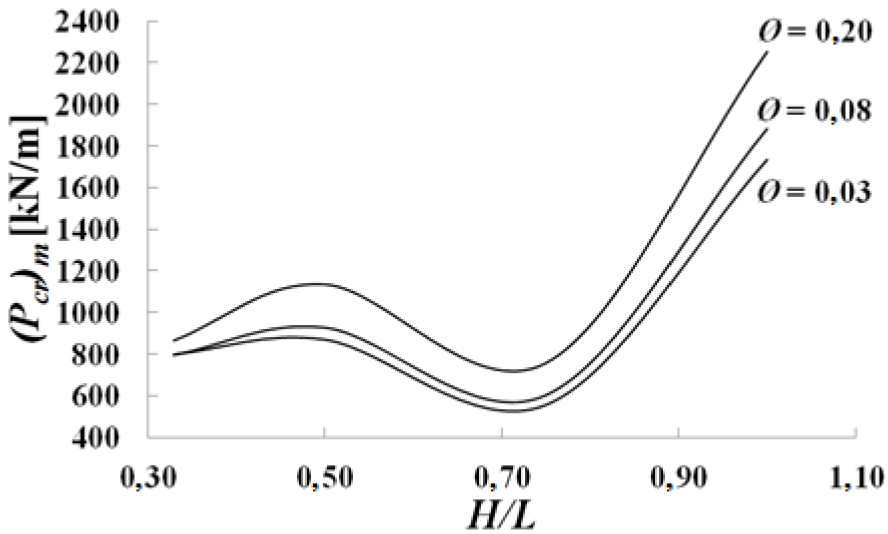

Figura 6.24 – As relações otimizadas de $(H_0/L_0)_o$ como função da fração volumétrica ϕ para todas as placas.

6.3 PLACAS DE DIMENSÕES DIFERENTES, ÁREAS IGUAIS E GEOMETRIAS DE FUROS IGUAIS

Nessa investigação, o Constructal Design foi empregado no estudo de placas finas com furo elíptico centrado, foram adotados seis valores para a fração volumétrica dos furos: ϕ = 0,02, 0,05, 0,08, 0,15, 0,20 e 0,25. Para cada ϕ, sete chapas com diferentes relações H/L foram consideradas (1,43 m × 1,40 m, 1,25 m × 1,60 m, 1,11 m × 1,80 m, 1,00 m × 2,00 m, 0,91 m × 2,20 m, 0,83 m × 2,40 m e 0,77 m × 2,60 m), todas com área de 2 m². As dimensões externas H e L são apresentadas na Tab. 6.4. Além disso, várias relações H_0/L_0 foram investigadas para cada placa.

Para a placa com um furo elíptico centrado (Fig. 6.1), a fração volumétrica é definida pela Eq. (6.1), apresentada anteriormente.

A Tabela 6.4 mostra as propriedades do material e as dimensões das placas estudadas nessa investigação.

Tabela 6.4 - Características das placas sem perfurações.

Característica	**Placa 1C**	**Placa 2C**	**Placa 3C**	**Placa 4C**	**Placa 5C**	**Placa 6C**	**Placa 7C**
***E* (GPa)**	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0
N	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
H/L	1,02	0,78	0,62	0,50	0,41	0,35	0,30
***H* (m)**	1,43	1,25	1,11	1,00	0,91	0,83	0,77
***L* (m)**	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40	2,60
***A* (m²)**	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
***t* (mm)**	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0

Aplicando a Eq. (5.2), utilizando as informações da Tab. 6.4 e assumindo que são geradas uma, uma, duas, duas, duas, três e três meias ondas na direção longitudinal das placas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 respectivamente, obtém-se os dados exibidos na Tab. 6.5.

Tabela 6.5 – Valores utilizados no processo de verificação do modelo.

Simulação / Valor	Placa 1C	Placa 2C	Placa 3C	Placa 4C	Placa 5C	Placa 6C	Placa 7C
H/L	1,02	0,78	0,62	0,50	0,41	0,35	0,30
***H* (m)**	1,43	1,25	1,11	1,00	0,91	0,83	0,77
***L* (m)**	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40	2,60
***t* (m)**	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
M	1	1	2	2	2	3	3
K	4,00	4,25	4,18	4,00	4,15	4,01	4,06
Solução Analítica (kN/m)	372,16	516,10	642,66	759,20	952,42	1095,07	1301,39
Solução Numérica (kN/m)	370,31	513,70	639,58	755,30	947,41	1089,10	1294,00
Diferença (%)	-0,50	-0,47	-0,48	-0,51	-0,53	-0,55	-0,57

Observando a diferença entre os resultados analíticos e numéricos na Tab. 6.5, é possível afirmar que o modelo computacional foi verificado.

Outra verificação do modelo foi realizada considerando placas finas de aço perfuradas. A mesma Placa 4C (1,00 m × 2,00 m) utilizada na primeira verificação foi estudada, porém agora com a presença de furos circulares centrados e comparada com resultados obtidos para a carga crítica no estudo numérico desenvolvido por El-Sawy e Nazmy (2001). A Tabela 6.6 mostra a comparação entre os resultados.

Tabela 6.6 – Comparação entre o valor de referência e o valor numérico para uma placa com furo circular centrado.

Resultados / Diâmetro do furo (m)	P_{cr} (kN/m) de referência	P_{cr} (kN/m) do presente trabalho	Diferença (%)
0,10	766,19	763,56	-0,34
0,20	789,36	786,50	-0,36
0,30	825,08	820,87	-0,51
0,40	849,26	847,78	-0,17
0,50	901,54	898,79	-0,31
0,60	986,46	981,22	-0,53

Mais uma vez uma excelente proximidade entre valores foi obtida, sendo -0,53%, a diferença máxima encontrada, verificando o modelo computacional proposto.

O processo de otimização nessa investigação se deu considerando-se seis diferentes valores de fração volumétrica do furo (ϕ). Para cada (ϕ), sete diferentes valores da relação *H*/*L* foram considerados e para cada um desses valores de *H*/*L* foram investigados vários valores da relação H_0/L_0. Um esquema com a árvore de simulações a serem realizadas é ilustrado na Fig. 6.25.

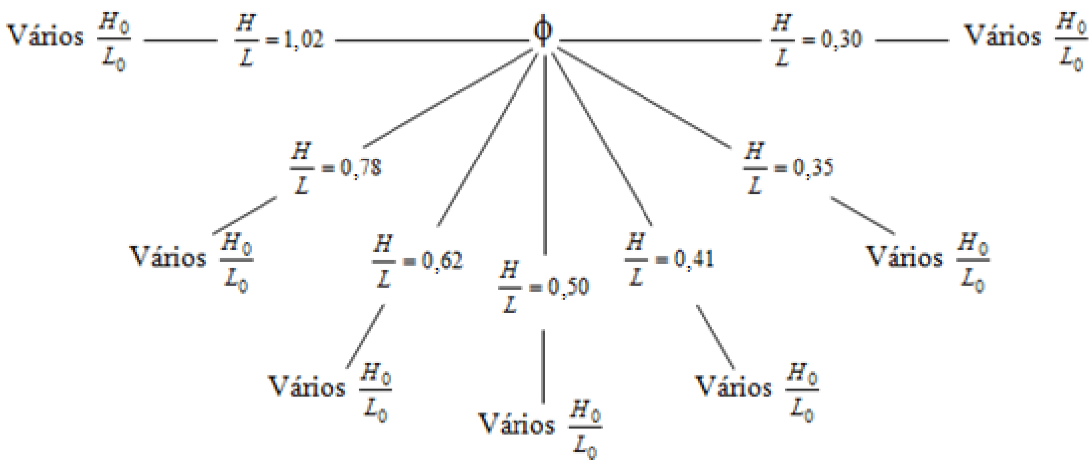

Figura 6.25 – Representação esquemática do processo de otimização.

Diferentemente das outras duas investigações, nessa buscou-se um segundo nível de otimização da forma geométrica e dimensão.

Cabe salientar que o maior valor numérico para a carga crítica de flambagem apresentado na Tab. 6.5 (1294,00 kN/m) foi utilizado como referência para se obter o valor adimensional para a carga crítica de flambagem de todas as placas.

Em um primeiro nível de otimização, foi possível encontrar geometrias ótimas relacionadas com a relação H_0/L_0. Assim, para cada H/L e para cada ϕ, uma forma ótima pode ser definida para a placa perfurada. Por exemplo, a Fig. 6.26 apresenta a variação da carga crítica de flambagem em função da relação H_0/L_0, para a placa com H/L = 0,41 e os seis valores de fração volumétrica do furo mencionados anteriormente.

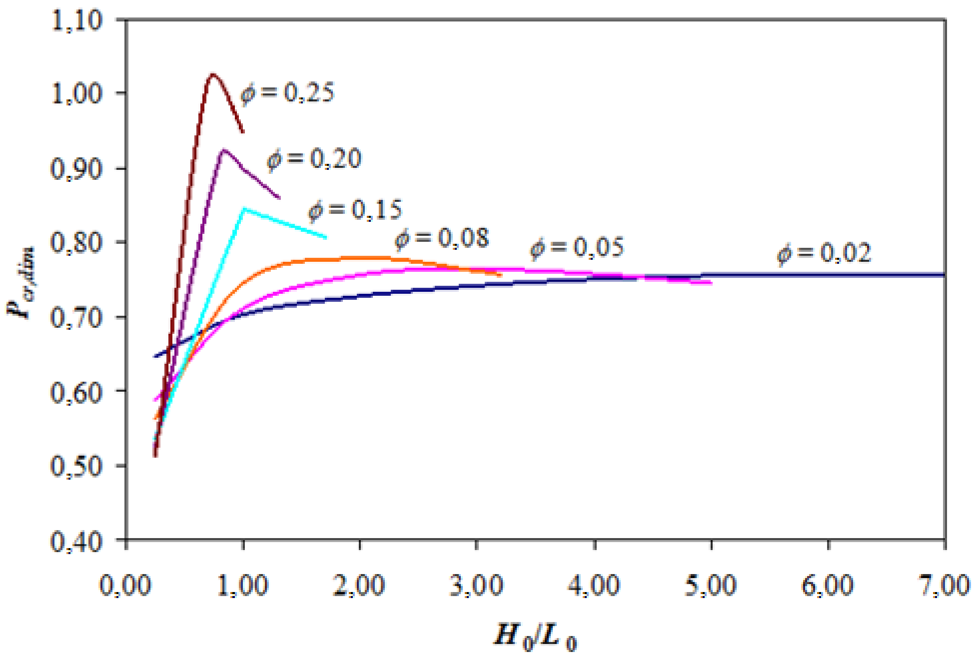

Figura 6.26 – $P_{cr,dim}$ em função de H_0/L_0 para a placa com H/L = 0,41.

A Figura 6.26 mostra que o valor da carga crítica de flambagem cresce com o crescimento da fração volumétrica dos furos.

A Figura 6.27 apresenta também a variação dos valores de $P_{cr,dim}$ em função da relação H_0/L_0, no entanto, nesse gráfico foram consideradas todas as relações H/L para uma única fração volumétrica do furo ($\phi = 0,20$). O comportamento foi alterado das menores relações de H/L. Para menores valores de H/L a carga crítica máxima é obtida para valores intermediários de (H_0/L_0) enquanto para maiores valores de H/L os ótimos passam a ser obtidos no limite superior de (H_0/L_0).

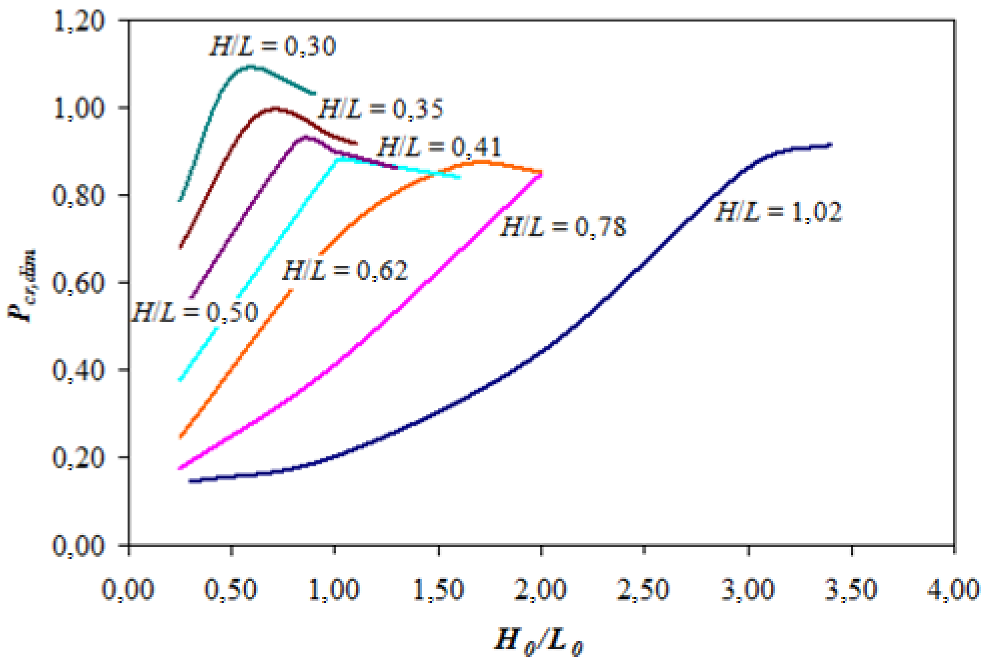

Figura 6.27 – $P_{cr,dim}$ em função de H_0/L_0 para a placa com $\phi = 0{,}20$.

Na Figura 6.27 pode ser visto que, para um intervalo de H_0/L_0 inferior a um, os valores de carga crítica de flambagem aumentam com a diminuição dos valores de H/L.

Após isso, pode-se passar para um segundo nível de otimização partindo das melhores geometrias encontradas no primeiro nível de otimização. Agora, para cada uma das frações volumétricas do furo propostas, o valor máximo de carga crítica para cada relação H/L foi definido, como pode ser visto na Fig. 6.28.

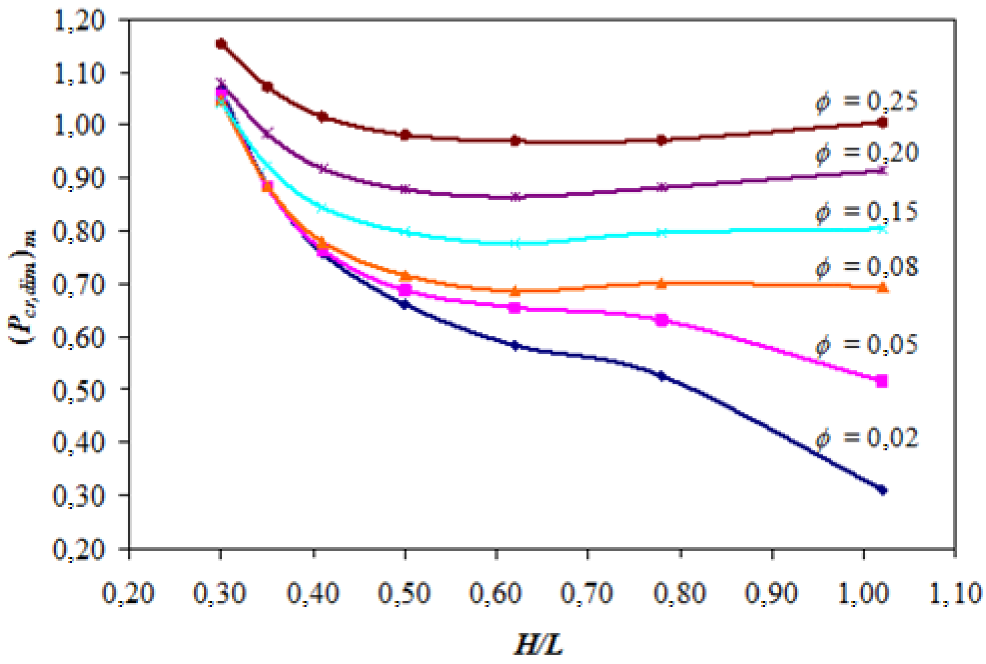

Figura 6.28 – $(P_{cr,dim})_m$ em função de H/L para todos os valores de ϕ.

A Figura 6.28 mostra que, em geral, a carga crítica de flambagem aumenta com um aumento na fração volumétrica dos furos (ϕ), para uma mesma relação H/L. Também é mostrada uma tendência de diminuição da carga crítica com o aumento de H/L, para um mesmo ϕ.

As geometrias de placa que conduzem para a máxima carga crítica de flambagem (Fig. 6.28) são apresentadas na Fig. 6.29.

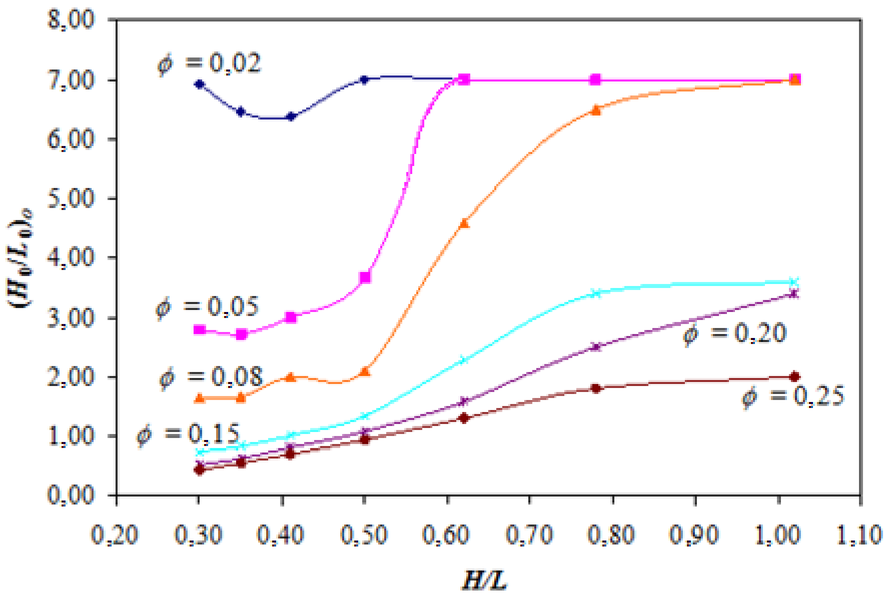

Figura 6.29 – (H_0/L_0) em função de H/L para todos os valores de ϕ.

A Figura 6.29 mostra que os valores ótimos de H_0/L_0 são menores para as frações volumétricas maiores, enquanto que para frações volumétricas pequenas, os valores ótimos de H_0/L_0 são maiores. Também há um aumento dos valores ótimos de H_0/L_0 com o aumento de H/L.

Finalmente, avaliou-se o efeito de ϕ sobre $(P_{cr})_{mm}$ (duas vezes maximizada) e sobre a razão (H_0/L_0)oo (duas vezes otimizada), gerando a Fig. 6.30 e a Fig. 6.31, respectivamente.

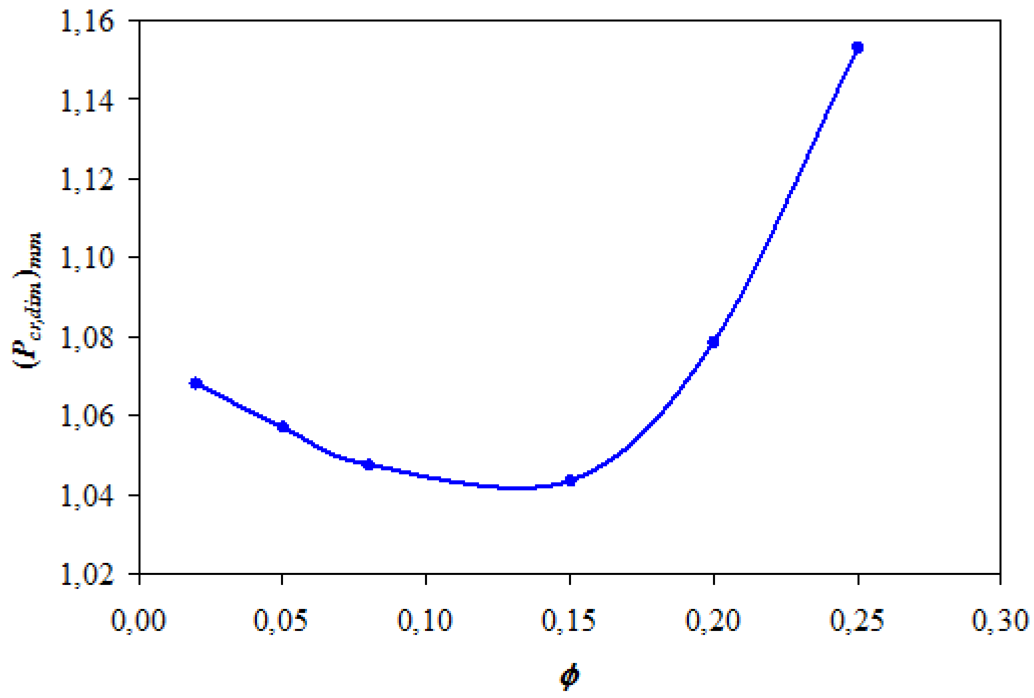

Figura 6.30 – $(P_{cr,dim})_{mm}$ em função de ϕ.

A Figura 6.30 mostra dois resultados distintos. Para valores de ϕ menores do que 0,15, existe uma redução da máxima carga crítica de flambagem com o aumento de ϕ. Para valores de ϕ superiores a 0,15, o oposto ocorre: um aumento da máxima carga crítica de flambagem com o aumento de ϕ.

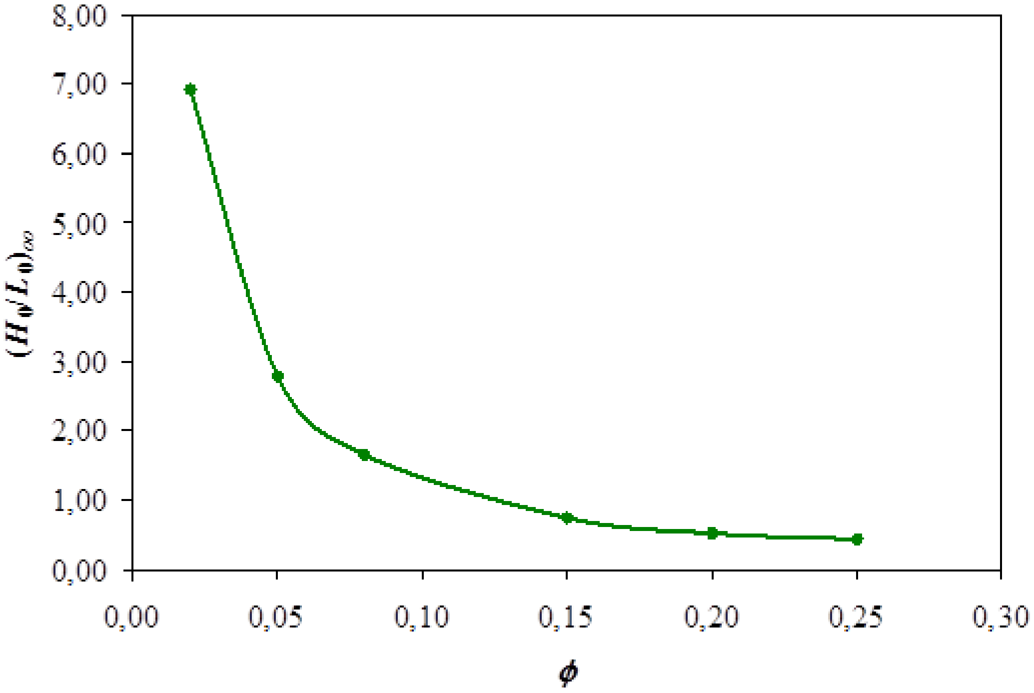

Figura 6.31 – $(H_0/L_0)_{oo}$ em função de ϕ.

A Figura 6.31 mostra que o valor de $(H_0/L_0)_{oo}$ decresce com o aumento de ϕ.

Apesar dos diferentes tipos de investigação, o objetivo principal em todas as análises foi determinar a geometria ótima do furo (H_0/L_0) que é caracterizada pela maximização carga crítica de flambagem.

No caso da terceira investigação, buscou-se ainda uma geometria duas vezes otimizada $(H_0/L_0)_{oo}$, que conduz a carga crítica de flambagem duas vezes maximizada $(P_{cr})_{mm}$.

Com base na Teoria Constructal, as variáveis do problema foram consideradas adimensionais em todas as investigações.

7. CONCLUSÕES

A importância de placas finas perfuradas como membros estruturais é evidente em muitas aplicações de engenharia. Portanto, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de obter a melhor geometria que forneça a máxima carga crítica de flambagem em placas perfuradas, através da investigação de vários fatores interligados como dimensões das placas, dimensões dos furos e geometria dos furos, coletando dados de simulações numéricas e agrupando-os para realizar a sua posterior interpretação.

Percebe-se que as geometrias otimizadas foram definidas de acordo com o Princípio Constructal de minimização da distribuição de imperfeições, mostrando que a Teoria Constructal pode ser usada para obter as formas ótimas em problemas de mecânica dos sólidos com a mesma eficiência que é usada em problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor.

É interessante notar que as placas finas perfuradas apresentam uma maior carga crítica de flambagem em comparação com uma placa fina sem furo. Isso pode ser justificado pelo fato de que a presença desses furos provoca uma redistribuição das tensões de membrana na placa, alterando de maneira significativa a estabilidade do componente.

Na investigação de placas de mesma dimensão, mesma área e geometrias de furos diferentes, quando $\phi \leq 0{,}20$, a geometria ótima foi o losango, atingindo uma carga máxima de flambagem em torno de 80,0% maior que a placa sem furo, 21,5% maior que a placa com furo elíptico e 17,4%, maior que a placa com furo retangular. Para valores superiores de ϕ, as geometrias elíptica e retangular possuem a melhor performance, respectivamente. Além disso, foram observadas geometrias ótimas na faixa intermediária de H_0/L_0, especialmente para maiores valores de ϕ.

Na investigação de placas de dimensões diferentes, relações H/L diferentes e geometrias de furos iguais, observou-se que para todos os valores de ϕ analisados, a placa que apresenta melhor desempenho quando solicitada mecanicamente é a que possui a maior relação H/L, entre as geometrias avaliadas.

No que diz respeito à análise individual de cada placa, a que obteve o maior acréscimo percentual no valor de carga crítica de flambagem em relação à uma placa sem furo foi a placa 1B (H/L = 1,00), chegando a 199,07%. A placa que apresentou o menor acréscimo percentual foi a placa 4B (H/L = 0,33), com 14,74%.

Ao realizar uma comparação global entre as placas do segundo grupo de análise, a que obteve o melhor desempenho foi a placa 1B, apresentando uma carga crítica máxima de flambagem 197,42% maior que a carga crítica máxima na placa 2B (pior desempenho).

Na investigação de placas de dimensões diferentes, áreas iguais e geometrias de furos iguais, observou-se que para todos os valores de ϕ analisados, a placa com os melhores resultados, quando comprimida axialmente, é a placa que tem a menor relação H/L.

Para a mesma geometria de placa, H_0/L_0 aumenta com a diminuição de ϕ. Para o mesmo ϕ, H_0/L_0 aumenta com o aumento de H/L.

Para valores de ϕ inferiores a 0,15, existe uma redução da máxima carga crítica de flambagem com o crescimento de ϕ. Para valores de ϕ superiores a 0,15, ocorre o inverso: um aumento da máxima carga crítica de flambagem com o aumento de ϕ.

Os valores máximo de H_0/L_0 decrescem com o aumento da fração volumétrica do furo (ϕ).

Através dos resultados expostos percebe-se que não há uma geometria ótima universal para o furo, pois a mesma depende de uma série de fatores como o ϕ e também a relação H/L. Além disso, o uso do Constructal Design permitiu observar que furos retangulares e losangulares permitem um desempenho estrutural superior ao obtido com furos elípticos em muitos casos, o que não era intuitivamente esperado.

Em trabalhos futuros pode ser feito o estudo da influência da forma geométrica e dimensões dos furos, assim como dimensões das placas sobre a concentração de tensão em placas submetidas a esforços de tração uniaxial.

REFERÊNCIAS

ÅKESSON, B. Plate buckling in bridges and other structure. Taylor & Francis. 2007.

AKIN, J. M. Finite element analysis with errors estimators. Elsevier. 2005.

ANS2. **ES4-302.gif.** 2013. Largura: 470 pixels. Altura: 272 pixels. Formato JPEG. Disponível em: < http://ans2.vm.stuba.sk/html/elem_55/graphics/ES4-302.gif>. Acesso em: 18 jul. 2013.

ANSYS User's Manual (version 10.0). Swanson Analysis System Inc, Houston. 2005.

AZAD, A. V. e AMIDPOUR, M. Economic optimization of shell and tube heat exchanger based on constructal theory. **Energy**. v. 36, p. 1087-1096, 2011.

BEJAN, A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. **Int. J. Heat Mass Transfer**. v. 40, n. 4, p. 799–816, 1997.

BEJAN, A. Shape and structure, from engineering to nature, Cambridge University Press, Cambridge. 2000.

BEJAN, A. e LORENTE, S. Design with Constructal Theory. Wiley, Hoboken. 2008.

BEJAN, A. e ZANE, J. P. Design in nature. Doubleday. 2012.

BEYENE, A. e PEFFLEY, J. Constructal Theory, adaptive motion, and their theoretical application to low-speed turbine design. **J. Energ. Eng-ASCE**. v. 135, n. 4, p. 112-118, 2009.

BLAAUWENDRAAD, J. Plates and FEM: Surprises and Pitfalls. Springer. 2010. 414 p.

BURNETT, D. S. Finite Element Analysis: From Concepts to Applications. Addison Wesley Publishing Company. 1987.

CELTICAWITCH. **fractal_lung.gif.** 2013. Largura: 497 pixels. Altura: 396 pixels. Formato GIF. Disponível em: <http://celticawitch.files.wordpress.com/2012/09/fractal_lung.gif?w=545>. Acesso em: 18 jul. 2013.

CHENG, e ZHAO, J. Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 48, p. 905-914. 2010.

CIMNE. **elementos.jpg.** 2013. Largura: 180 pixels. Altura: 396 pixels. Formato JPEG. Disponível em: <http://www.cimne.com/caltep/caract/elementos.jpg>. Acesso em: 18 jul. 2013.

EL-SAWY, K. M. e NAZMY,A. S. Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. **Thin-Walled Structures**, v. 39, p. 983–998. 2001.

EL-SAWY, K. M., NAZMY, A. S. e MARTINI, M. I. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. **Thin-Walled Structures**, v. 42, p. 1083–1101. 2004.

EL-SAWY, K. M. e MARTINI, M. I. Elastic stability of bi-axially loaded rectangular plates with a single circular hole. **Thin-Walled Structures**, v. 45, p. 122–33. 2007.

GEOLOG. **Lena-River-Delta-1024x1024.jpg.** 2013. Largura: 570 pixels. Altura: 570 pixels. Formato JPEG. Disponível em: <http://geolog.egu.eu/wp-content/uploads/2013/03/Lena-River-Delta-1024x1024.jpg>. Acesso em: 18 jul. 2013.

KIM, Y., LORENTE, S., e BEJAN, A. Steam generator structure: continuous model and constructal design. **Int. J. Energy Res**. v. 35, p. 336-345, 2011.

LORENTE, S. e BEJAN, A. Few Large and Many Small: Hierarchy in Movement on Earth. **International Journal of Design & Nature and Ecodynamics**. v. 5, n. 3, p. 1-14, 2010.

LORENTE, S., LEE, J. e BEJAN, A. The “flow of stresses” concept: the analogy between mechanical strength and heat convection. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 53, p. 2963-2968. 2010.

MADENCI, E. e GUVEN, I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®. Ed. Springer. 2006.

MEGSON, T. H. G. Structural and Stress Analysis. Ed. Elsevier Butterworth-Heinemann. 2005.

MOEN, D. e SCHAFER, B. W. Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending. **Thin-Walled Structures**, v. 47, p. 1597-1607. 2009.

OKUMOTO, Y., TAKEDA, Y., MANO, M. e OKADA, T. Design of Ship Hull Structures - A Practical Guide for Engineers. Springer. 2009.

PAIK, J.K. Ultimate strength of perforated steel plates under edge shear loading. **Thin-Walled Structures**, v. 45, p. 301–306. 2007a.

PAIK, J.K. Ultimate strength of perforated steel plates under axial compressive loading along short edges. **Ships and Offshore Structures**, v. 2. 2007b.

PAIK, J.K. Ultimate strength of perforated steel plates under combined biaxial compression and edge shear loads. **Thin-Walled Structures**, v. 46, p. 207-213. 2008.

PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. Ed. Dover Publications. 1985.

REAL, M. V. e ISOLDI, L. A. Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes. In: SOUTHERN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL MODELING, 4, 2010, Rio Grande. Anais do IV MCSUL. Rio Grande: Editora da FURG, 2010. p. 69-73.

REAL, M. V. e ISOLDI, L. A. Effect of circular holes dimension and location on the elastic buckling load of rectangular plates. In: COBEM – BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 21, 2011, Natal. Proceeding of COBEM 2011. Natal: UFRN, 2011. v. 1. p. 1-10.

REAL, M. V., ISOLDI, L. A., CORREIA, A. L. G., VAZ, J., dos SANTOS, E. D. e ROCHA, L. A. O., 2011. Geometric optimization based on the constructal design of perforated thin plates subject to buckling. In: CONSTRUCTAL LAW CONFERENCE, 1, 2011, Porto Alegre. Anais da CLC. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011, p. 1-9.

REIS, A. H. e GAMA, C. Sand size versus beachface slope – an explanation based on the Constructal Law. **Geomorphology**. v. 114, p. 276-283, 2010.

ROCHA, L. A. O., LORENTE, S. e BEJAN, A. editors, Constructal Law and the unifying principle of design. Springer-Verlag. 2013.

SHIMIZU, S. Tension Buckling of Plate Having a Hole. **Thin-Walled Structures**. v. 45, p. 827–833, 2007.

VANALLI, L. O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e composto. São Carlos, 2004.Tese, SET, Universidade São Paulo.

WANG, C. M., WANG, C. Y. e REDDY, J. N. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press. 2005.

WIKIPEDIA, a enciclopédia livre. **Constructal_law**. [S.l.]: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Constructal_law>. Acesso em: 18 jul. 2013.

YAMAGUCHI, E. “Basic Theory of Plates and Elastic Stability” Structural Engineering Handbook. CRC Press LLC. 1999.